COURS
D'ANALYSE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COURS

D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.

TOME PREMIER.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1909

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

VARIABLES RÉELLES.

I. — *Limites.*

II. — *Ensembles.*

III. — *Fonctions bornées. — Fonctions intégrables.*

IX. — *Fonctions élémentaires.*

X. — *Dérivées et différentielles d'ordre supérieur.*

XI. — *Changements de variables.*

XII. — *Changements de variables dans les intégrales définies.*

XIII. — *Formation des equations différentielles.*

CHAPITRE II.

VARIABLES COMPLEXES.

I. — *Fonctions synectiques.*

II. — *Intégrales des fonctions synectiques.*

III. — *Fonctions rationnelles.*

IV. — *Fonctions algébriques.*

V. — *Transcendantes élémentaires.*

CHAPITRE III.

SÉRIES.

I. — *Formule de Taylor.*

II. — *Procédés pour effectuer les développements en série.*

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

I. — *Points ordinaires et points singuliers.*

II. — *Théorie du contact.*

III. — *Enveloppes.*

IV. — *Courbes planes.*

V. — *Géométrie infinitésimale.*

VI. — *Courbes gauches et surfaces développables.*

VII. — *Systèmes de droites.*

VIII — *Surfaces.*

IX. — *Coordonnées curvilignes.*

CHAPITRE V.

COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

I. — *Coordonnées homogènes.*

II. — *Cycles.*

III. — *Transformations birationnelles du plan.*

IV. — *Transformations birationnelles d'une courbe.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

COURS

D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

CHAPITRE I.

VARIABLES RÉELLES.

I. — Limites.

1. L'objet primitif de l'Arithmétique est l'étude des nombres entiers.

Pour pouvoir exécuter, dans tous les cas, la résolution des équations du premier degré, on a dû étendre cette première conception, par l'introduction des nombres négatifs et des nombres fractionnaires. On obtient ainsi l'ensemble des nombres rationnels.

La résolution des équations de degré > 1 exige de nouvelles généralisations. Les principes sur lesquels elles reposent sont intimement liés à ceux du Calcul infinitésimal, et nous devons les exposer brièvement.

2. Nombres irrationnels. — Soient A et B deux systèmes de nombres rationnels jouissant des propriétés suivantes :

1° *Tout nombre de* B *est plus grand que tout nombre de* A;

2° *On peut toujours déterminer dans* A *et* B *respectivement deux nombres* a *et* b, *tels que l'on ait*

$$b - a < \varepsilon,$$

quel que soit le nombre positif ε, donné *a priori*.

Ces hypothèses admises, les nombres (rationnels) pourront se répartir en trois classes :

La première $\mathcal{A}$ contiendra tous les nombres inférieurs à quelqu'un des nombres de A; la seconde $\mathcal{B}$, tous les nombres supérieurs à quelque nombre de B; la troisième $\mathcal{C}$, ceux qui ne sont ni inférieurs à un nombre A, ni supérieurs à un nombre B.

Il est impossible que cette classe $\mathcal{C}$ contienne deux nombres différents c et $c' < c$. On aurait, en effet, quel que fût le choix de a et de b,

$$a \leqq c', \quad b \geqq c, \qquad \text{d'où} \qquad b - a \geqq c - c',$$

résultat contraire à notre seconde hypothèse.

Elle peut contenir un nombre unique c (ce cas se présentera, par exemple, si l'on prend pour A l'ensemble des nombres $> c$, et pour B l'ensemble des nombres $< c$).

Mais il peut arriver aussi qu'elle n'en contienne aucun (on sait qu'il en sera ainsi si l'on prend pour A la suite des réduites de rang impair, pour B celle des réduites de rang pair d'une fraction continue illimitée).

Nous ferons disparaître cette distinction, en disant que, dans le second cas, il existe encore un nombre c plus grand que tous les $\mathcal{A}$ et plus petit que tous les $\mathcal{B}$, mais que ce nombre est *irrationnel*.

L'ensemble des nombres ainsi obtenus, tant rationnels qu'irrationnels, constitue le système des nombres *réels*.

Chacun de ces nombres est défini, comme on le voit, par la connaissance des nombres rationnels qui sont plus petits que lui, et de ceux qui sont, au contraire, plus grands que lui.

3. Si un nombre rationnel r est plus petit (plus grand) qu'un nombre réel c, il est clair, d'après nos définitions, que tout nombre rationnel r' plus petit (plus grand) que r sera *a fortiori* plus petit (plus grand) que c.

Mais on peut démontrer qu'*il existe, en outre, une infinité de nombres rationnels compris dans l'intervalle de r à c*.

En effet, si c est rationnel, tous les nombres $r + m(c - r)$, où m est une fraction quelconque comprise entre 0 et 1, satisfont à cette condition.

Si c est irrationnel, supposons, pour fixer les idées, $c > r$. Soient A, B les deux systèmes de nombres rationnels qui déterminent c. Tout nombre rationnel appartient, par hypothèse, à l'une des deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, définies comme ci-dessus.

Le nombre $r < c$ appartient à la classe $\mathcal{A}$. Il est donc moindre qu'un nombre a du système A. Ce nombre a étant plus petit que tous les B n'appartient pas à la classe $\mathcal{B}$: c'est donc un nombre $\mathcal{A}$. Donc il est moindre qu'un autre nombre a_1 du système A. Continuant ainsi, on obtiendra une suite infinie de nombres rationnels croissants $r, a, a_1, \ldots,$ et tous $< c$.

On dira qu'un nombre réel c est *plus grand* qu'un autre nombre réel c', s'il existe un nombre rationnel r qui soit $< c$ et $> c'$. Dans ce cas, tous les nombres rationnels, en nombre infini, compris entre c et r, ou entre r et c', jouiront de la même propriété.

Il est clair que, si $c > c'$ et $c' > c''$, on aura $c > c''$.

Enfin, *entre deux nombres rationnels quelconques r et $r + \varepsilon$, il existe nécessairement un nombre irrationnel* (et, par suite, une infinité).

Soit, en effet, c un nombre irrationnel défini par les deux systèmes de nombres rationnels A et B. On peut déterminer dans ces systèmes deux nombres a et b, dont la différence soit $< \varepsilon$, et comprenant entre eux le nombre c.

Soient A_1, B_1 les deux systèmes obtenus en ajoutant la constante $r - a$ à tous les nombres de A et de B. Il est évident que ces nouveaux systèmes ont les qualités requises pour définir un nouveau nombre irrationnel, compris entre r et $r + \varepsilon$.

Un nombre réel c sera dit *positif*, s'il est > 0 (auquel cas il sera encore supérieur à une infinité de nombres rationnels positifs); *négatif*, s'il est < 0.

Les inégalités

$$b - a > 0, \qquad b - a < \varepsilon$$

pouvant s'écrire ainsi

$$(-a) - (-b) > 0, \quad (-a) - (-b) < \varepsilon,$$

on voit qu'à tout nombre réel c, défini par le système des nombres a et celui des nombres b, correspond un autre nombre de signe opposé, défini par le système des nombres $-b$ et celui des nombres $-a$. Nous désignerons ce nombre par $-c$. On aura, d'après cette définition,

$$-(-c) = c.$$

4. Il nous reste à généraliser la définition des opérations de l'Arithmétique, pour les rendre applicables à tout nombre réel.

Soient c, c' deux semblables nombres, définis respectivement par les systèmes A, B; A', B'. Soient a, b; a', b' des nombres pris respectivement dans ces systèmes; on aura

$$b + b' > a + a'.$$

Mais, d'autre part, on pourra choisir a, b, a', b' de telle sorte qu'on ait

$$b - a < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad b' - a' < \frac{\varepsilon}{2};$$

d'où

$$b + b' - (a + a') < \varepsilon.$$

Le système des nombres $a+a'$ et celui des nombres $b+b'$ définiront donc un nombre réel, que nous appellerons $c+c'$.

De même, le système des nombres $b-a'$ et celui des nombres $a-b'$ définiront un nombre, que nous appellerons $c-c'$.

On a évidemment, d'après cette définition,

$$c+c'=c'+c, \qquad c-c'=c+(-c').$$

La soustraction est d'ailleurs l'opération inverse de l'addition, de telle sorte que le nombre $(c-c')+c'=c_1$ n'est autre que c. Pour le montrer, nous prouverons que tout nombre rationnel $>c$ est $>c_1$, et réciproquement.

Les nombres $>c$ sont ceux qui sont plus grands que l'un des nombres b, les nombres $>c_1$ ceux qui sont plus grands que l'un des nombres $b-a'+b'$.

Or, tout nombre $x>b-a'+b'$ est *a fortiori* $>b$, car $b'>a'$.

D'autre part, si $x>c$, on pourra déterminer entre x et c une infinité de nombres rationnels encore $>c$. Soit $x-\varepsilon=b$ l'un d'eux; on aura

$$x>b-a'+b',$$

si l'on choisit a' et b' de telle sorte que $b'-a'$ soit $<\varepsilon$.

5. Pour définir la multiplication et la division, nous supposerons d'abord c et c' positifs.

Soient α, α' des nombres fixes choisis d'avance arbitrairement parmi les nombres positifs contenus dans les systèmes A, A'; β, β' des nombres fixes (nécessairement positifs) choisis d'avance dans les systèmes B, B'; a, b, a', b' des nombres positifs à choisir dans ces mêmes systèmes; on aura toujours

$$bb'>aa', \qquad \frac{b}{a'}>\frac{a}{b'}.$$

Mais on peut choisir ces nombres de telle sorte que l'on ait

$$b - a < \delta, \qquad b' - a' < \delta,$$

δ étant une quantité à déterminer ultérieurement.

Il est d'ailleurs permis de supposer, en outre, que a et b sont contenus dans l'intervalle de α à β, a' et b' dans l'intervalle de α' à β'. En effet, a, par exemple, est sûrement $< \beta$. S'il est $< \alpha$, on aura $b - \alpha < b - a < \delta$. On pourrait donc substituer α à a, tout en maintenant l'inégalité demandée.

Cela posé, on aura

$$\begin{aligned} bb' - aa' &< (a+\delta)(a'+\delta) - aa' \\ &< (a+a')\delta + \delta^2 < (\beta+\beta')\delta + \delta^2, \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a'} - \frac{a}{b'} = \frac{bb' - aa'}{a'b'} < \frac{(\beta+\beta')\delta + \delta^2}{\alpha'^2}.$$

Si donc on détermine δ de manière à satisfaire à la fois aux inégalités

$$\delta < 1, \qquad \delta < \frac{\varepsilon}{\beta + \beta' + 1}, \qquad \delta < \frac{\alpha'^2 \varepsilon}{\beta + \beta' + 1},$$

on aura

$$bb' - aa' < (\beta + \beta' + 1)\delta < \varepsilon,$$

$$\frac{b}{a'} - \frac{a}{b'} < \frac{(\beta + \beta' + 1)\delta}{\alpha'^2} < \varepsilon.$$

Le système des nombres aa', joint à celui des nombres bb', et le système des nombres $\frac{a}{b'}$, joint à celui des nombres $\frac{b}{a'}$, définissent donc deux nombres réels, que nous désignerons respectivement par cc' et $\frac{c}{c'}$.

La division ainsi définie est l'inverse de la multiplication. Pour l'établir, il faut prouver l'identité des deux nombres $\frac{c}{c'}c' = c_1$ et c, en montrant que les nombres rationnels supérieurs à l'un le sont à l'autre, et réciproquement.

Soit x un nombre $> c_1$. Il sera, par définition, plus grand

qu'un des nombres $\frac{b}{a'}b'$, et, *a fortiori*, plus grand que le nombre b; il sera donc $> c$.

Réciproquement, si $x > c$, il existera un autre nombre rationnel $x - \varepsilon$ encore plus grand que c, c'est-à-dire plus grand qu'un nombre b. Or on peut déterminer, quel que soit δ, a' et b' de telle sorte que l'on ait $b' < a' + \delta$, d'où

$$\frac{b}{a'}b' < b + \frac{b\delta}{a'} < b + \frac{\beta\delta}{\alpha'}.$$

Si l'on choisit δ moindre que $\frac{\alpha'\varepsilon}{\beta}$, on aura $x > \frac{b}{a'}b'$. Donc $x > c_1$.

Pour étendre la définition de la multiplication et de la division au cas où l'un des deux facteurs, ou tous les deux, sont négatifs, on appliquera la règle des signes. Enfin on admet qu'un produit est nul, si l'un des facteurs est nul.

On voit, sans aucune difficulté, que les opérations ainsi généralisées, appliquées à des nombres rationnels, donnent les mêmes résultats que les opérations ordinaires, et que les règles du calcul algébrique subsistent sans aucun changement.

6. On nomme *valeur absolue* ou *module* d'un nombre réel c ce nombre lui-même, s'il est positif, le nombre $-c$, si c est négatif. Ce module se désigne souvent par la notation $|c|$.

On a évidemment

$$|a||b| = |ab|,$$

$$|a| - |b| - |c| \overset{=}{<} |a \pm b \pm c| \overset{=}{<} |a| + |b| + |c|.$$

7. Soient A, B deux systèmes de nombres réels tels : 1° que tout nombre B soit plus grand que tout nombre A; 2° qu'on puisse toujours déterminer dans A et B deux nombres a et b tels que $b - a$ soit $> \varepsilon$. Il existera un nombre réel unique c tel que l'on ait constamment

$$b \overset{=}{>} c \overset{=}{>} a.$$

Soient, en effet, A′ le système des nombres rationnels

inférieurs à l'un au moins des nombres A; B' le système des nombres rationnels supérieurs à l'un au moins des nombres B. Les nombres B' seront plus grands que les nombres A'.

D'autre part, déterminons dans A et B deux nombres a et b tels que $b - a < \frac{\varepsilon}{3}$. On peut déterminer deux nombres rationnels comprenant a et dont la différence soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. Le plus petit a' de ces deux nombres appartient à A', et l'on a

$$a - a' < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut de même déterminer dans B' un nombre b' tel que $b' - b$ soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. On aura, par suite,

$$b' - a' < \varepsilon.$$

Les systèmes A', B' étant formés de nombres rationnels déterminent un nombre réel c plus grand que tous les a' et moindre que les b'. Ce nombre satisfait aux conditions requises. En effet, s'il était moindre qu'un nombre a de A, il existerait entre a et c des nombres rationnels a' plus grands que c, contrairement à la définition de c. S'il était plus grand qu'un nombre b de B, on arriverait à une contradiction analogue.

On voit d'ailleurs, comme au n° 2, que le nombre c est unique de son espèce.

8. Limites. — Soit x une quantité variable, à laquelle on donne successivement une suite illimitée de valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$. On dit que la suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, ou, d'une manière plus abrégée, la variable x *tend* ou *converge* vers la *limite* c si, pour toute valeur de la quantité positive ε, on peut assigner un entier ν, tel que l'on ait

$$|x_n - c| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de n supérieures à ν.

La variable x ne peut tendre à la fois vers deux limites différentes c et c'; car on a

$$c' - c = (x_n - c) - (x_n - c'),$$

d'où

$$|c' - c| \leqq |x_n - c| + |x_n - c'|.$$

Donc, quel que soit n, l'un au moins des deux modules

$$|x_n - c|, \quad |x_n - c'|$$

sera au moins égal à $\frac{1}{2}|c' - c|$.

Il importe de transformer la définition précédente, de manière à pouvoir prouver l'existence d'une limite, lors même qu'on ne serait pas en mesure de la déterminer.

9. Théorème. — *Pour que la suite* $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ *tende vers une limite, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une suite* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ *de nombres positifs non croissants, ayant pour limite zéro, et tels que l'on ait, pour toutes les valeurs des entiers positifs* n *et* p,

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n.$$

1° Supposons, en effet, que la suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tende vers une limite c. Soient $\delta_1, \ldots, \delta_m, \ldots$ une suite de nombres positifs décroissants ayant zéro pour limite. On pourra, par hypothèse, déterminer pour chaque valeur de m un entier ν_m tel que l'on ait constamment, dès que n est $> \nu_m$,

$$|x_n - c| < \tfrac{1}{2}\delta_m$$

et, par suite,

$$|x_n - x_{n+p}| \leqq |x_n - c| + |x_{n+p} - c| \leqq \delta_m.$$

Si $n \leqq \nu_1$, mais $n + p > \nu_1$, on aura d'autre part

$$|x_n - x_{n+p}| \leqq |x_n - c| + |x_{n+p} - c| \leqq e + \tfrac{1}{2}\delta_1,$$

e désignant la plus grande des quantités $|x_1 - c|, \ldots,$ $|x_{\nu_1} - c|$.

Enfin, si n et $n+p$ ne sont ni l'un ni l'autre $> \nu_1$, on aura

$$|x_n - x_{n+p}| \leqq |x_n - c| + |x_{n+p} - c| \leqq 2e.$$

Définissons maintenant une suite de quantités positives $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ par les relations

$$\varepsilon_n = 2e + \delta_1, \qquad \text{si } n \leqq \nu_1,$$
$$\varepsilon_n = \delta_m, \qquad \text{si } \nu_m < n \leqq \nu_{m+1}.$$

On aura constamment

$$|x_n - x_{n+p}| \leqq \varepsilon_n.$$

D'ailleurs les quantités ε_n forment une suite non croissante, et ε_n tend vers zéro quand n tend vers ∞. Car on peut prendre m de telle sorte que δ_m soit moindre qu'une quantité quelconque ε, et il suffira de prendre ensuite $n > \nu_m$ pour être sûr d'avoir

$$\varepsilon_n \leqq \delta_m < \varepsilon.$$

2° Réciproquement, supposons qu'on ait pu déterminer une suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de nombres positifs ayant pour limite zéro, et tels que l'on ait, au moins pour les valeurs de n qui surpassent un nombre fixe m,

$$(1) \qquad |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n,$$

et proposons-nous de démontrer que la suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tend vers une limite.

Désignons par a_ν la plus grande des quantités

$$x_{m+1} - \varepsilon_{m+1}, \quad \ldots, \quad x_\nu - \varepsilon_\nu,$$

par b_ν la plus petite des quantités

$$x_{m+1} + \varepsilon_{m+1}, \quad \ldots, \quad x_\nu + \varepsilon_\nu;$$

on aura évidemment

$$a_\nu \geqq a_\mu, \qquad b_\nu \leqq b_\mu, \qquad \text{si } \nu > \mu.$$

D'autre part, l'inégalité (1) peut s'écrire

$$-\varepsilon_n < x_n - x_{n+p} < \varepsilon_n,$$

d'où

$$x_n - \varepsilon_n < x_{n+p} < x_n + \varepsilon_n.$$

Supposons $n \leqq \nu$ et changeons dans cette équation p en $p + \nu - n$; elle devient

$$x_n - \varepsilon_n < x_{\nu+p} < x_n + \varepsilon_n,$$

et, comme elle a lieu pour les valeurs $n = m + 1, \ldots, \nu$, on en déduit

$$a_\nu < x_{\nu+p} < b_\nu.$$

Plus généralement, μ et ν étant deux entiers positifs quelconques $> m$, et λ le plus grand des deux, on aura, par la combinaison des inégalités ci-dessus,

$$a_\mu \leqq a_\lambda < b_\lambda < b_\nu.$$

Donc, tout nombre b est plus grand que tout nombre a.

Mais on a, d'autre part,

$$b_\nu - a_\nu \leqq (x_\nu + \varepsilon_\nu) - (x_\nu - \varepsilon_\nu) < 2\varepsilon_\nu,$$

quantité qui peut être rendue $< \varepsilon$ en prenant ν assez grand.

Donc les deux systèmes de nombres a et b déterminent un nombre c. Ce nombre et le nombre $x_{\nu+p}$ étant tous deux compris entre a_ν et b_ν, on aura

$$|x_{\nu+p} - c| < \varepsilon,$$

ce qui est précisément la condition pour que les quantités x convergent vers c.

10. Corollaire. — *Si les quantités x_n sont telles que l'on ait toujours*

$$x_{n+1} \geqq x_n,$$

elles tendront vers une limite c ou croîtront de manière à surpasser finalement toute grandeur donnée E.

En effet, supposons en premier lieu que, pour toute valeur

de la quantité positive δ, on puisse déterminer un entier ν tel que l'on ait constamment

$$x_{\nu+p} - x_\nu < \delta,$$

quel que soit p.

Donnons à δ une suite de valeurs $\delta_1, \delta_2, \ldots$ convergeant vers zéro ; soient $\nu_1, \nu_2, \ldots$ les valeurs correspondantes de ν. Soit, d'autre part, n un nombre $\geqq \nu_k$ mais $< \nu_{k+1}$. On aura

$$|x_n - x_{n+p}| = x_{n+p} - x_n \leqq x_{n+p} - x_{\nu_k},$$

et, si l'on pose $n + p = \nu_k + q$,

$$|x_n - x_{n+p}| < x_{\nu_k+q} - x_{\nu_k} < \delta_k.$$

Si donc on définit les quantités $\varepsilon_{\nu_1}, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ par la condition

$$\varepsilon_n = \delta_k \quad \text{quand} \quad \nu_k \leqq n < \nu_{k+1},$$

on aura

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon_n.$$

Les quantités ε_n, ainsi définies, convergeant vers zéro, les quantités x_n tendront vers une limite.

Supposons, au contraire, qu'il existe une quantité δ pour laquelle il soit impossible de déterminer une quantité ν correspondante. On pourra, quel que soit n, déterminer un nombre $n + p = n_1$ tel que $x_{n_1} - x_n$ soit au moins égal à δ. Nous pourrons donc déterminer une suite illimitée de nombres $1, n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ tels que l'on ait

$$x_{n_1} - x_1 \geqq \delta, \qquad x_{n_2} - x_{n_1} \geqq \delta, \qquad \ldots,$$

d'où

$$x_{n_k} \geqq x_1 + k\delta.$$

Ce nombre deviendra plus grand que le nombre donné E dès que k sera supérieur à $\dfrac{E - x_1}{\delta}$.

11. *Si la variable x tend vers la limite c, $-x$ tend vers la limite $-c$.*

Cette proposition est évidente; car on a

$$|x-c|=|-x+c|.$$

Si donc on a pour $n>\nu$

$$|x_n-c|<\varepsilon,$$

on aura en même temps

$$|-x_n+c|<\varepsilon.$$

12. *Si la variable x tend vers une limite c différente de zéro, $\frac{1}{x}$ tendra vers la limite $\frac{1}{c}$.*

Posons, en effet, $x_n-c=\xi_n$; on aura

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{c}\right|=\left|-\frac{\xi_n}{c(c+\xi_n)}\right|=\frac{|\xi_n|}{|c||c+\xi_n|}\overline{\overline{<}}\frac{|\xi_n|}{|c|(|c|-|\xi_n|)},$$

quantité qui deviendra $<\varepsilon$, dès que n sera devenu assez grand pour qu'on ait

$$|\xi_n|<\frac{|c|^2\varepsilon}{1+|c|\varepsilon}.$$

Si x tend vers la limite zéro, on pourra, quelle que soit la quantité positive E, déterminer un nombre ν tel que l'on ait, pour toute valeur de n plus grande que ν,

$$|x_n|<\frac{1}{E}, \quad \text{d'où} \quad \left|\frac{1}{x_n}\right|>E.$$

Donc $\frac{1}{x}$ ne tend vers aucune limite. Nous conviendrons toutefois de dire qu'il *tend vers* ∞.

Si, en tendant vers ∞, x reste à partir d'un certain moment constamment positif, on dira qu'il tend vers $+\infty$. S'il reste constamment négatif, il tendra vers $-\infty$.

13. *Soient x, y deux quantités variables simultanément, et prenant respectivement les suites de valeurs x_1, y_1; ...; x_n, y_n; .... Si x, y tendent respectivement vers*

des limites finies c, d, $x+y$ et xy *tendront vers les limites* $c+d$, cd.

Posons, en effet,

$$x_n - c = \xi_n, \qquad y_n - d = \eta_n.$$

On pourra, par définition, quelle que soit la quantité positive δ, déterminer deux quantités ν_1 et ν_2, telles que l'on ait

$$|\xi_n| < \delta, \qquad \text{si } n > \nu_1,$$
$$|\eta_n| < \delta, \qquad \text{si } n > \nu_2,$$

et, par suite,

$$|\xi_n| < \delta, \qquad |\eta_n| < \delta, \qquad \text{si } n > \nu,$$

ν désignant la plus grande des quantités ν_1 et ν_2.

Cela posé, on a

$$|x_n + y_n - (c+d)| = |\xi_n + \eta_n| \leqq |\xi_n| + |\eta_n| < 2\delta,$$
$$\begin{aligned} |x_n y_n - cd| &= |c\eta_n + d\xi_n + \xi_n\eta_n| \\ &\leqq |c|\,|\eta_n| + |d|\,|\xi_n| + |\xi_n|\,|\eta_n| \\ &< |c|\delta + |d|\delta + \delta^2. \end{aligned}$$

Les seconds membres de ces inégalités seront $< \varepsilon$ si l'on détermine l'arbitraire δ de telle sorte qu'on ait en même temps

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \delta < 1, \qquad \delta < \frac{\varepsilon}{|c| + |d| + 1}.$$

Notre proposition est donc démontrée.

Si x tend vers ∞, y continuant à tendre vers une limite finie d, on pourra, de même, quelles que soient les arbitraires E' et δ, déterminer un nombre ν tel que l'on ait

$$|x_n| > E', \qquad |y_n - d| < \delta, \qquad \text{si } n > \nu,$$

d'où

$$\begin{aligned} |x_n + y_n| = |x_n + y_n - d + d| &\geqq |x_n| - |y_n - d| - |d| \\ &> E' - \delta - |d| > E, \end{aligned}$$

si l'on choisit E' plus grand que $E + \delta + |d|$. Donc, dans ce cas, $x+y$ tendra vers ∞.

Le produit xy tendra aussi vers ∞, si d n'est pas nul. En effet, choisissant pour δ une quantité $< |d|$, on aura

$$y_n = d + (y_n - d),$$

d'où

$$|y_n| \overline{\gtrless} |d| - \delta,$$

et enfin

$$|x_n y_n| > E'(|d| - \delta) > E,$$

si l'on choisit E′ plus grand que $\frac{E}{|d| - \delta}$.

Si y tendait vers zéro, en même temps que x vers ∞, on ne pourrait rien affirmer *a priori*.

Supposons enfin que x et y tendent tous deux vers ∞. On ne pourra rien affirmer *a priori* sur la somme $x+y$. Mais le produit tendra évidemment vers ∞.

14. De la combinaison des résultats qui précèdent on déduit immédiatement la proposition suivante :

Soit $R(x, y, \ldots)$ *une expression rationnelle quelconque des variables* $x, y, \ldots$. *Si ces variables tendent simultanément vers les limites* $c, d, \ldots$, $R(x, y, \ldots)$ *tendra vers la limite* $R(c, d, \ldots)$.

Ce théorème est toutefois soumis à cette restriction que la suite des opérations indiquées pour calculer R, connaissant $x, y, \ldots$, puisse s'exécuter effectivement pour les valeurs particulières $x = c, y = d, \ldots$.

Si donc parmi ces opérations figurent des divisions, il faut que le diviseur ne soit pas nul.

15. L'Arithmétique et l'Algèbre comportent quatre opérations fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. On peut en concevoir une cinquième, consistant à remplacer une quantité variable par sa limite. C'est l'introduction de cette nouvelle opération qui caractérise le Calcul infinitésimal.

16. Infiniment petits. — On donne le nom d'*infiniment petit* à toute quantité variable qui tend vers zéro; celui d'*infiniment grand* à toute quantité variable qui tend vers ∞. L'inverse d'un infiniment petit sera donc un infiniment grand, et réciproquement.

La suite des valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, qu'on assigne successivement à un infiniment petit x, doit avoir, par définition, zéro pour limite; on peut ne la soumettre à aucune autre restriction. Mais on peut aussi, si l'on veut, l'assujettir à d'autres conditions : stipuler, par exemple, que ces quantités seront positives, ou rationnelles, etc. Sauf ces restrictions, qui devront être spécifiées dans chaque cas, on devra la considérer comme arbitraire.

17. Deux infiniment petits x, y seront *indépendants*, s'il n'existe aucune corrélation obligatoire entre les valeurs $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ et $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ qu'on leur attribue respectivement.

Au contraire, s'ils sont liés de telle sorte que, x_n étant connu, on puisse en déduire y_n, on dira que y est un infiniment petit *dépendant* de x. Cette dépendance sera, en général, réciproque, de telle sorte que, y_n étant connu, x_n pourra s'en déduire.

Deux infiniment petits x, y étant ainsi liés, on dira qu'ils sont du même *ordre*, si, lorsque x tend vers zéro, $\frac{y}{x}$ a pour limite une quantité constante c différente de 0; y sera d'ordre plus élevé que x, si $\frac{y}{x}$ a pour limite zéro; il sera d'ordre moindre, si $\frac{y}{x}$ tend vers ∞.

On peut, dans la plupart des cas, préciser cette notion, en mesurant par un nombre l'ordre de grandeur d'un infiniment petit. On pourra dire, en effet, que y est d'ordre α par rapport à x, si le rapport $\frac{y}{x^\alpha}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, lorsque x tend vers zéro.

D'après cette définition, une quantité y qui tend vers une limite finie sera un infiniment petit d'ordre zéro; un infiniment grand y tel que yx^α tende vers une limite finie et différente de zéro sera un infiniment petit d'ordre $-\alpha$.

Dans toute question où figurent plusieurs infiniment petits $x, y, z, \ldots$ dépendant les uns des autres, on pourra choisir arbitrairement l'un d'eux comme étalon de mesure. Cet *infiniment petit principal*, x, par exemple, étant considéré comme ayant pour ordre de grandeur l'unité, $y, z, \ldots$ auront des ordres de grandeur représentés respectivement par des nombres $\alpha, \beta, \ldots$.

Le même procédé de comparaison serait applicable à des infiniment grands.

18. Soient y un infiniment petit d'ordre α; A la limite vers laquelle tend $\frac{y}{x^\alpha}$ quand x tend vers zéro. On aura

$$\frac{y}{x^\alpha} = A + h, \qquad \text{d'où} \qquad y = Ax^\alpha + hx^\alpha,$$

h tendant vers zéro avec x.

Le premier terme Ax^α se nomme la *valeur principale* de y. Il représente cet infiniment petit avec une erreur relative qui décroît infiniment avec x.

Si l'on veut ne pas se contenter de cette première approximation, on aura à déterminer la valeur principale du reste. Soit Bx^β cette valeur principale; nous aurons une seconde valeur

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta$$

approchée jusqu'à l'ordre β. On chercherait de même, s'il était utile, la valeur principale du reste, et ainsi de suite.

La détermination des valeurs principales des infiniment petits et leur développement en série suivant les puissances de l'infiniment petit principal, qui en est la conséquence, formeront en grande partie l'objet de la première Partie de ce Cours.

La solution de ce problème fondamental fournit une méthode d'approximation précieuse dans toutes les applications des Mathématiques; mais là ne se borne pas son utilité : elle permet d'obtenir des résultats d'une entière rigueur, fondés sur la proposition suivante.

19. *Le rapport de deux infiniment petits du même ordre, y et z, ayant respectivement pour valeurs principales* $\mathrm{A}x^\alpha$ et $\mathrm{B}x^\alpha$ *a pour limite* $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$.

On a, en effet,

$$y = x^\alpha(\mathrm{A}+h), \qquad z = x^\alpha(\mathrm{B}+k),$$

h et k tendant vers zéro avec x. Donc

$$\lim \frac{y}{z} = \lim \frac{\mathrm{A}+h}{\mathrm{B}+k} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.$$

II. — Ensembles.

20. Soient $x, y, \ldots$ des quantités variables; nous appellerons *point* un système de valeurs simultanées $a, b, \ldots$ donné à ces variables; *écart* de deux points $p = (a, b, \ldots)$ et $p' = (a', b', \ldots)$ l'expression

$$pp' = |a' - a| + |b' - b| + \ldots.$$

Si cet écart est nul, les deux points coïncident, et réciproquement.

On dira que le point $p = (a, b, \ldots)$ est la *limite* d'une suite de points

$$p_1 = (x_1, y_1, \ldots), \qquad \ldots, \qquad p_n = (x_n, y_n, \ldots), \qquad \ldots,$$

si l'écart pp_n a pour limite zéro lorsque n croît indéfiniment, ce qui revient à dire que $x_n, y_n, \ldots$ ont respectivement pour limites $a, b, \ldots$.

On nomme *ensemble* toute collection de points, en nombre fini ou infini. Un ensemble aura autant de *dimensions* qu'il figure de variables $x, y, \ldots$ dans la définition de ses points.

On nomme *point limite* d'un ensemble E tout point qui est la limite d'une suite de points de E. Le système de ces points limites forment un nouvel ensemble E′, qu'on appelle le *dérivé* de E.

Considérons, par exemple, le cas d'une seule dimension. D'après les définitions précédentes, l'ensemble des nombres entiers n'a pas de point limite.

Celui des fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ a un point limite $x = 0$.

Celui des nombres rationnels $> a$ et $< b$ a pour dérivé l'ensemble des nombres réels $\geqq a$ et $\leqq b$.

Ce dernier se confond avec son dérivé.

On voit par ces exemples qu'un ensemble E peut contenir des points qui n'appartiennent pas à son dérivé E′, et réciproquement.

Si un point $p = (a, b, \ldots)$ appartient à E sans appartenir à E′, on pourra, par définition, trouver une quantité ε telle que tout autre point de E soit écarté de p de plus de ε. On dit dans ce cas que p est un *point isolé* dans E.

21. Nous appellerons *ensemble parfait* tout ensemble qui contient son dérivé.

Un ensemble E′, *dérivé d'un autre ensemble* E, *est nécessairement parfait.*

Soit en effet π un point limite de E′. On pourra, par hypothèse, déterminer dans E′ un point p' tel que l'écart $p'\pi$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, p' étant un point limite de E, on pourra déterminer dans E un point p tel que l'écart pp' soit $< \frac{\varepsilon}{2}$. Cela posé, soit

$$p = (a, b, \ldots), \qquad p' = (a', b', \ldots), \qquad \pi = (\alpha, \beta, \ldots);$$

on aura

$$\begin{aligned} p\pi &= |a-\alpha| + |b-\beta| + \ldots \\ &\overline{\leq} |a-a'| + |a'-\alpha| + |b-b'| + |b'-\beta| + \ldots \\ &\overline{\leq} pp' + p'\pi < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc π est un point limite de E et appartient à E'.

22. Si l'ensemble E ne contient pas tous les points possibles, les points qui ne lui appartiennent pas forment un ensemble *complémentaire* E_1.

Soient respectivement E', E'_1 les ensembles dérivés de E, E_1. Tous les points de l'espace pourront être répartis en trois classes :

1° Ceux qui appartiennent à E, sans appartenir à E'_1. Pour chacun d'eux p on pourra assigner une quantité ε telle, que tout point dont l'écart à p est $< \varepsilon$ n'appartient pas à E_1, et par suite appartient à E. Nous dirons que les points de cette classe sont *intérieurs* à E (et *extérieurs* à E_1).

2° Ceux qui appartiennent à E_1, sans appartenir à E'. Ces points seront extérieurs à E et intérieurs à E_1.

3° Enfin ceux qui appartiennent en même temps à l'un des ensembles E, E_1 et au dérivé de l'autre. Ces points constituent la *frontière* commune des deux ensembles E, E_1.

Il existe toujours des points frontières. Soient en effet $p = (a, b, \ldots)$ et $\pi = (\alpha, \beta, \ldots)$ deux points quelconques, choisis respectivement dans E et dans E_1, et soit n un entier arbitraire. Considérons la série des points

$$\left[a + \frac{m}{2^n}(\alpha - a),\ b + \frac{m}{2^n}(\beta - b),\ \ldots\right],$$

où m prend successivement les valeurs 0, 1, ..., 2^n. Le premier point de cette suite est p et appartient à E; le dernier est π et appartient à E_1. Soient p_n le dernier des points de cette suite qui appartienne à E; π_n le suivant. On aura

$$\begin{aligned} p_n &= [a + t_n(\alpha - a),\ b + t_n(\beta - b),\ \ldots], \\ \pi_n &= [a + u_n(\alpha - a),\ b + u_n(\beta - b),\ \ldots], \end{aligned}$$

t_n et u_n étant deux fractions comprises entre 0 et 1, ayant pour différence $\frac{1}{2^n}$ et dont la première ne décroît jamais, et la seconde ne croît jamais lorsqu'on fait croître n.

Supposons d'abord qu'il n'existe aucune valeur de n au delà de laquelle t_n cesse définitivement de croître ou u_n de décroître. Les quantités t_n et u_n tendront vers une limite commune θ, et les points $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ d'une part, $\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots$ d'autre part, auront pour limite le point

$$P = [a + \theta(\alpha - a), b + \theta(\beta - b), \ldots].$$

Ce point appartiendra donc à la fois à E′ et à E'_1, et, comme il appartient nécessairement à E ou à E_1, ce sera un point frontière.

Supposons, au contraire, qu'à partir d'une valeur ν de n, t_n, par exemple, cesse de croître et reste égal à t_ν; u_n décroîtra et tendra vers t_ν; les points $\pi_\nu, \pi_{\nu+1}, \ldots$ tendront donc vers p_ν. Ce point appartiendra donc à E'_1 et, comme il appartient à E, c'est encore un point frontière.

23. *La frontière* F, *dont l'existence vient d'être établie, constitue un ensemble parfait.*

Soit en effet q un point limite de F; F contiendra une suite infinie de points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ convergeant vers q.

Si parmi eux il y en a une infinité appartenant à E et à E'_1, leur point limite q appartiendra à E′ et à E''_1, dérivés de E et de E'_1. Mais E'_1, étant parfait, contiendra son dérivé. Donc q appartiendra à la fois à E′ et à E'_1, et, comme il appartient nécessairement à E ou à E_1, ce sera un point frontière.

Si, parmi les points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$, il n'en existe qu'un nombre borné appartenant à E et à E'_1, les autres, en nombre infini, appartiendront à E_1 et E′, et la conséquence sera la même.

24. Quant aux points intérieurs ou extérieurs, leur existence n'est pas nécessaire. Il est évident, par exemple, que si l'on prend pour E l'ensemble des nombres rationnels,

pour E_1 celui des nombres irrationnels, il n'y aura aucun point qui ne soit contenu dans la frontière.

Les ensembles parfaits qui contiennent des points intérieurs présentent un intérêt particulier, et il convient de les caractériser par un nom spécial. Nous les appellerons des *domaines*.

25. Un ensemble E d'une seule dimension est dit *borné supérieurement* (*inférieurement*), si tous les nombres qui le composent sont inférieurs (supérieurs) à un nombre fixe L.

Soient, dans ce cas, F l'ensemble des nombres plus grands (plus petits) que tous ceux de E; F_1 son complémentaire. Il existe un nombre frontière M, lequel jouira de la double propriété : 1° que E ne contient aucun nombre $> M (< M)$; 2° qu'il en contient qui sont $> M - \varepsilon (< M + \varepsilon)$, quel que soit le nombre positif ε.

Ce nombre M s'appellera la *borne supérieure* ou le *maximum* (borne *inférieure* ou *minimum*) de E. Il peut, suivant les cas, rester en dehors de l'ensemble E ou lui appartenir. On dit, dans ce dernier cas, que E *atteint* son maximum (son minimum). Cette circonstance se présentera nécessairement si E est un ensemble parfait.

Si plusieurs ensembles E_1, E_2, ... admettent respectivement des maxima (ou minima) M_1, M_2, ..., il est clair que l'ensemble E, résultant de leur réunion, aura pour maximum le plus grand (pour minimum le plus petit) des nombres M_1, M_2, ...

Si réciproquement on décompose un ensemble E admettant un maximum (un minimum) M en ensembles partiels E_1, E_2, ..., ceux-ci admettront des maxima au plus égaux à M (des minima au moins égaux à M).

26. Considérons plus généralement un ensemble E à un nombre quelconque de dimensions.

Soient $(a, b, \ldots)$, ... ses points. Nous dirons qu'il est

borné si l'ensemble de toutes les valeurs des modules $|a|$, $|b|$, ... pour ses divers points admet un maximum μ. Dans ce cas, les nombres a, b, ..., étant compris entre $-\mu$ et $+\mu$, forment un ensemble borné en dessus comme en dessous.

Réciproquement, si l'ensemble des nombres a, b, ... admet un maximum M et un minimum m, l'ensemble E sera borné, car les modules $|a|$, $|b|$, ... ne pourront surpasser le plus grand des deux nombres $|M|$, $|m|$.

27. *Tout ensemble borné qui contient une infinité de points admet au moins un point limite.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un ensemble E à deux dimensions; soient (a, b), ... ses points. Soient M et m les deux nombres fixes entre lesquels tous les nombres a et b sont compris.

Partageons l'intervalle $M - m$ en n intervalles égaux. Chacun des nombres a, b tombera dans l'un de ces intervalles. Groupons en un ensemble partiel tous ceux des points de E dans lesquels a et b tombent respectivement dans les mêmes intervalles. Nous obtiendrons ainsi n^2 ensembles partiels, dont la réunion constitue E. L'un au moins E_1 de ces nouveaux ensembles devra contenir une infinité de points; et si (a, b), (a', b') sont deux de ces points, leur écart, $|a - a'| + |b - b'|$, ne pourra surpasser $2\dfrac{M - m}{n}$.

Opérant sur E_1 comme sur E, on le décomposera en ensembles partiels, dont l'un au moins, E_2, contiendra une infinité de points dont l'écart ne pourra surpasser $2\dfrac{M - m}{n^2}$.

On opérera sur E_2 comme sur E_1, et ainsi de suite.

Cela posé, soient

p_1 un point choisi à volonté dans E_1;
p_2 un point différent de p_1, choisi à volonté dans E_2;
p_3 un point différent de p_1 et de p_2, choisi à volonté dans E_3;

et ainsi de suite.

Ces points $p_1, p_2, p_3, \ldots$ tendront évidemment vers un point limite π.

28. Nous pouvons ajouter la remarque suivante, qui nous sera souvent utile :

Soit ε une quantité quelconque. La suite $p_1, p_2, \ldots$ contient un point p_α dont l'écart à π est $< \varepsilon$. Soit ε_1 un autre nombre, moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ et que les écarts $p_1\pi, \ldots, p_\alpha\pi$. La suite contiendra un point p_{α_1} dont l'écart à π sera $< \varepsilon_1$, et l'indice α_1 sera $> \alpha$. Soit ε_2 un nombre moindre que les écarts $p_1\pi, \ldots, p_{\alpha_1}\pi$ et que $\frac{\varepsilon_1}{2}$; la suite contiendra de même un point p_{α_2} dont l'écart à π sera $< \varepsilon_2$ et α_2 sera $> \alpha_1$; et ainsi de suite.

On obtient ainsi une infinité de points successifs $p_\alpha, p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots$ ayant pour limite π, et tels : 1° que les indices $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aillent en croissant; 2° que l'écart de p_{α_n} à π soit $< \frac{1}{2^n}\varepsilon$.

29. Soient E et E′ deux ensembles formés par des points de même nature.

Les écarts des divers points p de E aux points p' de E′ forment un ensemble de nombres non négatifs. Il est donc borné inférieurement, et admet un minimum Δ, positif ou nul, que nous appellerons l'*écart* des ensembles E, E′. Si cet écart est > 0, nous dirons que les ensembles E, E′ sont *séparés*.

30. *Si deux ensembles bornés et parfaits* E, E′ *qui n'ont aucun point commun ont pour écart* Δ, *ils contiendront au moins un couple de points ayant précisément* Δ *pour écart mutuel.*

Soient, en effet, $p = (x, y, \ldots), \ldots$ les points de E; $p' = (x', y', \ldots), \ldots$ ceux de E′. Associons-les deux à deux

de toutes les manières possibles de manière à former de nouveaux points $pp' = (x, y, \ldots, x', y', \ldots)$ dépendant d'un nombre double de variables. L'ensemble EE' de ces points sera évidemment borné et parfait.

Cela posé, si E et E' ne contenaient aucun couple de points dont l'écart fût Δ, ils contiendraient tout au moins un couple de points p_1, p'_1 dont l'écart serait moindre que $\Delta + \varepsilon$, ε étant un nombre donné qui peut être choisi à volonté.

Soient d l'écart de p_1 à p'_1, et ε_1 un nombre $< d$ et $< \frac{\varepsilon}{2}$. On pourra déterminer un nouveau couple de points p_2, p'_2 dont l'écart soit $< \Delta + \varepsilon_1$.

Continuant ainsi, nous obtiendrons une suite infinie de couples $p_1, p'_1; \ldots; p_n, p'_n; \ldots$ dont les écarts mutuels convergent vers Δ. Les points correspondants $p_1 p'_1, \ldots, p_n p'_n$ de l'ensemble EE', étant en nombre infini, admettent au moins un point limite pp', où les deux points composants p, p' auront pour écart Δ. Mais p est une limite de l'ensemble des points $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ qui appartiennent tous à E; c'est donc un des points limites de E; et comme cet ensemble est parfait, il contient p. On voit de même que E' contient p'. Le théorème est donc démontré.

L'écart Δ ne peut être nul, car s'il l'était, p et p' se confondant, E et E' auraient un point commun contre l'hypothèse.

31. Nous disons qu'un ensemble parfait et borné est d'*un seul tenant* lorsqu'il ne peut être décomposé en plusieurs ensembles parfaits séparés.

On voit aisément que le caractère distinctif d'un pareil ensemble est le suivant :

Entre deux quelconques de ses points p, p', on peut toujours, quel que soit ε, intercaler une chaîne de points intermédiaires appartenant à l'ensemble, telle que l'écart de deux points consécutifs soit $< \varepsilon$.

Cette condition est nécessaire. En effet, supposons que pour une valeur donnée de ε elle ne soit pas satisfaite. Associons au point p d'abord tous ceux des points de E dont l'écart à p est $< \varepsilon$, puis ceux dont l'écart à l'un de ceux-ci est $< \varepsilon$, et ainsi de suite. Tous les points ainsi groupés forment un ensemble E_1. Les autres points de E forment un ensemble E_2, contenant au moins un point p', et dont l'écart à E_1 est $\geqq \varepsilon$. D'ailleurs chacun des ensembles E_1, E_2 est parfait. Soit, en effet, l_1 un point limite de E_1. Il appartient à E, qui est supposé parfait; d'ailleurs, il existe des points de E_1 dont il est écarté de moins de ε. Donc il appartient à E_1 et non à E_2.

Soit, d'autre part, l_2 un point limite de E_2. Il appartient à E; et, comme il existe des points de E_2 qui en sont écartés de moins de ε, il ne peut appartenir à E_1; donc il appartient à E_2.

Réciproquement, cette condition est suffisante. En effet, supposons E décomposable en deux ensembles parfaits séparés E_1, E_2; soient δ leur écart, p_1, p_2 deux points pris respectivement dans E_1 et E_2; si on les relie par une chaîne quelconque de points intermédiaires, on aura nécessairement deux points consécutifs appartenant l'un à E_1, l'autre à E_2. Leur écart est donc $\geqq \delta$; et la condition de l'énoncé ne sera pas remplie, pour les valeurs de ε moindres que δ.

32. La proposition qui précède entraîne cette conséquence évidente :

Un ensemble E *formé par la réunion d'un nombre quelconque d'ensembles d'un seul tenant* E_1, E_2, ... *dont chacun a au moins un point commun avec l'un des précédents est lui-même d'un seul tenant.*

33. *Un ensemble d'un seul tenant* E, *s'il ne se compose pas d'un seul point, se confond avec son dérivé* E'. En effet, il le contient, par définition. Mais, d'autre part, il y est contenu. Soient, en effet, p, p' deux points arbitrairement choisis dans E. On peut intercaler entre eux une chaîne de points

$p_1, p_2, \ldots$ telle que l'écart de deux points consécutifs quelconques, et notamment celui de p à p_1, soit $\overline{\underline{<}}\,\varepsilon$. Soient d cet écart; ε_1 un nombre $< d$ et $< \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ On peut trouver de la même manière un nouveau point p_2 dont l'écart à p soit $< \varepsilon_1$. Continuant de même, on obtiendra une suite infinie de points $p_1, p_2, \ldots$, convergeant vers p. Donc, p appartient à E'.

34. On peut encore remarquer qu'*un ensemble* E, *d'un seul tenant et d'une seule dimension, qui contient deux nombres donnés a et b, contient tout nombre c intermédiaire entre a et b*. Soient, en effet, $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres intermédiaires entre a et c et convergeant vers c; $b_1, b_2, \ldots$ une suite de nombres intermédiaires entre b et c et convergeant vers c. On pourra, par hypothèse, intercaler entre a et b une chaîne de nombres appartenant à E, et dont les écarts successifs soient moindres que $b_n - a_n$. L'un au moins de ces nombres intermédiaires tombera entre a_n et b_n. Désignons-le par c_n. Soit ε_1 l'écart $|c_n - c|$; on peut trouver dans les suites $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ deux nombres a_{n_1}, b_{n_1} dont l'écart soit $< \varepsilon_1$, puis déterminer dans E un nouveau nombre c_{n_1} tombant entre a_{n_1} et b_{n_1}; et ainsi de suite. Les nombres $c_n, c_{n_1}, \ldots$ convergent vers c. Donc c est une limite de E, et, comme E est parfait, c est l'un de ses points.

Si l'ensemble E est borné, il admettra un maximum M et un minimum m; étant parfait, il les atteindra. Il est donc formé par le système de tous les nombres réels qui sont $\overline{\underline{<}}\,$M et $\overline{\underline{>}}\,m$.

Si E n'est borné que supérieurement (inférieurement), il sera formé par l'ensemble des nombres réels qui sont $\overline{\underline{<}}\,$M (qui sont $\overline{\underline{>}}\,m$).

S'il n'est borné dans aucun sens, il contiendra tous les nombres possibles.

35. Soit E un ensemble borné, formé des points $p, p_1, \ldots$. Les écarts de ces points, pris deux à deux, forment un

ensemble de nombres positifs qui est borné. Il admet donc un maximum d que nous appellerons le *diamètre* de l'ensemble E.

36. Nous allons chercher, d'autre part, à préciser la notion de l'*étendue* de cet ensemble (à laquelle nous pourrons donner en particulier le nom de *longueur*, d'*aire* ou de *volume*, lorsque le nombre des dimensions se réduit à 1, 2 ou 3).

Considérons, pour fixer les idées, le cas de deux dimensions. Chaque point (u, v) de E pourra être représenté géométriquement sur un plan dont u et v sont les coordonnées. Décomposons ce plan, par des parallèles aux axes coordonnés, en carrés de côté r.

L'ensemble de ceux de ces carrés qui sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E; l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à E ou qui rencontrent sa frontière forme un nouveau domaine $S + S'$ auquel E est intérieur. Ces domaines ont des aires déterminées que nous représenterons également par S et $S + S'$.

Faisons varier notre décomposition en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro; *les aires* S *et* $S + S'$ *tendront vers des limites fixes.*

En effet, considérons, par exemple, les aires S. Celles de ces aires pour lesquelles r reste au-dessous d'un nombre fixe ρ sont bornées, car elles sont toutes contenues dans un même carré de côté $M - m + 2\rho$, M et m désignant le maximum et le minimum des coordonnées u, v dans l'ensemble E. Soit A leur maximum. On pourra trouver une décomposition déterminée pour laquelle S prenne une valeur S_1 plus grande que $A - \varepsilon$. Soit δ l'écart entre la frontière de E et celle du domaine S_1. Considérons une autre décomposition quelconque où r soit $< \frac{\delta}{2}$. L'écart maximum de deux points d'un même carré y sera $< \delta$. Donc tous ceux de ces carrés dont un point appartient à S_1 seront en entier

dans l'intérieur de E. Donc le domaine S contiendra S_1, et l'on aura

$$S \overline{\geq} S_1 > A - \varepsilon;$$

d'autre part, $S \overline{\leq} A$. Donc les sommes S auront bien une limite égale à A.

D'autre part, les aires $S + S'$, n'étant pas négatives, sont bornées inférieurement, et admettent un minimum a.

Il existera une décomposition déterminée pour laquelle $S + S'$ prendra une valeur $S_1 + S'_1$ moindre que $a + \varepsilon$. Soit δ l'écart des frontières de E et du domaine $S_1 + S'_1$. Considérons une autre décomposition quelconque où r soit $< \frac{\delta}{2}$. Tous les carrés dont un point appartient à E ou à sa frontière seront intérieurs à $S_1 + S'_1$. On aura donc

$$S + S' \overline{\leq} S_1 + S'_1 < a + \varepsilon.$$

D'autre part, $S + S' \overline{\geq} a$. Donc a est bien la limite des sommes $S + S'$.

Comme on a $S + S' \overline{\geq} S$, a sera au moins égal à A.

Nous appellerons A *l'aire intérieure* de E, a son *aire extérieure*. Si S' a pour limite zéro, nous dirons que E est *quarrable* et qu'il a pour *aire* la quantité $a = A$.

37. Soit E' un nouvel ensemble intérieur à E. L'aire extérieure de E', et *a fortiori* son aire intérieure, seront moindres que l'aire intérieure de E. Soit, en effet, δ l'écart des frontières de E et de E'. Si l'on décompose le plan en carrés de côté $< \frac{\delta}{4}$, il est évident que tous les carrés non extérieurs à E', et aussi les carrés adjacents, sont intérieurs à E. L'aire intérieure de E surpasse donc l'aire extérieure de E' d'une quantité au moins égale à la somme de ces derniers carrés.

38. Supposons enfin E formé par la réunion de plusieurs ensembles partiels E_1, E_2, ..., et considérons une décompo-

sition quelconque du plan en carrés. Soient respectivement S, S_1, S_2, ... les sommes des carrés intérieurs à E, E_1, E_2, ...; S', S'_1, S'_2, ... celles des carrés qui rencontrent leurs frontières. Tout carré intérieur à l'un des ensembles E_1, E_2, ... l'est à E, et, d'autre part, tout carré non extérieur à E est nécessairement non extérieur à l'un au moins des ensembles E_1, E_2, ...; on aura donc

$$S \overset{=}{>} S_1 + S_2 + \ldots, \qquad S + S' \overset{=}{<} S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + \ldots,$$

et, en passant à la limite,

$$A \overset{=}{>} A_1 + A_2 + \ldots, \qquad a \overset{=}{<} a_1 + a_2 + \ldots,$$

A_1, A_2, ... et a_1, a_2, ... représentant les aires intérieures et extérieures de E_1, E_2, ... Les inégalités ci-dessus se changent d'ailleurs en égalités, si E_1, E_2, ... sont quarrables.

39. On peut concevoir une infinité de décompositions du plan en régions élémentaires quarrables $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ... dont le diamètre ne surpasse pas un nombre donné ρ. Considérons une suite quelconque de décompositions de ce genre, dans laquelle ρ tende vers zéro. La somme $\Sigma\,\Delta\sigma$, étendue aux éléments intérieurs à E, aura pour limite A, aire intérieure de cet ensemble.

Nous pouvons, en effet, déterminer une décomposition du plan en carrés, telle que la somme S des aires des carrés intérieurs à E soit $> A - \varepsilon$; soit δ l'écart des frontières de E et de S. Dès que ρ sera devenu $< \delta$, tout élément $\Delta\sigma$ qui a un de ses points dans S sera tout entier intérieur à E. L'aire $\Sigma\,\Delta\sigma$ contiendra donc à ce moment l'aire S, et sera $> A - \varepsilon$. Mais, d'autre part, elle ne peut surpasser A. En effet, soit δ' l'écart entre sa frontière et celle de E; concevons une autre décomposition en carrés, de côté $< \frac{\delta'}{2}$. Tous ceux de ces carrés qui ont un point commun avec l'aire $\Sigma\,\Delta\sigma$ seront inté-

rieurs à E. La somme S_1 des aires des carrés intérieurs est donc au moins égale à $\Sigma\Delta\sigma$; mais elle ne surpasse pas A.

Donc A est bien la limite des sommes $\Sigma\Delta\sigma$.

On voit, de la même manière, que la somme $\Sigma\Delta\sigma$, étendue, non seulement aux éléments intérieurs à E, mais aussi à ceux qui rencontrent sa frontière, a pour limite l'aire extérieure a. Par suite, la somme ci-dessus, bornée à ces éléments frontières, tendra vers zéro, si E est quarrable.

40. Les considérations qui précèdent sont évidemment applicables aux ensembles d'un nombre quelconque de dimensions. On pourra déterminer, pour chacun d'eux, une *étendue intérieure* ou une *étendue extérieure*. Si celles-ci coïncident, l'ensemble sera *mesurable*.

III. — Fonctions bornées. Fonctions intégrables.

41. Des quantités variables, x, y, ..., sont dites *indépendantes*, s'il n'existe entre elles aucun lien, de telle sorte que chacune d'elles puisse encore prendre toutes les valeurs dont elle est susceptible, après qu'on a fixé la valeur des autres.

Soit, au contraire, u une nouvelle variable, liée aux précédentes de telle sorte qu'à chaque point $(x, y, \ldots)$ appartenant à un certain ensemble E corresponde une valeur déterminée de u. On dira que cette relation définit u comme *fonction* de x, y, ... dans l'ensemble E.

Une fonction de $x, y, \ldots$ peut se représenter par la notation $f(x, y, \ldots)$. Si l'on considère simultanément plusieurs fonctions différentes, on pourra les désigner respectivement par $F(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$, ... en changeant la lettre initiale.

La définition qui précède est d'une telle généralité qu'il est évidemment impossible d'établir aucune propriété applicable à toutes les fonctions sans exception. Des hypothèses

restrictives sont, en effet, nécessaires pour servir de base à un raisonnement quelconque.

42. Fonctions bornées. — Une fonction $f(x, y, \ldots)$ est dite *bornée*, dans un ensemble E pour lequel elle est définie, si les valeurs qu'elle prend pour les divers points $(x, y, \ldots)$ de cet ensemble forment un ensemble borné.

La somme, la différence et le produit de deux fonctions bornées f et φ sont des fonctions bornées; car on a

$$|f \pm \varphi| \leqq |f| + |\varphi|,$$
$$|f . \varphi| = |f|\,|\varphi|.$$

Si f est une fonction bornée et si le minimum μ de son module n'est pas nul, $\frac{1}{f}$ sera également bornée; car on a

$$\left|\frac{1}{f}\right| = \frac{1}{|f|} < \frac{1}{\mu}.$$

43. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction bornée dans un domaine E, dont l'étendue, que nous supposerons mesurable, sera également représentée par E.

Décomposons E en domaines élémentaires mesurables e_1, e_2, ... Désignons par M, m le maximum et le minimum de la fonction f dans E; par M_k, m_k son maximum et son minimum dans e_k; et formons les sommes

$$S = \sum M_k e_k, \qquad s = \sum m_k e_k.$$

Comme on a évidemment

$$m \leqq m_k \leqq M_k \leqq M,$$

S et s seront comprises entre

$$\sum M e_k = M \sum e_k = ME$$

et

$$\sum m e_k = m \sum e_k = m\text{E},$$

et leurs modules seront au plus égaux à LE, L désignant le plus grand des deux modules $|\text{M}|$ et $|m|$ [ou le maximum du module de $f(x, y, \ldots)$ dans le domaine E].

44. Théorème de M. Darboux. — *Si nous faisons varier la décomposition en éléments, de telle sorte que les diamètres de ces éléments tendent vers zéro, les sommes* S *et* s *tendront vers des limites fixes.*

En effet, considérons, par exemple, les diverses sommes S. Leurs valeurs forment, comme nous venons de le voir, un ensemble borné, lequel admet un minimum T. Et l'on peut, quel que soit ε, déterminer une décomposition Δ', telle que la somme correspondante S' soit comprise entre T et $\text{T} + \frac{\varepsilon}{2}$. Soient $e_1, \ldots, e_n$ les éléments de cette décomposition, n leur nombre; on aura

$$\text{E} = \sum_1^n e_k, \qquad \text{S}' = \sum_1^n \text{M}_k e_k.$$

Soit Δ une autre décomposition quelconque. Nous y distinguerons plusieurs sortes d'éléments : 1° ceux qui sont intérieurs à l'un des éléments $e_1, \ldots, e_n$, par exemple à e_k; nous les désignerons par $e_{k1}, \ldots, e_{ki}, \ldots$; 2° ceux qui empiètent sur plusieurs des éléments $e_1, \ldots, e_n$; nous les désignerons par $e'_1, \ldots, e'_l, \ldots$. Nous représenterons enfin par M_{ki}, M'_l les maxima de f dans les éléments e_{ki}, e'_l. On aura évidemment

$$\text{M}_{ki} \leqq \text{M}_k, \qquad \text{M}'_l \leqq \text{M},$$

$$\text{E} = \sum_{k,i} e_{ki} + \sum_l e'_l = \sum_k e_k$$

et enfin, si S désigne la somme correspondante à la décom-

position considérée,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k,i} M_{ki} e_{ki} + \sum M'_l e'_l \\
&\overline{\overline{<}} \sum_k M_k \sum_i e_{ki} + \sum M e'_l \\
&\overline{\overline{<}} S' - \sum_k M_k \left(e_k - \sum_i e_{ki} \right) + M \sum e'_l \\
&\overline{\overline{<}} T + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_k (M - M_k) \left(e_k - \sum_i e_{ki} \right) \\
&\overline{\overline{<}} T + \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \sum_k \left(e_k - \sum_i e_{ki} \right).
\end{aligned}$$

Enfin, T étant le minimum des sommes S, on aura

$$S \overline{\overline{>}} T.$$

De ces deux inégalités résulte immédiatement la preuve que, si le diamètre des éléments tend vers zéro, S tend vers T. En effet, les domaines $e_1, \ldots, e_n$ étant mesurables, la différence entre e_k et la somme $\sum e_{ki}$ des nouveaux éléments qui lui sont intérieurs tendra vers zéro avec le diamètre de ces éléments. On pourra donc, après avoir choisi ε aussi petit qu'on voudra, ce qui fixera le nombre n, assigner un nombre δ, tel que si tous les éléments ont un diamètre $< \delta$ chacune des n sommes $e_k - \sum e_{ki}$ devienne moindre que $\dfrac{\varepsilon}{2n(M - m)}$. Dès lors, S sera compris entre T et $T + \varepsilon$.

Ce nombre T se nomme l'*intégrale par excès* de la fonction $f(x, y, \ldots)$ dans le *champ* E.

45. On voit exactement de la même manière que les sommes s admettent un maximum t et que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que le diamètre maximum

des éléments tende vers zéro, la somme tendra vers t. Ce nombre sera l'*intégrale par défaut* de la fonction f dans le *domaine* E.

46. *Remarques.* — 1° Si E est formé par la réunion de plusieurs domaines mesurables $E_1, E_2, \ldots$, on pourra décomposer ceux-ci en éléments infiniment petits $e_1, e_2, \ldots$, et former pour chacun d'eux la somme $\sum M_k e_k$. La somme correspondante pour le domaine E s'obtiendra par l'addition de ces sommes partielles. Passant à la limite, on voit que l'intégrale par excès de la fonction f, pour le domaine E, est égale à la somme des intégrales analogues pour $E_1, E_2, \ldots$. De même pour l'intégrale par défaut.

2° Nous savons qu'on peut déterminer une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, dont chacun soit intérieur au suivant et à E, et tels que leurs étendues aient pour limite E. L'intégrale (soit par excès, soit par défaut) dans le domaine E sera la limite vers laquelle tend, pour $n = \infty$, l'intégrale dans le domaine E_n. En effet, la différence des deux intégrales est égale à l'intégrale prise dans le domaine $E - E_n$, et son module sera au plus égal à $L(E - E_n)$, quantité qui tend vers zéro quand n tend vers ∞.

3° Nous avons admis, dans tout ce qui précède, que le domaine E a une étendue mesurable. Une nouvelle définition nous permettra de supprimer cette restriction. On peut, en effet, toujours considérer E comme la limite d'une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, dont les étendues convergent vers une limite qui, par définition, n'est autre que l'étendue intérieure de E. L'intégrale (par excès ou par défaut) dans E_n tendra, pour $n = \infty$, vers une limite déterminée. En effet, la différence entre les intégrales dans E_n et $E_m (m > n)$ aura son module au plus égal à

$$L(E_m - E_n) \leqq L(E - E_n),$$

quantité qui tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Nous

considérerons cette limite de l'intégrale dans E_n comme représentant la valeur de l'intégrale dans E.

47. Nous appellerons *oscillation* de la fonction f dans l'élément e_k la différence $O_k = M_k - m_k$ entre son maximum et son minimum. Cette différence ne pouvant être négative, la différence

$$T - t = \lim \sum M_k e_k - \lim \sum m_k e_k = \lim \sum O_k e_k$$

entre les deux intégrales par excès et par défaut ne pourra être négative. Cherchons à quelles conditions elle sera nulle.

Remarquons, à cet effet, que, T étant le minimum des sommes $\sum M_k e_k$ et t le maximum des sommes $\sum m_k e_k$, $T - t$ sera le minimum des sommes $\sum O_k e_k$.

Cela posé, soit ε un nombre positif choisi à volonté et considérons une décomposition quelconque de E en éléments $e_1, \ldots, e_k, \ldots$. Soient $e_i, \ldots$ ceux de ces éléments dans lesquels l'oscillation O_i surpasse ε; $e_l, \ldots$ les autres éléments où l'oscillation $O_l \leqq \varepsilon$. On aura

$$(1) \qquad \sum O_k e_k = \sum O_i e_i + \sum O_l e_l > \varepsilon \sum e_i.$$

Mais, d'autre part, $O_i = M_i - m_i$ ne peut surpasser $M - m$ et $O_l \leqq \varepsilon$; donc

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum O_k e_k \leqq (M - m) \sum e_i + \varepsilon \sum e_l \\ \qquad \leqq (M - m) \sum e_i + \varepsilon E. \end{cases}$$

Si donc il est possible de déterminer ε de telle sorte que pour aucune décomposition $\sum e_i$ ne s'abaisse au-dessous d'un nombre positif fixe λ, la somme $\sum O_k e_k$ sera toujours supérieure à $\varepsilon\lambda$; et son minimum $T - t$ ne pourra être

moindre que $\varepsilon\lambda$. Au contraire, si, quel que soit ε, on peut trouver une décomposition où $\sum e_i$ soit moindre que tout nombre positif donné, on pourra, en prenant ε assez petit, puis choisissant une décomposition convenable, faire décroître autant qu'on voudra les deux termes du second membre de (2) et rendre ainsi $\sum O_k e_k$ moindre que tout nombre positif donné. On aura donc

$$T - t = 0.$$

48. Fonctions intégrables. — Une fonction $f(x, y, \ldots)$ est dite *intégrable* dans le domaine E, si ses deux intégrales par excès et par défaut

$$T = \lim \sum M_k e_k, \qquad t = \lim \sum m_k e_k,$$

prises dans ce domaine, coïncident, ainsi qu'il vient d'être expliqué. Soit, dans ce cas, $(x_k, y_k, \ldots)$ un point choisi arbitrairement dans l'élément e_k; on aura évidemment

$$M_k \geqq f(x_k, y_k, \ldots) \geqq m_k,$$

d'où

$$\sum M_k e_k \geqq \sum f(x_k, y_k, \ldots) e_k \geqq \sum m_k e_k.$$

La somme $\sum f(x_k, y_k, \ldots) e_k$ tendra donc encore vers la même limite que les deux sommes précédentes. Cette limite se nomme l'*intégrale* de la fonction f dans le domaine E. On la représente généralement par la notation

$$I = \mathrm{S}_E f(x, y, \ldots)\, de;$$

S est un signe de sommation, qui signifie limite de somme; de représente l'un des éléments infiniment petits ci-dessus désignés par $e_1, \ldots, e_k, \ldots$; il est sous-entendu que dans

chaque terme de la somme on doit substituer dans f aux variables $x, y, \ldots$ leurs valeurs en un point de l'élément de que l'on considère; enfin la lettre E, mise en indice, dénote le champ de l'intégration; on peut d'ailleurs la supprimer lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre.

49. Il est clair que la valeur de l'intégrale I ne dépend pas des variables de sommation $x, y, \ldots$, mais seulement de la nature du champ et de celle de la fonction f. Elle sera d'ailleurs comprise, d'après ce que nous avons vu, entre ME et mE, et son module ne pourra surpasser LE.

Ces derniers résultats sont susceptibles d'être un peu généralisés. Supposons que f soit le produit de deux fonctions φ, ψ dont la première soit intégrable et reste positive dans le champ E. Soient M', m' le maximum et le minimum de ψ dans ce domaine; on aura

$$\begin{aligned} M' \sum \varphi(x_k, y_k, \ldots) e_k &\overline{\overline{>}} \sum \varphi(x_k, y_k, \ldots) \psi(x_k, y_k, \ldots) e_k \\ &\overline{\overline{>}} m' \sum \varphi(x_k, y_k, \ldots) e_k \end{aligned}$$

et, en passant à la limite,

$$\begin{aligned} M' \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) de &\overline{\overline{>}} \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) \psi(x, y, \ldots) de \\ &\overline{\overline{>}} m' \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) de, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) \psi(x, y, \ldots) de = \mu \mathbf{S} \varphi(x, y, \ldots) de,$$

μ étant une quantité comprise entre M' et m'.

Cette proposition porte le nom de *théorème de la moyenne*.

50. Si le champ E est formé par la réunion de plusieurs domaines mesurables $E_1, E_2, \ldots$, l'intégrale E sera évidem-

ment égale à la somme des intégrales relatives à ces champs partiels.

Si E n'est pas mesurable, nous le considérerons, ainsi qu'au n° 46, comme limite d'une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$. La limite des valeurs des intégrales prises dans ces domaines sera, par définition, la valeur de l'intégrale dans E.

51. Soient $f', f'', \ldots$ des fonctions intégrables dans un domaine E; $I', I'', \ldots$ leurs intégrales; $c', c'', \ldots$ des constantes.

La fonction

$$f = c'f' + c''f'' + \ldots$$

sera intégrable et aura pour intégrale

$$I = c'I' + c''I'' + \ldots.$$

Il suffit, pour le voir, de passer à la limite dans l'identité

$$\begin{aligned}\sum f(x_k, y_k, \ldots)e_k = {} & c'\sum f'(x_k, y_k, \ldots)e_k \\ & + c''\sum f''(x_k, y_k, \ldots)e_k + \ldots.\end{aligned}$$

52. *Le produit $f'f''$ de deux fonctions intégrables est intégrable.* En effet, soient M', m' et M'', m'' les maxima et minima de f' et f'' dans E; M'_k, m'_k, et M''_k, m''_k leurs maxima et minima dans e_k; O', O'', O'_k, O''_k leurs oscillations dans les mêmes domaines.

Supposons d'abord que m' et m'' soient positifs; m'_k, M''_k, M'_k, M''_k l'étant *a fortiori*, on aura, dans tout l'élément e_k,

$$M'_k M''_k \geqq f'f'' \geqq m'_k m''_k.$$

L'oscillation O_k du produit $f'f''$ dans cet élément est donc au plus égale à

$$\begin{aligned}M'_k M''_k - m'_k m''_k &= M'_k(M''_k - m''_k) + m''_k(M'_k - m'_k) \\ &\leqq M' O''_k + M'' O'_k,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\lim \sum O_k e_k \overline{\overline{<}} M' \lim \sum O''_k e_k + M'' \lim \sum O'_k e_k = 0.$$

Supposons, au contraire, que m', m'' puissent être négatifs. Soit c une constante positive, plus grande que $|m'|$ et $|m''|$. Les fonctions $f'(x, y, \ldots) + c$ et $f''(x, y, \ldots) + c$ seront intégrables et auront pour minima les quantités positives $m' + c$, $m'' + c$. Leur produit sera donc intégrable. D'ailleurs $cf'(x, y, \ldots)$, $cf''(x, y, \ldots)$ le sont également, ainsi que la constante c^2 dont l'oscillation est toujours nulle. Donc, le produit

$$f'f'' = (f' + c)(f'' + c) - cf' - cf'' - c^2$$

sera aussi intégrable.

53. *Si la fonction f est intégrable et si son maximum* M *et son minimum m sont de même signe, $\frac{1}{f}$ sera intégrable.*

En effet, l'oscillation Ω_k de $\frac{1}{f}$ dans l'élément e_k sera

$$\left|\frac{1}{m_k} - \frac{1}{M_k}\right| = \left|\frac{M_k - m_k}{M_k m_k}\right| \overline{\overline{<}} \frac{M_k - m_k}{m^2} \overline{\overline{<}} \frac{O_k}{m^2}.$$

Donc

$$\lim \sum \Omega_k e_k \overline{\overline{<}} \frac{1}{m^2} \lim \sum O_k e_k = 0.$$

54. On dit que l'intégrale

$$S_E f(x, y, \ldots) de$$

est d'un *ordre de multiplicité n*, si le nombre des dimensions du champ E, dans lequel elle est prise (ou, ce qui revient au même, le nombre des variables indépendantes x, y, ...), est égal à n.

55. Les théorèmes exposés jusqu'à présent ne dépendent aucunement de ce nombre n. Mais, dans le cas des intégrales

simples, où $n = 1$, il est nécessaire, pour se conformer aux usages reçus, d'introduire quelques légères modifications aux notions précédentes.

Presque toujours, le champ de l'intégration est le domaine d'un seul tenant formé par les nombres compris entre deux nombres fixes a et b. On doit alors partager l'intervalle ab en éléments infiniment petits dx_1, dx_2, ..., et l'on représente l'intégrale par la notation

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

On voit que le signe de sommation S a été remplacé par le signe équivalent $\int$, et qu'au lieu de désigner le champ par une seule lettre, on met en évidence ses deux extrémités a, b, qu'on nomme les *limites inférieure et supérieure* de l'intégrale.

Si $b > a$, ce sont là des changements de pure forme; mais, si $b < a$, on introduit une nouvelle convention que nous devons signaler. Dans la théorie générale, l'étendue des éléments de était toujours considérée comme étant une quantité positive. Ici, au contraire, nous affecterons chacun des segments dx du signe — si $b < a$ (auquel cas x décroît en variant de a à b).

Il résulte évidemment de cette convention qu'on a

$$(3) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

En outre,

$$(4) \qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Car, si $a < b < c$, cette égalité est un cas particulier d'une proposition énoncée au n° 50, et notre présente convention la rend applicable aux autres cas.

Si

$$f(x) = c'f'(x) + c''f''(x) + \ldots,$$

on aura (51)

$$(5)\quad \int_a^b f(x)\,dx = c'\int_a^b f'(x)\,dx + c''\int_a^b f''(x)\,dx + \ldots,$$

Si M, m désignent le maximum et le minimum de $f(x)$ dans le champ ab, et L le maximum de son module, l'étendue du champ étant évidemment $|b-a|$, on aura (49)

$$(6)\quad m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq \mathrm{M}(b-a)$$

si $b > a$.

Si $b < a$, le sens des inégalités sera renversé. Mais on aura dans tous les cas

$$(7)\quad \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \mathrm{L}\,|b-a|.$$

56. Le calcul d'une intégrale multiple d'ordre n se ramène, ainsi qu'on va le voir, lorsque le champ a une étendue mesurable, à celui de n intégrales simples successives.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, $n=2$. Le champ E sera représenté géométriquement par un ensemble de points (x, y) situés dans un plan.

Cela posé, les valeurs de y, auxquelles correspondent des points de E, forment un ensemble borné F. Soit η l'une d'elles. Les valeurs de x qui, associées à η, donnent des points de E, forment un ensemble G_η également borné. Nous ne pouvons pas affirmer que G_η ait une longueur mesurable, ni que la fonction $f(x, \eta)$ y soit intégrable; mais, cette fonction étant bornée, on pourra toujours déterminer, dans l'intérieur de G_η, son intégrale par excès et son intégrale par défaut. Ce seront des fonctions de η, que nous pourrons désigner par $J(\eta)$ et $j(\eta)$, et qui sont bornées dans le domaine F.

Nous pourrons donc déterminer, dans l'intérieur de F :

1° l'intégrale par excès de $J(\eta)$, que nous désignerons par K;
2° l'intégrale par défaut de $j(\eta)$, que nous désignerons par k. Comme on a évidemment $J(\eta) \overline{\gtrless} j(\eta)$, k sera au plus égal à l'intégrale par défaut de $J(\eta)$ et, *a fortiori*, au plus égal à K.

Nous allons montrer, d'autre part, que K est au plus égal à l'intégrale double

$$S_E f(x, y)\, de,$$

prise par excès.

A cet effet, décomposons le plan en rectangles infiniment petits par des parallèles aux axes. Celui de ces rectangles qui est limité par les droites $x = x_i$, $x = x_i + dx_i$, $y = y_k$, $y = y_k + dy_k$ a pour aire $dx_i dy_k$; nous le désignerons par e_{ik}, s'il est tout entier intérieur à E, par e'_{ik} s'il contient un point de la frontière de E. Dans chacun des rectangles e_{ik}, la fonction $f(x, y)$ admettra un maximum M_{ik}; et dans les parties communes à E et aux rectangles e'_{ik}, elle ne pourra surpasser un nombre fixe M, maximum de $f(x, y)$, dans le domaine E.

L'ensemble G_η est formé par les points communs à E et à la droite $y = \eta$. Les parallèles aux x que nous avons tracées partagent cette droite en segments, et l'intégrale $J(\eta)$ est égale à la somme des intégrales partielles prises dans l'intérieur des portions communes à E et à ces divers segments.

Supposons η compris entre y_k et $y_k + dy_k$, k ayant une valeur déterminée. Soit e_{ik} l'un des rectangles intérieurs correspondants à cette valeur de k. Le segment de la droite $y = \eta$ contenu dans ce rectangle a pour longueur dx_i et se trouve en entier dans E; d'ailleurs la fonction f en chaque point de ce segment a une valeur au plus égale à M_{ik}. La valeur de l'intégrale correspondante ne peut donc surpasser $M_{ik} dx_i$.

Soit, d'autre part, e'_{ik} un des rectangles également compris entre les droites $y = y_k$ et $y = y_k + dy_k$, mais qui rencontrent la frontière de E. La longueur (intérieure) de la portion de la droite $y = \eta$ commune à E et à ce rectangle ne

peut surpasser dx_i; la valeur de f ne peut y surpasser M; la valeur de l'intégrale correspondante ne peut donc surpasser $M dx_i$.

La valeur de $J(\eta)$ ne pourra donc surpasser la quantité

$$\mu_k = \sum_i M_{ik}\, dx_i + M \sum_i dx_i,$$

la première somme s'étendant à ceux des rectangles e_{ik}, et la seconde à ceux des rectangles e'_{ik} où k a la valeur constante que nous avons supposée.

Si donc nous désignons par I_k la valeur de l'intégrale par excès de $J(\eta)$ dans l'intervalle de $\eta = y_k$ à $\eta = y_k + dy_k$, on aura

$$I_k \leqq \mu_k\, dy_k \leqq \sum_i M_{ik} e_{ik} + \sum_i M\, e'_{ik}.$$

Chacun des éléments dy_k intérieurs à F donne une relation de ce genre. Sommant ces égalités, il vient

$$\sum I_k \leqq \sum_{i,k} M_k e_{ik} + M \sum_{i,k} e'_{ik}.$$

Passons maintenant à la limite en supposant que l'étendue des rectangles décroisse indéfiniment. Le premier membre ΣI_k aura évidemment pour limite l'intégrale K. La première somme du second membre aura pour limite l'intégrale double $\mathrm{S}_{\mathrm{E}} f(x, y)\, de$ prise par excès. La seconde a pour limite zéro, si E est mesurable, comme nous l'avons supposé.

Notre proposition est donc démontrée.

57. On verra, par un raisonnement tout semblable, que l'intégrale par défaut k est au moins égale à l'intégrale double $\mathrm{S}_{\mathrm{E}} f(x, y)\, de$, prise par défaut. Mais, par hypothèse, $f(x, y)$ est intégrable. L'intégrale double a donc la même valeur,

qu'on la prenne par défaut ou par excès. On aura donc

$$K = \mathbf{S}_E f(x, y)\, de = k,$$

et, pour déterminer l'intégrale double, il suffira de calculer K ou k, qui s'obtiennent chacun par deux intégrations simples successives.

58. Supposons en particulier le champ E constitué de telle sorte qu'une parallèle $y = \eta$ à l'axe des x ne coupe sa frontière qu'en deux points ayant pour abscisses $\varphi(\eta)$ et $\Phi(\eta)$. Soit, pour fixer les idées, $\Phi(\eta) > \varphi(\eta)$. Si la fonction $f(x, \eta)$ est intégrable dans l'intervalle de $\varphi(\eta)$ à $\Phi(\eta)$, on aura

$$J(\eta) = j(\eta) = \int_{\varphi(\eta)}^{\Phi(\eta)} f(x, \eta)\, dx.$$

Soient b et B le minimum et le maximum de y dans tout le champ. Si $J(\eta)$ est intégrable de b à B, on aura

$$K = \int_b^B J(\eta)\, d\eta = \int_b^B d\eta \left[\int_{\varphi(\eta)}^{\Phi(\eta)} f(x, \eta)\, dx \right],$$

et en appelant y la variable de sommation, précédemment désignée par η,

$$\mathbf{S}_E f(x, y)\, de = K = \int_b^B dy \left[\int_{\varphi(y)}^{\Phi(y)} f(x, y)\, dx \right].$$

Supposons de même : 1° qu'une parallèle $x = \xi$ à l'axe des y ne coupe la frontière de E qu'en deux points ayant pour ordonnées $\psi(\xi)$ et $\Psi(\xi) > \psi(\xi)$; 2° que $f(\xi, y)$ soit intégrable de $\psi(\xi)$ à $\Psi(\xi)$; 3° que son intégrale $J_1(\xi)$ soit elle-même intégrable de a à A, a étant le minimum et A le maximum de x dans tout le champ E; on aura de la même manière

$$\mathbf{S}_E f(x, y)\, de = \int_a^A dx \left[\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(x, y)\, dy \right].$$

Lorsque le champ E est un rectangle, on a

$$\psi(x) = a, \qquad \Psi(x) = \mathrm{A}, \qquad \varphi(y) = b, \qquad \Phi(y) = \mathrm{B};$$

et la comparaison des deux valeurs de l'intégrale double donne

$$(8) \quad \int_b^{\mathrm{B}} dy \left[\int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx \right] = \int_a^{\mathrm{A}} dx \left[\int_b^{\mathrm{B}} f(x, y)\, dy \right].$$

On peut, dans ce cas, représenter cette intégrale double par la notation plus symétrique

$$\int_b^{\mathrm{B}} \int_a^{\mathrm{A}} f(x, y)\, dx\, dy,$$

qui met en évidence les deux intégrations à effectuer successivement; ces deux opérations peuvent d'ailleurs être interverties, comme nous venons de le voir.

IV. — Fonctions continues.

59. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction des n variables $x, y, \ldots$ définie dans un ensemble E.

Soient $(a, b, \ldots)$ un point déterminé de E; $h, k, \ldots$ des quantités variables, assujetties à la seule condition que le point $(a + h, b + k, \ldots)$ appartienne aussi à E.

Si, pour toute valeur de la quantité positive ε, on peut déterminer une autre quantité positive δ, telle que l'on ait

$$|f(a + h, b + k, \ldots) - f(a, b, \ldots)| < \varepsilon$$

pour tous les systèmes de valeurs de $h, k, \ldots$ pour lesquels on a

$$|h| < \delta, \qquad |k| < \delta, \qquad \ldots,$$

on dira que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est *continue au point* $(a, b, \ldots)$.

La même idée peut s'exprimer sous cette forme plus abrégée :

La fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue au point $(a, b, \ldots)$ si

$$f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots)$$

tend vers zéro en même temps que $h, k, \ldots$.

60. Soient $f, f_1, \ldots$ des fonctions des variables $x, y, \ldots$ définies dans E. Les divers systèmes de valeurs simultanées de ces fonctions correspondants aux divers points de E peuvent être considérés comme les points d'un autre ensemble F. Soit maintenant $\varphi(f, f_1, \ldots)$ une fonction des variables f, $f_1, \ldots$ définie pour tout point de F. Il est clair que φ peut être considérée comme une fonction de $x, y, \ldots$ définie pour tous les points de E.

Une semblable expression se nomme une *fonction de fonctions* ou *fonction composée.*

Si les fonctions $f, f_1, \ldots$ sont continues au point $(a, b, \ldots)$ et prennent en ce point des valeurs $\alpha, \alpha_1, \ldots$; si, de plus, la fonction φ est continue au point $(\alpha, \alpha_1, \ldots)$, cette expression, considérée comme fonction de $x, y, \ldots$ sera continue au point $(a, b, \ldots)$.

En effet, pour être assuré que l'accroissement de φ ait son module $< \varepsilon$, il suffit, par hypothèse, que les accroissements de $f, f_1, \ldots$ aient leur module $< \delta$; circonstance qui se produira, par hypothèse, toutes les fois que les modules des accroissements de $x, y, \ldots$ seront moindres qu'une autre quantité fixe η.

Les fonctions $x+y$, $x-y$, xy étant évidemment continues pour tout système de valeurs de x, y, on obtient ce corollaire que *la somme, la différence et le produit de deux fonctions continues sont continus.*

61. *Si f est continue et différente de zéro au point $(a, b, \ldots)$, $\frac{1}{f}$ sera continue en ce point.*

Soient, en effet, Δx, Δy, ... un système d'accroissements donnés à $x, y, \ldots$; Δf l'accroissement correspondant de f; celui de $\frac{1}{f}$ sera

$$\frac{1}{f+\Delta f} - \frac{1}{f} = -\frac{\Delta f}{f(f+\Delta f)},$$

et, si $|\Delta f| < |f|$, son module sera au plus égal à

$$\frac{|\Delta f|}{|f|[|f|-|\Delta f|]}$$

et sera moindre que ε, si l'on a, en outre,

$$|\Delta f| < \frac{\varepsilon |f|^2}{1+\varepsilon |f|}.$$

Or il suffit, par hypothèse, pour être assuré que ces inégalités sont satisfaites, d'assujettir $|\Delta x|, |\Delta y|, \ldots$ à rester inférieurs à un nombre fixe δ.

62. Une fonction $f(x, y, \ldots)$ est dite *continue dans un ensemble* E, si elle est continue en chacun de ses points.

Si cet ensemble E *est borné et parfait, la continuité y sera uniforme.*

Ce terme demande quelques explications.

Soit, en général, φ une fonction de deux séries de variables $x, y, \ldots$ et $h, \ldots$. Supposons que, pour chaque système de valeurs de $x, y, \ldots$ contenu dans un ensemble E, φ tende vers une limite déterminée lorsque $h, \ldots$ tendent vers des limites données $\alpha, \ldots$. L'ensemble de ces valeurs limites sera une certaine fonction Φ des variables $x, y, \ldots$.

On pourra, par définition, pour chaque nombre positif ε et pour chaque point $(x, y, \ldots)$ de E, assigner un nombre

positif δ, tel que l'on ait toujours

$$(1) \qquad |\varphi(x, y, \ldots, h, \ldots) - \Phi(x, y, \ldots)| < \varepsilon$$

dès que $|h - \alpha|$, ... sont $< \delta$.

Il existe, d'ailleurs, une infinité de nombres δ satisfaisant à cette condition; car, si elle est remplie pour une valeur de δ, elle le sera pour toute valeur plus petite. Nous désignerons par Δ le maximum de ces nombres δ (si la condition était satisfaite pour toute valeur de δ, Δ serait infini).

Nous obtenons ainsi, pour chaque valeur de ε, un ensemble de nombres positifs Δ correspondant aux divers points de E. Cet ensemble de nombres admettra un minimum η positif ou nul, lequel ne dépend plus que de ε, et la condition (1) sera satisfaite pour tout point de E, tant que l'on aura

$$|h - \alpha| < \eta, \qquad \ldots.$$

Si donc η reste > 0, quelque petit que soit ε, on pourra, pour chaque valeur positive de ε, assigner un autre nombre positif η *indépendant de* x, y, ... et tel que l'on ait, pour tout point de E,

$$|\varphi(x, y, \ldots, h, \ldots) - \Phi(x, y, \ldots)| < \varepsilon$$

dès que $|h - \alpha|$, ... sont $< \eta$.

On dira, dans ce cas, que la fonction φ *converge uniformément* vers sa limite Φ dans tout l'ensemble E.

Appliquons cette notion à une fonction $f(x, y, \ldots)$ continue dans l'ensemble E. D'après la définition de la continuité, $f(x+h, y+k, \ldots)$ tend vers $f(x, y, \ldots)$ lorsque h, k, ... tendent vers zéro. Et la continuité sera uniforme si l'on peut, quel que soit ε, trouver une quantité positive η indépendante de x, y, ... et telle que l'on ait, pour tout point de E,

$$|f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)| < \varepsilon$$

dès que

$$|h| < \eta, \qquad |k| < \eta, \qquad \ldots.$$

63. Ces explications données, procédons à la démonstra-

tion du théorème. Il nous faut établir que le minimum η des nombres Δ correspondant aux divers points $(x, y, \ldots)$ de E est nécessairement > 0.

Supposons que η fût nul. L'ensemble des Δ contiendrait des nombres moindres que toute quantité donnée. Donc E contiendrait une suite indéfinie de points $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ pour lesquels Δ serait respectivement moindre que ε, $\frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^n}, \ldots$.

Ces points admettraient au moins un point limite Π, puisque E est borné; mais E est, en outre, parfait; il contiendrait donc le point Π.

Cela posé, on pourrait (28) déterminer, dans la suite $p_0, p_1, p_2, \ldots$, une suite indéfinie de points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ convergeant vers Π et tels que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ aillent en croissant; les valeurs correspondantes de Δ étant moindres que $\frac{\varepsilon}{2^{\alpha_0}}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2^{\alpha_n}}, \ldots$ décroîtront indéfiniment.

On pourrait donc trouver dans E un point tel que son écart à Π et la valeur de Δ qui lui correspond fussent simultanément plus petits que toute quantité donnée. Ce résultat entraîne une contradiction. En effet, la fonction f étant continue au point $\Pi = (x_0, y_0, \ldots)$, on peut assigner une quantité positive δ' telle que l'on ait

$$|f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que

$$|h| < \delta', \quad |k| < \delta', \quad \ldots,$$

et il est aisé de voir que pour tout point $\Pi' = (x', y', \ldots)$ de E dont l'écart à Π est $< \frac{\delta'}{2}$, le nombre Δ sera au moins égal à $\frac{\delta'}{2}$.

Soit, en effet, $x' = x_0 + h'$, $y' = y_0 + k'$, ... On aura, par hypothèse,

$$|h'| + |k'| + \ldots < \frac{\delta'}{2}$$

et, *a fortiori*,

$$|h'| < \frac{\delta'}{2}, \qquad |k'| < \frac{\delta'}{2}, \qquad \ldots$$

Cela posé, on a, si $|h| < \frac{\delta'}{2}$, $|k| < \frac{\delta'}{2}$, $\ldots$,

$$\begin{aligned}
&|f(x'+h, y'+k, \ldots) - f(x', y', \ldots)| \\
&\overline{\overline{<}}\, |f(x'+h, y'+k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| \\
&\qquad + |f(x', y', \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| \\
&\overline{\overline{<}}\, |f(x_0+h+h', y_0+k+k', \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| \\
&\qquad + |f(x_0+h', y_0+k', \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

car, $|h+h'|$, $|k+k'|$, ... et $|h'|$, $|k'|$, ... étant $< \delta'$, chacun des deux termes du second membre est $< \frac{\varepsilon}{2}$.

64. Théorème. — *Soient f, f_1, ... des fonctions de x, y, ... continues dans un ensemble* E; *et soit* F *l'ensemble des points* $(f, f_1, \ldots)$ *qui correspondent aux divers points de* E.

1° *Si* E *est borné et parfait,* F *le sera également.*

2° *Si* E *est d'un seul tenant,* F *le sera également.*

Supposons, en effet, que E soit borné et parfait. Si F n'était pas borné, on pourrait y déterminer un point q_0, où la somme

$$s = |f| + |f_1| + \ldots$$

fût plus grande qu'un nombre donné quelconque L; puis un autre point q_1, où cette somme fût $> 2L$; un autre point q_2, où elle fût $> 4L$, etc. Soient p_0, p_1, p_2, ... les points correspondants de E. Ils seront tous différents, car f, f_1, ... n'ont qu'un seul système de valeurs en chaque point de E. Leur nombre étant infini, ils admettent au moins un point limite II, lequel appartiendra à E. Et l'on voit, comme au numéro précédent, qu'il devrait exister dans E des points dont l'écart à II fût moindre que toute quantité donnée, la valeur correspondante de s étant en même temps plus grande

que toute quantité donnée. Ce résultat est contradictoire. Soit, en effet, φ la valeur de s au point Π. La fonction s étant évidemment continue, pour tout point de E dont l'écart à Π est moindre qu'un certain nombre δ, la valeur de s reste comprise entre les deux nombres fixes $\varphi - \varepsilon$ et $\varphi + \varepsilon$.

Il reste à prouver que F est parfait, c'est-à-dire contient son dérivé F'. Soit q' un point de F' vers lequel converge une suite infinie $q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots$ de points de F. Les points correspondants de E, $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$, seront tous distincts, car à chaque point de E répond un seul point de F. Cette suite admet donc au moins un point limite Π, appartenant à E, et contient une suite de points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots$ qui convergent vers Π. Les points correspondants de F convergent vers le point q de F qui correspond à Π; mais ils convergent vers q'. Donc q' se confond avec q et appartient à F.

Supposons enfin que E soit d'un seul tenant et montrons qu'il en est de même de F. Soient q et Q deux points quelconques de F;

$$p = (x, y, \ldots) \quad \text{et} \quad P = (X, Y, \ldots)$$

les points correspondants de E; on peut les relier par une chaîne de points intermédiaires $p_1, p_2, \ldots$, telle que l'écart

$$|x_{k+1} - x_k| + |y_{k+1} - y_k| + \ldots$$

de deux points consécutifs

$$p_k = (x_k, y_k, \ldots) \quad \text{et} \quad p_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots)$$

et, *a fortiori*, chacun des modules

$$|x_{k+1} - x_k|, \quad |y_{k+1} - y_k|, \quad \ldots,$$

soit moindre qu'un nombre donné quelconque η.

Or, la continuité étant uniforme dans tout le domaine E, on peut prendre η assez petit pour que, pour toute valeur de k, chacune des quantités

$$|f(x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots) - f(x_k, y_k, \ldots)|,$$
$$|f_1(x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots) - f_1(x_k, y_k, \ldots)|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, par suite, leur somme, devienne aussi petite qu'on voudra. Or, cette somme représente l'écart des points q_k et q_{k+1} qui correspondent à p_k et à p_{k+1}. Les points $q, q_1, \ldots$, Q forment ainsi une chaîne où l'écart de deux points consécutifs est moindre qu'un nombre ε choisi arbitrairement. Notre proposition est donc établie.

Corollaires. — Considérons en particulier le cas où nous n'avons qu'une seule fonction f de $x, y, \ldots$ continue dans E : 1° si E est borné et parfait, F admettra un maximum et un minimum et les atteindra (25); 2° si E est d'un seul tenant, F contiendra toute la suite des nombres compris entre son maximum et son minimum (34).

Si au lieu d'une seule fonction continue nous en avons plusieurs $f, f_1, \ldots$, la fonction

$$s = |f| + |f_1| + \ldots$$

jouira des propriétés ci-dessus.

65. Soient $u, v, \ldots$ des fonctions des variables $x, y, \ldots$ en même nombre que ces dernières, et définies dans un ensemble E. A chaque point $(x, y, \ldots)$ de E correspond un point $(u, v, \ldots)$; la réunion de ces derniers points forme un ensemble F.

Supposons qu'à chaque point de F corresponde réciproquement un seul point de E; on pourra considérer $x, y, \ldots$ comme des fonctions de $u, v, \ldots$ définies dans l'ensemble F. Ce nouveau système de fonctions se nomme l'*inverse* du système de fonctions primitivement considéré.

Si l'ensemble E *est borné et parfait, et les fonctions* $u, v, \ldots$ *continues dans* E, $x, y, \ldots$ *seront réciproquement des fonctions de* $u, v, \ldots$ *continues dans* F.

Il nous faut prouver que, si l'on prend dans F une suite de points $q_1 = (u_1, v_1, \ldots), \ldots, q_n = (u_n, v_n, \ldots), \ldots$ convergeant vers un point χ (lequel appartiendra à F), les points correspondants $p_1 = (x_1, y_1, \ldots), \ldots, p_n = (x_n, y_n, \ldots), \ldots$

convergeront nécessairement vers le point Π qui correspond à χ.

Supposons qu'il en soit autrement ; il existera un nombre ε tel qu'on puisse, quel que soit n, trouver dans la suite p_{n+1}, p_{n+2}, ... un point p_α, dont l'écart à Π soit $> \varepsilon$. Après celui-là on en pourra trouver un autre p_β, et ainsi de suite. L'ensemble de ces points p_α, p_β, ..., en nombre infini, admettra au moins un point limite Π′, dont l'écart à Π sera encore $\overline{\geq} \varepsilon$. On pourra déterminer dans cette suite un point p_λ dont l'écart à Π′ soit moindre qu'un nombre donné δ, puis un autre point p_μ plus voisin de Π′ que p_λ et dont l'écart à Π soit $< \frac{\delta}{2}$, et ainsi de suite.

Aux points p_λ, p_μ, ... ainsi obtenus correspondent dans F les points q_λ, q_μ, ... qui tendent vers χ. Mais, à cause de la continuité des fonctions u, v, ..., ils doivent tendre vers le point χ' de F qui correspond à Π′. Donc $\chi = \chi'$, et ce point unique correspond à deux points différents Π et Π′ de E, contrairement aux suppositions de l'énoncé.

66. *Une fonction $f(x, y, \ldots)$ continue dans un domaine* E *borné et parfait est intégrable.*

On peut, en effet, quel que soit ε, trouver une autre quantité positive η telle que l'on ait

$$|f(x+h, y+k, \ldots) - f(x, y, \ldots)| < \varepsilon,$$

si $|h|$, $|k|$, ... sont $< \eta$. Si donc nous décomposons E en éléments e_k de diamètre $< \eta$, l'oscillation O_k sera, dans chacun d'eux, $< \varepsilon$. La condition d'intégrabilité sera donc satisfaite.

V. — Fonctions à variation bornée.

67. Soit $y = f(x)$ une fonction d'une seule variable x, bornée dans un intervalle ab qui contienne les valeurs particulières x_0 et $X > x_0$. Donnons à x une suite de valeurs

croissantes $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, X, et soient $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, Y les valeurs correspondantes de y. On aura

$$(1) \qquad Y - y_0 = \sum (y_k - y_{k-1}) = p - n,$$

p désignant la somme des termes positifs, n celle des termes négatifs de la somme ci-dessus.

Nous dirons que p est la *variation positive* de y et n sa *variation négative* pour le système de valeurs $x_0, x_1, \ldots$, X. La somme

$$(2) \qquad t = \sum |y_k - y_{k-1}| = p + n$$

sera sa *variation totale*.

En changeant le nombre et la position des valeurs intermédiaires $x_1, \ldots, x_{n-1}$, on pourra faire varier ces trois sommes. En particulier, si entre x_{k-1} et x_k on intercale une nouvelle valeur ξ, ces sommes conserveront leur valeur primitive, si $f(\xi)$ est compris entre y_{k-1} et y_k; sinon p et n seront accrus tous deux de la différence entre $f(\xi)$ et celle des quantités y_{k-1}, y_k dont elle est la plus voisine, et t sera accru du double de cette différence.

Cela posé, admettons qu'un des trois systèmes de sommes p, n, t admette un maximum. Il en sera de même de chacun des deux autres, en vertu des équations (1) et (2). On dira, dans ce cas, que y est une *fonction à variation bornée* entre x_0 et X.

68. Les fonctions à variation bornée, telles qu'elles viennent d'être définies, ont pour caractère spécifique de pouvoir être mises sous la forme

$$y = z - u,$$

z et u étant des fonctions positives, bornées et non décroissantes entre x_0 et X.

Pour le démontrer, considérons deux valeurs quelconques x', x'' dans l'intervalle de x_0 à X (x'' étant supposé compris entre x' et X).

Soient

y', y'' les valeurs correspondantes de y;

p', n', t' les variations de y dans l'intervalle $x_0 x'$ pour un choix quelconque de valeurs intermédiaires $x_1, x_2, \ldots$;

p'', n'', t'' les variations de y dans l'intervalle $x_0 x''$ en prenant pour valeurs intermédiaires $x_1, x_2, \ldots, x'$ et d'autres valeurs quelconques $x'_1, \ldots$ intercalées entre x' et x'';

p, n, t les variations de y dans l'intervalle total $x_0 X$, en prenant pour valeurs intermédiaires $x_1, \ldots, x', x'_1, \ldots, x''$.

On aura évidemment

$$y' - y_0 = p' - n', \qquad y'' - y_0 = p'' - n'',$$
$$p' \leqq p'' \leqq p, \qquad n' \leqq n'' \leqq n, \qquad t' \leqq t'' \leqq t.$$

Mais, par hypothèse, p, n, t admettent des maxima P, N, T. Donc, p', n', t' et p'', n'', t'' admettent aussi des maxima $P', N', T', P'', N'', T''$, et l'on aura les inégalités

$$P' \leqq P'' \leqq P, \qquad N' \leqq N'' \leqq N, \qquad T' \leqq T'' \leqq T,$$

desquelles il résulte que P', N', T' sont des fonctions de x', positives de leur nature et, en outre, bornées et non décroissantes de x_0 à X.

Cela posé, en faisant varier le nombre et la position des valeurs intermédiaires $x_1, x_2, \ldots$, on peut faire en sorte que p' se rapproche indéfiniment de son maximum P'. La différence $p' - n'$ étant constante, n' se rapprochera en même temps que son maximum N'. L'équation

$$y' - y_0 = p' - n'$$

deviendra donc à la limite

$$y' - y_0 = P' - N',$$

ce qui montre que y' est la différence des deux fonctions positives, bornées et non décroissantes

$$P' + y_0 + c \quad \text{et} \quad N' + c,$$

c désignant une constante positive quelconque $> -y_0$.

Réciproquement, si $y = z - u$, z et u étant des fonctions positives, bornées et non décroissantes entre x_0 et X, sa variation totale t sera limitée; car on a, en désignant par z_0, z_1, ..., Z et u_0, u_1, ..., U les valeurs de z et de u pour $x = x_0, x_1, \ldots, X$,

$$t = \sum |y_k - y_{k-1}| = \sum |z_k - u_k - (z_{k-1} - u_{k-1})|$$

$$\leqq \sum |z_k - z_{k-1}| + \sum |u_k - u_{k-1}| \leqq Z - z_0 + U - u_0.$$

69. Soient $y = z - u$, $y' = z' - u'$ deux fonctions à variation bornée; leur somme

$$z + z' - (u + u'),$$

leur différence

$$z + u' - (u + z')$$

et leur produit

$$zz' + uu' - (uz' + zu')$$

seront évidemment des fonctions de même nature.

Enfin, si y a une variation bornée, et si, de plus, son module a un minimum μ différent de zéro, $\frac{1}{y}$ aura une variation bornée.

En effet, sa variation totale

$$\sum \left| \frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_{k-1}} \right| = \sum \left| \frac{y_k - y_{k-1}}{y_k y_{k-1}} \right| \leqq \sum \frac{|y_k - y_{k-1}|}{\mu^2}$$

reste toujours inférieure à un nombre fixe.

70. *Une fonction $f(x)$ à variation bornée dans un intervalle ab est intégrable dans cet intervalle.*

On a

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions croissantes et bornées. Il suffit donc de montrer qu'une semblable fonction $\varphi(x)$ est intégrable.

Décomposons le champ ab en éléments e_k; soit O_k l'oscil-

lation de la fonction dans e_k; on aura

$$\sum O_k e_k \overline{\overline{<}} e \sum O_k,$$

e désignant le plus long des intervalles e_k.

Or, $\varphi(x)$ étant constamment croissante de a à b, $\sum O_k$ représentera évidemment son accroissement total

$$\varphi(b) - \varphi(a).$$

Cette quantité est une constante; d'autre part, si les éléments e_k décroissent indéfiniment, e tend vers zéro; donc $\lim \sum O_k e_k = 0$, et $\varphi(x)$ est intégrable.

71. Soient $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ une fonction à variation bornée et h un infiniment petit positif. Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant non décroissantes, $\varphi(x-h)$ et $\psi(x-h)$ varieront toujours dans le même sens quand h décroît, sans jamais surpasser les valeurs fixes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Elles tendront donc vers une limite, et leur différence $f(x-h)$ tendra aussi vers une limite, que nous représenterons par $f(x-0)$.

On voit de même que $f(x+h)$ tend vers une limite, qu'on peut représenter par $f(x+0)$.

72. *Une fonction $f(x)$, continue et à variation bornée dans l'intervalle de x_0 à X, est la différence de deux fonctions continues et non décroissantes.*

En effet, $f(x)$ ayant une variation bornée, on aura

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions non décroissantes à variation bornée.

Considérons, en particulier, la fonction $\varphi(x)$. Pour une valeur de x, intermédiaire entre x_0 et X, on aura

$$\varphi(x-\varepsilon) \overline{\overline{<}} \varphi(x) \overline{\overline{<}} \varphi(x+\varepsilon).$$

Si ε tend vers zéro, $\varphi(x-\varepsilon)$, $\varphi(x+\varepsilon)$, qui varient toujours dans le même sens, tendront vers des limites déterminées $\varphi(x-0)$ et $\varphi(x+0)$, et l'on aura encore

$$\varphi(x-0) \overline{\overline{<}} \varphi(x) \overline{\overline{<}} \varphi(x+0).$$

Si la différence $\varphi(x+0)-\varphi(x-0)$ est égale à zéro, la fonction φ sera continue au point x; sinon, cette différence sera positive, et nous dirons que la fonction présente en ce point une *discontinuité* égale à cette différence.

Cette discontinuité peut d'ailleurs se séparer en deux parties : la *discontinuité antérieure* $\varphi(x)-\varphi(x-0)$ et la *discontinuité postérieure* $\varphi(x+0)-\varphi(x)$.

La fonction $\varphi(x)$ n'étant pas définie pour les valeurs de la variable $< x_0$ ou $> X$, nous n'aurons à considérer, pour $x = x_0$, qu'une discontinuité postérieure; pour $x = X$, qu'une discontinuité antérieure.

Soient maintenant a, x deux valeurs quelconques de la variable; $x_1, \ldots, x_n$ une série de valeurs intermédiaires entre celles-là. Formons la somme des discontinuités

$$\varphi(a+0)-\varphi(a) + \sum_1^n [\varphi(x_k+0)-\varphi(x_k-0)] + \varphi(x)-\varphi(x-0),$$

que nous désignerons par

$$S(a, x_1, \ldots, x).$$

Cette somme est au moins égale à $\varphi(a+0)-\varphi(a)$; mais nous allons voir, d'autre part, qu'elle ne peut surpasser $\varphi(x)-\varphi(a)$.

Soit, en effet, ξ_k un point quelconque intermédiaire entre x_k et x_{k+1}; la fonction φ étant non décroissante, on aura

$$\varphi(x_k+0) \overline{\overline{<}} \varphi(\xi_k) \overline{\overline{<}} \varphi(x_{k+1}-0).$$

Soient de même ξ_0 et ξ_n des points respectivement intermé-

diaires entre a et x_1 et entre x_n et x, on aura

$$\varphi(a+0) \overline{\overline{<}} \varphi(\xi_0) \overline{\overline{<}} \varphi(x_1-0),$$
$$\varphi(x_n+0) \overline{\overline{<}} \varphi(\xi_n) \overline{\overline{<}} \varphi(x-0).$$

On aura, par suite,

$$\begin{aligned} &S(a, x_1, \ldots, x) \\ &\overline{\overline{<}} \varphi(\xi_0) - \varphi(a) + \sum_1^n [\varphi(\xi_k) - \varphi(\xi_{k-1})] + \varphi(x) - \varphi(\xi_n \\ &\overline{\overline{<}} \varphi(x) - \varphi(a). \end{aligned}$$

Cette somme restant ainsi inférieure à une limite fixe, quels que soient le nombre et la position des points de division $x_1, \ldots, x_n$, admettra un maximum $S(a, x)$, que nous appellerons la *discontinuité totale* de la fonction dans l'intervalle de a à x. Ce maximum sera compris entre $\varphi(a+0) - \varphi(a)$ et $\varphi(x) - \varphi(a)$.

D'ailleurs, on a évidemment, d'après la définition des sommes S,

$$S(a, x_1, \ldots, x) = S(a, x_1, \ldots, x_k) + S(x_k, \ldots, x);$$

d'où, en supposant que x_k conserve une valeur constante b et passant à la limite,

$$S(a, x) = S(a, b) + S(b, x).$$

On voit par là que la fonction $S(x_0, x)$ est une fonction de x non décroissante de x_0 à X.

Posons maintenant

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + S(x_0, x).$$

La nouvelle fonction $\varphi_1(x)$ sera continue et non décroissante.

On a, en effet, h étant positif,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x+h) &= \varphi(x+h) - S(x_0, x+h) - \varphi(x) + S(x_0, x) \\ &= \varphi(x+h) - \varphi(x) - S(x, x+h). \end{aligned}$$

Cette quantité ne peut être négative, car $S(x, x+h)$ est au plus égal à $\varphi(x+h) - \varphi(x)$.

D'ailleurs elle tend vers zéro avec h; car, $S(x, x+h)$ étant au moins égal à $\varphi(x+0) - \varphi(x)$, elle ne saurait être supérieure à $\varphi(x+h) - \varphi(x+0)$, qui tend vers zéro avec h.

La fonction non décroissante $\psi(x)$ admet en chaque point la même discontinuité que $\varphi(x)$, puisque leur différence $\varphi(x) - \psi(x)$ est supposée continue. Donc, dans tout intervalle, $\psi(x)$ aura la même discontinuité totale que $\varphi(x)$, de telle sorte que, en répétant les raisonnements précédents, on aura

$$\psi(x) = \psi_1(x) + S(x_0, x),$$

$\psi_1(x)$ étant une fonction continue et non décroissante et $S(x_0, x)$ représentant la même fonction que tout à l'heure. On aura donc

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x),$$

ce qu'il fallait démontrer.

VI. — Dérivées et intégrales des fonctions d'une seule variable.

73. Soit $f(x)$ une fonction d'une variable x, définie dans l'intérieur d'un domaine D.

Soient x_0 un point fixe intérieur à D; δ son écart de la frontière de D; tout point $x_0 + h$ où $|h| < \delta$ sera encore intérieur à D.

Si l'expression

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

tend vers une limite fixe lorsque h tend vers zéro, cette limite s'appellera la *dérivée* de $f(x)$ au point x_0 et se représentera par $f'(x_0)$.

Si, pour tous les points intérieurs à D, $f(x)$ admet une

dérivée, l'ensemble de ces valeurs constituera une nouvelle fonction, également définie à l'intérieur de D, qu'on nomme la *dérivée de* $f(x)$ et qu'on représentera, avec Lagrange, par $f'(x)$, ou, avec Cauchy, par $\mathrm{D}f(x)$.

Toute fonction qui a une dérivée est continue.

En effet, l'égalité

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

donne

$$\lim[f(x+h)-f(x)] = f'(x) \lim h = 0.$$

Si $f(x)$ *se réduit à une constante, sa dérivée sera nulle.* On a, en effet,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0;$$

d'où

$$f'(x) = \lim 0 = 0.$$

Si $f(x) = x$, *sa dérivée est égale à* 1. Car on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1;$$

d'où

$$f'(x) = \lim 1 = 1.$$

74. Posons, pour abréger,

$$h = \Delta x, \qquad f(x+h)-f(x) = \Delta f(x).$$

On a, par définition,

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x);$$

d'où

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \mathrm{R},$$

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \mathrm{R}\Delta x,$$

R tendant vers zéro avec Δx.

Ainsi $\Delta f(x)$ se compose de deux termes : l'un, $f'(x)\Delta x$,

simplement proportionnel à Δx, et qui constitue sa valeur principale; l'autre, $R\,\Delta x$, infiniment petit d'ordre plus élevé.

Le premier terme $f'(x)\,\Delta x$ se nomme la *différentielle* de $f(x)$ et se désigne par $df(x)$.

Dans le cas particulier où $f(x)$ se réduit à x, sa dérivée étant égale à l'unité, l'équation de définition

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x \tag{1}$$

se réduit à

$$dx = \Delta x.$$

Substituant cette valeur de Δx dans l'équation générale (1), on en conclura

$$df(x) = f'(x)\,dx, \qquad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Cette nouvelle expression de la dérivée par un quotient de différentielles est très fréquemment employée pour la représenter.

75. *Dérivée d'une somme.* — Soit $y = u + v - w$ une somme algébrique de fonctions ayant les dérivées connues u', v', w'. On aura évidemment, en désignant par Δy, Δu, Δv, Δw les accroissements de ces fonctions correspondant à l'accroissement $h = \Delta x$ donné à la variable indépendante,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x};$$

d'où, en faisant tendre Δx vers zéro et passant à la limite,

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v' - w'.$$

Dérivée d'un produit. — Soit $y = uv$, u et v ayant des dérivées connues u' et v'. On aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}(v + \Delta v) + u\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$y' = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim (v + \Delta v) + u \lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + uv'.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Si l'on avait $y = uvw\ldots$, on aurait évidemment, d'après cela,

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \ldots.$$

Dérivée d'un quotient. — Soit $y = \frac{u}{v}$; on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

et, à la limite,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Dérivée d'une fonction de fonction. — Soit $y = F(u)$, $u = f(x)$ étant lui-même une fonction de x; on aura évidemment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

et à la limite, Δu tendant vers zéro avec Δx,

$$y' = \lim \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = F'(u)u' = F'[f(x)]\,f'(x).$$

Dérivée d'une fonction inverse. — Soit $y = f(x)$ une fonction admettant une fonction inverse, de telle sorte qu'on ait $x = \varphi(y)$. Si l'une de ces fonctions a une dérivée connue, on aura immédiatement la dérivée de l'autre.

On a, en effet, en supposant connue la dérivée de φ, par exemple,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}; \qquad \text{mais} \qquad \lim \frac{\Delta x}{\Delta y} = \varphi'(y).$$

Donc, à la limite,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\varphi'[f(x)]}.$$

76. *Si, en un point donné x, la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle, on pourra assigner une quantité δ, telle que l'expression*

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ait le signe de $f'(x)\,\Delta x$ pour toutes les valeurs de Δx de module $< \delta$.

On a, en effet,

$$\lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

d'où

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \mathrm{R},$$

R tendant vers zéro avec Δx. On peut donc assigner une quantité δ, telle que, si $|\Delta x| < \delta$, $|\mathrm{R}|$ soit $< |f'(x)|$. Alors, $f'(x) + \mathrm{R}$ ayant le même signe que $f'(x)$, $\Delta f(x)$ aura le même signe que $f'(x)\,\Delta x$.

77. Théorème de Rolle. — *Si $f(x)$ admet une dérivée dans l'intervalle de x_0 à X et s'annule pour x_0 et X, sa dérivée s'annulera en un point intermédiaire.*

Les valeurs de x qui sont $\overline{\overline{>}}\, x_0$ et $\overline{\overline{<}}\, \mathrm{X}$ formant un ensemble borné et parfait, la fonction $f(x)$ admet, dans cet intervalle de x_0 à X, un maximum et un minimum et les atteint effectivement (64). Si ce maximum et ce minimum sont nuls tous deux, $f(x)$ sera constamment nulle, sa dérivée aussi, et le théorème sera démontré.

Supposons, au contraire, que le maximum, par exemple, soit différent de zéro. Soit ξ la valeur correspondante de x, laquelle sera différente de x_0 et de X. On aura $f'(\xi) = 0$; car, s'il en était autrement, l'expression

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi)$$

aurait, pour des valeurs suffisamment petites de Δx, le signe de $f'(\xi)\,\Delta x$. En donnant à Δx un signe convenable, on pourrait la rendre positive. Donc ξ ne correspondrait pas à la valeur maximum de f, comme on l'a supposé.

78. *Corollaire.* — Soient $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ trois fonctions admettant des dérivées dans l'intervalle de a à b; considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x+h) & \varphi(x+h) & \psi(x+h) \\ f(x+\theta h) & \varphi(x+\theta h) & \psi(x+\theta h) \end{vmatrix}.$$

C'est une fonction de la variable θ, qui s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = 1$, et qui, d'après les règles de dérivation données ci-dessus (75), admet pour dérivée, dans cet intervalle, le produit de h par le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(x) & \varphi(x) & \psi(x) \\ f(x+h) & \varphi(x+h) & \psi(x+h) \\ f'(x+\theta h) & \varphi'(x+\theta h) & \psi'(x+\theta h) \end{vmatrix}.$$

Ce nouveau déterminant devra donc s'annuler pour une valeur de θ comprise entre 0 et 1.

Posons, en particulier, $\psi(x) = 1$; d'où $\psi'(x) = 0$. L'équation $\Delta = 0$ deviendra

$$[\varphi(x) - \varphi(x+h)]f'(x+\theta h) \\ + [f(x+h) - f(x)]\,\varphi'(x+\theta h) = 0;$$

d'où

$$(2) \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)}.$$

Si nous posons, en outre, $\varphi(x) = x$, d'où $\varphi'(x) = 1$, cette dernière équation deviendra

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x+\theta h)$$

ou

$$(3) \qquad f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h).$$

Dans cette formule, $x+\theta h$ est une quantité inconnue, mais comprise entre x et $x+h$.

79. Si la dérivée $f'(x)$ est constamment nulle dans cet intervalle, on aura

$$f'(x+\theta h)=0;$$

d'où

$$f(x+h)-f(x)=0.$$

Si cette dérivée, sans être constamment nulle, n'est jamais négative, $f(x+h)-f(x)$ aura le signe de h. Soient, en effet, ξ un des points de l'intervalle de x à $x+h$ pour lesquels la dérivée est positive; $\xi+\delta$ un point infiniment voisin de ξ et compris entre ξ et $x+h$. On aura

$$\begin{aligned} &f(x+h)-f(x)\\ &\quad=f(x+h)-f(\xi+\delta)+f(\xi+\delta)-f(\xi)+f(\xi)-f(x)\\ &\quad=(x+h-\xi-\delta)f'(\eta)+[f(\xi+\delta)-f(\xi)]+(\xi-x)f'(\eta_1),\end{aligned}$$

η étant un nombre compris entre $x+h$ et $\xi+\delta$, η_1 un nombre compris entre ξ et x.

Si l'on prend δ assez petit, $f(\xi+\delta)-f(\xi)$ aura le signe de $\delta f'(\xi)$. D'ailleurs, $f'(\xi)$ est positif, $f'(\eta)$, $f'(\eta_1)$ positifs ou nuls. Enfin, δ, $x+h-\xi-\delta$, $\xi-x$ ont le signe de h. Donc, sur les trois termes qui composent $f(x+h)-f(x)$, l'un a sûrement le signe de h, les deux autres ont aussi le signe de h, s'ils ne sont pas nuls. La somme a donc le signe de h.

On voit de même que, si la dérivée $f'(x)$, sans être constamment nulle, n'est jamais positive, $f(x+h)-f(x)$ sera de signe contraire à h.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *La fonction $f(x)$ reste constante dans tout intervalle où $f'(x)$ est constamment nul; elle croît avec x dans tout intervalle où $f'(x)$ reste positif; elle décroît, au contraire, quand x croît, dans tout intervalle où $f'(x)$ reste négatif.*

Les deux dernières parties de ce théorème subsistent encore si $f'(x)$ peut s'annuler dans l'intervalle considéré, mais sans changer de signe, pourvu qu'il soit impossible d'isoler dans l'intervalle considéré un intervalle partiel dans lequel $f'(x)$ soit constamment nul.

80. Théorème. — *Si $f'(x)$ reste continue dans un ensemble E borné et parfait, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y tendra uniformément vers sa limite $f'(x)$.*

En effet, cette expression est égale à $f'(x+\theta h)$. Mais $f'(x)$, étant continue, l'est uniformément dans E (63).

Donc, on peut assigner une quantité η, indépendante de x, et telle qu'on ait

$$|f'(x+\theta h)-f'(x)|<\varepsilon$$

dès que le module de θh et, *a fortiori*, dès que celui de h est $<\eta$.

81. Théorème. — *Si la fonction $f(x)$ est intégrable de a à b, l'intégrale définie*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X),$$

où x_0 et X sont compris entre a et b, est une fonction de X à variation bornée et continue. Si de plus $f(x)$ est continue au point X, F(X) aura en ce point une dérivée égale à $f(X)$.

Soit, en effet, μ le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle ab. Décomposons l'intervalle de x_0 à X en intervalles partiels $x_0x_1, \ldots, x_{k-1}x_k, \ldots, x_{n-1}X$. La variation totale de la fonction intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

relative à cette décomposition, sera

$$\sum \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \right| \overline{\gtrless} \sum \mu \,|\, x_k - x_{k-1} \,|\, \overline{\gtrless} \mu \,|\, X - x_0 \,|.$$

On voit donc qu'elle ne peut surpasser une limite fixe. Donc F(X) a une variation bornée.

En second lieu, changeons X en $X + \Delta X$; on aura

$$\Delta F(X) = \int_{x_0}^{X+\Delta x} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{X}^{X+\Delta x} f(x)\,dx,$$

quantité qui tend vers zéro avec Δx, car son module est au plus égal à $\mu \,|\, \Delta x \,|$.

Supposons enfin que $f(x)$ soit continue au point X. On aura par définition

$$\int_{X}^{X+\Delta x} f(x)\,dx = \lim \sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

$x_1, \ldots, x_{n-1}$ étant des valeurs intermédiaires infiniment voisines les unes des autres, intercalées entre $X = x_0$ et $X + \Delta X = x_n$, et ξ_k une quantité intermédiaire entre x_{k-1} et x_k.

On peut, par hypothèse, quel que soit ε, déterminer une quantité δ, telle qu'on ait, tant que $|h| < \delta$,

$$|f(X+h) - f(X)| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$f(X+h) = f(X) + R,$$

R ayant son module $< \varepsilon$.

Supposons maintenant $|\Delta X| < \delta$. A plus forte raison, les modules des différences $\xi_k - X$ seront $< \delta$, et l'on aura généralement

$$f(\xi_k) = f(X) + R_k,$$

R_k ayant son module $< \varepsilon$.

Substituant ces valeurs des quantités $f(\xi_k)$, il viendra

$$\sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum [f(\mathrm{X}) + \mathrm{R}_k](x_k - x_{k-1})$$
$$\overline{\overline{<}} \sum [f(\mathrm{X}) + \varepsilon](x_k - x_{k-1}) \overline{\overline{<}} [f(\mathrm{X}) + \varepsilon]\,\Delta\mathrm{X}$$
$$\overline{\overline{>}} \sum [f(\mathrm{X}) - \varepsilon](x_k - x_{k-1}) \overline{\overline{>}} [f(\mathrm{X}) - \varepsilon]\,\Delta\mathrm{X}.$$

La quantité

$$\frac{\sum f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}{\Delta\mathrm{X}}$$

est donc toujours comprise entre $f(\mathrm{X}) + \varepsilon$ et $f(\mathrm{X}) - \varepsilon$. Il en sera de même de sa limite

$$\frac{1}{\Delta\mathrm{X}} \int_{\mathrm{X}}^{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} f(x)\,dx.$$

On peut, d'ailleurs, prendre ε aussi petit qu'on voudra, à condition de faire décroître suffisamment $\Delta\mathrm{X}$. On aura donc à la limite

$$\mathrm{F}'(\mathrm{X}) = \lim \frac{\int_{\mathrm{X}}^{\mathrm{X}+\Delta\mathrm{X}} f(x)\,dx}{\Delta\mathrm{X}} = f(\mathrm{X}).$$

Remarque. — Si l'on supposait X constant, mais x_0 variable, l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx$$

serait une fonction de x_0. D'ailleurs, elle est égale et de signe contraire à

$$\int_{\mathrm{X}}^{x_0} f(x)\,dx$$

dont la dérivée est égale, d'après ce qui précède, à $f'(x_0)$. Sa dérivée sera donc $-f'(x_0)$.

82. Le théorème qui précède montre que *toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle de a à b est la dérivée d'une autre fonction* $F(x)$.

Il est, d'ailleurs, aisé de trouver l'expression générale des fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$. Soit, en effet,

$$\mathfrak{F}(x) = F(x) + \varphi(x)$$

l'une d'elles. Sa dérivée sera

$$F'(x) + \varphi'(x) = f(x) + \varphi'(x).$$

Pour qu'elle se réduise à $f(x)$, il faut et il suffit que $\varphi'(x)$ soit nul. Donc, $\varphi(x)$ se réduit à une constante c (79), qui peut d'ailleurs être choisie arbitrairement.

Lorsqu'on a obtenu, par un procédé quelconque, une fonction $\mathfrak{F}(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$, on trouve, sans peine, la valeur correspondante de c. En effet, dans l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \mathfrak{F}(X) + c,$$

faisons $X = x_0$. Le premier membre s'annulant, il vient

$$\mathfrak{F}(x_0) + c = 0,$$

et, par suite,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \mathfrak{F}(X) - \mathfrak{F}(x_0).$$

On nomme *fonctions primitives* ou *intégrales indéfinies* de $f(x)$ les fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$. On les désigne par la notation

$$\int f(x)\,dx$$

pour mettre en lumière leur liaison avec l'intégrale définie.

Cette expression, comme on vient de le voir, ne représente pas une fonction déterminée, mais une infinité de fonctions, différant les unes des autres de quantités constantes.

83. *Dérivation des intégrales définies par rapport à un paramètre.* — Soit $f(x, y, \ldots, \alpha)$ une fonction des variables $x, y, \ldots, \alpha$ qui reste continue tant que $x, y, \ldots$ restent intérieurs à un domaine D et α intérieur à un domaine $\mathfrak{D}$.

Soit E un domaine borné et parfait intérieur à D; pour toute valeur de α intérieure à $\mathfrak{D}$, l'intégrale

$$I = \mathbf{S}_E f(x, y, \ldots, \alpha)\, de$$

aura une valeur déterminée; c'est donc une fonction de α.

Cette fonction est continue; car, si l'on change α en $\alpha + \Delta\alpha$, elle prendra un accroissement

$$\begin{aligned} \Delta I &= \mathbf{S}_E f(x, y, \ldots, \alpha + \Delta\alpha)\, de - \mathbf{S}_E f(x, y, \ldots, \alpha)\, de \\ &= \mathbf{S}_E \Delta f(x, y, \ldots, \alpha)\, de, \end{aligned}$$

dont le module ne pourra surpasser LE; L étant le maximum du module de $\Delta f(x, y, \ldots, \alpha)$.

Or, soit δ une quantité dont le module soit moindre que l'écart de α à la frontière de $\mathfrak{D}$; le point $\alpha + \Delta\alpha$ sera encore intérieur à $\mathfrak{D}$, tant que $|\Delta\alpha|$ sera $\overline{\overline{<}}\, \delta$. La fonction f restera donc continue tant que $x, y, \ldots$ se mouvront dans E et que le paramètre variera entre $\alpha - \delta$ et $\alpha + \delta$. Cet ensemble de valeurs étant évidemment borné et parfait, la continuité de f y sera uniforme; donc L, et par suite ΔI, tendront vers zéro avec $\Delta\alpha$.

Supposons de plus que f considérée comme fonction de α seulement ($x, y, \ldots$ conservant des valeurs constantes) admette une dérivée; ce sera une nouvelle fonction de $x, y, \ldots, \alpha$, que nous pourrons désigner par $f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)$, et nous aurons

$$\Delta f(x, y, \ldots, \alpha) = f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha + \theta\, \Delta\alpha)\, \Delta\alpha,$$

θ étant une quantité variable, mais toujours comprise entre 0 et 1.

Si nous admettons enfin que f'_α soit continue dans le même champ où nous avons déjà supposé que f l'était, cette expression sera de la forme

$$[f'_\alpha(x, y, \ldots \alpha) + \mathrm{R}]\,\Delta\alpha,$$

R tendant uniformément vers zéro avec $\Delta\alpha$, dans tout le domaine E.

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta\alpha} &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}}[f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha) + \mathrm{R}]\,de \\ &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}} f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)\,de + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de.\end{aligned}$$

Soit L_1 le maximum de $|\mathrm{R}|$ dans E; on aura

$$\left|\mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de\right| \leqq \mathrm{L}_1 \mathrm{E},$$

quantité qui tend vers zéro avec $\Delta\alpha$. On aura donc

$$\lim \frac{\Delta \mathrm{I}}{\Delta\alpha} = \mathbf{S}_{\mathrm{E}} f'_\alpha(x, y, \ldots, \alpha)\,de.$$

L'intégrale I admet donc une dérivée, représentée par l'intégrale ci-dessus.

84. *Intégration par parties.* — Soit

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

une fonction formée du produit de deux autres. On aura

$$df(x) = \varphi'(x)\psi(x)\,dx + \varphi(x)\psi'(x)\,dx$$

et, en intégrant de $x = a$ à $x = b$,

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi'(x)\psi(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\psi'(x)\,dx \\ = \int_a^b df(x) = f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Cette équation ramène, comme on voit, le calcul de l'une

des deux intégrales qui figurent au premier membre au calcul de l'autre, qui pourra se trouver plus simple.

Ce procédé de réduction a reçu le nom d'*intégration par parties*.

Quant au second membre $f(b)-f(a)$, il conviendra, lorsque la fonction $f(x)$ a une expression compliquée, de le représenter par la notation abrégée

$$[f(x)]_a^b.$$

VII. — Dérivées partielles. Différentielles totales.

85. Passons à la considération des fonctions de plusieurs variables.

Soit, par exemple, $u=f(x, y)$ une fonction de deux variables x, y définie dans tout l'intérieur d'un certain domaine D.

Soit (x, y) un point quelconque intérieur à D. On pourra déterminer une quantité δ telle que tous les points

$$|x+\Delta x, y+\Delta y|,$$

où

$$|\Delta x|+|\Delta y|<\delta,$$

soient encore intérieurs à D.

Changeons x en $x+\Delta x$, sans faire varier y. Si l'expression

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}$$

tend vers une limite fixe quand Δx tend vers zéro, cette limite se nommera la *dérivée partielle* de f par rapport à x au point x, y. On la représente indifféremment par l'une ou l'autre des trois notations suivantes :

$$f'_x(x, y), \quad D_x f(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}.$$

Si l'expression

$$\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x, y)}{\Delta y}$$

tend de même vers une limite, ce sera la dérivée partielle par rapport à y, et on la représentera par les notations analogues

$$f'_y(x, y), \quad D_y f(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Si en chaque point intérieur à D il existe des dérivées partielles, chacune d'elles sera une nouvelle fonction de x, y, définie dans l'intérieur de D.

86. Supposons maintenant qu'au lieu de faire varier isolément x, y, on les change simultanément en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, et étudions l'accroissement

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

ou, en appliquant la formule (3) du n° 78,

$$f'_y(x + \theta\,\Delta x, y + \Delta y)\,\Delta x + f'_y(x, y + \theta_1\,\Delta y)\,\Delta y,$$

θ et θ_1 étant des quantités plus petites que l'unité.

Faisons tendre Δx et Δy vers zéro. $\theta\,\Delta x$ et $\theta_1\,\Delta y$ tendent *a fortiori* vers zéro, de quelque manière que puissent varier θ et θ_1. Si donc les fonctions f'_x, f'_y sont continues au point x, y, les multiplicateurs de Δx et de Δy tendront respectivement vers $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$.

Soit d'ailleurs E un ensemble borné et parfait quelconque intérieur à D et dans lequel f'_x, f'_y soient continues. Leur continuité sera uniforme. On pourra donc, quel que soit ε, assigner une constante δ telle que pour tout point de cet ensemble les différences entre ces multiplicateurs et leurs limites deviennent $< \varepsilon$ dès que $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ deviennent $< \delta$.

On aura donc

$$(1) \qquad \Delta f(x, y) = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y + R\,\Delta x + R_1\,\Delta y,$$

R et R_1 tendant vers zéro avec Δx et Δy (et cela uniformément dans tout l'ensemble E).

On voit donc que $\Delta f(x, y)$ se compose de deux parties, l'une

$$(2) \qquad f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y,$$

simplement linéaire en Δx et Δy, l'autre composée de termes d'ordre plus élevé que l'un ou l'autre de ceux qui précèdent.

L'expression (2) se nomme la *différentielle totale* de $f(x, y)$ et se désigne par $df(x, y)$. Les deux termes qui la composent sont les différentielles qu'on obtiendrait en faisant varier une seule des deux variables x, y et laissant l'autre constante. On leur donne le nom de *différentielles partielles*.

Si l'on supposait, en particulier, que la fonction $f(x, y)$ ne fût autre que x, $f'_x(x, y)$ se réduirait à 1, et $f'_y(x, y)$ à 0. L'équation

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y$$

se réduirait donc à

$$dx = \Delta x.$$

En supposant que $f(x, y)$ se réduisît à y, on trouverait de même

$$dy = \Delta y,$$

et, par suite,

$$(3) \qquad df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.$$

Ainsi qu'on l'a vu aux nos 73 et 79, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x, y)$ reste constante lorsque x varie seul (et, par suite, se réduise à une fonction de y) est $f'_x(x, y) = 0$.

De même, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x, y)$ ne dépende pas de y est $f'_y(x, y) = 0$.

Ces deux conditions réunies exprimeront que f est indépendant de x et de y, et, par suite, se réduit à une constante. Elles peuvent être résumées en celle-ci :

$$df(x, y) = 0.$$

Car, pour que cette expression, égale à

$$f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y,$$

s'annule identiquement quels que soient Δx et Δy, il faut et il suffit que $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$ soient nuls séparément.

87. Admettons que, par un procédé quelconque, on ait mis $\Delta f(x, y)$ sous la forme

$$\Delta f(x, y) = A\,dx + B\,dy + S\,dx + S_1\,dy, \tag{4}$$

A et B étant indépendants de dx et dy, et S, S_1 tendant vers zéro en même temps que dx, dy; on aura

$$A = f'_x(x, y), \qquad B = f'_y(x, y),$$
$$df(x, y) = A\,dx + B\,dy.$$

Égalons en effet les deux expressions (1) et (4) de $\Delta f(x, y)$; il viendra, en divisant par dx,

$$f'_x(x, y) + R + [f'_y(x, y) + R_1]\frac{dy}{dx} = A + S + (B + S_1)\frac{dy}{dx}.$$

Faisons tendre dx et dy vers zéro, de telle sorte que $\frac{dy}{dx}$ tende vers une valeur fixe λ; on aura à la limite

$$f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\lambda = A + B\lambda.$$

Cette égalité, ayant lieu quel que soit λ, se décompose dans les deux suivantes :

$$f'_x(x, y) = A, \qquad f'_y(x, y) = B.$$

88. La remarque qui précède permet de déterminer aisément les dérivées partielles et la différentielle totale d'une fonction composée.

Soit, en effet, une semblable fonction

$$f(u, v, \ldots),$$

u, v, ... étant elles-mêmes des fonctions des variables indépendantes x, y, ...

Pour obtenir la différentielle totale de cette expression, considérée comme fonction de $x, y, \ldots$, donnons à $x, y, \ldots$ des accroissements $dx, dy, \ldots$. Soient $\Delta u, \Delta v, \ldots, \Delta f$ les accroissements correspondants de $u, v, \ldots, f$. On aura

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \ldots + \mathrm{R}\,\Delta u + \mathrm{R}_1\,\Delta v + \ldots,$$

R, $\mathrm{R}_1, \ldots$ tendant vers zéro avec $\Delta u, \Delta v, \ldots$.

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \ldots + \mathrm{S}\,dx + \mathrm{S}_1\,dy + \ldots \\
&= du + \mathrm{S}\,dx + \mathrm{S}_1\,dy + \ldots, \\
\Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \ldots + \mathrm{T}\,dx + \mathrm{T}_1\,dy + \ldots \\
&= dv + \mathrm{T}\,dx + \mathrm{T}_1\,dy + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$\mathrm{S}, \mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{T}, \mathrm{T}_1, \ldots$ tendant vers zéro avec $dx, dy, \ldots$.

Substituant ces valeurs dans l'expression de Δf, il vient

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \ldots + \rho\,dx + \rho_1\,dy + \ldots \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots\right)dx \\
&\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots\right)dy \\
&\quad + \ldots + \rho\,dx + \rho_1\,dy + \ldots,
\end{aligned}$$

$\rho, \rho_1, \ldots$ tendant vers zéro avec dx, dy.

On aura donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \ldots;$$

d'où les deux propositions suivantes :

La dérivée, par rapport à une variable indépendante x, d'une fonction composée $f(u, v, \ldots)$ s'obtient en ajoutant ensemble les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, ..., respectivement multipliées par les dérivées de u, v, ... par rapport à x.

La différentielle totale df s'exprime au moyen de u, v, ..., du, dv, ..., de la même manière que si u, v, ... étaient des variables indépendantes.

89. Supposons que des fonctions u, v, ... des variables indépendantes x, y, ... satisfassent identiquement à une équation

$$f(u, v, \ldots) = 0.$$

Le premier membre de cette équation étant une fonction composée de x, y, ... dont la valeur est constante et égale à zéro, ses dérivées par rapport à chacune de ces variables sont nulles. On aura donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots = 0,$$

....

Ainsi *toute identité $f(u, v, \ldots) = 0$ fournira de nouvelles identités en égalant à zéro les dérivées de son premier membre par rapport à chacune des variables indépendantes.*

Ces nouvelles équations peuvent d'ailleurs se concentrer en une seule :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \ldots = 0.$$

90. Nous dirons qu'une fonction $f(x, y, \ldots)$ est définie (ou jouit d'une propriété donnée) *aux environs du point*

$(x_0, y_0, \ldots)$ si l'on peut déterminer un nombre positif h, tel que la fonction soit définie (ou jouisse de la propriété demandée) pour tous les points $(x, y, \ldots)$ où $|x - x_0|$, $|y - y_0|, \ldots$ sont $\leqq h$.

91. Théorème. — *Soit* $F(x, y, \ldots, u)$ *une fonction des variables* $x, y, \ldots, u$, *laquelle s'annule au point*

$$(x_0, y_0, \ldots, u_0).$$

Supposons : 1° qu'elle soit définie et admette des dérivées partielles continues F'_x, $F'_y, \ldots, F'_u$ *aux environs de ce point; 2° que* F'_u *ne s'annule pas en ce point.*

On pourra déterminer une fonction des variables x, $y, \ldots$ *définie aux environs du point* $(x_0, y_0, \ldots)$ *et prenant en ce point la valeur* u_0, *et qui enfin, substituée à la place de u dans l'équation* $F = 0$, *la rende identiquement satisfaite; cette fonction sera unique et admettra les dérivées partielles*

$$-\frac{F'_x}{F'_u}, \quad -\frac{F'_y}{F'_u}, \quad \ldots.$$

En vertu des hypothèses faites sur l'existence et la continuité des dérivées partielles F'_x, $F'_y, \ldots, F'_u$, on pourra déterminer une quantité positive h, telle que, pour tous les points $(x, y, \ldots, u)$ où $|x - x_0|$, $|y - y_0|, \ldots, |u - u_0|$ sont $\leqq h$, ces dérivées partielles existent et diffèrent de leurs valeurs initiales $(F'_x)_0$, $(F'_y)_0, \ldots, (F'_u)_0$ de moins de ε, en désignant par ε une quantité positive choisie à volonté, mais que nous supposerons moindre en valeur absolue que $(F'_u)_0$.

Si donc on désigne par A la plus grande des quantités $|(F'_x)_0| + \varepsilon$, $|(F'_y)_0| + \varepsilon, \ldots$ et par B la quantité $|(F'_u)_0| - \varepsilon$, on aura, pour tous les points considérés,

$$|F'_x| < |(F'_x)_0| + \varepsilon < A, \qquad |F'_y| < A, \qquad \ldots, \qquad |F'_u| > B.$$

En outre, F'_u conservera toujours le signe de $(F'_u)_0$.

Cela posé, soit $m + 1$ le nombre des variables $x, y, \ldots, u$;

désignons par k le plus petit des deux nombres h, $\frac{B}{mA}h$. On aura, pour tous les points $(x_0+\Delta x, \ldots, u_0+\Delta u) = (x, \ldots, u)$ où $\Delta x \overline{\gtrless} k$, $\Delta y \overline{\gtrless} k$, ... et $\Delta u \overline{\gtrless} h$,

$$\begin{aligned} F(x, y, \ldots, u) = {} & F(x, y, \ldots, u) - F(x_0, y_0, \ldots, u_0) \\ = {} & F'_x(x_0 + \theta\,\Delta x, y_0, \ldots, u_0)\,\Delta x \\ & + F'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_1\,\Delta y, \ldots, x_0)\,\Delta y + \ldots \\ & + F'_u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u + \theta_m\,\Delta u)\,\Delta u. \end{aligned}$$

Chacun des m premiers termes de cette expression a son module $< Ak$. La somme de leurs modules est donc

$$< mAk < Bh.$$

Mais, d'autre part, le dernier terme a son module plus grand que $B\,|\Delta u|$.

Si donc nous posons, en particulier, $\Delta u = \pm h$, ce terme l'emportera sur la somme des autres et donnera son signe à l'expression. D'ailleurs, le facteur

$$F'_u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, \ldots, u + \theta_m\,\Delta u)$$

a toujours le même signe, celui de $(F'_u)_0$. Donc, si l'on pose successivement $\Delta u = h$ et $\Delta u = -h$, on obtiendra, pour $F(x, y, \ldots, u)$, deux valeurs de signe contraire. Mais F est une fonction continue de u; elle s'annulera donc pour une valeur de u intermédiaire entre $u_0 - h$ et $u_0 + h$. Elle ne s'annulera d'ailleurs qu'une fois, car sa dérivée garde le même signe dans tout cet intervalle.

Nous avons donc établi qu'à tout système de valeurs de $x, y, \ldots$, tel que $x - x_0$, $y - y_0$, ... aient leurs modules non supérieurs à k, correspond une valeur unique de u comprise entre $u_0 - h$ et $u_0 + h$ et satisfaisant à l'équation $F = 0$. L'ensemble de ces valeurs constituera une fonction de $x, y, \ldots$ entièrement définie dans ce domaine, et qui se réduit évidemment à u_0 au point $(x_0, y_0, \ldots)$.

Soient d'ailleurs $(x, y, \ldots)$ et $(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots)$ deux points de ce domaine; u et $u + \Delta u$ les valeurs correspon-

dantes de cette fonction. On aura

$$\begin{aligned}
0 = {} & F(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, u+\Delta u) - F(x, y, \ldots, u) \\
= {} & F'_x(x+\theta\,\Delta x, y, \ldots, u)\,\Delta x \\
& + F'_y(x+\Delta x, y+\theta_1\,\Delta y, \ldots, u)\,\Delta y + \ldots \\
& + F'_u(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots, u+\theta_m\,\Delta u)\,\Delta u.
\end{aligned}$$

Le multiplicateur de Δu ayant son module plus grand que la constante B, cette équation montre que Δu tend vers zéro avec Δx, Δy, ...

Faisons, en particulier, $\Delta y = \ldots = 0$. L'équation se réduit à

$$\begin{aligned}
0 = {} & F'_x(x+\theta\,\Delta x, y, \ldots, u)\,\Delta x \\
& + F'_u(x+\Delta x, y, \ldots, u+\theta_m\,\Delta u)\,\Delta u;
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x+\theta\,\Delta x, y, \ldots, u)}{F'_u(x+\Delta x, y, \ldots, u+\theta_m\,\Delta u)}$$

et à la limite, en faisant tendre Δx vers zéro,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, \ldots, u)}{F'_u(x, y, \ldots, u)}.$$

Les autres dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, ... se détermineraient de même.

92. Théorème. — *Soient* $F_1, \ldots, F_n$ *n fonctions des* $m+n$ *variables* $x, y, \ldots; u, v, w, \ldots$ *s'annulant au point* $(x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots)$. *Si l'on suppose : 1° qu'aux environs de ce point ces fonctions admettent des dérivées partielles continues; 2° que le déterminant*

$$J = \begin{vmatrix}
\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial F_n}{\partial u} & \frac{\partial F_n}{\partial v} & \frac{\partial F_n}{\partial w} & \ldots
\end{vmatrix}$$

ne s'annule pas en ce point, on pourra déterminer un système de fonctions des variables $x, y, \ldots$ *définies aux en-*

virons du point $(x_0, y_0, \ldots)$, *prenant respectivement en ce point les valeurs* $u_0, v_0, w_0, \ldots$ *et qui enfin, substituées à la place de* $u, v, w, \ldots$ *dans les équations* $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$, *les rendent identiquement satisfaites. Ce système de fonctions est unique, et ces fonctions admettent des dérivées partielles.*

Ce théorème est établi par ce qui précède, dans le cas où l'on n'a qu'une seule équation, et nous pourrons, dans la démonstration, supposer qu'il ait été établi pour le cas de $n - 1$ équations.

Cela posé, pour que J soit $\gtrless 0$ pour le point $x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots$, il faut évidemment qu'une au moins des dérivées $\frac{\partial F_1}{\partial u_0}, \frac{\partial F_1}{\partial v_0}, \frac{\partial F_1}{\partial w_0}, \ldots$ soit différente de zéro. Soit, par exemple, $\frac{\partial F_1}{\partial u_0} \gtrless 0$. On pourra, d'après le théorème du n° **91**, déterminer une fonction u de $x, y, \ldots; v, w, \ldots$ qui satisfasse identiquement à l'équation $F_1 = 0$ et qui admette des dérivées partielles aux environs du point $x_0, y_0, \ldots; v_0, w_0, \ldots$. Substituant cette valeur de u dans les équations suivantes $F_2 = 0, \ldots, F_n = 0$, elles prendront la forme suivante :

$$\Phi_2(x, y, \ldots; v, w, \ldots) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_n = 0.$$

Les fonctions $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$, étant respectivement égales à $F_2, \ldots, F_n$, admettront, aux environs du point $x_0, y_0, \ldots; v_0, w_0, \ldots$, des dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = \frac{\partial F_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}, \quad \ldots$$

Le déterminant

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

des dérivées partielles relatives à v, w, ... sera, en négligeant les termes qui se détruisent,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} & \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \frac{\partial u}{\partial v} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial w} & \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial w} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \frac{\partial u}{\partial w} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial u} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \ldots$$

Remplaçant $\frac{\partial u}{\partial v}$, $\frac{\partial u}{\partial w}$, ... par leurs valeurs

$$-\frac{\frac{\partial F_1}{\partial v}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial w}}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}, \quad \ldots,$$

cette expression deviendra égale à $\frac{J}{\frac{\partial F_1}{\partial u}}$; et, comme $\frac{\partial F_1}{\partial u}$ a au point $(x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots)$ une valeur finie et différente de zéro, J_1 sera lui-même fini et différent de zéro.

On pourra donc, par hypothèse, déterminer des fonctions v, w, ... des variables indépendantes x, y, ..., qui satisfassent identiquement aux équations $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, ..., qui se réduisent à v_0, w_0, ... pour $x = x_0$, $y = y_0$, ..., et qui admettent des dérivées partielles aux environs de ce point. Substituant ces valeurs de v, w, ... dans l'expression de u, on obtiendra pour u, v, w, ... des fonctions de x, y, ... satisfaisant aux conditions requises.

93. On donne le nom de *fonctions implicites* à celles qui sont ainsi définies par un système d'équations non résolues

$$(5) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(x, y, \ldots, u, v, w, \ldots) = 0. \end{cases}$$

La démonstration précédente montre à la fois que ces

fonctions $u, v, w, \ldots$ existent et qu'elles admettent des dérivées partielles.

L'expression de ces dérivées partielles s'obtiendra d'ailleurs aisément en dérivant les identités (5) par rapport aux diverses variables indépendantes. On trouvera ainsi, en dérivant par rapport à x, par exemple,

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial F_1}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\ldots=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x}+\dfrac{\partial F_n}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F_n}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial F_n}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}+\ldots=0, \end{array}\right.$$

système d'équations linéaires dont la résolution donnera $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots$, sous forme de fractions ayant J pour dénominateur. Ce déterminant étant par hypothèse une fonction continue de $x, y, \ldots$ et de $u, v, w, \ldots$ qui sont elles-mêmes continues en $x, y, \ldots$ est une fonction continue de $x, y, \ldots$. D'ailleurs, au point $x_0, y_0, \ldots$, on a $u=u_0$, $v=v_0, \ldots$ et J ne s'annule pas. Donc, dans un certain domaine autour de ce point, J sera encore différent de zéro, et les valeurs de $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots$ fournies par les équations (6) ne pourront devenir illusoires.

94. Les considérations précédentes fournissent la solution d'une question importante :

Soient

$$(7)\quad u_1=f_1(x_1, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad u_m=f_m(x_1 \ldots, x_n)$$

m fonctions des n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ admettant des dérivées partielles continues. Nous dirons que ces fonctions sont *indépendantes* s'il n'existe entre elles aucune relation qui permette d'exprimer l'une d'elles au moyen des autres.

Un système de fonctions tel que (7) étant donné, propo-

sons-nous de rechercher combien il contient de fonctions indépendantes.

A cet effet, formons le Tableau des dérivées partielles

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}. \end{matrix}$$

Avec les éléments communs à un certain nombre de lignes de ce Tableau et à un nombre égal de colonnes on peut constituer un déterminant. Construisons tous les déterminants de ce genre. Nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'un des déterminants à p^2 éléments, tel que celui-ci*

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_p} \end{vmatrix},$$

ne s'annule pas au point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *et si au contraire tous les déterminants à* $(p+1)^2$ *éléments sont identiquement nuls aux environs de ce point :*

1° *Les fonctions* $u_1, \ldots, u_p$ *seront indépendantes aux environs de ce point ;*

2° *Au contraire,* $u_{p+1}, \ldots, u_m$ *pourront s'exprimer en fonction de* $u_1, \ldots, u_p$.

1° En effet, soient $v_1, \ldots, v_m$ les valeurs de $u_1, \ldots, u_m$ au point $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Les équations (7) étant mises sous la forme

$$(8) \qquad f_1 - u_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m - u_m = 0,$$

le déterminant des dérivées partielles de leurs premiers membres par rapport à $x_1, \ldots, x_p, u_{p+1}, \ldots, u_m$ sera évi-

demment égal à $(-1)^{m-p}$ D. Il sera donc différent de zéro au point $(\xi_1, \ldots, \xi_n, v_1, \ldots, v_m)$ et l'on pourra regarder les équations (8) comme définissant implicitement $x_1, \ldots, x_p$, $u_{p+1}, \ldots, u_m$ en fonctions de $u_1, \ldots, u_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ aux environs du point $(v_1, \ldots, v_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$. A chaque système de valeurs $u_1, \ldots, u_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$ suffisamment voisines des valeurs initiales $v_1, \ldots, v_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$ correspondra un système de valeurs de $x_1, \ldots, x_p$. Donc, réciproquement, $u_1, \ldots, u_p$ pourront, par un choix convenable de valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ prendre tout système de valeurs suffisamment voisin de $v_1, \ldots, v_p$. Donc les fonctions $u_1, \ldots, u_p$ sont indépendantes.

2° D'autre part, $u_{p+1}, \ldots, u_m$ sont aussi des fonctions des nouvelles variables indépendantes $u_1, \ldots, u_p, x_{p+1}, \ldots, x_n$. Mais il est aisé de voir qu'ils ne dépendent pas de $x_{p+1}, \ldots,$ x_n. Soient en effet u_i l'une quelconque des fonctions $u_{p+1}, \ldots,$ u_m; x_k l'une quelconque des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$; nous allons montrer qu'on a $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0$.

On trouve en effet, en dérivant les équations (8) par rapport à x_k,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_1}{\partial x_k} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_p}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_p}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0;$$

d'où, en éliminant $\dfrac{\partial x_1}{\partial x_k}, \ldots, \dfrac{\partial x_p}{\partial x_k}$,

$$D\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \text{et enfin} \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0.$$

Donc $u_{p+1}, \ldots, u_m$ sont fonctions de $u_1, \ldots, u_p$ seulement, et la seconde partie du théorème est démontrée.

95. Le cas le plus intéressant de cette analyse est celui où $m = n$. Dans ce cas, pour que les n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ soient distinctes, il faut et il suffit que le déterminant

$$\mathrm{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul.

Cela équivaut évidemment à dire que les différentielles totales

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n \end{gathered}$$

sont linéairement distinctes.

Le déterminant J se nomme le *jacobien* des n fonctions $u_1, \ldots, u_n$ par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$.

On le représente souvent par la notation

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)},$$

afin de rappeler qu'il joue dans la théorie de ce système de fonctions un rôle analogue à celui de la dérivée dans celle des fonctions d'une seule variable. Voici quelques exemples de ces analogies :

1° Supposons que $x_1, \ldots, x_n$, au lieu d'être indépendantes, soient elles-mêmes des fonctions de nouvelles variables $y_1, \ldots, y_n$, définies par des équations

$$x_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_n).$$

Les fonctions

$$u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

deviendront, par la substitution de ces valeurs, des fonctions

de $y_1, \ldots, y_n$, telles que

$$u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_i(y_1, \ldots, y_n),$$

et l'on aura évidemment

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_k} + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi_n}{\partial y_k}.$$

Le déterminant

$$\frac{\partial(u_1, \ldots u_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)},$$

formé avec les éléments $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_k}$, est évidemment le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x_1, \ldots x_n)}{\partial(y_1 \ldots, y_n)}.$$

On a donc

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}. \tag{9}$$

Supposons, en particulier, que les variables x soient exprimées en fonction des variables u, de telle sorte que $y_1, \ldots, y_n$ se confondent avec $u_1, \ldots, u_n$. La formule précédente deviendra

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} = 1. \tag{10}$$

Les formules (9) et (10) sont la généralisation évidente de

celles qui donnent la dérivée d'une fonction de fonction ou d'une fonction inverse.

VIII. — Lignes continues. — Lignes rectifiables.

96. Lignes continues. — Une ligne, étant définie comme le lieu des positions successives d'un point mobile, sera représentée, dans le cas du mouvement plan, par un système de deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

f et φ étant des fonctions de la variable indépendante t, qu'on pourra considérer comme figurant le temps. Si ces fonctions sont continues, la courbe sera dite *continue*.

Supposons que t varie de la valeur initiale t_0 à la valeur finale T. Si les valeurs finales de x, y coïncident avec leurs valeurs initiales, la courbe sera fermée.

Plus généralement, si, pour plusieurs valeurs différentes de t, x et y reprennent le même système de valeurs, la courbe passera plusieurs fois par un même point, que l'on appellera *point multiple*.

La distance d'un point fixe (ξ, η) au point (t, x, y) d'une ligne continue est une fonction continue de t; si le point (ξ, η) n'est pas sur la courbe, cette fonction ne s'annulera pas; elle admettra donc un minimum différent de zéro, qu'elle atteindra pour une certaine valeur de t, et qu'on pourra appeler la *distance* du point (ξ, η) à la courbe.

Soient de même (t, x, y) et (u, ξ, η) deux points pris respectivement sur deux courbes continues

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad \xi = \mathrm{F}(u), \qquad \eta = \Phi(u).$$

Leur distance sera une fonction continue de t et de u. Si les courbes ne se rencontrent pas, elle atteindra, pour un certain système de valeurs de t et de u, une valeur minimum, qui sera la plus courte distance des deux courbes.

97. Considérons enfin une courbe fermée C continue et sans point multiple, décrite en faisant varier t de t_0 à $T = t_0 + \omega$. Elle sera caractérisée par deux équations

$$x = F(t), \qquad y = \Phi(t),$$

où les fonctions F et Φ sont définies de t_0 à $t_0 + \omega$, et satisfont aux relations

$$F(t_0 + \omega) = F(t_0), \qquad \Phi(t_0 + \omega) = \Phi(t_0).$$

A chaque valeur de t comprise dans cet intervalle correspond un point différent de la courbe, sauf les deux valeurs extrêmes t_0 et $t_0 + \omega$, qui correspondent au même point.

Soient $f(t)$ et $\varphi(t)$ deux fonctions respectivement identiques à $F(t)$ et à $\Phi(t)$ dans l'intervalle de t_0 à $t_0 + \omega$, et définies pour les autres valeurs de t au moyen des relations

$$f(t + \omega) = f(t), \qquad \varphi(t + \omega) = \varphi(t).$$

Ces nouvelles fonctions seront continues, et les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

où t varie de $-\infty$ à $+\infty$, représenteront encore la même courbe que précédemment, décrite une infinité de fois, de telle sorte qu'à chaque point x, y de la courbe correspondent une infinité d'arguments t différant entre eux de multiples de ω.

Cela posé, soient

(t, x, y) et (t', x', y') deux points variables pris sur une même courbe C continue et fermée, sans point multiple;

$\Delta = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ leur distance;

$t' - t = h$ la différence de leurs arguments.

Ces arguments n'étant déterminés pour chaque point qu'à un multiple près de ω, on peut évidemment les choisir de telle sorte que h ne surpasse pas $\frac{\omega}{2}$ en valeur absolue. On peut admettre, en outre, qu'il est positif, en échangeant au besoin les deux points x, y et x', y'.

D'après les propriétés des fonctions continues, on pourra, quelle que soit la quantité positive α, déterminer une autre quantité β telle que, pour toute valeur de h moindre que β, on ait

$$|x' - x| < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad |y' - y| < \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad \Delta < \alpha.$$

Donc, si h tend vers zéro, il en sera de même de Δ.

Réciproquement, si Δ tend vers zéro, il en sera de même pour h. En effet, Δ est une fonction continue de t et de h; car la différence entre la distance des points t, $t+h$ et celle des points $t+dt$, $t+dt+h+dh$ est au plus égale en valeur absolue à la somme des distances du point t au point $t+dt$ et du point $t+h$ au point $t+dt+h+dh$, lesquelles distances tendent vers zéro avec dt et dh. D'autre part, Δ ne s'annule que pour $h=0$. Donc, parmi tous les systèmes de points t, $t+h$, où h n'est pas inférieur à une quantité fixe β', il en existera un pour lequel Δ prendra une valeur minimum α' différente de zéro. Donc, quel que soit d'ailleurs t, Δ ne pourra s'abaisser au-dessous de α' sans que h s'abaisse au-dessous de β'.

Si donc Δ tend vers zéro, h tendra également vers zéro, et, par suite, la distance du point t à un point quelconque de l'arc compris entre les points t, $t+h$ tendra aussi vers zéro.

Soit donc ε un infiniment petit. Si l'on inscrit à la courbe C un polygone fermé $P = t_0 \ldots t_i t_{i+1} \ldots t_0$, tel que chacun de ses côtés ait une longueur au plus égale à ε, chaque point p de l'arc de courbe qui joint les points t_i, t_{i+1} sera à une distance de ses extrémités au plus égale à δ, δ désignant un nouvel infiniment petit dépendant de ε, et sa distance à un point quelconque q de la corde $t_i t_{i+1}$ sera moindre que 2δ.

98. Or on peut toujours inscrire un semblable polygone. Il suffit, en effet, de prendre les différences $t_{i+1} - t_i$ des arguments de deux sommets consécutifs suffisamment petits pour que les cordes $t_i t_{i+1}$ aient toutes une longueur au plus égale à ε.

Si le polygone P ainsi construit présente des points multiples, on peut le remplacer par un polygone plus simple jouissant des mêmes propriétés. Supposons, en effet, que les deux côtés $t_i t_{i+1}$ et $t_k t_{k+1}$ se coupent. On aura évidemment

$$t_i t_k + t_{i+1} t_{k+1} < t_i t_{i+1} + t_k t_{k+1} < 2\varepsilon.$$

Donc l'une au moins des deux distances $t_i t_k$, $t_{i+1} t_{k+1}$ sera $< \varepsilon$; et en substituant à la ligne brisée $t_i t_{i+1} \ldots t_k$ la droite $t_i t_k$, ou à la ligne brisée $t_{i+1} \ldots t_k t_{k+1}$ la droite $t_{i+1} t_{k+1}$, on aura un polygone P_1 ayant moins de côtés que P, mais dont les côtés auront une longueur au plus égale à ε.

Répétant au besoin cette réduction, on finira par arriver à un dernier polygone P′ n'ayant plus de point multiple.

99. Ce nouveau polygone P′ divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure.

Nous allons établir qu'il existe toujours un point p, situé dans la région intérieure, et dont la plus courte distance à P′ surpasse une quantité fixe, différente de zéro.

Soient, en effet, $A = (t_0, x_0, y_0)$ et $B = (t_1, x_1, y_1)$ les deux points de la courbe C pour lesquels x atteint sa plus petite valeur x_0 et sa plus grande valeur x_1. La courbe sera formée de deux arcs, l'un allant de A en B, l'autre revenant de B en A.

Considérons sur ces deux arcs deux points (t, x, y) et (t', x', y'), dont les abscisses soient comprises entre $x_0 + \beta$ et $x_1 - \beta$, β étant une quantité fixe arbitraire, moindre que $\frac{x_1 - x_0}{2}$. La distance de chacun de ces points à l'un quelconque des points A, B étant $\overline{\gtrless} \beta$, les différences des arguments, $t - t_0$, $t_1 - t$, $t' - t_1$, $t_0 + \omega - t'$, surpasseront une quantité fixe γ; et, comme l'argument varie de ω quand on décrit la courbe entière, on en conclut que $t' - t$ est compris entre 2γ et $\omega - 2\gamma$. La distance des points t, t' ne pourra donc s'abaisser au-dessous d'une quantité fixe d.

Cela posé, la distance entre deux points choisis à volonté

sur deux portions correspondantes de la courbe C et du polygone P′ est $< 2\delta$. On pourra donc déterminer sur P′ deux points A′, B′, dont les distances à A, B soient respectivement $< 2\delta$; et le polygone se composera également de deux arcs polygonaux, l'un allant de A′ à B′, l'autre revenant de B′ à A′. Prenons respectivement sur ces deux arcs deux points (ξ, η), (ξ', η'), dont les abscisses soient comprises entre $x_0 + \beta + 2\delta$ et $x_1 - \beta - 2\delta$. Il existe sur la courbe des points t, t' dont les distances à ces deux-là sont $< 2\delta$; leurs abscisses seront comprises entre $x_0 + \beta$ et $x_1 - \beta$; leur distance sera donc $\overline{\gtrless} d$, et la distance des points (ξ, η), (ξ', η') sera $\overline{\gtrless} d - 4\delta$, quantité qui deviendra, lorsque δ décroît, plus grande que d_1, d_1 étant une quantité quelconque moindre que d.

Cela posé, coupons le polygone réduit par la droite $x = \frac{x_1 + x_0}{2}$. Les points A′ et B′ n'étant pas du même côté de cette droite, elle traversera chacun des deux arcs A′B′ et B′A′ en un nombre impair de points. En remontant cette droite à partir de l'infini négatif, on sera d'abord en dehors du polygone. Au premier point d'intersection, on entrera dans l'intérieur; on en ressortira au second, et ainsi de suite.

Supposons, pour fixer les idées, que la droite en question traverse d'abord l'arc A′B′ en m points consécutifs, puis l'arc B′A′ en n points, puis l'arc A′B′ en m' points, etc. La série des nombres $m, n, m', \ldots$ contiendra au moins deux nombres impairs. Soit, par exemple, m' le premier nombre de cette nature que contient la série. Le nombre $m + n + m'$ étant impair, le tronçon de droite contenu entre le $(m+n+m')^{\text{ième}}$ point d'intersection et le suivant sera intérieur au polygone; d'ailleurs, ses deux extrémités sont l'une sur l'arc A′B′, l'autre sur l'arc B′A′.

Considérons un point quelconque de ce tronçon de droite. La somme de ses distances aux portions q et q' des lignes polygonales A′B′ et B′A′ comprises entre les deux abscisses $x_0 + \beta + 2\delta$ et $x_1 - \beta - 2\delta$ est au moins égale à la plus courte

distance de ces deux lignes, qui est $> d_1$. Or, lorsque le point se déplace sur le tronçon de droite considéré, sa distance à q, d'abord nulle, varie d'une façon continue et devient plus grande que d_1. Il existe donc sur cette ligne un point p, où cette distance devient égale à $\frac{d_1}{2}$. La distance de ce point à q' sera $> \frac{d_1}{2}$.

D'autre part, l'abscisse de ce point étant égale à $\frac{x_0 + x_1}{2}$, sa distance à un quelconque des autres points des lignes A′B′ ou B′A′, dont l'abscisse est moindre que $x_0 + \beta + 2\delta$ ou plus grande que $x_1 - \beta - 2\delta$, sera au moins égale à $\frac{x_1 - x_0}{2} - \beta - 2\delta$, quantité qui, pour δ assez petit, devient plus grande que toute quantité d_2 inférieure à $\frac{x_1 - x_0}{2} - \beta$. La plus courte distance du point considéré au polygone P′ sera donc $> l$, l désignant la plus petite des quantités $\frac{1}{2} d_1$ et d_2.

100. Cela posé, le lieu des points du plan qui sont à la distance 2δ d'un côté du polygone P′ se compose de deux droites égales et parallèles à ce côté et de deux demi-circonférences reliant leurs extrémités. Traçons ces droites et ces cercles pour chacun des côtés de P′. L'ensemble de ces lignes auxiliaires décomposera le plan en un certain nombre de régions. Considérons, en particulier, celle de ces régions qui contient le point p. Elle est intérieure à P′, et tous les points de son intérieur seront à une distance de P′ plus grande que 2δ. Elle sera limitée par un contour fermé R sans point multiple, dont chaque point sera à la distance 2δ de P′. Le cercle de rayon $l - 2\delta$, décrit du point p comme centre, sera en entier dans son intérieur. Au contraire, tous les points de la courbe C lui seront extérieurs, car leur distance à P′ est $< 2\delta$.

Décomposons le contour R en éléments de longueur $< 2\delta$ par des points de division $a, a', a'', \ldots$. Soient $ab, a'b', \ldots$

des droites de plus courte distance menées de ces points au contour P'. Ces droites auront 2δ pour longueur commune. Elles ne peuvent rencontrer sur leur parcours ni R ni P'; car, si cela avait lieu, on aurait sur R un point dont la distance à P' serait $< 2\delta$. Elles resteront donc dans l'espace annulaire compris entre R et P'. Enfin, elles ne peuvent se couper mutuellement; car, si ab et $a'b'$, par exemple, se coupaient en un point de leur parcours, on aurait évidemment

$$ab' + a'b < ab + a'b' < 4\delta;$$

l'une des deux distances ab', $a'b$ serait donc $< 2\delta$. On aurait donc ici encore, sur R, un point dont la distance à P' serait $< 2\delta$.

Il est maintenant aisé de montrer que tous les points de la couronne circulaire comprise entre les contours P' et R sont à une distance infiniment petite de la courbe C.

Considérons, en effet, la portion de cette couronne comprise entre deux lignes de plus courte distance consécutives ab et $a'b'$. Supposons que b soit situé sur le côté $t_i t_{i+1}$ et b' sur le côté $t_{k-1} t_k$ du polygone P'. La distance rectiligne du point t_i à un point quelconque de la ligne brisée $t_i b a a' b' t_k$ (et en particulier au point t_k) sera moindre que

$$t_i b + ba + aa' + bb' + b' t_k < 10\delta.$$

Sa distance à un point quelconque de l'arc de la courbe C compris entre t_i et t_k sera donc moindre qu'une quantité $\varphi(\delta)$ infiniment petite en même temps que δ. Mais un point quelconque de l'arc polygonal qui joint t_i et t_k est à une distance moindre que 2δ de l'arc correspondant de C. Si donc nous traçons, de t_i comme centre, un cercle de rayon $\varphi(\delta) + 10\delta$, il contiendra à son intérieur toute la région du plan limitée par les contours P', R et les droites ab, $a'b'$.

Donc tout point de la couronne comprise entre P' et R sera à une distance moindre que $\varphi(\delta) + 10\delta$ de l'un des sommets t_i, et *a fortiori* de la courbe C, sur laquelle ils sont situés.

Le contour R est formé de lignes droites et d'arcs de cercle. Mais à chacun de ces derniers on peut substituer un polygone inscrit dont les côtés soient assez multipliés pour que tous ses points soient à une distance de l'arc de cercle moindre que la plus courte distance de R à C et à P'. On obtiendra ainsi un polygone S uuiquement formé de lignes droites et jouissant des mêmes propriétés que R, à savoir : 1° il n'a pas de point multiple; 2° il contient à son intérieur un cercle de rayon fini; 3° P' et C lui sont extérieurs; 4° tout point de l'espace annulaire compris entre P' et S est infiniment voisin de C.

101. On pourrait considérer de même, parmi les régions dans lesquelles le plan est décomposé par les lignes droites et les cercles auxiliaires, celle qui enveloppe toutes les autres et s'étend à l'infini. On verrait aisément, par des considérations toutes semblables à celles que nous avons développées, que tous ses points sont à une distance de P' plus grande que 2δ; qu'elle est limitée par un contour fermé R', sans points multiples, enveloppant le polygone P' et la courbe C, et dont tous les points sont à la distance 2δ de P'; que tous les points de l'espace annulaire, compris entre R' et P', sont infiniment voisins de C; enfin, qu'on peut remplacer R' par un polygone S' exclusivement formé de lignes droites et jouissant des mêmes propriétés.

102. Il est donc établi qu'on peut, quelle que soit la quantité η, trouver deux polygones S, S' sans points multiples, intérieurs l'un à l'autre, entre lesquels la courbe se trouve contenue, et tels que chaque point de l'espace annulaire qui les sépare soit à une distance de C moindre que η.

Soient λ, λ' les plus courtes distances de ces polygones à la courbe C; η_1 une quantité moindre que λ et λ'. On pourra trouver deux nouveaux polygones S_1, S'_1, intérieur et extérieur, dont l'écartement à la courbe soit $< \eta_1$; ils seront évidemment compris entre les deux autres.

Continuant ainsi, on pourra former une série de polygones intérieurs de plus en plus grands $S, S_1, \ldots$, et une série de polygones extérieurs $S', S'_1, \ldots$, comprenant toujours entre eux la courbe C et s'en rapprochant de plus en plus.

Les points du plan seront de trois sortes :

1° Ceux qui, à partir d'un certain terme de la série, deviendront extérieurs aux polygones $S', S'_1, \ldots$; on les nommera *points extérieurs à la courbe;*

2° Ceux qui sont intérieurs à partir d'un certain moment aux polygones $S, S_1, \ldots$; on les nommera *points intérieurs à la courbe;*

3° Ceux qui sont intérieurs à tous les polygones de la suite $S', S'_1, \ldots$, mais extérieurs à tous les polygones S, $S_1, \ldots$. Ces points, dont la distance à la courbe est moindre que toute quantité assignable, seront situés sur elle.

Il est donc établi que toute courbe continue C divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini.

103. Deux points intérieurs q, q' peuvent toujours être réunis par un trait polygonal intérieur à la courbe. Il existe, en effet, dans la série $S, S_1, \ldots$ des polygones intérieurs, un polygone S_i qui les contient tous deux. Par les points q, q', menons des droites quelconques qui coupent ce polygone en r et r'. Les droites qr, $q'r'$, jointes à l'un des deux arcs de S_i qui réunissent r à r', satisferont à la question.

Deux points extérieurs pourront être réunis de même sans traverser la courbe.

Au contraire, toute ligne continue D, qui joint un point intérieur q à un point extérieur q', coupera nécessairement la courbe C. Soient, en effet, u l'argument dont la variation donne les divers points de D; u_0, u' les valeurs de cet argument aux points q, q'.

Considérons l'ensemble des valeurs de u comprises entre u_0 et u'. Celles de ces valeurs qui correspondent à des points

intérieurs à C forment un ensemble borné. Soit U son maximum. Le point U, appartenant à la frontière entre les points intérieurs et les points extérieurs, sera sur la courbe C.

104. Une ligne L continue et sans points multiples, tracée dans l'intérieur d'un contour continu C sans point multiple et ayant ses extrémités sur ce contour, partage l'intérieur de C en deux régions séparées.

Plus généralement, considérons une région R du plan limitée : 1° par n contours fermés sans points multiples $C_1, \ldots, C_n$, extérieurs les uns aux autres; 2° par un autre contour analogue C_0 qui les contient dans son intérieur. On pourra, sans partager R en régions séparées, tracer n lignes continues $L_1, \ldots, L_n$, réunissant respectivement les contours $C_1, \ldots, C_n$ au contour C_0. Mais, cela fait, toute nouvelle ligne continue L_{n+1}, joignant deux quelconques des points frontières de R, divisera R en deux régions distinctes.

On exprimera cette propriété d'une manière abrégée en disant que l'*ordre de connexité* de R est égal à $n+1$.

Ces propositions sont évidentes dans le cas où $C_0, C_1, \ldots, C_n$ sont des polygones, et, si ces contours sont courbes, nous avons vu qu'on peut les considérer comme des limites de polygones.

105. Courbes rectifiables. — Considérons une courbe définie par les équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

Soient $t_0, t_1, \ldots, t_n$, T une série de valeurs du paramètre t; x_0, y_0; $x_1, y_1, \ldots$; X, Y les valeurs correspondantes de x, y. Le périmètre du polygone inscrit à la courbe, et dont ces points sont les sommets, sera

$$\Sigma \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}. \tag{1}$$

Si cette somme tend vers une limite déterminée et constante, lorsque les intervalles $t_{k+1} - t_k$ dans lesquels on a

divisé l'intervalle $T - t_0$ décroissent indéfiniment d'amplitude, cette limite représentera la *longueur de l'arc de courbe* correspondant à cet intervalle.

Pour que cette limite existe, il faut, en premier lieu, que la somme (1) ne puisse pas croître indéfiniment par un choix d'intervalles quelconque. Or l'expression

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

est au moins égale à $|x_{k+1} - x_k|$ et à $|y_{k+1} - y_k|$, mais ne peut surpasser la somme de ces quantités. Pour que cette première condition soit remplie, il est donc nécessaire et suffisant que les sommes

$$\Sigma |x_{k+1} - x_k|, \quad \Sigma |y_{k+1} - y_k|$$

soient limitées et, par suite, que $f(t)$ et $\varphi(t)$ soient des fonctions à variation bornée.

106. Supposons cette condition remplie, et soit L le maximum du périmètre des polygones possibles. Il faudra encore que le périmètre de tout polygone, pour lequel les intervalles $t_{k+1} - t_k$ sont suffisamment petits, soit aussi voisin qu'on voudra de L.

Cherchons à exprimer analytiquement cette condition. Nous savons tout d'abord (71) que les fonctions $f(t+\delta)$, $\varphi(t+\delta)$, $f(t-\delta)$, $\varphi(t-\delta)$, où δ est un infiniment petit positif, tendent vers des limites $f(t+0)$, $\varphi(t+0)$, $f(t-0)$, $\varphi(t-0)$.

Cela posé, soit P le périmètre d'un polygone Π correspondant aux points de division $t_1, \ldots, t_k, \ldots$ et soit t un point quelconque intermédiaire entre t_k et t_{k+1}. Introduisons deux nouveaux points de division $t - \delta$ et $t + \delta$ également compris dans l'intervalle de t_k à t_{k+1}. Le nouveau polygone Π' ainsi obtenu différant du premier par le remplacement de l'un de ses côtés par une ligne brisée, son périmètre P' sera $\overline{\gtrless}$ P.

Introduisons le nouveau point de division t. Nous obtien-

drons un troisième polygone Π'' qui diffère de Π' par le remplacement du côté qui joint les points $f(t-\delta)$, $\varphi(t-\delta)$ et $f(t+\delta)$, $\varphi(t+\delta)$ par les deux lignes qui joignent respectivement ces deux points au point $f(t)$, $\varphi(t)$.

Supposons que δ décroisse indéfiniment; les points $f(t-\delta)$, $\varphi(t-\delta)$ et $f(t+\delta)$, $\varphi(t+\delta)$ tendront vers les points fixes $f(t-0)$, $\varphi(t-0)$ et $f(t+0)$, $\varphi(t+0)$; et, si le point $f(t)$, $\varphi(t)$ n'est pas sur la portion de droite qui joint ces deux points, nous obtiendrons, par l'adjonction du nouveau point de division t, un accroissement de périmètre fini. Soit α cet accroissement. Le périmètre du nouveau polygone étant au plus égal à L, celui du polygone Π ne pourra surpasser $L-\alpha$, et cela quelque rapprochés que soient les points t_0, $t_1, \ldots, t_k, \ldots$, tant que le point t ne fera pas partie de cette suite.

Nous arrivons donc à ce résultat que, pour toute valeur de t comprise dans l'intervalle de t_0 à T, le point $f(t)$, $\varphi(t)$ doit être sur le segment de droite qui joint les points $f(t+0)$, $\varphi(t+0)$ et $f(t-0)$, $\varphi(t-0)$.

107. Cette condition est suffisante. En effet, soit ε une quantité quelconque. On pourra déterminer une division en intervalles $t_0, t_1, \ldots, t_k, \ldots$, T, telle que le périmètre P du polygone correspondant soit $> L - \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $t_0, t'_1, \ldots, t'_i, \ldots$ une autre division en intervalles assujettis à la seule condition d'être tous moindres qu'une quantité fixe δ; nous allons montrer que, si δ est suffisamment petit, le périmètre P′ du polygone ainsi obtenu sera plus grand que $L-\varepsilon$.

Considérons, en effet, un troisième polygone obtenu en prenant, pour points de division, tous les points t_k et tous les points t'_i. Son périmètre P″ sera $\geqq P > L - \frac{\varepsilon}{2}$.

Évaluons, d'autre part, la différence entre P″ et P′, en supposant que δ ait été pris $< \delta'$, δ' désignant le plus petit des intervalles $t_{k+1}-t_k$, auquel cas deux quelconques des

points t_k seront séparés au moins par un point de la série t'_i.

Soient n le nombre total des points de la première division; n' le nombre de ceux de ces points qui n'appartiennent pas à la seconde division. Soient, enfin, t_k l'un de ces derniers points, t'_i et t'_{i+1} ceux des points t' entre lesquels il tombe. Le côté $t'_i t'_{i+1}$ du polygone P′ sera remplacé dans P″ par les deux côlés $t'_i t_k$, $t_k t'_{i+1}$.

Or la distance $t'_i t_k$ diffère de la distance $(t_k - 0, t_k)$ d'une quantité au plus égale en valeur absolue à la distance $(t'_i, t_k - 0)$; de même $t_k t'_{i+1}$ diffère de $(t_k, t_k + 0)$ d'une quantité au plus égale en valeur absolue à $(t'_{i+1}, t_k + 0)$; enfin $t'_i t'_{i+1}$ diffère de $(t_k - 0, t_k + 0)$ [lequel est égal à $(t_k - 0, t_k) + (t_k, t_k + 0)$] d'une quantité au plus égale en valeur absolue à $(t'_i, t_k - 0) + (t_k + 0, t'_{i+1})$. On aura donc

$$t'_i t_k + t_k t'_{i+1} - t'_i t'_{i+1} \overline{\overline{<}}\, 2(t'_i, t_k - 0) + 2(t_k + 0, t'_{i+1}).$$

Or les distances $(t'_i, t_k - 0)$ et $(t_k + 0, t'_{i+1})$ tendent vers zéro avec δ. On peut donc trouver une quantité δ_k, telle que, pour toute valeur de δ inférieure à δ_k, chacune de ces distances soit moindre que $\frac{\varepsilon}{8n}$; on aura dès lors

$$t'_i t_k + t_k t'_{i+1} - t'_i t'_{i+1} \overline{\overline{<}}\, \frac{\varepsilon}{2n}.$$

A chaque point t_k de la première division qui n'appartient pas à la seconde, correspond ainsi une quantité δ_k. Si nous prenons pour δ une quantité moindre que la plus petite des quantités $\delta_1, \ldots, \delta_k, \ldots$ et δ', nous aurons donc

$$P'' - P' = \sum_k (t'_i t_k + t_k t'_{i+1} - t'_i t'_{i+1}) \overline{\overline{<}}\, n' \frac{\varepsilon}{2n} \overline{\overline{<}}\, \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$P' \overline{\overline{>}}\, P'' - \frac{\varepsilon}{2} \overline{\overline{>}}\, L - \varepsilon.$$

108. Si l'arc de courbe compris entre les points t_0 et T a une longueur déterminée L et qu'on prenne un point t quel-

conque intermédiaire entre t_0 et T, les deux arcs partiels $t_0 t$ et tT auront également des longueurs déterminées L′, L″, et l'on aura

$$L' + L'' = L.$$

En effet, L est, par définition, le maximum du périmètre des polygones inscrits à l'arc t_0T. Parmi ces polygones, il en est qui n'ont pas de sommet en t; mais, en intercalant ce nouveau sommet, on ne fait qu'accroître le périmètre. On peut donc, pour la détermination de L, ne considérer que les polygones qui admettent t pour sommet. Or ceux-ci sont formés de deux polygones, inscrits, l'un dans l'arc $t_0 t$, l'autre dans l'arc tT. En appelant P, P′, P″ les périmètres des trois polygones, on aura toujours

$$P' + P'' = P.$$

Donc, P étant limité, P′ et P″ le seront également, et L, maximum de P, sera la somme des maxima partiels L′, L″.

Il résulte de là que l'arc $t_0 t$, où le point t est considéré comme variable de t_0 à T, est une fonction de t, essentiellement positive et croissante. Nous la désignerons par s. Cherchons quelles nouvelles conditions sont nécessaires pour qu'elle soit continue.

109. Lorsque t s'accroît de la quantité h, l'accroissement de l'arc est évidemment égal à la longueur de l'arc compris entre les points t et $t + h$. Intercalons donc, entre t et $t + h$, une série de valeurs intermédiaires $t_1, \ldots, t_n$; écrivons, pour plus de symétrie, t_0 et t_{n+1} à la place de t et $t + h$; l'accroissement cherché Δs sera le maximum de l'expression

$$\sum_0^n \sqrt{[f(t_{k+1}) - f(t_k)]^2 + [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)]^2},$$

lorsqu'on fait varier le mode de division de l'intervalle; on aura, par suite,

$$\Delta s \geqq f(t_1) - f(t),$$
$$\geqq \varphi(t_1) - \varphi(t).$$

Faisant tendre t_1 vers t, les seconds membres de ces inégalités tendront respectivement vers

$$f(t+0)-f(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t+0)-\varphi(t).$$

Si donc ces expressions ne sont pas nulles, Δs ne pourra décroître indéfiniment avec h, et l'arc sera discontinu.

En changeant le signe de h, on verra de même que l'arc sera discontinu, si

$$f(t-0)-f(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t-0)-\varphi(t)$$

ne sont pas nuls.

110. Supposons, au contraire, qu'on ait

$$f(t-0)=f(t+0)=f(t),$$
$$\varphi(t-0)=\varphi(t+0)=\varphi(t),$$

ce qui exprime que $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont continues. L'arc s sera lui-même continu.

En effet, on aura (72)

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t),$$
$$\varphi(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t),$$

f_1, f_2, φ_1, φ_2, étant des fonctions continues et non décroissantes. On aura, par suite,

$$\sum_0^n \sqrt{[f(t_{k+1})-f(t_k)]^2+[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2}$$
$$\overline{\overline{<}} \sum_0^n \left[\begin{array}{l} |f(t_{k+1})-f(t_k)| \\ +|\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)| \end{array}\right]$$
$$\overline{\overline{<}} \sum_0^n \left[\begin{array}{l} |f_1(t_{k+1})-f_1(t_k)-f_2(t_{k+1})+f_2(t_k)| \\ +|\varphi_1(t_{k+1})-\varphi_1(t_k)-\varphi_2(t_{k+1})+\varphi_2(t_k)| \end{array}\right]$$
$$\overline{\overline{<}} \sum_0^n \left\{\begin{array}{l} [f_1(t_{k+1})-f_1(t_k)]+[f_2(t_{k+1})-f_2(t_k)] \\ +[\varphi_1(t_{k+1})-\varphi_1(t_k)]+[\varphi_2(t_{k+1})-\varphi_2(t_k)] \end{array}\right\}$$
$$\overline{\overline{<}} [f_1(t+h)-f_1(t)]+[f_2(t+h)-f_2(t)]$$
$$+[\varphi_1(t+h)-\varphi_1(t)]+[\varphi_2(t+h)-\varphi_2(t)].$$

Or chacun des quatre termes de cette expression tend vers zéro avec h, puisque f_1, f_2, φ_1, φ_2 sont des fonctions continues.

Nous nommerons *courbes rectifiables* celles dont l'arc a une longueur déterminée, fonction continue de t. D'après ce que nous venons de voir, on les reconnaît à ce caractère que les fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont continues, et à variation limitée.

111. Si les fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ ont des dérivées continues au point t, l'arc s aura lui-même une dérivée, égale à $\sqrt{f'(t)^2+\varphi'(t)^2}$.

On a, en effet,

$$f(t_{k+1})-f(t_k)=f'(\tau_k)(t_{k+1}-t_k),$$
$$\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)=\varphi'(\tau'_k)(t_{k+1}-t_k),$$

τ_k et τ'_k étant compris entre t_k et t_{k+1} et, *a fortiori*, entre t et $t+h$.

On en conclut

$$\sum\sqrt{[f(t_{k+1})-f(t_k)]^2+[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2}$$
$$=\sum(t_{k+1}-t_k)\sqrt{f'^2(\tau_k)+\varphi'^2(\tau'_k)}.$$

Or $\sqrt{f'^2(\tau_k)+\varphi'^2(\tau''_k)}$ diffère de $\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)}$ d'une quantité au plus égale en valeur absolue à

$$\sqrt{[f'(\tau_k)-f'(t)]^2+[\varphi'(\tau'_k)-\varphi'(t)]^2}.$$

D'ailleurs les fonctions f' et φ' sont continues; donc, en prenant h assez petit, on pourra rendre $|f'(\tau_k)-f'(t)|$ et $|\varphi'(\tau'_k)-\varphi'(t)|$ moindres qu'une quantité positive quelconque ε.

On aura donc

$$\left|\sqrt{f'^2(\tau_k)+\varphi'^2(\tau'_k)}-\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)}\right|<\varepsilon\sqrt{2}.$$

Donc

$$(2) \qquad \frac{1}{h}\sum\sqrt{[f(t_{k+1})-f(t_k)]^2+[\varphi(t_{k+1})-\varphi(t_k)]^2}$$

sera compris entre

$$\frac{1}{h}\sum(t_{k+1}-t_k)\left[\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)}+\varepsilon\sqrt{2}\right]$$
$$=\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)}+\varepsilon\sqrt{2}$$

et

$$\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)}-\varepsilon\sqrt{2}.$$

Multiplions indéfiniment les valeurs intermédiaires $t_1, \ldots, t_k, \ldots$; la somme (2) tendra vers $\frac{\Delta s}{h}$, qui sera encore compris entre les deux nombres ci-dessus.

Si h décroît indéfiniment, on pourra faire tendre en même temps ε vers zéro, et l'on aura à la limite

$$\lim\frac{\Delta s}{h}=\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)}.$$

112. La région R du plan intérieure à une ligne rectifiable (fermée et sans point multiple) est toujours quarrable.

Partageons, en effet, le périmètre L de cette ligne en arcs égaux de longueur $\frac{L}{n}$, et décomposons le plan en carrés de côté $\frac{L}{n}$. Il est évident que chacun des n arcs obtenus ne pourra rencontrer plus de quatre de ces carrés. La somme des aires des carrés qui rencontrent la frontière de R est donc au plus égale à $4n\frac{L^2}{n^2}=\frac{4L^2}{n}$. Cette expression tend vers zéro quand n croît indéfiniment; R est donc quarrable.

113. Une courbe dans l'espace peut être représentée par trois équations

$$x=f(t), \qquad y=\varphi(t), \qquad z=\psi(t).$$

Elle sera continue, si les fonctions f, φ, ψ le sont.

Nous appellerons *longueur* d'un arc de cette courbe la limite du périmètre d'un polygone inscrit.

Des raisonnements identiques à ceux des nᵒˢ **105** à **111** montrent :

1° Que pour que cet arc s existe et soit une fonction continue de t, auquel cas nous dirons que la courbe est rectifiable, il faut et il suffit que $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ soient continues et à variation bornée;

2° Que s est une fonction croissante de t;

3° Que si $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent au point t des dérivées continues, s admettra une dérivée, égale à

$$\sqrt{f'^2(t)+\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}.$$

IX. — Fonctions élémentaires.

114. Avant d'aller plus loin, il convient de passer en revue certaines fonctions particulièrement simples, qu'on désigne sous le nom de *fonctions élémentaires*.

Fonctions rationnelles. — Considérons l'expression Ax^n, où A est une constante et n un entier. En lui appliquant la règle du n° **75** pour former la dérivée d'un produit, il viendra

$$\frac{(Ax^n)'}{Ax^n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ldots=\frac{n}{x},$$

$$(Ax^n)'=nAx^{n-1}.$$

La dérivée d'un polynome entier

$$Ax^n+Bx^m+\ldots$$

sera donc

$$nAx^{n-1}+mBx^{m-1}+\ldots.$$

Celle d'une fonction rationnelle $\frac{u}{v}$, quotient de deux polynomes, s'en déduira immédiatement (**75**).

115. *Logarithme.* — On donne le nom de *logarithme*

arithmétique de x à la fonction définie par l'équation

$$\operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{d\alpha}{\alpha},$$

la variable x étant supposée positive.

Cette fonction a pour dérivée $\frac{1}{x}$ et s'annule pour $x=1$. Elle est d'ailleurs croissante.

On a, d'après cette définition, y désignant une seconde variable positive,

$$d \operatorname{Log} xy = \frac{dxy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = d \operatorname{Log} x + d \operatorname{Log} y,$$

d'où

$$\operatorname{Log} xy = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y + C.$$

Pour déterminer la constante C, posons $x=1$, $y=1$; les logarithmes s'annulent tous ; donc $C=0$, et

$$(1) \qquad \operatorname{Log} xy = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y.$$

Pour la valeur particulière $y = \frac{1}{x}$, cette équation devient

$$(2) \qquad \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} \frac{1}{x} = 0.$$

Si x tend vers ∞, il en est de même de son logarithme. Soit, en effet, a un nombre quelconque > 1 ; dès que x sera devenu plus grand que a^n, on aura

$$\operatorname{Log} x > \operatorname{Log} a^n > n \operatorname{Log} a,$$

quantité qui tend vers ∞ avec n, $\operatorname{Log} a$ étant positif.

Si x tend vers 0, $\operatorname{Log} x$ tendra vers $-\infty$ en vertu de l'équation (2).

116. *Exponentielle.* — Le logarithme de x, étant une fonction croissante, ne reprend pas deux fois la même valeur. Il a donc une fonction inverse. On la nomme *fonction*

exponentielle, et on la représente par e^x. Cette fonction est ainsi définie par l'équation

$$x = \text{Log}\, y.$$

Elle croît avec x, est égale à zéro pour $x = -\infty$; à 1 pour $x = 0$; à ∞ pour $x = +\infty$. Pour $x = 1$, elle prend une valeur déterminée e, que nous calculerons plus tard.

Elle a pour dérivée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = y = e^x.$$

Donc

$$(e^x)' = e^x. \tag{3}$$

Posons enfin dans la formule (1)

$$\text{Log}\, x = u, \qquad \text{Log}\, y = v,$$

d'où

$$\text{Log}\, xy = u + v.$$

On en déduit

$$x = e^u, \qquad y = e^v, \qquad xy = e^{u+v}$$

et, par suite,

$$e^u e^v = e^{u+v}. \tag{4}$$

En particulier, si $v = -u$, il viendra

$$e^u e^{-u} = 1. \tag{5}$$

117. *Fonction x^m.* — Nous désignerons par le symbole x^m la fonction définie par l'équation

$$y = e^{m \text{Log}\, x}, \tag{6}$$

x étant une variable positive.

Si m est un entier positif, elle est, d'après la formule (4), le produit de m facteurs égaux à $e^{\text{Log}\, x}$ ou x; si m est négatif, ce sera le produit de m facteurs égaux à $\frac{1}{x}$. Si m est une

fraction $\frac{p}{q}$, on aura, en élevant l'équation (6) à la puissance q,

$$y^q = e^{p \operatorname{Log} x} = x^p.$$

Donc y sera la racine positive de l'équation binome ci-dessus. Cette racine positive, évidemment unique, se nomme la *racine $q^{\text{ième}}$ arithmétique* de x^p.

Généralement, $y = x^m$ tendra vers o, 1, $+\infty$ lorsque $m \operatorname{Log} x$ tendra respectivement vers $-\infty$, o, $+\infty$. Si donc on suppose m positif et croissant indéfiniment, x^m tendra vers o ou vers ∞ suivant que $x < 1$ ou $x > 1$.

On a évidemment

$$(7) \qquad x^m x^n = e^{m \operatorname{Log} x} e^{n \operatorname{Log} x} = e^{(m+n) \operatorname{Log} x} = x^{m+n},$$

$$(8) \qquad (x^m)^n = e^{n \operatorname{Log} x^m} = e^{mn \operatorname{Log} x} = x^{mn}.$$

On trouve enfin, en appliquant la règle pour dériver les fonctions de fonctions,

$$(9) \qquad (x^m)' = e^{m \operatorname{Log} x} \frac{m}{x} = x^m \frac{m}{x} = m x^{m-1},$$

formule qui n'avait été établie jusqu'à présent que pour m entier positif.

118. *Fonctions trigonométriques.* — Les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\cot x$ étant définies comme dans les éléments, il est aisé de déterminer leurs dérivées.

Remarquons d'abord que, si l'on change x en $x + h$, les accroissements de $\sin x$ et de $\cos x$ seront les projections de l'arc h sur les deux axes coordonnés, et leur module ne pourra surpasser h. Donc $\sin x$ et $\cos x$ sont continus.

On a en second lieu

$$2 \sin \frac{h}{2} = \text{corde } h < h < 2 \operatorname{tang} \frac{h}{2},$$

d'où

$$\cos \frac{h}{2} < \frac{2 \sin \frac{h}{2}}{h} < 1.$$

Si h tend vers zéro, $\cos\frac{h}{2}$ tend vers 1; donc

$$\lim \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h} = 1.$$

Cela posé, on a

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} (\sin x)' &= \lim \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x \end{aligned} \right.$$

et, par suite,

$$(11)\quad (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]' = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x,$$

$$(12)\quad (\operatorname{tang} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(13)\quad (\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

119. *Fonctions trigonométriques inverses.* — Si nous faisons parcourir à la variable x la suite des valeurs comprises entre $k\pi-\frac{\pi}{2}$ et $k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k étant entier), la fonction $u=\sin x$ prendra successivement les valeurs comprises entre -1 et $+1$, et chacune une seule fois. On peut donc réciproquement considérer x comme une fonction de u, définie dans l'intervalle de -1 à $+1$.

Cette fonction $\varphi_k(u)$, inverse de $\sin x$, admettra une dérivée égale à

$$\frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1-u^2}},$$

le radical devant être pris avec sa valeur arithmétique; car, lorsque x est compris entre $k\pi-\frac{\pi}{2}$ et $k\pi+\frac{\pi}{2}$, son cosinus a le signe de $(-1)^k$.

La dérivée précédente cesse d'ailleurs d'exister, en devenant infinie pour les valeurs extrêmes $u = \pm 1$.

120. Considérons l'arc de courbe représenté par l'équation

$$x = \varphi_k(u).$$

Aux deux extrémités de cet arc, on a respectivement

$$x = k\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad u = \sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^k,$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad u = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \quad (-1)^k.$$

Si donc k est un nombre pair $2m$, on aura pour $u = 1$,

$$x = 2m\pi + \frac{\pi}{2},$$

et pour $u = -1$,

$$x = 2m\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\varphi_{2m}(1) = 2m\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_{2m}(-1) = 2m\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Au contraire, si k est un nombre impair $2m+1$, on aura

$$\varphi_{2m+1}(1) = (2m+1)\pi - \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_{2m+1}(-1) = (2m+1)\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Il résulte de ces formules qu'on a

$$\varphi_{2m}(1) = \varphi_{2m+1}(1), \qquad \varphi_{2m}(-1) = \varphi_{2m-1}(-1).$$

L'arc de courbe, représenté par l'équation

$$x = \varphi_k(u),$$

se raccordera donc à ses deux extrémités avec les arcs représentés par les équations

$$x = \varphi_{k-1}(u) \qquad x = \varphi_{k+1}(u).$$

On se trouve donc naturellement conduit à considérer l'ensemble de ces divers arcs comme constituant une courbe unique dont ils seraient les tronçons, et les fonctions $\varphi_k(u)$ comme formant autant de branches d'une fonction unique, laquelle aura pour chaque valeur de u une infinité de valeurs distinctes, au lieu d'une seule, comme nous l'avons admis jusqu'à présent. Cette fonction, inverse de $\sin x$, se représente par $\arcsin x$; et nous désignerons par $\text{Arc}\sin x$ celle de ses branches qui correspond à $k = 0$.

121. Soit

$$u = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Si l'on désigne par $\arccos u$ la fonction inverse, on aura

$$x = \arccos u, \qquad \frac{\pi}{2} - x = \arcsin u,$$

d'où

$$(14) \quad \begin{cases} \arccos u = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin u, \\ (\arccos u)' = -(\arcsin u)' = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 - u^2}}, \end{cases}$$

le signe dépendant, comme tout à l'heure, de celle des branches de la fonction que l'on considère.

122. L'inversion de la fonction

$$u = \text{tang}\, x$$

donne lieu à des considérations analogues aux précédentes.

Si l'on fait varier x entre $k\pi$ et $(k+1)\pi$, u prendra toutes les valeurs réelles, chacune une seule fois. On pourra donc considérer réciproquement x comme une fonction de u, inverse de $\text{tang}\, x$. Cette fonction $\varphi_k(u)$ admettra pour dérivée

$$(15) \quad \frac{1}{(\text{tang}\, x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 x} = \frac{1}{1 + u^2}.$$

Les diverses fonctions $\varphi_k(u)$ pourront être considérées comme autant de branches d'une fonction à valeurs multiples, que l'on représente par arc tang u. Nous désignerons par Arc tang u celle de ces branches qui s'annule pour $u=0$.

X. — Dérivées et différentielles d'ordre supérieur.

123. Soit $u=f(x)$ une fonction de x, ayant une dérivée u'. Si cette nouvelle fonction admet elle-même une dérivée, on la représentera par u'', $f''(x)$ ou $D^2 u$ et on l'appellera la *dérivée seconde* de u.

La dérivée de u'' sera la *dérivée troisième* de u, et se représentera par u''', $f'''(x)$ ou $D^3 u$; et ainsi de suite.

La différentielle $u'\,dx$ de la fonction u est une nouvelle fonction de x dont on pourra chercher la différentielle. Cette nouvelle différentielle dépend de la relation qu'on voudra établir entre la variable x et l'accroissement dx qu'on lui fait subir.

Or soient D le domaine dans l'intérieur duquel $f(x)$ est supposée définie; E l'ensemble des points intérieurs dont l'écart à la frontière est moindre qu'un nombre fixe δ; pour tous les points de E, on pourra, sans risquer que $x+dx$ sorte du champ, assigner à dx une même valeur constante de module $<\delta$; dx étant ainsi constant dans E, la différentielle de $u'\,dx$ y sera égale à $u''\,dx.dx = u''\,dx^2$. Cette expression se nomme la *différentielle seconde* de u, et se représente par $d^2 u$.

Si l'on fait décroître δ indéfiniment, E s'étendra de manière à englober successivement chacun des points intérieurs à D; ce qui permettra d'étendre la définition précédente de $d^2 u$ à tout l'intérieur de D.

De même, $d^2 u$ aura une différentielle $u'''\,dx^3$; ce sera la *différentielle troisième* de u, et on la représente par $d^3 u$.

Continuant ainsi, on aura

$$\begin{aligned} du &= u'\,dx, \\ d^2u &= u''\,dx^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ d^nu &= u^{(n)}\,dx^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où

$$u' = \frac{du}{dx}, \qquad u'' = \frac{d^2u}{dx^2}, \qquad \ldots, \qquad u^{(n)} = \frac{d^nu}{dx^n}.$$

Chacune des dérivées successives de u est ainsi un quotient de différentielles, ce qui donne une nouvelle manière, très souvent employée, de représenter ces quantités.

124. Si l'on donne à x un accroissement Δx, la fonction $f(x)$ prendra un accroissement

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

que nous appellerons la *différence première* de $f(x)$.

La différence de la différence première sera la *différence seconde*, et se représentera par $\Delta^2 f(x)$, et ainsi de suite.

Posons, pour abréger l'écriture,

$$f(x + n\,\Delta x) = f^n.$$

On aura, d'après la définition précédente,

$$f^n = f^{n-1} + \Delta f^{n-1} \tag{1}$$

ou symboliquement

$$f^n = (1 + \Delta) f^{n-1} = (1 + \Delta)^2 f^{n-2} = \ldots = (1 + \Delta)^n f. \tag{2}$$

On aura réciproquement

$$\begin{aligned} \Delta f^0 &= f^1 - f^0, \\ \Delta^2 f^0 &= \Delta f^1 - \Delta f^0 = f^2 - f^1 - f^1 + f^0 = f^2 - 2f^1 + f^0, \end{aligned}$$

et généralement

$$\Delta^n f^0 = f^n + A f^{n-1} + B f^{n-2} + \ldots + K f^0, \tag{3}$$

A, B, ..., K étant des coefficients numériques.

Pour les déterminer, prenons la différence des deux membres de l'équation (3). Il viendra

$$\Delta^{n+1} f^0 = \Delta f^n + A\Delta f^{n-1} + \ldots + K\Delta f^0.$$

Mais l'équation (1) peut être mise sous la forme symbolique

$$\Delta f^{n-1} = (f - 1) f^{n-1}.$$

Donc

$$\Delta^{n+1} f^0 = (f-1)(f^n + A f^{n-1} + \ldots + K f^0) = (f-1)\Delta^n f^0.$$

On aura donc, en changeant n en $n-1$, ...,

$$(4) \quad \Delta^n f^0 = (f-1)\Delta^{n-1} f^0 = \ldots = (f-1)^{n-1}\Delta f^0 = (f-1)^n,$$

pourvu que, le développement effectué, on remplace le dernier terme $(-1)^n$ par $(-1)^n f^0$.

125. Les signes d'opération D et Δ peuvent être permutés entre eux; car on a évidemment

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\Delta f(x) &= \mathrm{D}[f(x+\Delta x) - f(x)] \\ &= \mathrm{D}\, f(x+\Delta x) - \mathrm{D} f(x) = \Delta \mathrm{D} f(x). \end{aligned}$$

En posant, pour plus de clarté,

$$\Delta^{n-1} f(x) = \varphi(x),$$

on aura donc

$$\varphi'(x) = \Delta^{n-1} f'(x).$$

Cela posé, appliquons à la fonction $\varphi(x)$ la formule

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x),$$

θ étant compris entre zéro et 1.

Il viendra

$$\Delta^n f(x) = \Delta x \varphi'(x + \theta\Delta x) = \Delta x . \Delta^{n-1} f'(x + \theta\Delta x).$$

On aura de même

$$\Delta^{n-1} f'(x) = \Delta x . \Delta^{n-2} f''(x + \theta_1 \Delta x),$$

θ_1 étant compris entre o et 1 ; et, par suite,

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n f^n(x + \theta\,\Delta x + \theta_1\,\Delta x + \ldots)$$
$$= \Delta x^n f^n(x + t\,\Delta x),$$

t étant compris entre o et n.

Divisant par Δx^n et faisant tendre Δx vers zéro, on aura à la limite, si $f^n(x)$ est continue,

$$f^n(x) = \lim \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}. \tag{5}$$

126. Soit $u = f(x, y)$ une fonction de plusieurs variables indépendantes x, y; ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pourront admettre elles-mêmes des dérivées partielles.

Nous désignerons les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial x}$ par $f''_{xx}(x, y)$, $f''_{xy}(x, y)$ ou par $D^2_{xx}f$, $D^2_{xy}f$ ou enfin par $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, celles de $\frac{\partial f}{\partial y}$ par $f''_{yx}(x, y)$, $f''_{yy}(x, y)$ ou $D^2_{xy}f$, $D^2_{yy}f$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

En général, $\frac{\partial^{m+n+p\ldots} f}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial x^p\ldots}$ représentera la fonction déduite de f en y effectuant successivement m dérivations par rapport à x, puis n dérivations par rapport à y, puis p dérivations par rapport à x, etc.

127. Posons

$$\Delta\, f(x, y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_1 f(x, y) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

On aura évidemment

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_1 \Delta f(x, y) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) \\ &\quad - f(x, y + \Delta y) + f(x, y) \\ &= \Delta\Delta_1 f(x, y). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Posons, pour plus de clarté,

$$\Delta_1 f(x, y) = \varphi(x, y).$$

On aura

$$\begin{aligned}\Delta\Delta_1 f(x, y) &= \varphi(x + \Delta x, y) - \varphi(x, y)\\ &= \varphi'_x(x + \theta\,\Delta x, y)\,\Delta x\\ &= [f'_x(x + \theta\,\Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x + \theta\,\Delta x, y)]\,\Delta x\\ &= f''_{xy}(x + \theta\,\Delta x, y + \theta_1\,\Delta y)\,\Delta y\,\Delta x.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\Delta\Delta_1 f(x, y)}{\Delta x\,\Delta y} = f''_{xy}(x + \theta\,\Delta x, y + \theta_1\,\Delta y).$$

Si la fonction f''_{xy} est continue au point x, y, on aura, en faisant tendre Δx et Δy vers zéro,

$$f''_{xy}(x, y) = \lim \frac{\Delta\Delta_1 f(x, y)}{\Delta x\,\Delta y}. \tag{7}$$

Si $f''_{yx}(x, y)$ est continue au point x, y, on trouvera de même

$$f''_{yx}(x, y) = \lim \frac{\Delta_1\,\Delta f(x, y)}{\Delta x\,\Delta y}$$

et, en vertu de l'égalité (6),

$$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y). \tag{8}$$

Nous obtenons donc le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME. — *Si les dérivées partielles f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} existent aux environs du point x, y; si, de plus, f''_{xy}, f''_{yx} sont continues en ce point, ces deux dérivées partielles seront égales.*

On voit par là que deux dérivations successives, opérées par rapport à deux variables différentes x, y, peuvent (sous les conditions précédentes) être interverties sans changer le résultat final. On en déduit

$$\frac{\partial^{m+n+p\ldots} f}{\partial x^m\,\partial y^n\,\partial x^p\ldots} = \frac{\partial^{m+n+p\ldots} f}{\partial x^{m+p+\ldots}\,\partial y^{n+\ldots}}, \tag{9}$$

en opérant d'abord toutes les dérivations relatives à x, puis celles relatives à y.

128. On voit aisément qu'on aura en général

$$\Delta^m \Delta_1^n f(x, y) = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x + t\,\Delta x, y + t_1\,\Delta y)\,\Delta x^m\,\Delta y^n,$$

t étant compris entre o et m, t_1 entre o et n.

Si donc la dérivée partielle d'ordre $m+n$, qui figure au second membre, est continue au point x, y, on aura, en faisant tendre Δx et Δy vers zéro,

$$(10) \qquad \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = \lim \frac{\Delta^m \Delta_1^n f(x, y)}{\Delta x^m \Delta y^n}.$$

129. Considérons maintenant la différentielle totale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

de la fonction $f(x, y)$. La différentielle de cette différentielle, prise en supposant dx et dy constants, se nomme la *différentielle seconde* de f, et se désigne par $d^2 f$. La différentielle de $d^2 f$ sera la différentielle troisième $d^3 f$, et ainsi de suite.

On a, d'après cette définition,

$$d^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy\right) dy$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

et, plus généralement,

$$d^m f = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} dx^m + m\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y} dx^{m-1} dy + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-n}\partial y^n} dx^{m-n} dy^n$$
$$+ \ldots + \frac{\partial^m f}{\partial y^m} dy^m$$

ou, sous forme symbolique,

$$(11)\qquad d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^m f.$$

Cette formule étant vérifiée pour df et d^2f, il suffira d'établir que, si elle est vraie pour un nombre m, elle sera vraie pour $m+1$.

Pour cela, différentions cette formule. Nous obtiendrons évidemment un résultat de la forme

$$d^{m+1}f = \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}dx^{m+1} + A_1 \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^m \partial y} dx^m dy + \ldots$$
$$+ A_n \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-n}\partial y^n} dx^{m+1-n} dy^n + \ldots + \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}} dy^{m+1}.$$

Il reste à vérifier l'expression des coefficients numériques A.

Or, le terme général

$$A_n \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-n}\partial y^n} dx^{m+1-n} dy^n$$

provient de la différentiation par rapport à x du terme en $dx^{m-n}dy^n$ de l'expression de $d^m f$ et de la différentiation par rapport à y du terme précédent. Ces termes ayant respectivement pour coefficients

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} \quad \text{et} \quad \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)},$$

A_n sera égal à la somme de ces deux quantités, soit à

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots(n-1)}\left(1 + \frac{m-n+1}{n}\right)$$
$$= \frac{(m+1)m\ldots(m-n+2)}{1.2\ldots n},$$

ce qui confirme la formule.

130. Soient u et v deux fonctions d'une ou de plusieurs

variables. On aura généralement

$$(12)\quad \begin{cases} d^m(uv) = v\,d^m u + m\,d^{m-1}u\,dv + \ldots \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\,d^{m-n}u\,d^n v + \ldots + u\,d^m v. \end{cases}$$

En effet, Δu et Δv étant les accroissements de u et de v, on aura

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v.$$

Négligeant le terme du second ordre $\Delta u\,\Delta v$, et remplaçant Δu, Δv par leurs valeurs principales du et dv, on aura, pour valeur principale de Δuv,

$$duv = v\,du + u\,dv,$$

ce qui confirme la formule pour $m = 1$.

D'ailleurs, en la supposant démontrée pour le nombre m, on verra, comme précédemment, qu'elle est vraie pour $m + 1$.

131. Plus généralement, soit $V = f(u, v)$ une fonction quelconque de u et de v, u et v étant encore des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes x, y. Proposons-nous de déterminer les différentielles successives de V.

On a pour la différentielle première, ainsi que nous l'avons vu,

$$dV = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv.$$

Pour calculer la différentielle seconde d^2V, il faudra différentier cette expression. Or $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ sont des fonctions de u, v, qui ont respectivement pour différentielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}dv, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv.$$

D'autre part, du, dv dépendent de $x, y, \ldots$ et ont, par définition, pour différentielles d^2u, d^2v. Appliquant la règle

trouvée pour différentier un produit, il viendra donc

$$\begin{aligned} d^2\mathrm{V} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du + \frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}dv\right)du + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\partial v\right)dv \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial f}{\partial u}d^2u + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v. \end{aligned}$$

Une nouvelle différentiation donnerait $d^3\mathrm{V}$, et ainsi de suite.

On voit, par les formules qui précèdent, que $d\mathrm{V}$ a la même forme que si u, v étaient des variables indépendantes; mais il n'en est pas de même des différentielles suivantes : $d^2\mathrm{V}$, par exemple, contient des termes en d^2u et d^2v qui n'existeraient pas dans cette hypothèse.

XI. — Changements de variables.

132. On a souvent l'occasion de substituer aux variables qui figurent dans une formule de nouvelles variables ayant avec les premières une liaison connue. Nous sommes actuellement en mesure d'indiquer les règles à suivre pour effectuer cette opération lorsque les fonctions à transformer contiennent des dérivées. Nous allons les exposer en commençant par les cas les plus simples.

Théorème I. — *Soit $y = \mathrm{F}(x)$ une fonction de x ayant pour dérivées successives $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ Supposons que x, au lieu d'être une variable indépendante, soit lui-même fonction d'une nouvelle variable t, et soient x', x'', ..., y', y'', ... les dérivées successives de x et de y par rapport à t.*

On demande de trouver les relations qui existent entre $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, x', x'', \ldots, y', y'', \ldots$.

y étant, par rapport à t, une fonction de fonction, on aura, par la règle connue,

$$y' = \frac{dy}{dx} x'.$$

Dérivant de nouveau par rapport à t, en remarquant que $\frac{dy}{dx}$ est une fonction de x, qui est lui-même fonction de t, on aura

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} x'^2 + \frac{dy}{dx} x''.$$

Dérivant encore, on trouvera

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} x'^3 + 3\frac{d^2y}{dx^2} x' x'' + \frac{dy}{dx} x''', \qquad \ldots.$$

Résolvant ces équations par rapport à $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., on trouvera réciproquement

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \qquad \ldots.$$

On remarquera qu'en appelant $d_1 x$, $d_1^2 x$, ..., $d_1 y$, $d_1^2 y$ les différentielles successives de x et de y par rapport à la nouvelle variable t, on aura

$$x' = \frac{d_1 x}{dt}, \qquad y' = \frac{d_1 y}{dt}, \qquad x'' = \frac{d_1^2 x}{dt^2}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{d_1 y}{d_1 x}.$$

Donc la dérivée de y par rapport à x reste égale au rapport des différentielles de x et de y, quelle que soit la variable indépendante.

L'expression des dérivées suivantes est au contraire changée. On aura, par exemple,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d_1 x\, d_1^2 y - d_1 y\, d_1^2 x}{d_1 x^3}.$$

133. Problème II. — *Soit, comme précédemment,* $y = F(x)$. *Posons*

$$(2) \qquad x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u).$$

Nous aurons trois équations entre x, y, t, u. On peut donc considérer x, y, u comme des fonctions de t. Cela posé, *on demande d'exprimer* $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ *en fonction de $t, u,$* $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots$.

Prenons les dérivées successives des équations (2) par rapport à la nouvelle variable indépendante t. Il viendra

$$x' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

$$y' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dt},$$

puis

$$x'' = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$y'' = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2},$$

. . . .

On n'aura plus qu'à substituer ces valeurs dans les expressions (1).

134. Applications. — 1° *Soient* $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. *On demande l'expression de la quantité*

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(nous la rencontrerons dans la théorie des courbes, sous le nom de *rayon de courbure*) *en fonction de* $\rho, \theta, \frac{d\rho}{d\theta}, \frac{d^2\rho}{d\theta^2}$.

On aura

$$x' = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta,$$

$$y' = \frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta,$$

$$x'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta - \rho\cos\theta,$$

$$y'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta$$

et

$$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1 + \frac{y'^2}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'^3},$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''},$$

$$x'^2 + y'^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2,$$

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' &= \left(\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta\right)\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta + 2\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta\right) \\ &\quad - \left(\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta\right)\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta - \rho\cos\theta\right) \\ &= 2\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho^2, \end{aligned}$$

$$R = \frac{\left(\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2\frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho^2}.$$

135. 2° *Les deux variables x et y étant liées par une équation, on demande d'exprimer les dérivées x', x'', ... de x par rapport à y en fonction des dérivées y', y'', ... de y par rapport à x.*

On a, par le théorème sur la dérivée des fonctions inverses,

$$x' = \frac{1}{y'}.$$

Prenons la dérivée de cette équation par rapport à la nouvelle variable indépendante y. En remarquant que y', y'', ...

sont des fonctions de x, qui lui-même est fonction de y, le théorème sur la dérivée des fonctions de fonction donnera

$$x'' = -\frac{y''}{y'^2}x' = -\frac{y''}{y'^3},$$

$$x''' = \left(-\frac{y'''}{y'^3} + \frac{3y''^2}{y'^4}\right)x' = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5},$$

. . . .

136. Les fonctions de plusieurs variables donnent lieu à deux questions analogues, que nous allons traiter.

Problème III. — *Soit z une fonction de deux variables x, y. On pose $x = f(t, u)$, $y = \varphi(t, u)$, t et u étant deux nouvelles variables. On demande d'exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ... en fonction de t, u, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, ...*

z étant fonction de x, y, qui sont eux-mêmes fonctions de t, u, sera une fonction composée de ces deux nouvelles variables. Prenons ses dérivées partielles successives; il viendra

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \end{cases}$$

puis, en remarquant que $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont des fonctions de x, y, eux-mêmes fonctions de t et de u,

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\[2ex] \qquad + \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\[2ex] \quad = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\dfrac{\partial x}{\partial t}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \\[2ex] \qquad + \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \end{cases}$$

et

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\\ &\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial u},\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.\end{aligned}\right.$$

On calculerait de même les dérivées troisièmes, etc.

Cela posé, les équations (3), linéaires en $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, permettent d'exprimer ces quantités en fonctions de $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ et des dérivées partielles de x et y, lesquelles sont des fonctions connues de t, u. Portant ensuite les valeurs trouvées pour $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans les équations (4), (5), (6), on pourra les résoudre par rapport à $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; de même pour les dérivées des ordres supérieurs.

Cette méthode est évidemment applicable à des fonctions d'un nombre quelconque de variables.

137. *Remarque.* — On ne doit pas perdre de vue que la dérivée partielle $\frac{\partial z}{\partial x}$ d'une fonction de deux variables x, y est, par définition, la dérivée de z considéré comme fonction de x, *y restant constant*. Si nous remplaçons y par $\varphi(x, u)$, de telle sorte que les nouvelles variables indépendantes soient x et u, la nouvelle dérivée partielle par rapport à x sera la dérivée de z par rapport à x, *u restant constant*. De ce changement de définition résulte naturellement un changement dans la valeur de cette dérivée partielle.

Soit, par exemple, $z = F(x, y)$. On aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Mais, après le changement de variable, on aura

$$z = F[x, \varphi(x, u)], \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

138. *Exemples.* — 1° Soient x, y, z trois variables indépendantes. Posons

$$\begin{aligned} x &= at + bu + cv, \\ y &= a't + b'u + c'v, \\ z &= a''t + b''u + c''v, \end{aligned}$$

a, b, c, ... étant des constantes choisies de telle sorte que la substitution soit *orthogonale*, c'est-à-dire qu'on ait

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2 + v^2.$$

Cette condition fournira le système d'équations suivant,

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \\ ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ ca + c'a' + c''a'' &= 0, \end{aligned}$$

ou le suivant, qui lui est équivalent, comme on sait,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, \\ aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0. \end{aligned} \right.$$

Soit maintenant V une fonction quelconque de x, y, z.

Considérons les deux expressions

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

qui se présentent dans un grand nombre de problèmes, et que M. Lamé a nommées les *paramètres différentiels* du premier et du second ordre de la fonction V. Proposons-nous de les exprimer au moyen des dérivées partielles de V par rapport aux nouvelles variables t, u, v. On aura

$$\frac{\partial V}{\partial t}=a\frac{\partial V}{\partial x}+a'\frac{\partial V}{\partial y}+a''\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial V}{\partial u}=b\frac{\partial V}{\partial x}+b'\frac{\partial V}{\partial y}+b''\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial V}{\partial v}=c\frac{\partial V}{\partial x}+c'\frac{\partial V}{\partial y}+c''\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}= {} & a\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+a''\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)\\ & +a'\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+a'\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)\\ & +a''\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}+a'\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+a''\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\\ = {} & a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ & +2aa'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+2a'a''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+2a''a\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}= {} & b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+b'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+b''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ & +2bb'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+2b'b''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+2b''b\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}= {} & c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+c'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+c''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\\ & +2cc'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+2c'c''\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+2c''c\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}.\end{aligned}$$

Ajoutons les carrés des trois premières équations. Il viendra, en tenant compte des équations (7),

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Les trois suivantes, ajoutées ensemble, donneront de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

La forme des paramètres différentiels n'est donc pas altérée par une substitution orthogonale effectuée sur les variables, et c'est à cette circonstance que ces expressions doivent leur importance en Analyse.

139. 2° Posons

$$x=\rho\sin\theta\cos\psi,\qquad y=\rho\sin\theta\sin\psi,\qquad z=\rho\cos\theta,$$

et proposons-nous d'exprimer les paramètres différentiels de V en fonction des nouvelles variables ρ, θ, ψ.

Le changement de variables qui précède équivaut évidemment aux deux suivants, opérés successivement

$$x=r\cos\psi,\qquad y=r\sin\psi,\qquad z=z$$

et

$$r=\rho\sin\theta,\qquad \psi=\psi,\qquad z=\rho\cos\theta.$$

Effectuons le premier changement de variables. Il viendra

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\psi+\frac{\partial V}{\partial y}\sin\psi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi}=-\frac{\partial V}{\partial x}r\sin\psi+\frac{\partial V}{\partial y}r\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos^2\psi+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cos\psi\sin\psi+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\sin^2\psi,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}r^2\sin^2\psi-2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}r^2\sin\psi\cos\psi+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}r^2\cos^2\psi$$
$$-\frac{\partial V}{\partial x}r\cos\psi-\frac{\partial V}{\partial y}r\sin\psi.$$

On en déduit immédiatement

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

D'ailleurs, $\frac{\partial V}{\partial z}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ n'ont évidemment pas changé. Les paramètres différentiels deviendront donc respectivement

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

et

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Le second changement de variables qui nous reste à effectuer, à savoir

$$z = \rho\cos\theta, \qquad r = \rho\sin\theta, \qquad \psi = \psi,$$

n'altérera évidemment pas $\frac{\partial V}{\partial \psi}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}$ et transformera respectivement

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Enfin on aura les relations

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial z}\rho\sin\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\rho\cos\theta,$$

d'où l'on déduit, en éliminant $\frac{\partial V}{\partial z}$,

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \sin\theta\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions précédentes, on aura, pour le premier paramètre différentiel,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2,$$

et pour le second

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

140. PROBLÈME IV. — *Soit z une fonction de x, y. Posons*

$$(8) \qquad x = f(t, u, v), \qquad y = \varphi(t, u, v), \qquad z = \psi(t, u, v).$$

On demande d'exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ... *en fonction de t, u, v et des dérivées partielles* $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, ...

z étant une fonction de x, y, les quantités x, y, v seront des fonctions de t et de u, en vertu des trois équations (8). Prenant les dérivées partielles de ces équations par rapport à ces nouvelles variables, il viendra

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

. . . .

On n'aura plus qu'à substituer ces valeurs dans les équations (3) à (6), lesquelles détermineront $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ...

XII. — Changements de variables dans les intégrales définies.

141. Soient x et t deux variables, liées par la relation

$$x = \varphi(t).$$

Nous admettrons que pour tous les points t d'un domaine borné E : 1° la fonction φ conserve une dérivée continue et différente de zéro; 2° à deux valeurs distinctes de t correspondent deux valeurs de x toujours distinctes.

Cette seconde condition serait, d'ailleurs, une conséquence de la première si E était d'un seul tenant; car il serait formé des nombres compris entre deux nombres fixes t_0, T, et si x prenait la même valeur ξ pour deux valeurs différentes t_1 et t_2 de la variable t, $x - \xi$ s'annulant pour ces valeurs, sa dérivée $\varphi'(t)$ s'annulerait pour une valeur intermédiaire, ce qui est contraire à notre première hypothèse.

A l'ensemble E des points t correspond un ensemble E′ de points x, et si t décrit un ensemble parfait E_1, de longueur mesurable et intérieur à E, x décrira un ensemble parfait E'_1, intérieur à E′.

Soient

t un point de E_1;
$t + dt$ un point infiniment voisin;
x et $x + \Delta x$ les points correspondants.

On aura

$$\Delta x = [\varphi'(t) + R]\, dt,$$

R tendant uniformément vers zéro avec dt dans le domaine E_1. Si donc dt reste inférieur à un nombre fixe convenablement choisi, R sera constamment moindre qu'un nombre arbitraire ε. Le rapport $\frac{|\Delta x|}{|dt|}$ restera donc compris entre $M + \varepsilon$ et $m - \varepsilon$, M et m désignant le maximum et le minimum de $|\varphi'(t)|$.

On en conclut que E'_1 a une longueur mesurable. Décomposons, en effet, la droite lieu des points t en éléments infiniment petits dt_1, dt_2, ... La somme des éléments qui contiennent des points de la frontière de E_1 sera infiniment petite. Soit dt_k l'un de ces éléments; les points de E_1 qu'il contient étant à des distances au plus égales à dt_k de l'un d'entre eux t_k, leurs correspondants seront à des distances du point x_k qui correspond à t_k moindres que $(M+\varepsilon)\,dt_k$; ils seront donc tous contenus dans un segment δ_k de longueur moindre que $2(M+\varepsilon)\,dt_k$.

La réunion des segments δ_k forme un ensemble contenant la frontière de E'_1, et dont la longueur, étant au plus égale à

$$\sum \delta_k < 2(M+\varepsilon)\sum dt_k,$$

est infiniment petite. Donc E'_1 a une longueur mesurable.

142. Soit maintenant $f(x)$ une fonction de la variable x, bornée dans E'_1; on aura

$$f(x) = f[\varphi(t)] = F(t),$$

F étant une fonction de t, bornée dans E_1.

Nous allons montrer que l'intégrale, soit par excès, soit par défaut, de la fonction $f(x)$, prise dans l'intérieur de E'_1, est égale à l'intégrale correspondante de la fonction $F(t)\,|\varphi'(t)|$ prise dans l'intérieur de E_1.

Considérons, par exemple, les intégrales par excès. Décomposons E_1 en éléments mesurables infiniment petits dt_1, dt_2, ... et E'_1 en éléments correspondants Δx_1, Δx_2, ... également mesurables. Soient M_k le maximum de $F(t)\,|\varphi'(t)|$ dans l'élément dt_k; M'_k celui de $f(x)$ dans l'élément Δx_k. Il faut prouver que les deux sommes

$$\sum M_k\,|dt_k|, \qquad \sum M'_k\,|\Delta x_k|$$

tendent vers la même limite.

Soit t_k la valeur de t à l'origine du segment dt_k; on aura

$$|\Delta x_k| = |\varphi'(t_k) + R_k|\,|dt_k|,$$

$|R_k|$ étant $< \varepsilon$ si les éléments sont assez petits. D'autre part, $f(x)$ et $F(t)$ n'étant que deux expressions différentes de la même quantité, le maximum de $F(t)$ dans l'élément $|dt_k|$ sera M'_k, et celui de $F(t)|\varphi'(t)|$ sera compris entre $M'_k n_k$ et $M'_k N_k$, n_k et N_k désignant le minimum et le maximum de $|\psi'(t)|$ dans cet élément. Comme on a

$$n_k \leqq |\varphi'(t_k)| \leqq N_k,$$

$M'_k|\varphi'(t_k)|$ sera compris entre les mêmes nombres. On aura donc

$$M_k = M'_k[\varphi'(t_k) + \varepsilon_k],$$

$|\varepsilon_k|$ étant au plus égal à $N_k - n_k$.

Or la fonction $|\varphi'(t)|$, étant continue dans E_1, l'est uniformément; si donc les éléments sont assez petits, on aura

$$N_k - n_k < \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad |\varepsilon_k| < \varepsilon.$$

Cela posé, la différence

$$\sum M'_k |\Delta x_k| - \sum M_k |dt_k|$$

sera égale à

$$\sum M'_k (R_k - \varepsilon_k)|dt_k|.$$

Désignons par μ le maximum du module de $f(x)$ dans E'_1; le module de la somme ci-dessus sera moindre que

$$2\varepsilon\mu \sum |dt_k| = 2\varepsilon\mu E_1$$

et tendra vers zéro avec ε.

La démonstration serait toute semblable pour les intégrales par défaut.

Si $f(x)$ est intégrable dans le domaine E'_1, ses intégrales par excès et par défaut coïncideront; il en sera de même des intégrales de $F(t)|\varphi'(t)|$ dans E_1; cette fonction sera donc intégrable dans ce domaine.

143. *Remarque.* — Si nous supposons la fonction $f(x)$ bornée dans E', nous pourrons faire croître le domaine E_1 de telle sorte que son aire tende vers l'aire intérieure de E; celle de E'_1 tendra vers l'aire intérieure de E', et l'égalité

$$\mathbf{S}_{E'_1} f(x)\,dx = \mathbf{S}_{E_1} F(t)\,|\varphi'(t)|\,dt,$$

démontrée ci-dessus, deviendra à la limite

$$\mathbf{S}_{E'} f(x)\,dx = \mathbf{S}_{E} F(t)\,|\varphi'(t)|\,dt,$$

sans qu'il soit nécessaire de supposer que E et E' soient mesurables.

144. Supposons en particulier que E et, par suite, E' soient d'un seul tenant; E sera formé par les valeurs de t comprises entre deux nombres fixes t_0 et T; E' par les valeurs de x comprises entre les valeurs x_0 et X correspondantes à t_0 et T.

L'intégrale de $f(x)$, dans le domaine E', sera représentée par

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

si $X > x_0$; par cette même quantité changée de signe, dans le cas contraire, car dans ce dernier cas, nous sommes convenus d'affecter les éléments dx du signe — (55).

De même, l'intégrale de $F(t)|\varphi'(t)|$ dans E sera repré-

sentée par

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,|\varphi'(t)|\,dt,$$

si $T > t_0$; par cette expression changée de signe, si $T < t_0$.

D'ailleurs $|\varphi'(t)|$ est égal à $\varphi'(t)$ ou à $-\varphi'(t)$, suivant que cette dérivée est positive ou négative. La dernière intégrale sera donc égale à

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

ou égale et contraire, suivant que $(T - t_0)\,\varphi'(t)$ est positive ou négative. Mais cette quantité a le même signe que $X - x_0$, car lorsque t croît, x croît aussi, si $\varphi'(t) > 0$, et décroît au contraire, si $\varphi'(t) < 0$.

On a donc, dans tous les cas,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} F(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

On peut donc formuler la règle suivante pour le changement de variable dans les intégrales simples.

Remplacer dans la différentielle à intégrer x par $\varphi(t)$, dx par $\varphi'(t)\,dt$; prendre pour limites de l'intégrale transformée les valeurs de t qui correspondent aux anciennes limites.

145. Passons au cas des intégrales doubles.

Soient x, y et u, v, deux couples de variables, liées par les relations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v).$$

Nous admettrons que, pour tous les points (u, v) d'un domaine borné E : 1° les dérivées partielles de φ, φ_1 restent continues; 2° que leur jacobien J reste différent de zéro;

3° qu'à deux points (u, v) différents correspondent deux points (x, y) toujours différents.

A l'ensemble E des points (u, v) correspondra pour les points (x, y) un ensemble E', et, si (u, v) décrit un ensemble parfait et mesurable E_1, intérieur à E, (x, y) décrira un ensemble parfait E'_1 intérieur à E'.

146. Soient

(u, v) un point de E_1;
$(u+du, v+dv) = (U, V)$ un point infiniment voisin;
(x, y) et $(x+\Delta x, y+\Delta y) = (X, Y)$ leurs correspondants.

On aura

$$\Delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + R\, du + R_1\, dv = dx + R\, du + R_1\, dv,$$

$$\Delta y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv + R_2\, du + R_3\, dv = dy + R_2\, du + R_3\, dv,$$

R, R_1, R_2, R_3 tendant uniformément vers zéro avec du, dv dans tout le domaine E_1. Si donc $|du|$ et $|dv|$ ne surpassent pas un nombre ρ suffisamment petit,

$$|R\, du + R_1\, dv| \quad \text{et} \quad |R_2\, du + R_3\, dv|$$

resteront moindres que

$$\varepsilon[\,|du| + |dv|\,],$$

ε pouvant être choisi aussi petit qu'on voudra.

La distance $d\sigma$ des deux points (u, v), $(u+du, v+dv)$ est donnée par la formule

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2.$$

et la distance Δs de leurs correspondants par celle-ci

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2.$$

En désignant par ds sa valeur principale, on aura

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv\right)^2$$
$$= \mathrm{M}\,du^2 + 2\mathrm{N}\,du\,dv + \mathrm{P}\,dv^2,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\right)^2,$$
$$\mathrm{P} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\right)^2,$$
$$\mathrm{N} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}.$$

Le rapport $\frac{ds^2}{d\sigma^2}$ ne dépend que de u, v et du rapport $\frac{dv}{du}$; sa valeur ne sera donc pas altérée si l'on y remplace du, dv par des quantités proportionnelles α, β telles que l'on ait $\alpha^2 + \beta^2 = 1$; il se réduira alors à

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\beta\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\alpha + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\beta\right)^2.$$

C'est une fonction de u, v, α, β continue et toujours positive; car elle ne pourrait s'annuler que si l'on avait à la fois

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\beta = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\alpha + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\beta = 0,$$

d'où $\mathrm{J} = 0$, ou $\alpha = \beta = 0$. Or, par hypothèse, dans tout le domaine E, J est $\gtrless 0$ et, d'autre part, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Donc cette fonction admet un maximum M^2 et un minimum m^2 tous deux positifs. Donc enfin le rapport $\frac{ds}{d\sigma}$ est toujours compris entre les deux nombres positifs fixes M et m.

D'autre part, $|\Delta s - ds|$ est au plus égal à la distance des points $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ et $(x + dx, y + dy)$, laquelle ne peut surpasser elle-même la somme de ses projections

$$|\Delta x - dx| + |\Delta y - dy| = |\mathrm{R}\,du + \mathrm{R}_1\,dv| + |\mathrm{R}_2\,du + \mathrm{R}_3\,dv|$$
$$< 2\varepsilon[|du| + |dv|] < 4\varepsilon\,d\sigma.$$

Le rapport $\frac{\Delta s}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma} + \frac{\Delta s - ds}{d\sigma}$ sera donc compris lui aussi entre deux nombres fixes $M + 4\varepsilon$ et $m - 4\varepsilon$.

147. Il résulte de là que, si (u, v) décrit une ligne rectifiable de longueur L, la ligne correspondante décrite par (x, y) sera également rectifiable et aura une longueur comprise entre ML et mL. Car si l'on inscrit à ces deux lignes des polygones correspondants quelconques à côtés infiniment petits, le rapport des côtés homologues et, par suite, celui des périmètres, seront toujours compris entre $M + 4\varepsilon$ et $m - 4\varepsilon$. D'ailleurs, si les côtés deviennent suffisamment petits, on pourra faire décroître ε autant qu'on voudra.

148. Cela posé, admettons que, le point (u, v) restant fixe, on fasse parcourir à du et à dv toute la suite des valeurs de o à ρ, ρ étant un infiniment petit.

Le point $(u + du, v + dv) = (U, V)$ décrira un carré Q de côté ρ, et son correspondant $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (X, Y)$ se confondra sensiblement avec le point (ξ, η) qui a pour coordonnées

$$\xi = x + dx = x + \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv,$$

$$\eta = y + dy = y + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} dv.$$

Ce dernier point (ξ, η) décrit un parallélogramme; car si, dv étant nul, on fait varier du de o à ρ, (ξ, η) décrira un segment de droite ayant pour projections $\frac{\partial \varphi}{\partial u}\rho$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\rho$; et si, d'autre part, assignant à du une valeur fixe, on fait varier dv de o à ρ, (ξ, η) décrit un autre segment de droite ayant pour projections $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\rho$, $\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}\rho$. Ces projections étant indépendantes de du, la direction et la longueur de ce nouveau segment n'en dépendront pas non plus.

Les côtés a, b de ce parallélogramme P auront une lon-

gueur au moins égale à $m\rho$, et son aire sera, d'après une formule connue,

$$\text{mod}\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}\rho & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\rho \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\rho & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\rho \end{vmatrix} = |J|\rho^2 = |J|Q.$$

149. Quant au point (X, Y), sa distance au point (ξ, η) est, comme nous l'avons vu, moindre que

$$2\varepsilon[|du| + |dv|]$$

et *a fortiori* moindre que $4\varepsilon\rho$.

Le domaine R décrit par le point (X, Y) sera donc contenu dans un parallélogramme P′ parallèle à P et de côtés $a + 8\varepsilon\rho$, $b + 8\varepsilon\rho$. L'aire de P′ sera

$$|J|Q\frac{a+8\varepsilon\rho}{a}\,\frac{b+8\varepsilon\rho}{b} \leqq |J|Q\left(1+\frac{8\varepsilon}{m}\right)^2.$$

Mais, d'autre part, R contient le parallélogramme P″, dont les côtés sont $a - 8\varepsilon\rho$, $b - 8\varepsilon\rho$, et dont l'aire est au moins égale à

$$|J|Q\left(1-\frac{8\varepsilon}{m}\right)^2.$$

Les aires intérieure et extérieure de R sont donc comprises entre les deux limites ci-dessus. Elles coïncident d'ailleurs, comme nous allons le voir.

150. En effet, soit plus généralement E_2 un ensemble mesurable quelconque contenu dans E_1 (qui pourrait être d'ailleurs identique à E_1); l'ensemble E'_2 décrit par (x, y) lorsque (u, v) décrit E_2 est également mesurable.

En effet, décomposons le plan des u, v en carrés Q de côté ρ. La somme $\sum Q_i$ de ceux de ces carrés qui rencontrent la frontière F_2 de E_2 tend vers zéro avec ρ par hypothèse. A chacun d'eux Q_i correspond un parallélogramme P'_i d'aire

au plus égale à

$$|J_i| Q_i\left(1+\frac{8\varepsilon}{m}\right)^2,$$

J_i désignant la valeur de J en un sommet du carré Q_i.

L'ensemble de ces parallélogrammes formera un domaine mesurable et parfait, enveloppant la frontière F'_2 de E'_2 et dont l'aire sera au plus égale à la somme des aires des parallélogrammes P'_i (qui, en général, empiètent en partie les uns sur les autres). Mais, en désignant par μ le maximum de $|J|$ dans E_1, on aura évidemment

$$\sum P'_i \leqq \mu\left(1+\frac{8\varepsilon}{m}\right)^2 \sum Q_i,$$

quantité qui tend vers zéro avec $\sum Q_i$. Donc E'_2 est bien mesurable.

On trouve d'ailleurs aisément l'expression de l'aire de E'_1. En effet, à chaque carré Q_k intérieur à E_1 correspond dans E'_1 un élément R_k, mesurable comme on vient de le voir, et dont l'aire sera de la forme

$$R_k = |J_k| Q_k(1+\eta_k),$$

η_k étant un infiniment petit compris entre $\left(1+\frac{8\varepsilon}{m}\right)^2 - 1$ et $\left(1-\frac{8\varepsilon}{m}\right)^2 - 1$ et dont le module sera par suite inférieur à un infiniment petit η, indépendant de k.

L'aire de E'_1 sera évidemment égale à

$$\lim \sum R_k = \lim \sum |J_k| Q_k(1+\eta_k).$$

Mais $\sum |J_k| Q_k \eta_k$ a son module inférieur à

$$\mu\eta \sum Q_k = \mu\eta E_1,$$

expression dont la limite est zéro. On aura donc pour l'aire

cherchée

$$E'_1 = \lim \sum |J_k| Q_k = \int_{E_1} |J| \, de.$$

151. Soit maintenant $f(x, y)$ une fonction de x, y, bornée dans E'_1. Posons $f(\varphi, \varphi_1) = F(u, v)$. L'intégrale, soit par défaut, soit par excès, de $f(x, y)$ dans le domaine E'_1 sera égale à l'intégrale correspondante de $F(u, v)|J|$ dans le domaine E_1.

Décomposons, en effet, le plan des u, v en carrés de côté ρ. Soient Q_k l'un d'eux qui soit intérieur à E_1; R_k l'élément correspondant de E'_1, et considérons, par exemple, les intégrales par excès. Désignons par M_k le maximum de $F(u, v)|J|$ dans Q_k; par M'_k celui de $f(x, y)$ dans R_k. Il nous faut montrer que les deux sommes

$$\sum M_k Q_k, \qquad \sum M'_k R_k = \sum M'_k |J_k| (1 + \eta_k) Q_k$$

tendent vers la même limite.

Or, leur différence est égale à

$$\sum [M_k - M'_k |J_k|] Q_k - \sum M'_k |J_k| \eta_k Q_k.$$

Si M' désigne le maximum de $|f(x, y)|$ dans E'_1 et μ le maximum de $|J|$ dans E_1, le second terme de cette expression aura un module au plus égal à

$$M' \mu \eta \sum Q_k \overline{\leq} M' \mu \eta E_1$$

quantité infiniment petite.

D'autre part, le maximum de $F(u, v) = f(x, y)$ dans Q_k est évidemment M'_k; et celui de $F(u, v)|J|$, que nous avons désigné par M_k, sera $M'_k \nu_k$, en désignant par ν_k une quantité intermédiaire entre le maximum N_k et le minimum n_k de $|J|$ dans Q_k. $|J_k|$ est également intermédiaire entre N_k et n_k. D'ailleurs J étant continu dans E_1, la différence $N_k - n_k$, et *a fortiori* le module de la différence $\nu_k - |J_k|$ tendra vers

zéro avec ρ, et cela uniformément. Il sera donc $< \varepsilon$ si ρ est assez petit.

Cela posé, le premier terme de la différence

$$\sum [M_k - M'_k | J_k |] Q_k = \sum M'_k [\nu_k - | J_k |] Q_k$$

aura son module moindre que $M' \varepsilon E_1$, quantité infiniment petite.

152. Si la fonction $f(x, y)$ reste bornée dans tout le domaine E', l'égalité

$$\mathrm{S}_{E'_1} f(x, y)\, de = \mathrm{S}_{E_1} F(u, v) | J |\, de,$$

qui vient d'être établie, donnera à la limite, en faisant tendre E_1, E'_1 vers E et E', la relation

$$\mathrm{S}_{E'} f(x, y)\, de = \mathrm{S}_{E} F(u, v) | J |\, de,$$

sans qu'il soit nécessaire de supposer que E et E' soient mesurables.

153. Des considérations toutes semblables s'appliquent aux intégrales triples. L'analogie est telle, qu'il nous suffira d'indiquer la marche du raisonnement.

Soient x, y, z et t, u, v deux séries de trois variables liées par les relations

$$x = \varphi_1(t, u, v), \qquad y = \varphi_2(t, u, v), \qquad z = \varphi_3(t, u, v).$$

Lorsque (t, u, v) décrira dans l'espace un domaine E, (x, y, z) décrira un domaine correspondant E'.

Supposons : 1° que dans tout le domaine E, les dérivées partielles de φ_1, φ_2, φ_3 soient continues, et leur jacobien J différent de zéro; 2° qu'à deux points (t, u, v) différents correspondent toujours deux points (x, y, z) différents.

Si (t, u, v) décrit un domaine parfait et mesurable E_1

intérieur à E, (x, y, z) décrira un ensemble correspondant E'_1, intérieur à E'.

Soient (t, u, v), et $(t + dt, u + du, v + dv) = (T, U, V)$ deux points de E_1 infiniment voisins : leur distance $d\sigma$ sera donnée par la formule

$$d\sigma^2 = dt^2 + du^2 + dv^2,$$

et celle Δs de leurs correspondants par la formule

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$

expression dont la valeur principale est

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv\right)^2 + \ldots \\ &= M_1 dt^2 + M_2 du^2 + M_3 dv^2 + 2N_1 du\,dv \\ &\quad + 2N_2 dv\,dt + 2N_3 dt\,du, \end{aligned}$$

où

$$M_1 = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right)^2, \qquad M_2 = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\right)^2, \qquad M_3 = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\right)^2,$$

$$N_1 = \sum\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}, \qquad N_2 = \sum\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}, \qquad N_3 = \sum\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}.$$

Le rapport $\frac{ds}{d\sigma}$ est toujours compris entre deux nombres positifs fixes M et m.

D'ailleurs si $|dt|$, $|du|$, $|dv|$ ne surpassent pas un nombre donné ρ, la distance des deux points

$$(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = (X, Y, Z)$$

et

$$(x + dx, y + dy, z + dz) = (\xi, \eta, \zeta)$$

sera moindre que $3\varepsilon(|dt| + |du| + |dv|)$ et, *a fortiori*, moindre que $9\varepsilon\rho$, ε ne dépendant que de ρ et tendant vers zéro avec lui.

Donc $\frac{\Delta s}{d\sigma}$ est également compris entre deux nombres posi-

tifs fixes. Si (t, u, v) décrit une ligne rectifiable, il en sera de même de son correspondant (X, Y, Z). Le rapport des longueurs de ces deux lignes sera compris entre M et m.

Si (t, u, v) décrit un cube C de côté ρ, (ξ, η, ζ) décrira un parallélépipède dont les arêtes a, b, c auront une longueur au moins égale à $m\rho$ et dont le volume sera $|J|C$.

Le point (X, Y, Z) décrira un domaine contenu dans le parallélépipède dont les arêtes sont

$$a + 18\varepsilon\rho, \quad b + 18\varepsilon\rho, \quad c + 18\varepsilon\rho,$$

et dont le volume est au plus égal à $|J|C\left(1 + \frac{18\varepsilon}{m}\right)^3$. Mais ce domaine contient le parallélépipède dont les arêtes sont

$$a - 18\varepsilon\rho, \quad b - 18\varepsilon\rho, \quad c - 18\varepsilon\rho,$$

et dont le volume est au moins égal à

$$|J|C\left(1 - \frac{18\varepsilon}{m}\right)^3.$$

On en conclut, comme aux nos **150** à **152** :

1° Que le domaine décrit par (x, y, z) lorsque (t, u, v) décrit dans E_1 un domaine mesurable est mesurable;

2° Que si $f(x, y, z) = F(t, u, v)$ est une fonction bornée dans E'_1, on aura

$$\mathbf{S}_{E'_1} f(x, y, z)\, de = \mathbf{S}_{E_1} F(t, u, v)\, |J|\, de;$$

les deux intégrales étant prises soit par excès soit par défaut.

3° Que si $f(x, y, z)$ est bornée dans tout le domaine E' mesurable ou non, on aura encore

$$\mathbf{S}_{E'} f(x, y, z)\, de = \mathbf{S}_{E} F(t, u, v)\, |J|\, de.$$

154. On traiterait par des procédés tout semblables le cas des intégrales multiples d'ordre quelconque; mais, l'intuition géométrique faisant ici défaut, il faudrait traduire en langage analytique les démonstrations relatives à l'aire du parallélo-

gramme ou au volume du parallélépipède et en faire l'extension au cas de plus de trois variables. Nous ne nous y arrêterons pas.

155. Soient (u, v) un point d'un plan et (x, y, z) un point de l'espace, lié au précédent par les équations

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v). \qquad z = \varphi_3(u, v).$$

Nous admettrons que pour les valeurs de (u, v) comprises dans un domaine E : 1° les dérivées partielles de φ_1, φ_2, φ_3 restent continues; 2° les trois jacobiens

$$A = \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v},$$

$$B = \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_3}{\partial v},$$

$$C = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi_2}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}$$

ne s'annulent pas simultanément; 3° à deux points (u, v) distincts correspondent deux points (x, y, z) distincts.

Le point (u, v) décrivant un domaine E_1 borné et parfait, intérieur à E, le point (x, y, z) décrira une surface.

156. Soient

(u, v) un point de E_1;
$(u + du, v + dv) = (U, V)$ un autre point infiniment voisin;
(x, y, z) et $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = (X, Y, Z)$ leurs correspondants.

On aura

$$\Delta x = \frac{d\varphi_1}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} dv + R\, du + R_1\, dv,$$

$$\Delta y = \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} dv + R_2\, du + R_3\, dv,$$

$$\Delta z = \frac{\partial\varphi_3}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v} dv + R_4\, du + R_5\, dv.$$

Posons

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2,$$
$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2.$$

Cette dernière quantité aura pour valeur principale

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{M}\,du^2 + 2\mathrm{N}\,du\,dv + \mathrm{P}\,dv^2,$$

$$\mathrm{M} = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathrm{N} = \sum\frac{\partial\varphi_i}{\partial u}\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}, \qquad \mathrm{P} = \sum\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\right)^2.$$

On verra, comme au n° **146**, que le rapport $\frac{ds}{d\sigma}$ reste constamment compris entre deux nombres positifs fixes M et m.

Si nous supposons que $|du|$ et $|dv|$ ne surpassent pas un nombre ρ suffisamment petit, $|\mathrm{R}|$, $|\mathrm{R}_1|$, ... resteront moindres qu'une quantité arbitrairement choisie ε, et la distance des points (X, Y, Z) et

$$(\xi, \eta, \zeta) = (x + dx, y + dy, z + dz)$$

(et *a fortiori* la différence $\Delta s - ds$) sera au plus égale à la quantité

$$|\mathrm{R}\,du + \mathrm{R}_1\,dv| + \ldots < 3\varepsilon[|du| + |dv|] < 6\varepsilon\,d\sigma.$$

Le rapport $\frac{\Delta s}{d\sigma}$ restera donc compris entre $\mathrm{M} + 6\varepsilon$ et $m - 6\varepsilon$.

On en conclut, comme au n° **147**, que, si (U, V) décrit une ligne rectifiable, la ligne correspondante décrite par (X, Y, Z) sera également rectifiable.

157. Si le point (U, V), partant de la position initiale (u, v), se meut dans le plan des u, v, le point

$$\xi = x + \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv,$$

$$\eta = y + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}dv,$$

$$\xi = z + \frac{\partial\varphi_3}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}dv$$

décrira un plan, dont l'équation

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

s'obtient en éliminant du et dv entre les trois équations ci-dessus.

Supposons que du et dv varient de o à ρ, le point (U, V) décrira un carré Q, et les projections du point (ξ, η, ζ) sur les plans coordonnés, des parallélogrammes, ayant respectivement pour aires $|A|Q$, $|B|Q$, $|C|Q$. Le point (ξ, η, ζ) décrira donc dans l'espace un parallélogramme, d'aire

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,Q.$$

Mais, si ρ est infiniment petit, le point (X, Y, Z) décrira un élément de surface infiniment voisin de l'élément plan décrit par (ξ, η, ζ); nous sommes donc conduits à lui attribuer une aire, ayant pour valeur principale

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,Q,$$

et, par suite, à définir de la manière suivante l'aire Ω_1 de la portion de surface décrite par (x, y, z) lorsque (u, v) décrit E_1 :

Nous décomposerons E_1 en carrés infiniment petits; nous multiplierons chacun de ces carrés Q_k par

$$\sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

A_k, B_k, C_k étant les valeurs de A, B, C en un de ses sommets. La limite de la somme

$$\sum \sqrt{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2}\,Q_k,$$

qui n'est autre chose que l'intégrale double

$$S_{E_1} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,de,$$

représentera l'aire demandée Ω_1.

Supposons maintenant que E_1 tende vers E; Ω_1 tendra vers une limite Ω, égale à

$$\mathbf{S}_E \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, de.$$

158. Lorsque la surface décrite par le point (x, y, z) est un plan, l'aire Ω est susceptible d'une mesure directe. Il faut donc établir que notre définition nouvelle n'est pas en discordance avec cette notion déjà acquise. En désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale au plan, nous aurons

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = \sqrt{A^2+B^2+C^2};$$

notre formule devient donc

$$\Omega = \frac{1}{\alpha} \mathbf{S} |A|\, de.$$

Or $\mathbf{S} |A|\, de$ est bien, comme nous l'avons montré (150), l'aire de la projection de Ω.

159. Nous devons encore montrer que l'aire, définie comme nous l'avons fait, ne dépend que de la nature de la surface décrite par (x, y, z) et non du choix particulier des variables auxiliaires u, v. Posons, en effet,

$$u = f_1(u_1, v_1), \qquad v = f_2(u_1, v_1),$$

u_1, v_1 étant deux nouvelles variables qui parcourent un domaine F lorsque (u, v) parcourt le domaine E. On aura

$$x = \varphi_1(f_1, f_2), \qquad y = \varphi_2(f_1, f_2), \qquad z = \varphi_3(f_1, f_2)$$

et, en appelant J le jacobien de f_1, f_2,

$$A_1 = \frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial v_1} - \frac{\partial y}{\partial v_1}\frac{\partial z}{\partial u_1} = AJ,$$

$$B_1 = BJ,$$

$$C_1 = CJ.$$

L'expression de l'aire en fonction des nouvelles variables u_1, v_1 sera

$$\mathbf{S}_{F}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\,de_1=\mathbf{S}_{F}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,|J|\,de_1.$$

Or cette intégrale est bien égale à l'intégrale

$$\mathbf{S}_{E}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,de$$

prise dans le champ E (152).

XIII. — Formation des équations différentielles.

160. On nomme *équation différentielle de l'ordre n* toute équation entre une variable indépendante x, une fonction y de cette variable et ses n premières dérivées.

161. Soit y une fonction quelconque, définie par l'équation

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

En prenant les dérivées de cette équation, il viendra

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,$$

. . . .

Toute équation déduite de la combinaison de ces équations avec la proposée sera une équation différentielle à laquelle satisfait la fonction y. Parmi ces équations, il conviendra de rechercher celles qui ont la forme la plus simple ou la plus avantageuse pour le but qu'on se propose.

162. Il arrive souvent que des fonctions dont l'expression contient des transcendantes ou des radicaux satisfont à des

équations différentielles d'où ces transcendantes ou ces radicaux ont disparu.

Soit, par exemple,

$$y = \arc \sin x.$$

On en déduit

$$y' = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}},$$

d'où

$$(1-x^2)y'^2 = 1.$$

Prenant la dérivée de cette équation et supprimant le facteur commun $2y'$, on aura l'équation du second ordre

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0. \tag{2}$$

On peut déduire de cette équation une formule récurrente commode pour le calcul des dérivées successives de y. Prenons en effet la dérivée $m^{\text{ième}}$ de cette équation ; il viendra, en appliquant la formule connue qui donne la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'un produit,

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - 2mxy^{(m+1)} - m(m-1)y^{(m)} \\ - xy^{(m+1)} - my^{(m)} = 0$$

et, en réduisant,

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - (2m+1)xy^{(m+1)} - m^2y^{(m)} = 0.$$

Cette formule se simplifie pour la valeur particulière $x = 0$. Si l'on désigne par y_0, y'_0, ... ce que deviennent alors y, y', ..., il viendra

$$y_0^{(m+2)} = m^2 y_0^{(m)}.$$

On aura, par suite,

$$y''_0 = 0, \qquad y_0^{(4)} = 2^2 y''_0 = 0, \qquad \ldots, \qquad y_0^{(2n)} = 0,$$

$$y'''_0 = 1^2 y'_0 = \pm 1^2,$$

$$y_0^{(5)} = 3^2 y'''_0 = \pm 1^2 . 3^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y_0^{(2n+1)} = \pm 1^2 . 3^2 \ldots (2n-1)^2.$$

163. Considérons en second lieu l'expression

$$y = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

Prenons la *dérivée logarithmique* des deux membres, c'est-à-dire la dérivée de leurs logarithmes ; il viendra

$$\frac{y'}{y} = n \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{n}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

d'où

$$(x^2 - 1) y'^2 = n^2 y^2,$$

ou, en prenant la dérivée et supprimant le facteur commun $2y'$,

$$(3) \qquad (x^2 - 1) y'' + xy' - n^2 y = 0.$$

Prenant la dérivée $m^{\text{ième}}$ de cette équation, on aura la formule récurrente

$$(x^2 - 1) y^{(m+2)} + 2m\, xy^{(m+1)}$$
$$+ m(m-1) y^{(m)} + xy^{(m+1)} + my^{(m)} - n^2 y^{(m)} = 0$$

ou, en réduisant,

$$(x^2 - 1) y^{(m+2)} + (2m + 1) xy^{(m+1)} + (m^2 - n^2) y^{(m)} = 0.$$

Pour $x = 0$, cette formule se réduit à

$$(4) \qquad y_0^{(m+2)} = (m^2 - n^2) y_0^{(m)}.$$

164. L'équation différentielle (3) subsisterait évidemment, ainsi que la formule (4) qui en est la conséquence, si l'on changeait le signe du radical dans l'expression de y. Elle subsistera encore si l'on pose

$$y = C(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + C'(x - \sqrt{x^2 - 1})^n,$$

C et C' étant deux constantes quelconques, car le résultat de la substitution de cette quantité dans le premier membre de (3), étant évidemment égal à C fois le résultat de la substitution de $(x + \sqrt{x^2 - 1})^n$ plus C' fois le résultat de la substitution de $(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$, sera nul.

Soit, en particulier, $C = C' = \frac{1}{2}$, et supposons n entier et positif. L'expression

$$y = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + \tfrac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$$

étant développée suivant la formule du binome, les puissances impaires du radical se détruiront, et l'on obtiendra évidemment un polynome entier de la forme

$$y = A_n x^n + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots + A_{n-2p} x^{n-2p} + \ldots.$$

Le coefficient A_n peut se calculer aisément. On a en effet, en divisant par x^n et faisant tendre x vers ∞,

$$\begin{aligned} A_n &= \lim \frac{y}{x^n} \\ &= \lim \left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n\right] = 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Pour calculer les autres coefficients, on remarquera qu'on a, en général,

$$y_0^{n-2p} = 1.2\ldots(n - 2p) A_{n-2p},$$
$$y_0^{n-2p-2} = 1.2\ldots(n - 2p - 2) A_{n-2p-2},$$

d'où

$$A_{n-2p-2} = A_{n-2p}(n - 2p)(n - 2p - 1) \frac{y_0^{n-2p-2}}{y_0^{n-2p}}$$

ou, d'après la formule (4),

$$A_{n-2p-2} = A_{n-2p} \frac{(n - 2p)(n - 2p - 1)}{(n - 2p - 2)^2 - n^2}.$$

Cette relation permettra de calculer successivement tous les coefficients, en partant du premier.

Posons

$$x = \cos\varphi,$$

d'où

$$\sqrt{x^2 - 1} = i \sin\varphi;$$

il viendra

$$y = \tfrac{1}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + \tfrac{1}{2}(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

ou, d'après une formule que nous établirons plus loin,

$$y = \tfrac{1}{2}(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) + \tfrac{1}{2}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$$
$$= \cos n\varphi = \cos n(\operatorname{arc}\cos x).$$

Nous venons donc d'obtenir le développement de $\cos n\varphi$, suivant les puissances de $\cos\varphi$.

165. Soit, comme dernier exemple, l'expression

$$y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Posons, pour abréger,

$$(x^2-1)^n = z.$$

En prenant la dérivée logarithmique de cette expression, il viendra

$$\frac{2nx}{x^2-1} = \frac{z'}{z}$$

ou

$$(x^2-1)z' - 2nxz = 0.$$

Prenons la dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ de cette équation ; on trouvera

$$(x^2-1)z^{(n+2)} + (n+1)2xz^{(n+1)} + \frac{(n+1)n}{2}2z^{(n)}$$
$$- 2nxz^{(n+1)} - 2n(n+1)z^{(n)} = 0$$

ou, en remplaçant $z^{(n)}$ par y et réduisant,

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

166. Considérons une équation

$$F(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0,$$

contenant, outre les variables x, y, n constantes $c_1, \ldots, c_n$. Cette équation représente une infinité de fonctions distinctes, que l'on obtiendra en donnant successivement aux constantes tous les systèmes de valeurs possibles. Toutes ces fonctions satisferont à une même équation différentielle de l'ordre n, qu'il est facile de former. Prenons, en effet, les n premières

dérivées de cette équation; on obtiendra les nouvelles équations suivantes :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y}y^{(n)}=0.$$

Entre ces équations et la proposée, éliminons les constantes $c_1, \ldots, c_n$; nous obtiendrons l'équation cherchée

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0.$$

167. Considérons, par exemple, l'équation

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}=1,$$

où A et B sont des constantes déterminées et λ un paramètre variable. Cette équation, considérée au point de vue géométrique, représente un système de coniques *homofocales*. (Si nous supposons, pour fixer les idées, $A>B$, les foyers réels seront sur l'axe des x, à la distance $\pm\sqrt{A-B}$ de l'origine.)

Prenons la dérivée de cette équation; il viendra, en supprimant le facteur commun 2,

$$\frac{x}{A+\lambda}+\frac{yy'}{B+\lambda}=0.$$

Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{1}{A+\lambda}=\frac{y'}{x^2y'-xy},\qquad \frac{1}{B+\lambda}=\frac{1}{y^2-xyy'},$$

$$A+\lambda=\frac{x^2y'-xy}{y'},\qquad B+\lambda=y^2-xyy'.$$

Éliminant λ, on aura l'équation différentielle de ce système de coniques

$$A-B=\frac{x^2y'-xy}{y'}-y^2+xyy'$$

ou

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - A + B)y' - xy = 0.$$

168. Considérons l'équation

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$

qui, considérée au point de vue géométrique, représente l'équation générale des cercles. Cette équation contenant trois constantes, l'équation différentielle qui s'en déduit sera du troisième ordre. Pour l'obtenir, nous formerons les dérivées successives

$$x + yy' + a + by' = 0$$

(nous avons supprimé le facteur 2 pour plus de simplicité),

$$1 + y'^2 + yy'' + by'' = 0,$$

$$3y'y'' + yy''' + by''' = 0.$$

Éliminant b entre ces deux dernières équations, nous obtiendrons l'*équation différentielle des cercles*

$$(1 + y'^2 + yy'')y''' - y''(3y'y'' + yy''') = 0$$

ou, en réduisant,

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

169. L'équation différentielle des coniques a été obtenue par M. Halphen de la manière suivante :

L'ordonnée y d'une conique est définie par l'équation

$$y = ax + b \pm (px^2 + 2qx + r)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit, par des dérivations successives,

$$y' = a \pm (px + q)(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y'' = \pm p(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{1}{2}} \mp (px + q)^2(px^2 + 2qx + r)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \pm \frac{p(px^2 + 2qx + r) - (px + q)^2}{(px^2 + 2qx + r)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \pm \frac{pr - q^2}{(px^2 + 2qx + r)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$(5) \qquad y''^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2 + 2qx + r}{(pr - q^2)^{\frac{2}{3}}}$$

et, en effectuant trois nouvelles dérivations,

$$(6) \qquad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Si la conique est une parabole, p sera nul. Le second membre de l'équation (5) ne contenant pas de terme en x^2, deux dérivations suffiront pour faire disparaître les autres constantes. L'équation différentielle des paraboles sera donc

$$(7) \qquad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0.$$

Il est aisé d'obtenir les équations (6) et (7) sous forme développée. On a, en effet,

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\tfrac{2}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y''',$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = \tfrac{10}{9} y''^{-\frac{8}{3}} y'''^2 - \tfrac{2}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y^{\text{IV}},$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -\tfrac{80}{27} y''^{-\frac{11}{3}} y'''^3 + \tfrac{20}{9} y''^{-\frac{8}{3}} y''' y^{\text{IV}} + \tfrac{10}{9} y''^{-\frac{8}{3}} y''' y^{\text{IV}} - \tfrac{2}{3} y''^{-\frac{5}{3}} y^{\text{V}}.$$

Portant ces valeurs dans les équations (6) et (7), chassant les dénominateurs et supprimant le facteur commun 2, il viendra, pour l'équation générale des coniques,

$$-40 y'''^3 + 45 y'' y''' y^{\text{IV}} - 9 y''^2 y^{\text{V}} = 0$$

et, pour celle des paraboles,

$$5 y'''^2 - 3 y'' y^{\text{IV}} = 0.$$

170. Cherchons enfin la condition pour que des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'une même variable x soient liées par une équation linéaire à coefficients constants

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0.$$

Prenant les dérivées successives de cette équation, il

viendra

$$\begin{array}{l} C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{array}$$

et, en éliminant les constantes,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0.$$

On verra dans le Calcul intégral que cette condition est suffisante.

171. On donne le nom d'*équation aux dérivées partielles d'ordre n* à toute équation entre des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$, une fonction z de ces variables et ses dérivées partielles des n premiers ordres.

172. Soit

$$F(x_1, \ldots, x_p, z, c_1, \ldots, c_n) = 0$$

une équation contenant n constantes arbitraires et définissant une fonction z des p variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$. On pourra joindre à cette équation ses p dérivées partielles

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_p} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_p} = 0 \end{array}$$

par rapport à chacune des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$, puis ses $\dfrac{p(p+1)}{2}$ dérivées partielles du second ordre

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + 2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}\right)^2 + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et ainsi de suite jusqu'à ce que le nombre total

$$k = 1 + p + \frac{p(p+1)}{2} + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\rho-1)}{1.2\ldots\rho}$$

des équations ainsi obtenues surpasse le nombre n des constantes arbitraires. Éliminant ces n constantes entre les k équations, on obtiendra un système de $k-n$ équations aux dérivées partielles d'ordre ρ, à chacune desquelles z satisfera, quelles que soient les valeurs des constantes $c_1, \ldots, c_n$.

173. *Exemples.* — 1° Cherchons les équations aux dérivées partielles des plans

$$z = ax + by + c. \tag{8}$$

Suivant un usage généralement adopté dans la théorie des surfaces, nous représenterons pour abréger les dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

par les lettres

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t.$$

D'après cette définition, on aura

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy.$$

Cela posé, les dérivées premières de l'équation (8) seront

$$p = a, \qquad q = b,$$

et une seconde dérivation donnera les équations cherchées

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0. \tag{9}$$

Réciproquement, cherchons à *intégrer* ces équations, c'est-à-dire à déterminer les fonctions z de x, y qui y satis-

font. On en déduit

$$\begin{aligned} o &= r\,dx + s\,dy = dp, \quad \text{d'où} \quad p = \text{const.} = a, \\ o &= s\,dx + t\,dy = dq, \quad \text{d'où} \quad q = \text{const.} = b; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz &= a\,dx + b\,dy, \\ z &= ax + by + c, \end{aligned}$$

c désignant une constante.

Les plans sont donc les seules surfaces dont le z satisfasse aux équations (9).

174. 2° Cherchons les équations aux dérivées partielles des sphères

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

On déduit de cette équation les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} x - a + p(z-c) &= o, \\ y - b + q(z-c) &= o, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} 1 + p^2 + r(z-c) &= o, \\ pq + s(z-c) &= o, \\ 1 + q^2 + t(z-c) &= o. \end{aligned}$$

Éliminant $z - c$, on aura les équations cherchées

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}.$$

Réciproquement, cherchons à intégrer ces équations. Elles peuvent s'écrire

$$1 + p^2 = \lambda r, \qquad pq = \lambda s, \qquad 1 + q^2 = \lambda t,$$

λ étant un facteur de proportionnalité.

Des deux premières on déduit

$$(1+p^2)\,dx + pq\,dy = \lambda(r\,dx + s\,dy)$$

ou

$$dx + p\,dz = \lambda\,dp$$

ou

$$d(x+pz)=(z+\lambda)\,dp.$$

$x+pz$ est donc une fonction de p, dont $z+\lambda$ est la dérivée. Soit

$$x+pz=\mathrm{F}(p), \qquad z+\lambda=\mathrm{F}'(p).$$

On déduit de même des deux dernières équations

$$y+qz=\Phi(q), \qquad z+\lambda=\Phi'(q).$$

Donc

$$z+\lambda=\mathrm{F}'(p)=\Phi'(q).$$

Si cette expression n'est pas une constante, p et q seront liés par une relation, et leur jacobien $rt-s^2$ sera nul. Mais on a

$$\lambda^2(rt-s^2)=(1+p^2)(1+q^2)-p^2q^2=1+p^2+q^2>0.$$

Donc si $rt-s^2$ est nul, λ doit être infini et, par suite,

$$r=s=t=0.$$

La surface sera donc un plan.

Reste à considérer le cas où $z+\lambda=\mathrm{F}'p=\Phi'q$ est une constante c. On aura alors

$$x+pz=cp+a, \qquad y+qz=cq+b,$$

a et b étant des constantes.

On déduit de là

$$(x-a)\,dx+(z-c)p\,dx=0,$$
$$(y-b)\,dy+(z-c)q\,dy=0,$$

et, en ajoutant,

$$0=(x-a)\,dx+(y-b)\,dy+(z-c)\,dz$$
$$=\tfrac{1}{2}d[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2].$$

Donc

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\text{const.}$$

La surface est une sphère.

175. Considérons maintenant la fonction z définie par l'équation plus générale

$$F[x_1, \ldots, x_p, z, \varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \varphi_2(\beta_1, \ldots, \beta_{p-1}), \ldots] = 0,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}, \ldots$ désignent des fonctions connues de $x_1, \ldots, x_p, z$, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des fonctions arbitraires. Joignons à cette équation ses dérivées partielles successives des ordres $1, 2, \ldots, \rho$. Nous obtiendrons ainsi

$$1 + p + \frac{p(p+1)}{2} + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+\rho-1)}{1.2\ldots\rho} = k$$

équations dans lesquelles figureront les quantités suivantes : 1° $x_1, \ldots, x_p$, z et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre ρ; 2° la fonction φ_1 et ses dérivées partielles $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_{p-1}}$, $\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha_1^2}, \ldots$ jusqu'à l'ordre ρ, la fonction φ_2 et ses dérivées partielles $\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta_1}, \ldots$ jusqu'à l'ordre ρ, etc. Le nombre l de ces dernières quantités sera évidemment égal à

$$n\left[1 + p - 1 + \ldots + \frac{(p-1)p\ldots(p+\rho-2)}{1.2\ldots\rho}\right],$$

n désignant le nombre des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

Donnons successivement à ρ les valeurs $1, 2, 3, \ldots$. Il arrivera nécessairement un moment où le nombre k des équations surpassera le nombre l. En effet, en changeant ρ en $\rho+1$, on accroît le nombre des équations de $\frac{p(p+1)\ldots(p+\rho)}{1.2\ldots(\rho+1)}$, tandis que le nombre l s'accroît de $n\frac{(p-1)p\ldots(p+\rho-1)}{1.2\ldots(\rho+1)}$, quantité inférieure à la précédente, si $p+\rho > n(p-1)$. Donc, dès que ρ surpassera $n(p-1)-p$, k croîtra plus rapidement que l et finira par le surpasser. A ce moment, on pourra éliminer entre les k équations obtenues les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ et leurs dérivées partielles; on obtiendra ainsi $k-l$ équations entre $x_1, \ldots, x_p$, z et ses dérivées partielles

jusqu'à l'ordre ρ, et la fonction z satisfera à ce système d'équations, de quelque manière que soient choisies les fonctions arbitraires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Nous allons faire quelques applications de cette théorie.

176. Supposons d'abord que l'équation qui détermine z soit de la forme

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0, \tag{10}$$

$u_1, \ldots, u_p$ désignant des fonctions connues des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$ et de z. Si l'on conçoit que z ait été remplacé par sa valeur en $x_1, \ldots, x_p$, $u_1, \ldots, u_p$ deviendront des fonctions de $x_1, \ldots, x_p$ seulement, ayant pour dérivées partielles

$$\begin{array}{lll} D_{x_1} u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, & \ldots, & D_{x_p} u_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_p} + \dfrac{\partial u_1}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ D_{x_1} u_p = \dfrac{\partial u_p}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_p}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_1}, & \ldots, & D_{x_p} u_p = \dfrac{\partial u_p}{\partial x_p} + \dfrac{\partial u_p}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x_p}. \end{array}$$

Pour que ces fonctions soient liées par une relation telle que (10), il faut et il suffit que leur jacobien soit nul : on pourra donc écrire immédiatement l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{vmatrix} D_{x_1} u_1 & \ldots & D_{x_p} u_1 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_{x_1} u_p & \ldots & D_{x_p} u_p \end{vmatrix} = 0,$$

à laquelle z doit satisfaire.

Voici quelques exemples :

177. L'équation

$$x - az = \varphi(y - bz) \tag{11}$$

représente un cylindre parallèle à la droite $(x = az, y = bz)$. En effet, cette surface a une infinité de génératrices recti-

lignes parallèles à cette droite et données par les équations

$$x - az = \varphi(\alpha),$$
$$y - bz = \alpha,$$

α étant un paramètre constant pour une même génératrice, mais variable d'une génératrice à l'autre.

En faisant varier la forme de la fonction φ, on aura une infinité de cylindres différents. Ils satisfont tous à une même équation aux dérivées partielles, qu'on peut écrire immédiatement.

En effet, l'équation (11) établissant une relation entre les deux fonctions $x - az$, $y - bz$ des deux variables indépendantes x et y, le jacobien de ces fonctions sera nul, ce qui donnera l'équation

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x} & -b\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -a\dfrac{\partial z}{\partial y} & 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 1 - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y}.$$

178. L'équation

$$\frac{x-a}{z-c} = \varphi\left(\frac{y-b}{z-c}\right),$$

où φ est une fonction arbitraire, représente un système de cônes ayant pour sommet le point (a, b, c) et pour génératrices les droites

$$\frac{x-a}{z-c} = \varphi(\alpha), \qquad \frac{y-b}{z-c} = \alpha.$$

L'équation aux dérivées partielles de ces cônes s'obtiendra en égalant à zéro le jacobien

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{z-c} - \dfrac{(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-c)^2} & -\dfrac{y-b}{(z-c)^2}\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -\dfrac{(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-c)^2} & \dfrac{1}{z-c} - \dfrac{(y-b)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-c)^2} \end{vmatrix},$$

ce qui donne, en effectuant les calculs et chassant les dénominateurs,

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c.$$

179. L'équation

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+cz)$$

représente un système de surfaces de révolution dont les parallèles

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(\alpha),$$
$$ax+by+cz=\alpha$$

sont perpendiculaires à l'axe $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Ces surfaces satisferont à l'équation

$$\text{o}=\begin{vmatrix} x+z\frac{\partial z}{\partial x} & a+c\frac{\partial z}{\partial x} \\ y+z\frac{\partial z}{\partial y} & b+c\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ou

$$bx-ay=(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

180. Une fonction u de plusieurs variables x, y, z est dite *homogène et d'ordre n* si elle peut se mettre sous la forme

$$u=z^n\varphi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right).$$

Il résulte de cette équation que $z^{-n}u$ est fonction de $\frac{x}{z}$ et de $\frac{y}{z}$. On aura donc, en égalant à zéro le jacobien,

$$\text{o}=\begin{vmatrix} z^{-n}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{z} & \text{o} \\ z^{-n}\frac{\partial u}{\partial y} & \text{o} & \frac{1}{z} \\ z^{-n}\frac{\partial u}{\partial z}-nz^{-1-n}u & -\frac{x}{z^2} & -\frac{y}{z^2} \end{vmatrix},$$

ou, en effectuant les calculs et chassant le dénominateur z^{n+3},

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu.$$

181. Comme seconde application de la théorie générale de l'élimination des fonctions arbitraires, considérons un système de p fonctions $z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ des p variables indépendantes $x_1, \ldots x_p$, déterminées par le système des équations simultanées

$$\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_p, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(x_1, \ldots, x_p, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)=0, \end{array}$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ désignent des fonctions arbitraires de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$. Nous allons montrer que z satisfait à une équation aux dérivées partielles d'ordre n, indépendante de ces fonctions.

Formons, en effet, la dérivée partielle de F_1 par rapport à x_1; elle se composera :

1° Des termes $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}$, dus à la variation de x_1 et de z; nous les désignerons, pour abréger, par $D_{x_1}F_1$;

2° Des termes $\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1}+\ldots\right)\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}$, dus à la variation de α_1; nous les désignerons par $D_{\alpha_1}F_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}$;

3° Des termes analogues $D_{\alpha_2}F_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}, \ldots$, dus à la variation des autres paramètres $\alpha_2, \ldots$.

Réunissant tous ces termes, on aura l'équation

$$D_{x_1}F_1+D_{\alpha_1}F_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}+D_{\alpha_2}F_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}+\ldots=0.$$

Les dérivées partielles par rapport à $x_2, \ldots$ donneront de même

$$D_{x_2}F_1+D_{\alpha_1}F_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2}+D_{\alpha_2}F_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}+\ldots=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Éliminant entre ces p équations les $p-1$ quantités $D_{\alpha_1}F_1$, $D_{\alpha_2}F_1, \ldots$, il viendra

$$\begin{vmatrix} D_{x_1}F_1 & \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1} & \cdots \\ D_{x_2}F_1 & \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2} & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant, développé, sera de la forme

$$AD_{x_1}F_1 + BD_{x_2}F_1 + \ldots = 0,$$

A, B, ... étant des fonctions de $\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}, \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_2}, \ldots$.

Les équations $F_2 = 0, \ldots$ donneront de même

$$AD_{x_1}F_2 + BD_{x_2}F_2 + \ldots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Éliminons entre les équations qui viennent d'être obtenues les rapports des coefficients A, B, ...; il viendra

$$\begin{vmatrix} D_{x_1}F_1 & D_{x_2}F_1 & \cdots \\ D_{x_1}F_2 & D_{x_2}F_2 & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation sera une fonction de $x_1, \ldots, x_p, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_p}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, que nous désignerons par F_{p+1}.

Désignons par $D_{x_i}F_{p+1}$ la portion de la dérivée partielle de F_{p+1} par rapport à x_i qui provient de la variation de x_i, $z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_p}$; on trouvera de la même manière une nouvelle équation

$$F_{p+2} = \begin{vmatrix} D_{x_1}F_{p+1} & D_{x_2}F_{p+1} & \cdots \\ D_{x_1}F_2 & D_{x_2}F_2 & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

dans laquelle figureront, outre les quantités précédentes, les dérivées secondes de z.

Continuant ainsi, on obtiendra une suite d'équations

$$F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_p = 0, \quad F_{p+1} = 0, \quad \ldots, \quad F_{p+n} = 0,$$

entre lesquelles on pourra éliminer les $p - 1 + n$ quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ce qui donnera une équation aux dérivées partielles d'ordre n.

182. *Exemple.* — Cherchons l'équation aux dérivées partielles des surfaces *réglées*. On nomme ainsi celles qui sont engendrées par le mouvement d'une droite. Les génératrices d'une telle surface auront des équations de la forme

$$F_1 = x - az - \alpha = 0,$$
$$F_2 = y - bz - \beta = 0.$$

Trois conditions sont d'ailleurs nécessaires pour déterminer le mouvement de la droite. Ces conditions permettront d'exprimer trois des coefficients, par exemple a, b, β, en fonction du quatrième, α.

Appliquons la méthode précédente. Nous formerons l'équation

$$0 = F_3 = \begin{vmatrix} D_x F_1 & D_y F_1 \\ D_x F_2 & D_y F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x} & -a\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ -b\dfrac{\partial z}{\partial x} & 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}$$
$$= 1 - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y}.$$

L'équation suivante sera

$$0 = \begin{vmatrix} D_x F_3 & D_y F_3 \\ -b\dfrac{\partial z}{\partial x} & 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(1 - b\frac{\partial z}{\partial y}\right) D_x F_3 + b\frac{\partial z}{\partial x} D_y F_3$$

ou, en remplaçant $1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y}$ par $a\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et supprimant le fac-

teur commun $\dfrac{\partial z}{\partial x}$,

$$
\begin{aligned}
o &= a\mathrm{D}_x\mathrm{F}_3 + b\mathrm{D}_y\mathrm{F}_3 \\
&= a\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) + b\left(a\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\
&= a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{F}_4.
\end{aligned}
$$

On trouvera de même l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
o = \mathrm{F}_5 &= a\mathrm{D}_x\mathrm{F}_4 + b\mathrm{D}_y\mathrm{F}_4 \\
&= a^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3a^2b\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + 3ab^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} + b^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.
\end{aligned}
$$

On n'aura plus, pour obtenir l'équation aux dérivées partielles, qu'à éliminer le rapport $\dfrac{b}{a}$ entre les deux équations F_4 et F_5.

183. Considérons enfin une fonction z définie, ainsi que les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$, par un système d'équations de la forme suivante :

$$
(12)\quad \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_p, z, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0, \\ \mathrm{D}_{\alpha_1} f = 0, \qquad \mathrm{D}_{\alpha_2} f = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{D}_{\alpha_{p-1}} f = 0. \end{cases}
$$

Prenons les dérivées partielles de f par rapport à chacune des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$. En vertu des équations (12), ces dérivées se réduiront à leurs premiers termes $\mathrm{D}_{x_1} f, \ldots, \mathrm{D}_{x_p} f$. On aura donc

$$
\mathrm{D}_{x_1} f = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{D}_{x_p} f = 0.
$$

Désignons ces équations par

$$
\mathrm{F}_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_p = 0.
$$

On en déduira, comme dans le problème précédent, une suite de nouvelles équations

$$
\mathrm{F}_{p+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_{p+n-1} = 0.
$$

Ces équations, jointes aux précédentes et à la primitive $f=0$, fourniront un système de $p+n$ équations, entre lesquelles on éliminera $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. L'équation résultante sera encore de l'ordre n. En effet, $F_1, \ldots, F_p$ contiennent z et ses dérivées partielles du premier ordre; F_{p+1} contiendra, en outre, celles du second ordre, etc.; enfin F_{p+n-1} contiendra celles du $n^{\text{ième}}$ ordre.

184. *Exemple.* — Cherchons l'équation aux dérivées partielles des surfaces *développables*. On nomme ainsi celles qui sont définies par le système des deux équations

$$f = z - \alpha x - \beta y - \gamma = 0, \qquad D_\alpha f = 0,$$

β et γ étant des fonctions de α.

On en déduira, d'après la méthode précédente,

$$F_1 = D_x f = p - \alpha = 0,$$
$$F_2 = D_y f = q - \beta = 0,$$

puis

$$F_3 = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = 0, \qquad rt - s^2 = 0.$$

Ce sera l'équation cherchée.

Proposons-nous réciproquement d'intégrer cette équation. Considérons, à cet effet, les inconnues auxiliaires

$$p, \quad q \quad \text{et} \quad V = z - px - qy.$$

L'équation $rt - s^2 = 0$ exprime que le jacobien de p et de q est nul; mais elle exprime aussi que celui de p et de V, lequel est égal à

$$\begin{vmatrix} r & rx + sy \\ s & sx + ty \end{vmatrix} = (rt - s^2)y,$$

est nul. On aura donc

$$q = f(p),$$
$$z = px + f(p)y + \varphi(p). \tag{13}$$

Il reste encore à exprimer que p et q sont les dérivées partielles de z, c'est-à-dire que

$$dz = p\,dx + q\,dy = p\,dx + f(p)\,dy.$$

Mais, en différentiant la valeur ci-dessus trouvée pour z, il vient

$$dz = p\,dx + f(p)\,dy + [x + yf'(p) + \varphi'(p)]\,dp = 0.$$

Si $dp = 0$, p est une constante et l'équation (13) représente un plan.

Dans le cas contraire, la surface sera développable, z et p étant définis par les deux équations simultanées

$$z = px + f(p)y + \varphi(p),$$
$$x + yf'(p) + \varphi'(p) = 0.$$

CHAPITRE II.

VARIABLES COMPLEXES.

I. — Fonctions synectiques.

185. L'introduction des nombres irrationnels ne suffit pas encore pour rendre résolubles toutes les équations algébriques. Il est nécessaire pour cela de faire intervenir une dernière notion, celle des *nombres complexes*.

Soit $P = Ai^m + Bi^{m-1} + \ldots + K$ un polynome entier, à coefficients réels, contenant une indéterminée i. En le divisant par $i^2 + 1$, on obtiendra un résultat de la forme

$$P = Q(i^2 + 1) + a + bi.$$

Nous conviendrons de négliger les multiples de $i^2 + 1$, et de considérer comme équivalents, et représentant un seul *nombre complexe* (ou *imaginaire*), tous les polynomes qui donnent le même reste. Parmi ces polynomes, le plus simple est le reste $a + bi$ lui-même, qui sera la forme normale du nombre complexe. La manière la plus simple de former ce reste consiste à remplacer partout dans P i^2 par -1, i^3 par $-i$, i^4 par $+1$, i^5 par i, etc.

Si $b = 0$, ce nombre sera réel; si $a = 0$, on dira qu'il est *purement imaginaire*; si $a = b = 0$, il sera nul.

Un nombre complexe $a + bi$ peut être représenté géométriquement par un segment de droite, dont les projections sur deux axes rectangulaires Ox et Oy soient respectivement a et b. Soient ρ la longueur de cette droite, φ l'angle qu'elle

fait avec OX; on aura

$$\rho\cos\varphi = a, \qquad \rho\sin\varphi = b,$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\rho}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\rho}.$$

La quantité ρ, qui doit être prise positivement, se nomme la *valeur absolue* ou le *module* de $a + bi$; on la représente par la notation $|a + bi|$ ou mod$(a + bi)$.

L'angle φ est l'*argument* de $a + bi$; il n'est déterminé qu'aux multiples près de 2π, lorsque a et b sont donnés. Le module, au contraire, est entièrement déterminé; il ne s'annule que si l'on a simultanément $a = 0$, $b = 0$, d'où $a + bi = 0$.

Deux nombres complexes $a + bi$ et $a - bi$, qui ne diffèrent que par le signe de la partie imaginaire, sont dits *conjugués* entre eux. Ces nombres ont le même module, ainsi que les nombres $-a - bi$, $-a + bi$, qui leur sont égaux et opposés.

Si la droite représentative du nombre $a + bi$ a son point de départ à l'origine des coordonnées, son autre extrémité sera au point $x = a$, $y = b$. Ce point se nomme l'*affixe* de $a + bi$.

186. Soient $a + bi$, $a' + b'i$, ... des quantités complexes. Leur somme

$$(a + a' + \ldots) + (b + b' + \ldots)i$$

sera évidemment représentée par la résultante des droites qui représentent séparément les nombres $a + bi$, $a' + b'i$, ... D'après les propriétés connues de la résultante, nous pourrons énoncer la propriété fondamentale suivante :

Le module d'une somme de quantités complexes ne peut surpasser la somme de leurs modules; mais, d'autre part, il est au moins égal au plus grand de ces modules, diminué de la somme des autres.

On peut remarquer encore que, si les directions des droites

composantes sont toutes comprises dans l'intérieur d'un angle d'ouverture inférieur à π, la résultante y sera également contenue.

Donc, *si les termes d'une somme ont des arguments dont les différences mutuelles soient toutes* $< \pi$, *l'argument de la somme sera intermédiaire entre les arguments de ses termes.*

La différence de deux nombres complexes $a + bi$, $a' + b'i$ sera définie par l'expression

$$(a - a') + (b - b')i,$$

dont le module sera compris entre la somme et la différence des modules des deux nombres $a + bi$, $a' + b'i$.

187. Le produit des deux nombres $a + bi$, $a' + b'i$ sera donné par la formule

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + (ba' + ab')i + bb'i^2,$$

ou, en divisant par $i^2 + 1$ et ne gardant que le reste,

$$(aa' - bb') + (ba' + ab')i.$$

Ce résultat prend une forme plus intéressante si l'on met en évidence le module et l'argument des deux facteurs considérés; on aura alors

$$a + bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$a' + b'i = \rho'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

et, pour le produit,

$$\rho\rho'[\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi' + i(\sin\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi'\cos\varphi)]$$
$$= \rho\rho'[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')].$$

Donc *le module d'un produit est le produit des modules des facteurs, et son argument la somme de leurs arguments.*

188. Le *rapport* des deux nombres $a + bi$ et $a' + b'i$

sera le nombre $x+yi$ qui, multiplié par le diviseur, reproduit le dividende. On devra donc avoir

$$a+bi=(a'+b'i)(x+yi)=a'x-b'y+i(b'x+a'y).$$

Cette équation se décompose dans les deux suivantes,

$$a'x-b'y=a, \qquad b'x+a'y=b,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}, \qquad y=\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2}.$$

Le problème comporte donc une solution unique et toujours admissible, si le diviseur $a'+b'i$ est différent de zéro.

Il est manifeste que les règles du calcul algébrique s'étendent aux nombres complexes.

189. On dit qu'un nombre complexe variable $x+iy$ tend vers une limite fixe $c+di$, si

$$|x+iy-(c+di)|=\sqrt{(x-c)^2+(y-d)^2}$$

tend vers zéro.

Cette expression est au moins égale à $|x-c|$ et à $|y-d|$. Elle ne peut donc tendre vers zéro que si x tend vers c et y vers d.

Cette condition est suffisante, car on a

$$|x+iy-c-di| \overline{\overline{<}} |x-c|+|y-d|,$$

et les deux termes du second membre tendent vers zéro, si x tend vers c et y vers d.

Les propriétés des modules d'une somme algébrique ou d'un produit démontrées aux n°s 186 et 187 sont précisément les mêmes qui ont été signalées au n° 6 dans le cas particulier des nombres réels et qui ont servi de fondement dans le paragraphe II pour l'étude des ensembles. Les propriétés trouvées dans ce paragraphe subsistent donc dans le cas où les variables $x, y, \ldots$ parcourraient non plus la suite des nombres réels, mais celle des nombres complexes.

190. Soient $x, y, \ldots$ des variables indépendantes réelles, P et Q des fonctions réelles de ces variables, définies dans l'intérieur d'un domaine E et admettant des dérivées partielles continues. La fonction complexe $u = P + iQ$ admettra des dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}$, ... également continues, et son accroissement Δu, lorsqu'on passe du point $(x, y, \ldots)$ au point $(x+\Delta x, y+\Delta y, \ldots)$ sera de la forme

$$\Delta u = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\Delta y + \ldots$$
$$+ (R + Si)\,\Delta x + (R_1 + S_1 i)\,\Delta y + \ldots,$$

$R, S, R_1, S_1, \ldots$ tendant vers zéro avec $\Delta x, \Delta y, \ldots$ (et cela uniformément dans tout ensemble E_1 borné et parfait intérieur à E).

Supposons les variables $x, y, \ldots$ en nombre pair; représentons-les par $x, y, x_1, y_1, \ldots$ et formons les combinaisons complexes

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x_1 + iy_1, \qquad \ldots.$$

On aura

$$\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y, \qquad \Delta z_1 = \Delta x_1 + i\,\Delta y_1, \qquad \ldots,$$
$$|\Delta z| \geqq |\Delta x| \geqq |\Delta y|, \qquad |\Delta z_1| \geqq |\Delta x_1| \geqq |\Delta y_1|.$$

L'expression

$$(R + Si)\,\Delta x + (R_1 + S_1 i)\,\Delta y + \ldots$$

pourra donc se mettre sous la forme

$$\rho\,\Delta z + \rho_1\,\Delta z_1 + \ldots,$$

les quantités

$$\rho = (R + Si)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (R_1 + S_1 i)\frac{\Delta y}{\Delta z}, \qquad \rho_1 = \ldots, \qquad \ldots$$

tendant encore vers zéro en même temps que $\Delta x, \Delta y, \Delta x_1, \Delta y_1, \ldots$ (et cela uniformément dans E_1).

Si, d'autre part, nous supposons les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \ldots$ liées par les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, & \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial y_1}, & \frac{\partial P}{\partial y_1} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

les termes de la première ligne de l'expression de Δu pourront s'écrire ainsi :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\Delta x + i\,\Delta y) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)(\Delta x_1 + i\,\Delta y_1) + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta z + \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)\Delta z_1 + \ldots.$$

On aura donc finalement

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta u = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta z + \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)\Delta z_1 + \ldots \\ \qquad + \rho\,\Delta z + \rho_1\,\Delta z_1 + \ldots. \end{array}\right.$$

Synectique ≡ Analytique ≡ Monogène V/Goursat t II p. 8

Lorsque les conditions ci-dessus seront satisfaites, nous dirons que u est dans l'intérieur de E une *fonction synectique* des variables complexes $z, z_1, \ldots$. Les termes de la première ligne du développement (2) seront sa différentielle totale du.

Posons, en particulier, $\Delta z_1 = 0$, $\Delta z_2 = 0$, ...; nous aurons

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + \rho.$$

Si Δz tend vers zéro, $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tendra vers une limite $\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$, indépendante du rapport des deux infiniment petits Δx et Δy. Cette limite se nomme la *dérivée partielle de u par rapport à z* et se représentera par la notation usuelle $\frac{\partial u}{\partial z}$.

(Si u ne dépendait que d'une seule variable complexe, on l'appellerait simplement la *dérivée* de u et on la représenterait par $\frac{du}{dz}$ ou u'.)

La fonction u admettra de même, par rapport aux autres variables $z_1, \ldots$, des dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \frac{\partial P}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \qquad \ldots.$$

Toutes ces dérivées $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \ldots$ seront d'ailleurs des fonctions continues de $x, y, x_1, y_1, \ldots$.

191. Réciproquement, pour que l'expression $P + Qi$, où P, Q sont des fonctions de $x, y, x_1, y_1, \ldots$ définies dans l'ensemble E, admette des dérivées partielles continues $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial z_1}, \ldots$ indépendantes, la première du rapport de Δx à Δy, la seconde du rapport de Δx_1 à Δy_1, etc., il faudra que P et Q admettent des dérivées partielles continues $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}, \ldots$ liées par les relations (1).

En effet, changeant x en $x + \Delta x$, sans altérer $y, x_1, y_1, \ldots$, on aura

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta P + i\Delta Q}{\Delta x}.$$

Pour que cette expression tende vers une limite fixe $\frac{\partial u}{\partial z}$, il faut que $\frac{\Delta P}{\Delta x}, \frac{\Delta Q}{\Delta x}$ tendent vers des limites.

Donc P et Q doivent admettre des dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, et l'on aura

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Changeons de même y en $y+\Delta y$, sans altérer les autres variables. On aura

$$\frac{\Delta u}{\Delta z}=\frac{\Delta u}{i\,\Delta y}=\frac{\Delta P+i\,\Delta Q}{i\,\Delta y}=\frac{\Delta Q-i\,\Delta P}{\Delta y}.$$

Pour que cette expression tende vers la limite $\frac{\partial u}{\partial z}$, lorsque Δy tend vers zéro, il faut que $\frac{\Delta Q}{\Delta y}$, $\frac{\Delta P}{\Delta y}$ tendent vers des limites $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, et l'on aura

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Pour que cette expression de $\frac{\partial u}{\partial z}$ coïncide avec la précédente, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Enfin, pour que $\frac{\partial u}{\partial z}$ soit continue, il faut que sa partie réelle et sa partie imaginaire le soient. Donc $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ doivent être continues.

On obtient des résultats analogues pour les autres dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial y_1}, \ldots$.

192. *Remarques.* — 1° Si l'on veut que $P+Qi$ soit une fonction synectique de $z, z_1, \ldots$, aucune des deux fonctions P et Q ne pourra être choisie arbitrairement; car les deux premières équations (1), dérivées respectivement par rapport à x et y et ajoutées ensemble, donnent

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0.$$

Dérivées par rapport à y et x, puis retranchées, elles

donnent

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

On trouvera de même

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y_1^2} = 0, \qquad \ldots\ldots$$

2° Si l'on admet (ce qui a toujours lieu, comme on le verra plus loin) que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}, \ldots$ existent et sont continues dans l'intérieur de E, $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z_1}, \ldots$ seront encore des fonctions synectiques de $z, z_1, \ldots$.

En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

par exemple, admet des dérivées partielles continues

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial x_1} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial x_1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il reste à montrer que ces dérivées partielles satisfont aux relations

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\,\partial y_1}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x_1\,\partial y_1} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Or celles-ci s'obtiennent immédiatement en dérivant les équations (1) par rapport à $x, x_1, \ldots$.

3° Si nous représentons par $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial z_1}, \ldots$ les dérivées

de $\frac{\partial u}{\partial z}$ par rapport à $z, z_1, \ldots$, on aura

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial z_1} = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial x_1} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial x_1}$$
$$= \frac{\partial^2 P}{\partial x_1\,\partial x} + i\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_1\,\partial z}.$$

4° Si nous supposons u indépendant de z, on aura $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, si $u = z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$. Si donc, dans l'équation

$$du = \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial u}{\partial z_1}\Delta z_1 + \ldots,$$

qui définit du, nous posons $u = z$, il viendra $dz = \Delta z$. De même $dz_1 = \Delta z_1, \ldots$, et, par suite,

$$du = \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial z_1}dz_1 + \ldots.$$

5° Les théorèmes du n° 75 et la règle plus générale du n° 88 pour la dérivation des fonctions composées s'appliquent sans changement aux fonctions synectiques de variables complexes.

193. Théorème. — *Soit* $F(z, z_1, \ldots)$ *une fonction synectique de*

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x_1 + iy_1, \qquad \ldots$$

définie aux environs du point

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad \zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \qquad \ldots$$

et s'annulant en ce point sans que sa dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial z}$ *s'y annule.*

On pourra déterminer une fonction synectique de $z_1, \ldots$, *définie aux environs du point* $(\zeta_1, \ldots)$, *prenant en ce point la valeur* ζ *et qui, substituée pour* z *dans l'équation* $F(z, z_1, \ldots) = 0$, *la rende identiquement satisfaite. Cette*

fonction sera unique et admettra aux environs du point $(\zeta_1, \ldots)$ *les dérivées partielles*

$$(3) \qquad -\frac{\frac{\partial F}{\partial z_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad -\frac{\frac{\partial F}{\partial z_2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \ldots.$$

Soit, en effet,

$$F(z, z_1, \ldots) = P + Qi,$$

P et Q étant des fonctions de $x, y, x_1, y_1, \ldots$.

On a, par définition,

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}, & \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = \dfrac{\partial Q}{\partial y_1}, & \dfrac{\partial P}{\partial y_1} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}$$

de P et Q par rapport à x, y se réduira, en vertu de ces équations, à

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2,$$

ce qui est le carré du module de la dérivée

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Celle-ci ne s'annulant pas au point initial $(\xi, \eta, \xi_1, \eta_1, \ldots)$, J ne s'y annulera pas. On pourra donc déterminer, et cela d'une seule manière, aux environs du point $(\xi_1, \eta_1, \ldots)$ deux fonctions réelles x, y des variables indépendantes $x_1, y_1, \ldots$, satisfaisant identiquement aux équations $P = 0$, $Q = 0$ (ou, ce qui revient au même, à l'équation $F = 0$) et se réduisant

respectivement à ξ, η au point $(\xi_1, \eta_1, \ldots)$. Les différentielles totales de ces fonctions seront données par les équations

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial P}{\partial y_1} dy_1 + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{dQ}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial y_1} dy_1 + \ldots = 0$$

ou, en vertu des équations (4),

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx - \frac{\partial Q}{\partial x} dy + \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial Q}{\partial x_1} dy_1 + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial x} dy + \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial P}{\partial x_1} dy_1 + \ldots = 0.$$

Ajoutons ces équations, après avoir multiplié la seconde par i; il viendra

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(dx + i\,dy)$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + i\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)(dx_1 + i\,dy_1) + \ldots = 0$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial z_1} dz_1 + \ldots = 0.$$

Cette relation montre que la quantité complexe z est bien une fonction synectique de $z_1, \ldots$ et a pour dérivées partielles les expressions (3). Elle satisfait d'ailleurs à l'équation $F = 0$ et se réduit à $\xi + i\eta$ au point $(\zeta_1, \ldots)$.

Le théorème que nous venons d'établir est entièrement semblable à celui démontré (91) pour les fonctions de variables réelles. Les conséquences déduites de ce dernier (92 à 95) subsistent évidemment aussi pour les fonctions synectiques de variables complexes.

194. Les conditions qui expriment que $u = P + Qi$ est une fonction de $z = x + iy$ sont susceptibles d'une interprétation géométrique remarquable.

Marquons en effet, sur le plan, le point qui a pour affixe $u = f(z)$. A chaque point z correspond un point u; à chaque ligne décrite par z, une ligne décrite par u.

Considérons trois points z, $z + \Delta z$, $z + \Delta_1 z$ formant un triangle infiniment petit, dont les côtés auront respectivement pour longueurs $|\Delta z|$, $|\Delta_1 z|$, $|\Delta_1 z - \Delta z|$.

Les points correspondants u, $u + \Delta u$, $u + \Delta_1 u$ formeront un autre triangle, dont les côtés auront pour longueurs

$$|\Delta u| = |[f'(z) + R]\Delta z|,$$
$$|\Delta_1 u| = |[f'(z) + R_1]\Delta_1 z|,$$
$$|\Delta_1 u - \Delta u| = |[f'(z + \Delta z) + \rho](\Delta_1 z - \Delta z)|,$$

R, R_1, ρ tendant vers zéro avec Δz, $\Delta_1 z$.

Les rapports des côtés correspondants sont donc respectivement $|f'(z) + R|$, $|f'(z) + R_1|$, $|f'(z + \Delta z) + \rho|$ et tendent vers la limite commune $f'(z)$ lorsque Δz et $\Delta_1 z$ tendent vers zéro. Les deux triangles tendent donc à devenir semblables.

Ce raisonnement serait toutefois en défaut pour les valeurs de z qui annuleraient $f'(z)$.

II. — Intégrales des fonctions synectiques.

195. Soit toujours

$$f(z) = P + iQ$$

une fonction de z, synectique à l'intérieur d'un domaine E, et soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations d'une ligne rectifiable L menée dans l'intérieur de E entre deux points z_0 et Z.

Les quantités P et Q étant des fonctions continues de x, y, qui, sur la ligne L, sont eux-mêmes des fonctions continues de t, seront le long de cette ligne des fonctions continues de t. Représentons-les par $P(t)$ et $Q(t)$.

Entre les valeurs t_0, T de t qui correspondent aux deux extrémités de L, intercalons une suite de valeurs intermédiaires $t_1, \ldots, t_k, \ldots$. Entre deux valeurs consécutives t_k, t_{k+1} prenons arbitrairement une valeur intermédiaire τ_k. Désignons par z_k, z_{k+1}, ζ_k les valeurs de z qui correspondent à t_k, t_{k+1}, τ_k.

Cela posé, formons la somme

$$S = \Sigma f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \Sigma[P(\tau_k) + iQ(\tau_k)](z_{k+1} - z_k).$$

Si l'on fait décroître indéfiniment l'étendue de tous les intervalles $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, *la somme ci-dessus tendra vers une limite fixe,* que nous appellerons l'*intégrale de* $f(z)\,dz$ *suivant la ligne* L, et que nous représenterons par

$$\int_L f(z)\,dz.$$

Pour établir ce théorème fondamental, il suffit de montrer que, quelle que soit la quantité ε, on pourra déterminer une quantité η telle que la différence entre deux sommes quelconques S et S′ dans chacune desquelles les intervalles Δt_k sont $< \eta$ ait son module nécessairement $< \varepsilon$.

Soient S, S′ deux de ces sommes correspondant respectivement à deux systèmes de valeurs intermédiaires $\ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots$ et $\ldots, t'_k, t'_{k+1}, \ldots$; S″ une troisième somme correspondant à un nouveau mode de division où figurent toutes les valeurs intermédiaires t et t'. On aura

$$|S' - S| \overline{\overline{<}} |S'' - S| + |S'' - S'|;$$

il suffit donc de montrer que, si η est assez petit, le module de la différence $S'' - S$ sera $< \frac{\varepsilon}{2}$, la même démonstration s'appliquant à la différence analogue $S'' - S$.

Considérons un terme

$$P(\tau_k) + iQ(\tau_k)](z_{k+1} - z_k)$$

de la somme S. Il est remplacé dans S'' par une somme de termes

$$\Sigma[P(\tau'_{k'}) + iQ(\tau'_{k'})](z'_{k'+1} - z'_{k'}),$$

où

$$\Sigma(z'_{k'+1} - z'_{k'}) = z_{k+1} - z_k.$$

La différence entre cette somme de termes et le terme primitif sera donc

$$(1)\quad \Sigma\{P(\tau'_{k'}) - P(\tau_k) + i[Q(\tau'_{k'}) - Q(\tau_k)]\}(z'_{k'+1} - z'_{k'}).$$

Cela posé, τ_k et $\tau'_{k'}$ étant compris entre t_k et t_{k+1}, leur différence sera $< \eta$. D'ailleurs, les fonctions P et Q, étant continues, le sont uniformément. On pourra donc, en prenant η assez petit, rendre toutes les quantités $P(\tau'_k) - P(\tau_k)$, $Q(\tau'_k) - Q(\tau_k)$ moindres en valeur absolue qu'une quantité arbitraire ξ.

Cela posé, le module de la somme (1) sera moindre que

$$\xi\sqrt{2}\,\Sigma\,|z'_{k'+1} - z'_k|.$$

D'ailleurs $|z'_{k'+1} - z'_k|$ n'est autre chose que la distance rectiligne des points $z'_{k'+1}$ et $z'_{k'}$. Donc $\Sigma|z'_{k'+1} - z'_k|$ représente le périmètre du polygone formé avec les points $z'_k, \ldots$ et sera au plus égal à l'arc de courbe compris entre z_k et z_{k+1}.

Opérant de même sur chacun des termes de la somme S et sur les termes correspondants de S'', on aura

$$|S'' - S| < \xi\sqrt{2}\,l,$$

l désignant la longueur de l'arc total. En prenant ξ assez petit, on pourra rendre cette différence moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$.

196. Supposons, en outre, que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent une dérivée continue. Le calcul de l'intégrale dont l'existence vient d'être établie se ramènera à celui d'intégrales réelles.

Il s'agit, en effet, de trouver la limite de la somme

$$\Sigma(P + Qi)(\Delta x + i\,\Delta y) = \Sigma(P\,\Delta x - Q\,\Delta y) + i\,\Sigma(Q\,\Delta x + P\,\Delta y).$$

Or on a, d'après les hypothèses faites sur les fonctions φ et ψ,

$$\Delta x = [\varphi'(t) + \mathrm{R}]\,\Delta t, \qquad \Delta y = [\psi'(t) + \mathrm{R}']\,\Delta t,$$

R et R′ convergeant uniformément vers zéro avec Δt, dans l'intervalle de t_0 à T.

On aura donc

$$\Sigma(\mathrm{P}\,\Delta x - \mathrm{Q}\,\Delta y) = \Sigma[\mathrm{P}\varphi'(t) - \mathrm{Q}\psi'(t)]\,\Delta t + \Sigma(\mathrm{PR} - \mathrm{QR}')\,\Delta t.$$

Le second terme de cette expression tend vers zéro avec les intervalles Δt. En effet, soient M une limite supérieure des modules des fonctions P et Q sur la ligne L; η le maximum des modules des quantités R, R′; on aura

$$\operatorname{mod}\Sigma(\mathrm{PR} - \mathrm{QR}')\,\Delta t \leqq 2\mathrm{M}\eta\,\Sigma\,\Delta t \leqq 2\mathrm{M}\eta(\mathrm{T} - t_0).$$

Or, lorsque les Δt décroissent indéfiniment, les R, R′ tendent uniformément vers zéro; donc η tend vers zéro.

On aura donc

$$\begin{aligned} \lim\Sigma(\mathrm{P}\,\Delta x - \mathrm{Q}\,\Delta y) &= \lim\Sigma[\mathrm{P}\varphi'(t) - \mathrm{Q}\psi'(t)]\,\Delta t \\ &= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\mathrm{P}\varphi'(t) - \mathrm{Q}\psi'(t)]\,dt. \end{aligned}$$

De même

$$\lim\Sigma(\mathrm{Q}\,\Delta x + \mathrm{P}\,\Delta y) = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} [\mathrm{Q}\varphi'(t) + \mathrm{P}\psi'(t)]\,dt.$$

197. De la définition de l'intégrale $\int_{\mathrm{L}} f(z)\,dz$ par une limite de somme résultent évidemment les propriétés suivantes :

1° Si la ligne L est formée de plusieurs parties successives L_1, L_2, ..., on aura

$$\int_{\mathrm{L}} f(z)\,dz = \int_{\mathrm{L}_1} f(z)\,dz + \int_{\mathrm{L}_2} f(z)\,dz + \ldots.$$

2° Si L et L^{-1} représentent la même ligne, décrite dans

deux sens opposés, on aura

$$\int_{L^{-1}} f(z)\,dz = -\int_L f(z)\,dz.$$

3° Si $f(z) = c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \ldots$, c_1, c_2, ... étant des constantes, on aura

$$\int_L f(z)\,dz = c_1 \int_L f_1(z)\,dz + c_2 \int_L f_2(z)\,dz + \ldots.$$

4° Enfin, soient M le maximum de $|f(z)|$ sur la ligne L, et l la longueur de cette ligne ; on aura

$$|\Sigma f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k)| \leqq M \Sigma |z_{k+1} - z_k| \leqq Mp,$$

p désignant le périmètre du polygone $z_0 z_1 \ldots z_k \ldots$; d'où, en passant à la limite

$$\left| \int_L f(z)\,dz \right| \leqq Ml.$$

198. On remarquera que, dans les raisonnements qui précèdent, nous nous sommes appuyé uniquement sur la continuité des fonctions P et Q, sans faire aucun usage des équations aux dérivées partielles qui expriment que $P + Qi$ a une dérivée déterminée. Mais ces nouvelles conditions vont intervenir dans la démonstration du théorème suivant :

Théorème. — *Soit* C *un contour fermé continu et sans point multiple, et tel que tous les points non extérieurs à* C *soient intérieurs au domaine* E. *L'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *prise suivant une ligne rectifiable fermée quelconque* K *intérieure à* C *sera identiquement nulle.*

La fonction $f(z) = P + Qi$, étant continue pour tous les points non extérieurs à C, qui forment un ensemble parfait, le sera uniformément dans cet ensemble.

Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

les équations de la courbe K. Donnons à t une série de

valeurs successives $t_0, \ldots, t_k, \ldots$; nous obtiendrons sur la courbe une série de points correspondants $z_0, \ldots, z_k, \ldots$. Supposons que les intervalles $t_{k+1} - t_k$ soient tous $< \delta$. En faisant décroître suffisamment cette quantité δ, on pourra faire en sorte :

1° Que les distances $z_k z_{k+1}$ (qui tendent uniformément vers zéro avec δ) soient moindres que la plus courte distance de K à C, et, par suite, que le polygone inscrit P, qui a pour sommets $z_0, z_1, \ldots, z_k, \ldots$, soit intérieur à C;

2° Que la différence entre la somme

$$\Sigma f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

et sa limite $\int_K f(z)\,dz$ ait son module moindre qu'une quantité ε choisie à volonté;

3° Enfin, que la différence entre cette somme et l'intégrale $\int_P f(z)\,dz$, prise sur le contour du polygone P, ait aussi son module $< \varepsilon$.

Pour établir ce dernier point, qui seul a besoin de démonstration, considérons le terme

$$f(z_k)(z_{k+1} - z_k)$$

correspondant à l'élément $z_k z_{k+1}$. Il est remplacé, dans l'intégrale $\int_P f(z)\,dz$, par l'expression suivante,

$$\lim \Sigma f(z'_{ik})(z'_{i+1,k} - z'_{ik}),$$

où $z'_{ik}, \ldots$ sont des points de division infiniment voisins pris sur la droite $z_k z_{k+1}$.

Comme on a

$$z_{k+1} - z_k = \Sigma(z'_{i+1,k} - z'_{ik}),$$

la différence entre ces deux expressions sera la limite de la somme

$$\Sigma[f(z'_{ik}) - f(z_k)](z'_{i+1,k} - z'_{ik}),$$

dont le module est au plus égal à

$$M_k \Sigma |z'_{i+1,k} - z'_{ik}| = M_k |z_{k+1} - z_k| = M_k l_k,$$

l_k désignant la longueur du côté $z_{k+1} - z_k$, et M_k le maximum des modules des quantités $f(z'_{ik}) - f(z_k)$.

Raisonnant de même sur chacun des côtés du polygone, et désignant par M le maximum des quantités M_k et par l la longueur de la courbe K, on aura pour limite supérieure du module de la différence cherchée

$$\Sigma M_k l_k \leqq M \Sigma l_k \leqq M l.$$

D'ailleurs, le point z'_{ik} étant situé sur la droite $z_k z_{k+1}$, on aura

$$|z'_{ik} - z_k| \leqq |z_{k+1} - z_k|.$$

Donc les différences $z'_{ik} - z_k$ et, par suite, les quantités $f(z'_{ik}) - f(z_k)$ tendent uniformément vers zéro avec δ. On peut donc, en prenant δ assez petit, rendre M moindre que $\frac{\varepsilon}{l}$, ce qui démontre notre proposition.

Si donc nous établissons que l'intégrale $\int f(z)\,dz$ est nulle pour tout polygone P, le théorème sera démontré, car le module de l'intégrale $\int_K f(z)\,dz$ étant $< 2\varepsilon$, quelque petit que soit ε, sera rigoureusement nul.

199. Le contour polygonal P peut se traverser lui-même en certains points; le nombre de ces traversées sera limité et au plus égal à $\frac{n(n-1)}{2}$, n étant le nombre des côtés du polygone. Partons, dans ce cas, d'un point quelconque du contour pour le décrire dans le sens de l'intégration, jusqu'à ce qu'on traverse pour la première fois les parties déjà décrites. La portion de contour comprise entre ces deux passages au même point formera un contour partiel qui ne se traverse pas

lui-même. Si l'on suppose le théorème établi pour un semblable contour, on pourra négliger cette portion de la ligne d'intégration, et il ne restera plus qu'à faire la démonstration pour le contour restant, où le nombre des traversées est diminué.

On voit donc qu'il suffit d'établir notre proposition pour un contour polygonal qui ne se traverse pas lui-même. Or l'intérieur d'un semblable contour peut se décomposer en triangles. Supposons le théorème établi pour chacun de ces triangles; la somme des intégrales obtenues en faisant le tour de chacun de ces triangles, dans le sens direct, par exemple, sera nulle. Mais, les côtés de ces triangles qui ne font pas partie du contour P étant décrits deux fois en sens contraire, les intégrales correspondantes se détruisent deux à deux; et l'intégrale restante sera précisément celle qu'on obtient en décrivant le contour P.

Nous avons ainsi ramené la démonstration du théorème au cas où le contour K, au lieu d'être une courbe rectifiable quelconque, dont la notion est un peu confuse, se réduit à un triangle.

On peut même admettre que le triangle a un de ses côtés parallèle à l'axe des y, car tout triangle peut être décomposé en deux triangles de cette nature.

200. Considérons un semblable triangle ABC (*fig.* 1). Soient

$$A = a + a'i,$$
$$B = b + [a' + m_0(b - a)]i,$$
$$C = b + [a' + m\,(b - a)]i$$

les affixes de ses sommets (de telle sorte que m_0, m représentent respectivement les coefficients angulaires des côtés AB, AC).

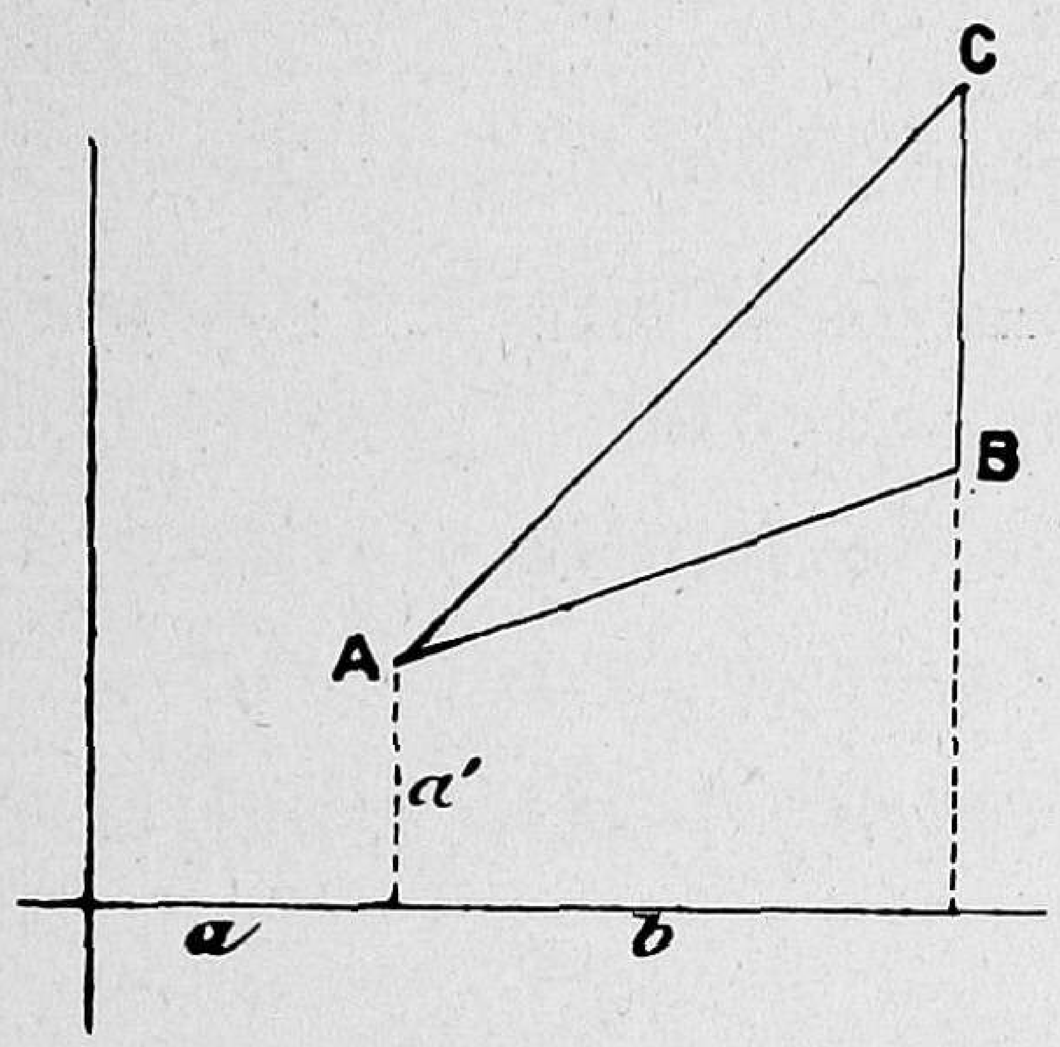
Nous allons montrer que l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise sur le contour du triangle, a une valeur indépendante de m.

Elle se compose, en effet, des trois intégrales

$$\int_{AB} f(z)\,dz, \quad \int_{BC} f(z)\,dz, \quad \int_{CA} f(z)\,dz.$$

La première ne dépend pas de m.

Fig. 1.



Cherchons la dérivée de la deuxième. Soit

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

La ligne BC a pour équations

$$x = b, \qquad y = a' + t(b - a),$$

t étant réel et variant de m_0 à m. Donc l'intégrale

$$\int_{BC} f(z)\,dz$$

sera égale à

$$\int_{m_0}^{m} \{ P[b, a' + t(b - a)] + iQ[b, a' + t(b - a)] \} \, i(b - a)\,dt$$

et sa dérivée, par rapport à sa limite supérieure m, sera

$$P[b, a' + m(b - a)] + iQ[b, a' + m(b - a)]\, i(b - a) \\ = i f(C)(b - a).$$

Cherchons, d'autre part, la dérivée de la troisième inté-

grale prise suivant le côté CA. On a, sur cette ligne,

$$x = t, \qquad y = a' + m(t - a),$$

t étant réel et variant de b à a. Substituant ces valeurs dans $f(z)$, on obtiendra un résultat de la forme

$$(2) \quad f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) = P_1(t, m) + iQ_1(t, m),$$

et, comme

$$dz = dx + i\,dy = (1 + mi)\,dt,$$

l'intégrale cherchée deviendra

$$\int_b^a [P_1(t, m) + iQ_1(t, m)](1 + mi)\,dt,$$

expression où l'on séparerait sans peine la partie réelle de la partie imaginaire.

Sa dérivée par rapport à m sera

$$(3) \quad \int_b^a \left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial m} + i\frac{\partial Q_1}{\partial m}\right)(1 + mi) + (P_1 + Q_1 i)i\right] dt.$$

Or on a, par hypothèse,

$$i\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y},$$

et, d'autre part, en dérivant l'équation (2) par rapport aux variables indépendantes t, m dont x et y sont des fonctions,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + m\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial P_1}{\partial t} + i\frac{\partial Q_1}{\partial t},$$

$$(t - a)\left(\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = \frac{\partial P_1}{\partial m} + i\frac{\partial Q_1}{\partial m}.$$

La combinaison de ces équations donne

$$\left(\frac{\partial P_1}{\partial m} + i\frac{\partial Q_1}{\partial m}\right)(1 + mi) = i(t - a)\left(\frac{\partial P_1}{\partial t} + i\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right).$$

Substituant cette valeur dans l'intégrale (3), elle devient

$$\int_b^a i\left[(t-a)\left(\frac{\partial P_1}{\partial t}+i\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right)+P_1+Q_1 i\right]dt$$
$$=i\int_b^a \frac{d}{dt}[(t-a)(P_1+Q_1 i)]\,dt = i[(t-a)(P_1+Q_1 i)]_b^a$$
$$=-i(b-a)f(C).$$

Cette dérivée étant égale et contraire à celle de l'intégrale suivant BC, on voit que l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise autour du triangle, est une constante indépendante de m.

Or, si $m = m_0$, l'intégrale suivant BC disparaît, et les intégrales suivant AB et CA sont égales et contraires. Donc la constante est nulle et le théorème est établi.

201. Corollaire. — *Soient* L, L_1 *deux lignes arbitrairement tracées dans l'intérieur de* C *entre deux points fixes* z_0 *et* Z. *On aura*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz.$$

Car, la ligne $L_1 L^{-1}$ étant fermée, on aura, d'après ce qui précède,

$$o = \int_{L_1 L^{-1}} = \int_{L_1} + \int_{L^{-1}} = \int_{L_1} - \int_L \cdot$$

L'intégrale ne dépend donc pas du tracé de la ligne L, mais seulement de la position de ses extrémités. On peut mettre ce fait en évidence en la représentant par la notation

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

202. Dans l'intérieur de C, cette expression représente une fonction synectique de Z, ayant pour dérivée $f(z)$.

Cherchons, en effet, son accroissement lorsqu'on change Z en $Z + dZ$.

Soit L la ligne d'intégration suivie de z_0 à Z. On peut

adopter comme ligne d'intégration de z_0 à $Z + dZ$ la ligne L, suivie de la droite infiniment petite qui joint Z à $Z + dZ$. On aura alors

$$\int_{z_0}^{Z+dZ} f(z)\,dz - \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$
$$= \int_{Z}^{Z+dZ} f(z)\,dz = f(Z)\int_{Z}^{Z+dZ} dz + \int_{Z}^{Z+dZ} [f(z) - f(Z)]\,dz.$$

Le premier terme est évidemment égal à $f(Z)\,dZ$. Le second a pour limite supérieure de son module $M\,|dZ|$, M étant le maximum de $|f(z) - f(Z)|$ sur la ligne d'intégration. Or $|z - Z|$ est $\overline{\leq}\,|dZ|$, et $f(z)$ est continue. Si donc dZ tend vers zéro, il en sera de même de M; on aura donc

$$\int_{z_0}^{Z+dZ} - \int_{z_0}^{Z} = [f(Z) + R]\,dZ,$$

R étant un infiniment petit.

On voit par là qu'il existe des fonctions synectiques ayant $f(Z)$ pour dérivée et définies dans le même domaine que celle-ci; elles auront pour formule générale

$$\mathfrak{F}(Z) = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz + c,$$

c désignant une constante.

L'une de ces fonctions $\mathfrak{F}(Z)$ étant donnée, on obtiendra la valeur correspondante de c en faisant $Z = z_0$. Il vient

$$\mathfrak{F}(z_0) = c.$$

On aura, par suite, comme au n° 82,

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = \mathfrak{F}(Z) - \mathfrak{F}(z_0). \tag{4}$$

Comme on a évidemment

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\,dz,$$

l'intégrale, considérée comme fonction de z_0, aura pour dérivée $-f(z_0)$.

203. Les règles pour la dérivation des intégrales définies et pour l'intégration par parties (n°s 83 et 84) s'appliquent évidemment aux intégrales que nous considérons en ce moment.

204. Le changement de la variable indépendante peut s'opérer comme il suit :

Soit $z = \varphi(t)$ une fonction de t, synectique à l'intérieur d'un domaine E_1. Lorsque t se meut à l'intérieur de E_1, z se mouvra dans un domaine correspondant E.

Supposons en particulier que t décrive un arc L_1 de ligne rectifiable ; z décrira une ligne correspondante L, et ses variations seront liées à celles de t par la relation

$$\Delta z = (\varphi' t + R)\Delta t,$$

$\varphi' t$ restant continue, et R tendant uniformément vers zéro avec Δt ; car les points de L_1 forment un ensemble borné et parfait; on pourra donc assigner une quantité η telle que, si $|\Delta t| < \eta$, $|R|$ devienne moindre qu'une quantité ε arbitrairement choisie, quelle que soit la position du point t sur L_1. D'autre part, le long de cette ligne, $|\varphi'(t)|$ admettra un maximum μ.

Soit $t_0, \ldots, t_k, \ldots,$ T une suite de points pris sur L_1, de telle sorte que les différences $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ aient leurs modules moindres que η; et soient $z_0, \ldots, z_k, \ldots,$ Z les points correspondants de L; on aura

$$\Delta z_k = [\varphi'(t_k) + R_k]\Delta t_k,$$

d'où

$$|\Delta z_k| \overline{\underset{<}{}} (\mu + \varepsilon)|\Delta t_k|;$$

donc les Δz_k tendront uniformément vers zéro avec les Δt_k.

Enfin la ligne L sera rectifiable et aura une longueur

$$l = \lim \Sigma |\Delta z_k| \leqq \lim (\mu + \varepsilon) \Sigma \Delta t_k \leqq \mu l_1,$$

l_1 désignant la longueur de L_1.

Cela posé, soit $f(z)$ une fonction de z, synectique dans E_1; on aura

$$\Sigma f(z_k)\,\Delta z_k = \Sigma f(\varphi t_k)(\varphi' t_k + R_k)\,\Delta t_k.$$

Faisons tendre η et ε vers zéro. Les Δt_k et les Δz_k tendant vers zéro, le premier membre aura pour limite

$$\int_L f(z)\,dz$$

et le second

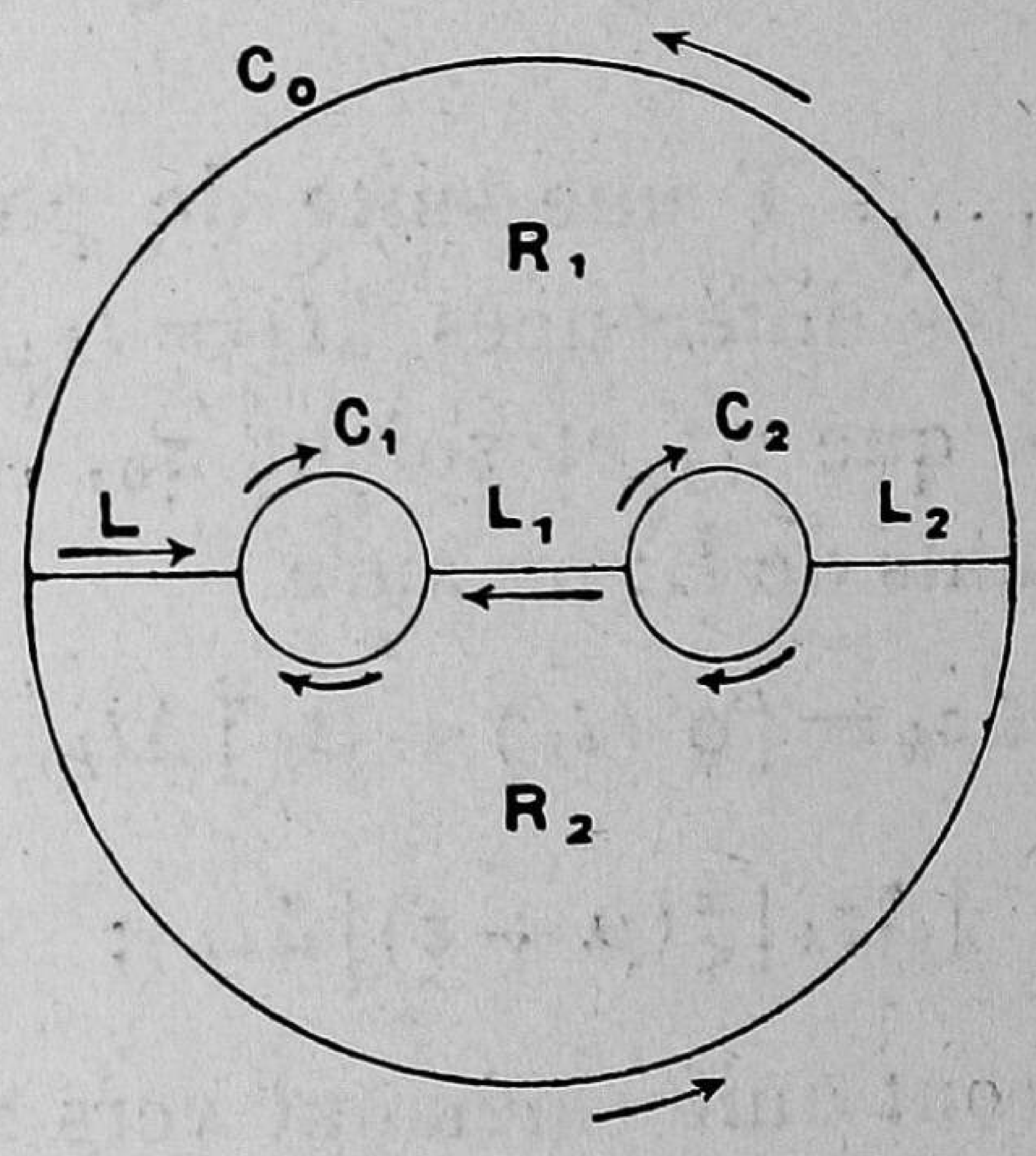
$$\int_{L_1} f(\varphi t)\,\varphi' t\,dt + \lim \Sigma f(\varphi t_k)\,R_k\,\Delta t_k.$$

Or, si l'on désigne par M le maximum de $|f|$ sur la ligne d'intégration, le second terme aura son module moindre que $M\varepsilon l_1$. Il tend donc vers zéro, et l'on aura

$$(5) \qquad \int_L f(z)\,dz = \int_{L_1} f(\varphi t)\,\varphi' t.dt.$$

205. Théorème. — *Soient* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (*fig.* 2) *des contours fermés rectifiables et sans points multiples, extérieurs les uns aux autres, et tous intérieurs à un dernier contour* C_0 *de même nature.*

Fig. 2.



Soit, d'autre part, fz *une fonction de* z *synectique dans un domaine* E *contenant dans son intérieur toute la région* R *du plan bornée par les contours* $C_0, C_1, \ldots,$

C_n, *y compris ces contours eux-mêmes; on aura*

$$\int_{C_0} fz\,dz = \int_{C_1} fz\,dz + \ldots + \int_{C_n} fz\,dz,$$

les intégrales étant prises dans le même sens, par exemple dans le sens direct, autour de ces divers contours.

Nous supposerons $n = 2$ dans la démonstration.

Joignons les contours C_0, C_1, C_2 par des lignes rectifiables L, L_1, L_2 sans points multiples et ne se rencontrant pas mutuellement (*fig.* 2). La région R se trouvera divisée en deux régions partielles R_1, R_2, limitées chacune par un seul contour fermé dans tout l'intérieur duquel fz est synectique. L'intégrale $\int fz\,dz$ prise dans le sens direct le long de chacun de ces contours frontières sera donc nulle (198). Ajoutant les résultats obtenus pour les deux régions, on remarque :

1° Que, chacune des lignes L, L_1, L_2 ayant été décrite une fois dans chaque sens, les intégrales correspondantes se détruisent;

2° Que les deux moitiés du contour C_0 ont été décrites chacune dans le sens direct; la somme des intégrales obtenues sera donc

$$\int_{C_0} fz\,dz;$$

3° Que les deux moitiés de chacun des contours C_1, C_2 ont été décrites dans le sens rétrograde. Si donc nous désignons par $\int_{C_1} fz\,dz$, $\int_{C_2} fz\,dz$ les valeurs des intégrales prises en décrivant C_1 et C_2 dans le sens direct, les intégrales obtenues seront $-\int_{C_1} fz\,dz$, $-\int_{C_2} fz\,dz$. Nous avons donc comme résultat final

$$\int_{C_0} fz\,dz - \int_{C_1} fz\,dz - \int_{C_2} fz\,dz = 0$$

206. Théorème. — *Soit fz une fonction synectique à l'intérieur d'un domaine E; soit K un contour (rectifiable, fermé et sans point multiple) situé dans l'intérieur de E; on aura, pour tout point a intérieur à K,*

$$(6)\qquad fa = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{fz\,dz}{z-a}.$$

Soit, en effet, c un cercle de rayon infiniment petit r décrit du point a comme centre; on aura, d'après le théorème précédent,

$$\int_K \frac{fz}{z-a}\,dz = \int_c \frac{fz}{z-a}\,dz = fa\int_c \frac{dz}{z-a} + \int_c \frac{fz-fa}{z-a}\,dz.$$

Le dernier terme tend vers zéro avec r. Soit, en effet, M le maximum de $|fz - fa|$ sur le cercle c; $|z-a|$ étant égal à r sur ce même cercle, le module de l'intégrale ne pourra surpasser $\frac{M}{r}2\pi r = 2\pi M$. Or, à cause de la continuité de $f(z)$, M tend vers zéro avec r.

D'autre part, on a sur le cercle

$$z = a + r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$dz = r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi = (z-a)\,i\,d\varphi,$$

φ étant réel et variant de 0 à 2π. On aura donc

$$\int_c \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i.$$

207. L'équation (6), dérivée par rapport au paramètre a, donnera les suivantes:

$$(7)\qquad \begin{cases} f'a = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_K \frac{fz}{(z-a)^2}\,dz, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f^n a = \dfrac{1.2\dots n}{2\pi i}\displaystyle\int_K \frac{fz}{(z-a)^{n+1}}\,dz. \end{cases}$$

Les intégrales qui figurent au premier membre sont des fonctions de a finies et déterminées. Les dérivées successives de la fonction f sont donc synectiques, comme f elle-même, dans tout l'intérieur de K.

Soient

r la plus courte distance du point a au contour K;
M le maximum de $|fz|$ sur ce contour;
l sa longueur.

On aura, sur tout ce contour,

$$|z-a| \overline{\overline{<}} r$$

et, par suite,

$$|f^n a| \overline{\overline{<}} \frac{1.2\ldots n}{2\pi} \frac{\mathrm{M}}{r^{n+1}} l,$$

et, en particulier, si K est un cercle ayant a pour centre, d'où $l = 2\pi r$,

$$|f^n a| \overline{\overline{<}} \frac{1.2\ldots n.\mathrm{M}}{r^n}. \tag{8}$$

208. Les résultats précédents s'étendent immédiatement aux fonctions de plusieurs variables.

Soit, par exemple, $f(z, z_1)$ une fonction des deux variables complexes z, z_1, qui reste synectique tant que z, z_1 restent dans l'intérieur de domaines E, E_1. Soient K, K_1 deux contours fermés (rectifiables et sans point multiple), intérieurs respectivement à E et à E_1; a, a_1 désignant deux points quelconques pris dans l'intérieur de ces contours, on aura

$$f(a, a_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{K}} \frac{f(z, a_1)}{z-a}\,dz,$$

$$f(z, a_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{K}_1} \frac{f(z, z_1)}{z_1-a_1}\,dz_1,$$

d'où

$$f(a, a_1) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathrm{K}} \left[\int_{\mathrm{K}_1} \frac{f(z, z_1)\,dz_1}{(z-a)(z_1-a_1)}\right] dz \tag{9}$$

et, en dérivant m fois par rapport à a et m_1 fois par rapport à a_1,

$$\frac{\partial^{m+m_1} f(a, a_1)}{\partial a^m \partial a_1^{m_1}} = \frac{1.2\ldots m.1.2\ldots m_1}{(2\pi i)^2} \int_K \left[\int_{K_1} \frac{f(z, z_1)\, dz_1}{(z-a)^{m+1}(z_1-a_1)^{m_1+1}} \right] dz.$$

Les dérivées partielles seront donc synectiques, et, si l'on désigne par M le maximum de $|f(z, z_1)|$ pour tous les systèmes de valeurs de z, z_1 respectivement situées sur les contours K, K_1, par r, r_1 les distances de ces contours aux points a, a_1, par l, l_1 leurs longueurs, on aura

$$(11) \qquad \left| \frac{\partial^{m+m_1} f(a, a_1)}{\partial a^m \partial a_1^{m_1}} \right| \overline{\overline{<}} \frac{m!\, m_1!}{(2\pi)^2} \frac{M}{r^{m+1} r_1^{m_1+1}} l l_1.$$

En particulier, si K et K_1 sont des cercles de même rayon r, ayant leurs centres en a et a_1, il viendra

$$\left| \frac{\partial^{m+m_1} f(a, a_1)}{\partial a^m \partial a_1^{m_1}} \right| \overline{\overline{<}} m!\, m_1!\, \frac{M}{r^{m+m_1}}.$$

III. — Fonctions rationnelles.

209. Polynomes entiers. — Considérons un polynome

$$P(z) = Az^m + Bz^{m-1} + \ldots + K,$$

où z est une variable complexe, A, B, ..., K des nombres complexes quelconques.

Cette expression a une valeur déterminée pour toute valeur de z.

D'ailleurs, si nous posons, pour abréger,

$$P'(z) = mAz^{m-1} + (m-1)Bz^{m-2} + \ldots,$$
$$P''(z) = m(m-1)Az^{m-2} + (m-1)(m-2)Bz^{m-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

nous aurons

$$P(z+h) = P(z) + hP'(z) + \frac{h^2}{1.2} P''(z) + \ldots,$$

d'où

$$\frac{P(z+h)-P(z)}{h}=P'(z)+\frac{h}{1.2}P''(z)+\ldots,$$

$$\lim_{h=0}\frac{P(z+h)-P(z)}{h}=P'(z).$$

Donc $P(z)$ est une fonction synectique ayant pour dérivée $P'(z)$.

Si $|z|$ tend vers ∞, il en sera de même de $|P(z)|$. On a, en effet,

$$P(z)=z^m\left(A+\frac{B}{z}+\ldots+\frac{K}{z^m}\right),$$

$$|P(z)|\overline{\overline{>}}|z|^m\left(|A|-\frac{|B|}{|z|}-\ldots-\frac{|K|}{|z|^m}\right)$$

et, si l'on suppose $|(z)|>1$,

$$|P(z)|\overline{\overline{>}}|z|\left(|A|-\frac{|B|+\ldots+|K|}{|z|}\right)>|A|\,|z|-(|B|+\ldots+|K|).$$

Donc, ε désignant une quantité positive quelconque, $|P(z)|$ sera $>\varepsilon$ dès que $|z|$ sera $\overline{\overline{>}}\delta$, δ désignant une constante plus grande que 1 et que $\dfrac{|B|+\ldots+|K|+\varepsilon}{|A|}$.

210. *L'équation* $P(z)=0$ *admet toujours au moins une racine.*

Donnons en effet à z une valeur quelconque c; soit ε la valeur correspondante de $|P(z)|$. La constante δ étant déterminée comme ci-dessus, considérons l'ensemble des valeurs de z dont les affixes ne sortent pas d'un cercle C de rayon δ, ayant pour centre l'origine des coordonnées.

Cet ensemble étant borné et parfait, $|P(z)|$, qui varie d'une manière continue avec z, y admettra un minimum μ au plus égal à ε, qu'il atteindra effectivement pour une valeur déterminée a de z. Cette valeur sera intérieure au cercle C, car sur le cercle $|z|=\delta$ et $|P(z)|>\varepsilon$.

Nous allons démontrer que ce minimum est nécessaire-

ment nul. Supposons, en effet, qu'on eût

$$\mu = |P(a)| > 0.$$

Donnons à z une valeur $a+h$, h étant une quantité complexe assez petite pour que le point $a+h$ soit encore dans le cercle C; nous allons voir qu'on pourra déterminer h de telle sorte que $|P(a+h)|$ soit $< |P(a)|$, ce qui implique contradiction.

On a

$$P(a+h) = P(a) + hP'(a) + \ldots + h^m \frac{P^m(a)}{1.2\ldots m}.$$

Le terme en h^m dans ce développement a pour coefficient $\frac{P^m(a)}{1.2\ldots m} = A$, quantité différente de zéro. Mais les coefficients des autres puissances de h peuvent être nuls.

Supposons, pour fixer les idées, que le premier terme dont le coefficient ne soit pas nul soit le terme en h^λ. Notre développement prendra la forme

$$P(a+h) = P(a) + B_1 h^\lambda + B_0 h^{\lambda+1} + \ldots + B_{m-\lambda} h^m.$$

On en déduit

$$|P(a+h)| \overline{\leq} |P(a) + B_0 h^\lambda| + |B_1| |h|^{\lambda+1} + \ldots + |B_{m-\lambda}| |h'^m|.$$

Prenons le module de h assez petit pour qu'on ait

$$|h| < 1, \qquad |B_0| \, |h| < |P(a)|,$$

et déterminons son argument par la condition

$$\lambda \arg h + \arg B_0 = \arg P(a) + \pi.$$

Les deux quantités $P(a)$ et $B_0 h^\lambda$ ayant des arguments qui diffèrent de π, et $|P(a)|$ étant $> |B_0 h^\lambda|$, on aura

$$|P(a) + B_0 h^\lambda| = |P(a)| - |B_0| \, |h|^\lambda$$

et, par suite,

$$|P(a+h)| \overline{\leq} |P(a)| - |B_0| \, |h|^\lambda + |B_1| \, |h|^{\lambda+1} + \ldots,$$
$$|P(a+h)| - |P(a)| \overline{\leq} |h|^\lambda [-|B_0| + |B_1| \, |h| + \ldots].$$

Le facteur entre parenthèses tend, lorsque $|h|$ tend vers zéro, vers la quantité négative $-|B_0|$. Donc, en prenant $|h|$ suffisamment petit, on aura

$$|P(a+h)|-|P(a)|<0.$$

Il est donc établi qu'on peut donner à z une valeur a, telle que l'on ait

$$|P(a)|=0, \qquad \text{d'où} \qquad P(a)=0.$$

211. Divisons $P(z)$ par le binome $z-a$; il viendra

$$P(z)=(z-a)P_1(z)+R,$$

le quotient $P_1(z)$ étant un polynome de degré $m-1$ et R une constante. Posant d'ailleurs dans cette identité $z=a$, elle devient

$$0=R.$$

On aura donc, plus simplement,

$$P(z)=(z-a)P_1(z).$$

En opérant sur $P_1(z)$ comme sur le polynome primitif, on le mettra de même sous la forme du produit d'un binome $z-b$ par un polynome $P_2(z)$ de degré $m-2$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une simple constante C. On aura finalement

$$P(z)=C(z-a)(z-b)\ldots.$$

D'ailleurs, en divisant les deux membres de cette égalité par z^m, puis faisant croître z indéfiniment, il viendra à la limite

$$A=C,$$

et, par suite,

$$P(z)=A(z-a)(z-b)\ldots.$$

Nous obtenons donc ce théorème fondamental :

Tout polynome $P(z)$ *de degré* m *peut être mis sous la forme du produit de son premier coefficient* A *par* m *binomes du premier degré* $z-a$, $z-b$, ...

Sous cette forme, on voit immédiatement que les racines

de l'équation $P(z)=0$ sont les quantités $a, b, \ldots$. Elles sont au nombre de m si les facteurs $z-a, z-b, \ldots$ sont différents. Si α d'entre eux sont égaux à $z-a$, on dira que a est une *racine multiple*, dont l'*ordre de multiplicité est* α. D'après cette convention, le nombre des racines, comptées chacune avec son ordre de multiplicité, est toujours égal à m.

212. Soient $a, b, \ldots$ les racines distinctes de l'équation $P(z)=0$; $\alpha, \beta, \ldots$ leurs degrés de multiplicité. On aura

$$P(z)=A(z-a)^\alpha(z-b)^\beta\ldots$$

et, en dérivant,

$$\frac{P'(z)}{P(z)}=\frac{\alpha}{z-a}+\frac{\beta}{z-b}+\ldots,$$

$$P'(z)=\alpha A(z-a)^{\alpha-1}(z-b)^\beta\ldots + \beta A(z-a)^\alpha(z-b)^{\beta-1}\ldots+\ldots.$$

Tous les termes de cette expression sont divisibles par $(z-a)^\alpha$ sauf le premier, qui ne l'est que par $(z-a)^{\alpha-1}$. Donc la dérivée $P'(z)$ admet la racine a avec l'ordre de multiplicité $\alpha-1$. De même, elle admettra b avec l'ordre de multiplicité $\beta-1$, etc. Quant aux racines simples de $P(z)$, elles ne seront plus racines de $P'(z)$.

Soient donc P_1 le produit des binomes $z-a$ qui correspondent aux racines simples de l'équation $P=0$; P_2 le produit des binomes correspondant aux racines doubles, etc., de telle sorte qu'on ait, à un facteur numérique près,

$$P=P_1P_2^2P_3^3\ldots.$$

Le plus grand commun diviseur de P et de sa dérivée P' sera (à un facteur numérique près)

$$Q=P_2P_3^2\ldots.$$

Celui de Q et de sa dérivée Q' sera, de même,

$$R=P_3\ldots.$$

On en déduit, par la division,

$$P_1P_2P_3\ldots = \frac{P}{Q}, \qquad P_2P_3 = \frac{Q}{R}, \qquad \ldots,$$

et, en divisant de nouveau chacune de ces expressions par la suivante, on obtiendra enfin P_1, P_2, P_3, ...

Ainsi P_1, P_2, P_3, ... peuvent s'obtenir par de simples divisions.

213. Fractions rationnelles. — On nomme *fonctions algébriques* celles qui sont liées à la variable indépendante par une équation de la forme $\Pi(u, z) = 0$, où Π est un polynome entier; *fonctions transcendantes* celles qui ne jouissent pas de cette propriété.

Les fonctions algébriques les plus simples, après les polynomes entiers, sont les *fractions rationnelles,* définies par une équation du premier degré en u,

$$Qu - P = 0,$$

Q et P étant des polynomes en z, qu'on peut supposer sans facteur commun.

En résolvant cette équation, on obtiendra u sous la forme explicite

$$u = \frac{P}{Q}.$$

Cette expression a une valeur bien définie pour toute valeur de z, sauf lorsque z est racine de l'équation $Q = 0$.

Soient a l'une de ces racines; α son ordre de multiplicité. Si l'on fait tendre z vers a, $\left|\frac{P}{Q}\right|$ sera infinie d'ordre α.

La fraction $\frac{P}{Q}$ a une dérivée $\frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$ également bien définie pour toute valeur de z qui n'est pas racine de Q. Celle-ci a une dérivée de même nature; elle est donc continue. Ainsi $\frac{P}{Q}$ est une fonction synectique de z dans tout le plan, à l'exception des racines de $Q = 0$.

Si a est une racine de Q d'ordre de multiplicité α, Q sera divisible par $(x-a)^\alpha$, Q' par $(x-a)^{\alpha-1}$, et P sera premier à $x-a$. La dérivée $\frac{P'Q-Q'P}{Q^2}$, réduite à sa plus simple expression, contiendra donc $x-a$ en dénominateur à la puissance $\alpha+1$, et deviendra infinie d'ordre $\alpha+1$ pour $x=a$.

214. Supposons que Q ait été décomposé d'une manière quelconque en un produit de deux facteurs Q_1 et Q_2 premiers entre eux. On pourra déterminer deux polynomes M_1, M_2, tels que l'on ait

$$M_1Q_1+M_2Q_2=1,$$

et, par suite,

$$\frac{P}{Q}=\frac{P}{Q_1Q_2}=\frac{P(M_1Q_1+M_2Q_2)}{Q_1Q_2}=\frac{PM_1}{Q_2}+\frac{PM_2}{Q_1}.$$

La fraction $\frac{P}{Q}$ est donc la somme de deux autres, ayant respectivement pour dénominateurs Q_1 et Q_2.

Si l'un des facteurs Q_1, Q_2 était lui-même un produit de deux facteurs premiers entre eux, on pourrait décomposer de nouveau la fraction partielle correspondante en une somme de deux autres fractions, et ainsi de suite.

215. On donne le nom de *fraction simple* à une fraction dont le numérateur est une constante et le dénominateur une puissance d'un binome $x-a$.

On déduit aisément des remarques qui précèdent cette proposition fondamentale :

Toute fraction $\frac{P}{Q}$ peut être décomposée en une somme de fractions simples, augmentée d'un polynome entier.

Nous pouvons tout d'abord supposer que le coefficient de la plus haute puissance de z dans Q se réduise à l'unité; car on n'altère pas la valeur de la fraction en divisant simultanément P et Q par ce coefficient.

Cela posé, décomposons Q en ses facteurs du premier degré; soit

$$Q = (z-a)^\alpha (z-b)^\beta \dots.$$

Les facteurs $(z-a)^\alpha$, $(z-b)^\beta$, ... étant premiers entre eux, on aura, d'après les propositions précédentes,

$$\frac{P}{Q} = \frac{F(z)}{(z-a)^\alpha} + \frac{G(z)}{(z-b)^\beta} + \dots,$$

F, G, ... étant des polynomes entiers.

Considérons l'une des fractions partielles, telle que $\frac{F(z)}{(z-a)^\alpha}$.

Posons

$$z = a + h:$$

$F(z)$ développé suivant les puissances de h prendra la forme

$$A_\alpha + A_{\alpha-1} h + \dots + A h^{\alpha-1} + h^\alpha \Phi(h),$$

$\Phi(h)$ étant un polynome entier.

On aura, par suite,

$$\frac{F(z)}{(z-a)^\alpha} = \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{h^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A}{h} + \Phi(h),$$

et, en remettant pour h sa valeur $z-a$,

$$\frac{F(z)}{(z-a)^\alpha} = \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \dots + \frac{A}{z-a} + \Phi(z-a),$$

c'est-à-dire une somme de fractions simples, plus un polynome entier.

Opérant de même sur chacune des fractions partielles, il viendra finalement

$$(1) \qquad \frac{P}{Q} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_1}{z-a} + \dots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} \\ + \frac{B_1}{z-b} + \dots + \frac{B_\beta}{(z-b)^\beta} \\ + \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right\} + \Psi(z),$$

$\Psi(z)$ étant un polynome entier.

Le degré de ce polynome Ψ est aisé à calculer *a priori*. Supposons, en effet, que Q soit de degré m et P de degré $m+\mu$. Si $|z|$ tend vers ∞, $\frac{P}{Q}$ tendra aussi vers ∞ et sera infini d'ordre μ. Il doit en être de même du second membre. Mais les fractions qu'il contient tendent vers zéro. Donc Ψ doit être un infini d'ordre μ. Donc μ est le degré du polynome.

On verrait de même que Ψ doit se réduire à une constante si P est de même degré que Q, et disparaître complètement, si P est de moindre degré que Q.

Connaissant ainsi le degré du polynome Ψ, il sera facile de déterminer ses coefficients, ainsi que les constantes A, B, ... Il suffira, après avoir chassé les dénominateurs dans l'équation (1), d'identifier les coefficients des mêmes puissances de z dans les deux membres. On obtiendra ainsi un système d'équations linéaires pour déterminer les coefficients inconnus.

216. Il est souvent préférable d'employer le procédé suivant, qui a l'avantage de montrer que la décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.

Posons $z = a + h$ dans l'équation (1) ; il viendra

$$P(a+h) = P(a) + hP'(a) + \ldots,$$

$$Q(a+h) = Q^{\alpha}(a)\frac{h^{\alpha}}{1.2\ldots\alpha} + Q^{\alpha+1}(a)\frac{h^{\alpha+1}}{1.2\ldots(\alpha+1)} + \ldots$$

Effectuons la division de ces deux polynomes ainsi ordonnés suivant les puissances croissantes de h, et arrêtons-nous au moment où nous aurions à écrire au quotient des termes ne contenant plus h en dénominateur. Nous aurons ainsi

$$\frac{P(a+h)}{Q(a+h)} = \frac{\mathcal{A}_{\alpha}}{h^{\alpha}} + \ldots + \frac{\mathcal{A}_1}{h} + \frac{Rh^{\alpha}}{Q(a+h)},$$

$\mathcal{A}_{\alpha}, \ldots \mathcal{A}_1$, étant des constantes et R un polynome entier.

Le second membre de l'équation (1) devient, par la même substitution,

$$\frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \ldots + \frac{A_1}{h} + \frac{B_1}{a-b+h} + \ldots + \Psi(a+h).$$

Nous avons donc identiquement

$$\frac{\mathcal{A}_\alpha}{h^\alpha} + \ldots + \frac{\mathcal{A}_1}{h} + \frac{R h^\alpha}{Q(a+h)}$$
$$= \frac{A_\alpha}{h^\alpha} + \ldots + \frac{A_1}{h} + \frac{B_1}{a-b+h} + \ldots + \Psi(a+h).$$

Multiplions les deux membres par h^α, puis faisons $h = 0$. Il viendra $\mathcal{A}_\alpha = A_\alpha$.

Supprimons les deux termes égaux $\frac{\mathcal{A}_\alpha}{h^\alpha}$ et $\frac{A_\alpha}{h^\alpha}$, multiplions par $h^{\alpha-1}$ et faisons $h=0$; il viendra $\mathcal{A}_{\alpha-1} = A_{\alpha-1}$, ...

Les coefficients A_α, ..., A_1 sont donc déterminés sans ambiguïté par les relations

$$A_\alpha = \mathcal{A}_\alpha, \quad \ldots, \quad A_1 = \mathcal{A}_1.$$

On calculera de même les coefficients B_1, ..., B_β relatifs à une seconde racine b, et ainsi de suite.

Reste à calculer le polynome entier $\Psi(z)$, dont on connaît déjà le degré μ.

Soient

$$P = M z^{m+\mu} + M_1 z^{m+\mu-1} + \ldots,$$
$$Q = N z^m + N z^{m-1} + \ldots.$$

On trouve par la division

$$\frac{P}{Q} = \rho z^\mu + \rho_1 z^{\mu-1} + \ldots + \rho_\mu + R,$$

ρ, ρ_1, ... étant des constantes et R s'annulant pour $z = \infty$. Soit d'autre part

$$\Psi(z) = s z^\mu + s_1 z^{\mu-1} + \ldots + s_\mu.$$

On aura l'identité

$$\rho z^\mu + \ldots + \rho_\mu + \mathrm{R}$$
$$= \frac{A_1}{z-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(z-a)^\alpha} + \frac{B_1}{z-b} + \ldots + s z^\mu + \ldots + s_\mu.$$

Divisant par z^μ et faisant $z = \infty$, il viendra $\rho = s$. Supprimant les deux termes égaux ρz^μ, $s z^\mu$, divisant par $z^{\mu-1}$ et faisant $z = \infty$, il viendra $\rho_1 = s_1, \ldots$.

217. Supposons, en particulier, que Q (z) n'ait que des racines simples et soit de degré m, P (z) étant de degré $< m$. Soit a l'une des racines de Q ; on aura

$$\frac{\mathrm{P}(a+h)}{\mathrm{Q}(a+h)} = \frac{\mathrm{P}(a)+\ldots}{\mathrm{Q}'(a)h+\ldots} = \frac{\mathrm{P}(a)}{\mathrm{Q}'(a)} \frac{1}{h} + \ldots.$$

En second lieu, le polynome $\Psi(z)$ n'existera pas. La formule de décomposition sera donc

$$\frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{Q}(z)} = \sum \frac{\mathrm{P}(a)}{\mathrm{Q}'(a)} \frac{1}{z-a},$$

la sommation s'étendant aux diverses racines a de Q (z).

Multiplions cette équation par z et faisons $z = \infty$;

$$\frac{z}{z-a} = \frac{1}{1-\dfrac{a}{z}}$$

ayant pour limite l'unité, il viendra

$$\sum \frac{\mathrm{P}(a)}{\mathrm{Q}'(a)} = \lim_{z=\infty} \frac{z\mathrm{P}(z)}{\mathrm{Q}(z)}.$$

Si P (z) est de degré $m-1$, le second membre a pour limite $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, M et N étant les premiers coefficients de P (z) et de Q (z).

Si, au contraire, le degré de P (z) est $< m-1$, la limite sera nulle, et l'on aura

$$\sum \frac{\mathrm{P}(a)}{\mathrm{Q}'(a)} = 0.$$

IV. — Fonctions algébriques.

218. Passons à l'étude des *fonctions algébriques,* définies par une équation de la forme

$$(1) \qquad f(u, z) = \mathrm{M}u^n + \mathrm{M}_1 u^{n-1} + \ldots + \mathrm{M}_n = 0,$$

où $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ sont des polynomes entiers en z.

Nous pouvons supposer le polynome $f(u, z)$ *irréductible,* c'est-à-dire non décomposable en un produit de facteurs de même nature; car, s'il était réductible, on n'aurait qu'à étudier séparément les équations obtenues en égalant chaque facteur à zéro.

Pour chaque valeur particulière de z, l'équation (1) donnera en général, pour u, n valeurs distinctes $u_1, \ldots, u_n$. Ce résultat souffre toutefois deux exceptions :

1° Si z est racine de l'équation $\mathrm{M} = 0$, le degré de l'équation en u s'abaisse au-dessous de n, et une ou plusieurs racines disparaissent.

2° L'équation (1) peut avoir des racines égales. Dans ce cas, le produit

$$(2) \qquad \mathrm{N} = \Pi \mathrm{M}^2 (u_i - u_k)^2$$

est égal à zéro. Or ce produit, étant symétrique par rapport aux quantités $\mathrm{M}u_1, \mathrm{M}u_2, \ldots$, est un polynome entier en z.

L'équation $f = 0$ admettra donc n racines distinctes, sauf pour les valeurs de z qui satisfont à l'une des équations

$$\mathrm{M} = 0, \qquad \mathrm{N} = 0.$$

Ces valeurs exceptionnelles, en nombre limité, ont reçu le nom de *points critiques.* Les autres valeurs de z sont des *points ordinaires.*

219. Soit C un contour continu, fermé, sans point multiple, et laissant à son extérieur tous les points critiques. Les points non extérieurs à C forment un domaine E, d'un seul

tenant; et si z est assujetti à rester dans ce domaine, à chacune de ses valeurs correspondront n racines $u_1, \ldots, u_n$ de l'équation $f = 0$.

Nous allons montrer tout d'abord que, dans ces conditions : 1° les modules $|u_1|, \ldots, |u_n|$ ne peuvent surpasser un nombre fixe μ; 2° les modules $|u_1 - u_2|, \ldots, |u_i - u_k|$ ne peuvent être inférieurs à un autre nombre fixe ν, plus grand que zéro ; 3° les modules des rapports

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial z} : \frac{\partial f(u_i, z)}{\partial u_i}$$

ne peuvent surpasser un nombre fixe ϖ.

Soit, en effet, a le maximum de $|z|$ dans le domaine E. Tout polynome entier en z, tel que $\Sigma A z^\alpha$, aura son module au plus égal à la quantité fixe

$$\Sigma |A| a^\alpha.$$

En particulier, N, M, $M_1, \ldots, \frac{dM}{dz}, \frac{dM_1}{dz}, \ldots$ sont des polynomes de ce genre; donc $|N|$, $|M|$, $|M_1|, \ldots, \left|\frac{dM}{dz}\right|$, $\left|\frac{dM_1}{dz}\right|, \ldots$, admettent des bornes supérieures qu'on peut assigner; soit b la plus grande d'entre elles.

D'autre part, M est de la forme

$$A(z - z_1)\ldots(z - z_p),$$

où $z_1, \ldots, z_p$ sont des points critiques. Si δ désigne la distance du contour C au point critique le plus voisin, chacun des modules $|z - z_1|, \ldots, |z - z_p|$ sera au moins égal à δ en chaque point de E; donc $|M|$ ne peut s'abaisser au-dessous du nombre fixe $|A|\,\delta^p$, que nous désignerons par c.

On trouvera de même pour $|N|$ une borne inférieure c'.

Cela posé, soit μ la plus grande des deux quantités $1, \frac{nb}{c}$; on aura, pour toutes les valeurs considérées de z et pour

toute valeur v de la variable u dont le module surpasse μ,

$$\begin{aligned}|f(v, z)| &\geqq |\mathrm{M}||v|^n - |\mathrm{M}_1||v|^{n-1} - \ldots - |\mathrm{M}_n| \\ &\geqq c|v|^n - b(|v|^{n-1} + |v|^{n-2} + \ldots + 1) \\ &> c|v|^n - nb|v|^{n-1} \geqq c|v|^{n-1}(|v| - \mu) > 0.\end{aligned}$$

Ainsi v ne peut satisfaire à l'équation $f = 0$. Donc les modules des racines $|u_1|, \ldots, |u_n|$ ont μ pour borne supérieure commune.

Les quantités $|u_1 - u_2|, \ldots, |u_i - u_k|$ auront donc pour borne supérieure 2μ. L'équation (2) donne d'ailleurs

$$|\mathrm{N}| = \Pi |\mathrm{M}|^2 |u_i - u_k|^2,$$

d'où, en remplaçant $|\mathrm{N}|$ par sa borne inférieure c', et tous les facteurs du second membre, sauf l'un d'eux $|u_i - u_k|$, par leurs bornes supérieures,

$$c' \leqq b^{n(n-1)} (2\mu)^{n(n-1)-2} |u_i - u_k|^2.$$

Donc $|u_i - u_k|$ a pour borne inférieure la quantité

$$\nu = \frac{2\mu\sqrt{c'}}{(2\mu b)^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Quant à la dérivée partielle

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial z} = \frac{d\mathrm{M}}{dz} u_i^n + \frac{d\mathrm{M}_1}{dz} u_i^{n-1} + \ldots,$$

elle a pour borne supérieure de son module la quantité

$$b\mu^n + b\mu^{n-1} + \ldots.$$

On a enfin

$$f(u, z) = \mathrm{M}(u - u_1)\ldots(u - u_n).$$

Prenant la dérivée partielle par rapport à u et posant ensuite $u = u_i$, il viendra

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial u_i} = \mathrm{M}(u_i - u_1)\ldots(u_i - u_n),$$

expression dont le module a pour borne inférieure

$$c\nu^{n-1}.$$

Le module du quotient

$$\frac{\partial f(u_i, z)}{\partial z} : \frac{\partial f(u_i, z)}{\partial u_i}$$

a donc pour borne supérieure la quantité

$$\varpi = \frac{b\mu^n + b\mu^{n-1} + \ldots}{c\nu^{n-1}}.$$

220. Ces préliminaires posés, choisissons, à volonté, pour chacune des valeurs de la quantité complexe $z = x + yi$, une des n racines de $f = 0$. L'ensemble des racines ainsi choisies sera une fonction U des variables x, y.

Cherchons à diriger notre choix de telle sorte que cette fonction soit continue.

Nous démontrerons le lemme suivant :

Si deux fonctions U_1, U_2, *déterminées comme ci-dessus, sont continues dans tout le domaine* E, *et ne sont pas identiques, elles ne seront égales en aucun point de* E.

En effet, d'après nos hypothèses, $|U_1 - U_2|$ sera une fonction continue de x, y. D'ailleurs, en chaque point z de E, U_1 et U_2 sont des racines de l'équation $f(u, z) = 0$. Si ces deux racines sont identiques, on aura

$$|U_1 - U_2| = 0.$$

Si elles sont différentes, on aura au contraire

$$|U_1 - U_2| \geqq \nu.$$

Puisque U_1 et U_2 ne sont pas identiques, il existera au moins une valeur de z pour laquelle le second cas se présentera. D'ailleurs, les valeurs de $|U_1 - U_2|$ doivent former un ensemble d'un seul tenant (64). Donc $|U_1 - U_2|$, ne pouvant prendre les valeurs intermédiaires entre ν et 0, ne pourra s'annuler.

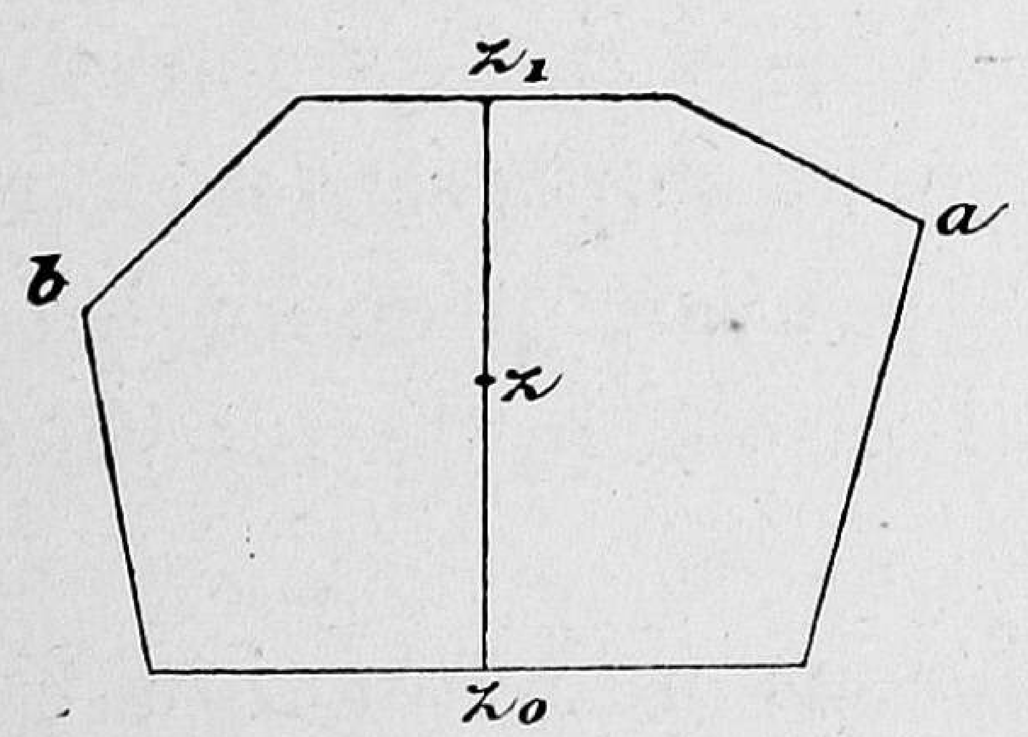
Le nombre des fonctions continues distinctes qu'on peut former ne saurait donc surpasser le nombre n des racines de l'équation $f=0$, et, s'il existe n semblables fonctions $U_1, \ldots, U_n$, les valeurs de ces fonctions, étant constamment différentes entre elles, reproduiront, pour chaque valeur de z, la suite complète des racines de cette équation.

221. Nous allons montrer réciproquement qu'on peut grouper ensemble les valeurs de u correspondant aux divers points de E de manière à constituer n fonctions continues distinctes $U_1, \ldots, U_n$.

Dans la démonstration de cette proposition, il nous sera permis de supposer que C est un contour polygonal. En effet, nous savons qu'on peut déterminer un contour polygonal $\mathfrak{P}$, sans point multiple, contenant C dans son intérieur et dont tous les points soient à une distance de C moindre que δ. Tous les points critiques seront encore extérieurs à ce contour $\mathfrak{P}$. Or, si le théorème est vrai pour le contour $\mathfrak{P}$, il le sera évidemment pour le contour intérieur C.

Si le théorème est vrai pour deux contours polygonaux $\mathfrak{P}' = z_0 a z_1 z_0$, $\mathfrak{P}'' = z_0 z_1 b z_0$ ayant un côté commun $z_0 z_1$ (*fig.* 3), il le sera pour le contour polygonal $\mathfrak{P} = z_0 a z_1 b z_0$ résultant de la réunion de leurs autres parties.

Fig. 3.



Soient, en effet, $U'_1, \ldots, U'_n$ les n fonctions U relatives au contour $\mathfrak{P}'$; $U''_1, \ldots, U''_n$ les n fonctions relatives à $\mathfrak{P}''$. Posons

$$z_0 = x_0 + i y_0, \qquad z_1 = x_1 + i y_1.$$

Un point z situé sur la ligne $z_0 z_1$ aura pour coordonnées

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \qquad y = y_0 + (y_1 - y_0)t,$$

t désignant le rapport des distances zz_0 et $z_1 z_0$.

Si le point $z = x + yi$ décrit la ligne $z_0 z$, t variera de 0 à 1, et x, y seront des fonctions continues de t.

Les valeurs des diverses fonctions $U'_1, \ldots, U'_n$ au point z_0 sont les diverses racines $u_1^0, \ldots, u_n^0$ de l'équation

$$f(u, z_0) = 0.$$

Il en est de même pour les fonctions $U'_1, \ldots, U''_n$. On pourra associer une à une ces fonctions aux précédentes, en joignant ensemble celles qui prennent la même valeur en z_0.

Soient, par exemple, U'_i et U''_i les deux fonctions qui prennent la valeur u_i^0. Ces deux fonctions seront égales le long de la ligne $z_0 z_1$.

En effet, U'_i est continu par rapport à x, y qui, sur la ligne $z_0 z_1$, sont des fonctions continues de t. Donc, le long de cette ligne, U'_i est une fonction continue de t. Il en est de même pour U''_i et, par suite, pour $|U''_i - U'_i|$.

La quantité t, variant de 0 à 1, parcourt un domaine d'un seul tenant. Donc $|U''_i - U'_i|$ jouit de la même propriété. Or U'_i, U''_i sont, en chaque point z, des racines de l'équation $f(u, z) = 0$. On a donc, ou $|U''_i - U'_i| = 0$ si ces racines sont identiques, ou $|U''_i - U'_i| \geqq \nu$ si elles sont différentes.

Ce dernier cas ne peut se présenter, car, $|U''_i - U'_i|$ étant nul au point z_0 et ne pouvant prendre les valeurs intermédiaires entre 0 et ν, l'ensemble de ses valeurs ne serait pas d'un seul tenant.

Cela posé, considérons une fonction U_i égale à U'_i dans l'intérieur de $\mathfrak{P}'$ et sur sa frontière, à U''_i dans l'intérieur de $\mathfrak{P}''$ et sur sa frontière. Cette fonction sera évidemment continue dans l'intérieur de $\mathfrak{P}$.

En faisant successivement $i = 1, \ldots, n$, on aura les n fonctions demandées.

On peut, au moyen de ce lemme, ramener la démonstration du théorème au cas où le contour $\mathfrak{C}$ est contenu en entier dans un cercle de rayon $< \varepsilon$ décrit autour d'un de ses points comme centre, ε étant une quantité que nous pourrons choisir aussi petite que nous voudrons.

On peut, en effet, au moyen de diagonales, décomposer l'intérieur de $\mathfrak{C}$ en une suite de triangles $T_1, T_2, \ldots,$ ayant chacun un côté commun avec le suivant. Si le théorème est vrai pour chaque triangle, il le sera pour le quadrilatère formé par T_1 et T_2, puis pour le pentagone formé par T_1, T_2, T_3, et ainsi de suite.

Considérons donc un de ces triangles T. On peut le décomposer par une série de parallèles à la base, distantes les unes des autres de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$, en une série de tranches; il suffira d'établir le thèorème pour chacune d'elles.

Subdivisons enfin la tranche considérée par des perpendiculaires à la base, distantes de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$; on la partagera ainsi en éléments, dont chacun sera un carré de côté $\frac{\varepsilon}{2}$ ou une partie d'un semblable carré; et il suffira d'établir la propriété pour chacun de ces éléments et, *a fortiori*, de l'établir pour un cercle de rayon ε ayant son centre en un point de cet élément, car l'élément tout entier lui sera intérieur.

222. Or on sait, par la démonstration que nous avons donnée pour l'existence des fonctions implicites (193), que, pour tout point z_0 du domaine $\mathfrak{C}$ et pour toute racine u_i^0 de l'équation $f(u, z_0) = 0$, on peut déterminer un nombre ρ_i tel que, dans un cercle de rayon ρ_i décrit autour de z_0 comme centre, il existe une fonction U_i de la variable complexe z, satisfaisant à l'équation $f(u, z) = 0$ et se réduisant à u_i^0 pour $z = z_0$.

On pourra donc déterminer une quantité ρ telle que, dans un cercle K de rayon ρ décrit de z_0 comme centre, il existe n fonctions $U_1, \ldots, U_n$ de la variable complexe z, satisfai-

sant à l'équation $f(u, z) = 0$. Il suffira pour cela de prendre ρ égal à la plus petite des n quantités $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

Il est clair que, si cette propriété appartient à un cercle K, elle appartiendra *a fortiori* à tout domaine contenu dans ce cercle.

Si donc il existe un point z_0, tel que cette propriété appartienne à tout cercle décrit de ce point comme centre, quel que soit son rayon, on n'aura qu'à prendre ce rayon assez grand pour en conclure que cette propriété appartient au domaine E, ce qu'il s'agit de démontrer.

Dans le cas contraire, les rayons des cercles décrits autour de z_0 et jouissant de la propriété demandée admettront un maximum r fini, mais différent de zéro. Aucun cercle de rayon $> r$ ne jouira de la propriété demandée; mais tout cercle de rayon $r - \lambda$ en jouira, quelque petit que soit λ.

A chaque point $z = x + iy$ de E correspond ainsi un nombre r unique et déterminé, lequel sera une fonction de x, y.

Cette fonction est continue. Soient, en effet, r et r' ses valeurs pour deux points voisins z et $z + h$. Décrivons de $z + h$ comme centre un cercle de rayon $r - \lambda - |h|$. Ce cercle sera contenu dans le cercle de rayon $r - \lambda$ décrit autour de z. On pourra donc y déterminer les n fonctions $U_1, \ldots, U_n$; donc son rayon ne pourra surpasser r', et l'on aura

$$r' \geqq r - \lambda - |h|,$$

et, en faisant tendre λ vers zéro,

$$r' \geqq r - |h|.$$

On trouvera de même

$$r \geqq r' - |h|.$$

Donc $|r' - r|$ sera $\leqq |h|$ et tendra vers zéro avec h.

La fonction r étant continue, toujours positive, admet dans E un minimum ε qu'elle atteint, et qui sera nécessairement > 0. La détermination des fonctions $U_1, \ldots, U_n$ pourra

donc se faire dans tout cercle de rayon $< \varepsilon$, quel que soit le point de E qui sert de centre; ce que nous voulions démontrer.

On voit, en outre, par cette analyse, que les fonctions $U_1, \ldots, U_n$ sont des fonctions synectiques de z et que leur dérivée en chaque point est donnée par la formule

$$\frac{dU_i}{dz} = -\frac{\dfrac{\partial f(U_i, z)}{\partial z}}{\dfrac{\partial f(U_i, z)}{\partial U_i}}.$$

223. L'une quelconque U_i des n fonctions dont l'existence vient d'être établie est entièrement définie dans E par la connaissance de sa valeur initiale u_i^0. Proposons-nous de calculer la valeur v_i qu'elle prend en un autre point ζ de E. Nous savons déjà que v_i est une des n racines de l'équation $f(u, \zeta) = 0$; mais il nous faut assigner un caractère qui permette de la distinguer des autres.

A cet effet, traçons dans E une ligne rectifiable quelconque L joignant les points z_0 et ζ; soit l la longueur de cette ligne. En intégrant la dérivée $\frac{dU_i}{dz}$ le long de cette ligne, on aura (202)

$$v_i - u_i^0 = \int_{z_0}^{\zeta} \frac{dU_i}{dz} dz,$$

et, comme $\left|\frac{dU_i}{dz}\right|$ est au plus égal à ϖ, on en déduit

$$|v_i - u_i^0| \leqq \varpi l.$$

Si $l < \frac{\nu}{2\varpi}$, cette inégalité suffira pour distinguer la racine v_i des autres racines de $f(u, \zeta) = 0$. Car soit v_k une de celles-ci, on aura

$$|v_i - v_k| \geqq \nu > 2\varpi l$$

et par suite

$$|v_k - u_i^0| \geqq |v_k - v_i| - |v_i - u_i^0| > \varpi l.$$

Si $l \overline{\gtrless} \frac{\nu}{2\varpi}$, on partagera L par des points de division intermédiaires $z_1, z_2, \ldots$ en arcs dont chacun soit $< \frac{\nu}{2\varpi}$, et l'on calculera successivement les valeurs que prend U_i en chacun des points $z_1, z_2, \ldots, \zeta$.

224. Soit maintenant

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

une ligne continue quelconque L ne passant par aucun point critique, et soient $z_0 = x_0 + iy_0$, $\zeta = \xi + i\eta$ les extrémités de cette ligne, t_0 et τ les valeurs correspondantes de t. On pourra déterminer pour chaque valeur de l'indice i, et d'une seule manière, une fonction continue u_i de la variable t, satisfaisant tout le long de L à l'équation

$$0 = f(u, z) = f[u, \varphi(t) + i\psi(t)]$$

et se réduisant à u_i^0 pour $t = t_0$.

En effet, supposons d'abord que L soit contenu en entier dans le domaine E formé par les points non extérieurs à un contour C fermé, continu, sans point multiple et laissant à son extérieur tous les points critiques. On peut déterminer dans ce domaine, comme on l'a vu, une fonction U_i, continue par rapport à x, y, satisfaisant à l'équation $f(u, z) = 0$ et se réduisant à u_i^0 pour $z = z_0$. Le long de la ligne L, x, y sont des fonctions continues de t. Les valeurs successives de U_i le long de cette ligne fourniront donc une fonction u_i de la variable t satisfaisant à l'énoncé.

Cette fonction est unique. En effet, s'il existait une autre fonction v_i de même nature, $|u_i - v_i|$ serait une fonction continue de t. Les valeurs de t comprises entre t_0 et τ formant un ensemble d'un seul tenant, il en est de même des valeurs correspondantes de $|u_i - v_i|$. D'ailleurs, u_i et v_i étant des racines de l'équation $f(u, z) = 0$, $|u_i - v_i|$ sera nul ou $\overline{\gtrless} \nu$ suivant que ces racines seront identiques ou non (219). Enfin, cette expression est nulle pour $z = z_0$; donc elle

devra l'être tout le long de L, pour que l'ensemble de ses valeurs soit d'un seul tenant.

Remarquons d'ailleurs que la valeur finale de u_i au point ζ ne sera autre chose que la valeur que prend en ce point la fonction U_i. Cette valeur finale resterait donc la même si l'on remplaçait la ligne L par toute autre ligne continue L′ ayant les mêmes extrémités, et également contenue dans E.

Supposons au contraire qu'il n'existe aucun contour de l'espèce C dans l'intérieur duquel la ligne L soit contenue tout entière. On pourra tout au moins décomposer cette ligne en arcs partiels dont chacun soit renfermé dans un semblable contour.

Soient en effet t', t'' deux des valeurs de t; z', z'' les valeurs correspondantes de z. On sait qu'on peut, quelle que soit la quantité ε, déterminer une autre quantité δ telle que l'on ait toujours

$$|z''-z'|<\varepsilon, \quad \text{si} \quad |t''-t'|<\delta.$$

Prenons pour ε une quantité moindre que la plus courte distance de L au point critique le plus voisin. Si nous subdivisons l'intervalle $t_0\tau$ par des points intercalaires t_1, t_2, ... en intervalles $t_0t_1, \ldots, t_kt_{k+1}, \ldots$ d'étendue $<\delta$, tous les points de l'arc z_kz_{k+1}, par exemple, auront des distances mutuelles $<\varepsilon$. Ils seront donc contenus en entier dans un cercle C_k de rayon ε décrit autour de l'un d'eux, lequel cercle laissera à son extérieur tous les points critiques.

Cela posé, il existe le long de l'arc t_0t_1 une fonction continue de t satisfaisant à $f(u, z)=0$ et prenant pour $t=t_0$ la valeur initiale u_i^0; on pourra déterminer sa valeur finale u_i^1 pour $t=t_1$. Il existe de même le long de t_1t_2 une fonction analogue ayant pour $t=t_1$ la valeur initiale u_i^1; et l'on pourra déterminer sa valeur finale u_i^2 pour $t=t_2$. Continuant ainsi et réunissant ces fonctions successivement obtenues, on constituera une fonction u_i définie tout le long de L; sa valeur finale v_i sera une racine déterminée de l'équation $f(u, \zeta)=0$.

On voit par cette analyse que, lorsque z décrit la ligne L, les racines de l'équation $f(u, z) = 0$ varient chacune d'une manière continue, et passent des valeurs initiales $u_1^0, \ldots, u_n^0$ aux valeurs finales $v_1, \ldots, v_n$.

Il est clair que si z décrivait L en sens contraire, de ζ à z_0, ces racines repasseraient chacune par la même série de valeurs et reviendraient respectivement de $v_1, \ldots, v_n$ à $u_1^0, \ldots, u_n^0$.

225. Supposons que z, au lieu de décrire la ligne L, suive une autre ligne L', joignant également z_0 à ζ. Les racines de l'équation $f(u, z) = 0$, variant d'une manière continue, passeront des valeurs initiales $u_1^0, \ldots, u_n^0$ à des valeurs finales $v'_1, \ldots, v'_n$. Ces nouvelles valeurs seront, comme $v_1, \ldots, v_n$, les racines de l'équation $f(u, \zeta) = 0$. Elles seront donc identiques à ces dernières, *à l'ordre près*. Si cet ordre est le même, nous dirons que les deux *chemins* L et L' sont *équivalents;* mais on conçoit que cet ordre puisse au contraire être changé, et nous verrons plus tard qu'en prenant pour valeur initiale une racine donnée u_i^0 de $f(u, z_0) = 0$, et choisissant convenablement la ligne L', on peut obtenir comme valeur finale l'une quelconque des racines de $f(u, \zeta) = 0$.

226. On peut, comme on va le voir, réduire un chemin quelconque allant de z_0 à ζ à un chemin type qui lui soit équivalent.

Désignons par L un chemin fixe choisi à volonté de z_0 à ζ; par L^{-1} le même chemin décrit en sens contraire de ζ à z_0; un autre chemin quelconque L' allant de z_0 à ζ sera équivalent au chemin $L'L^{-1}L$.

En effet, lorsque z parcourt L', u_i passera de la valeur initiale u_i^0 à une valeur finale v; lorsque z parcourt ensuite L^{-1}, u_i passera de la valeur v à une valeur u^0; il repassera de u^0 à v lorsque z parcourra L. La valeur finale sera donc la même que si l'on s'était borné à faire le premier trajet L'.

Or $L'L^{-1}$ est un contour fermé ramenant z à sa valeur initiale z_0.

Donc *tout chemin tracé de z_0 à ζ équivaut à un contour fermé* $L'L^{-1} = C$ *suivi du chemin* L. Il ne nous reste donc qu'à étudier la réduction des contours fermés.

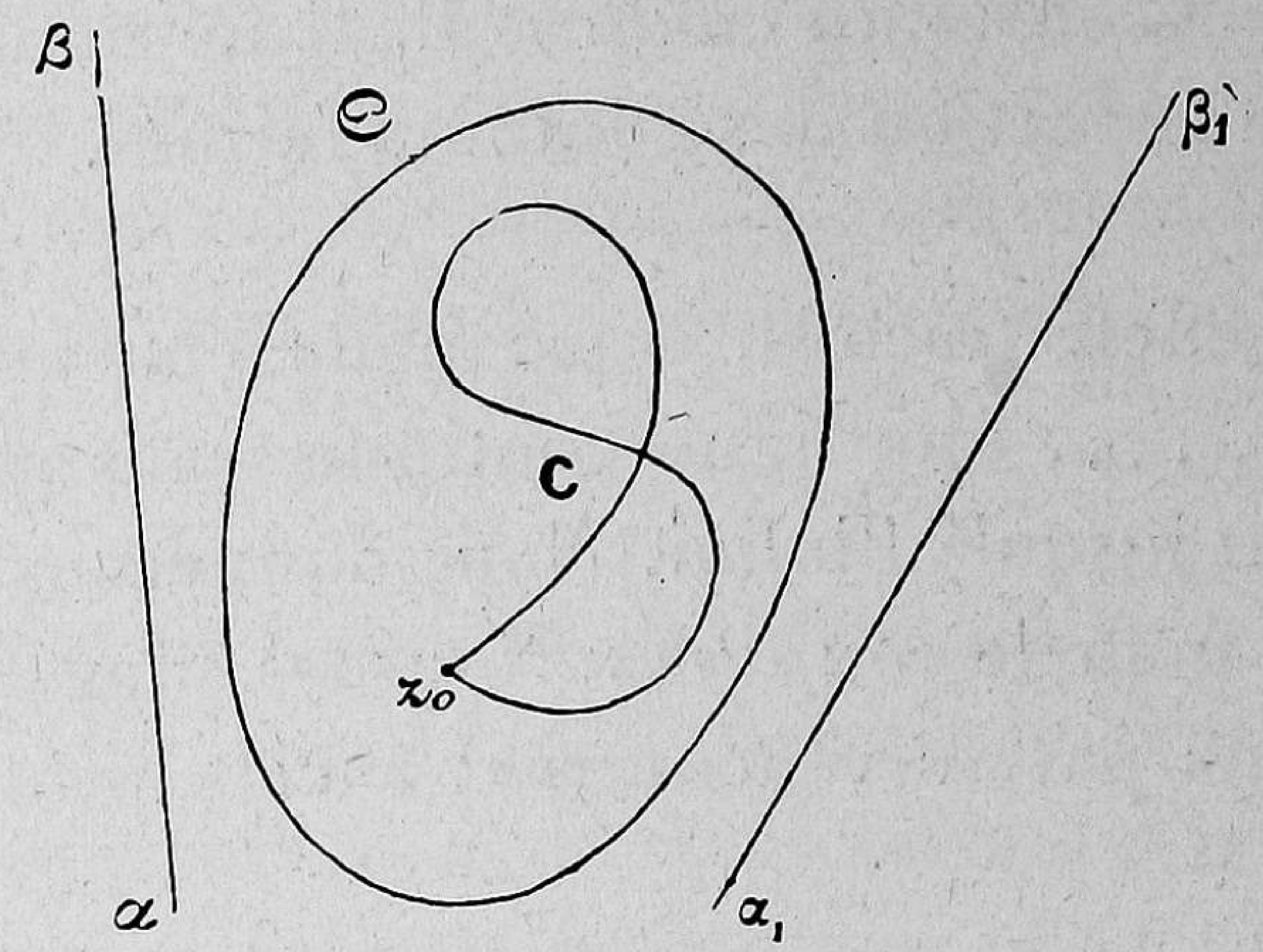
227. A cet effet, traçons, à partir de chacun des points critiques α, α_1, ..., une ligne continue, sans points multiples, s'étendant jusqu'à l'infini. Nous donnerons à ces lignes $\alpha\beta$, $\alpha_1\beta_1$, ... le nom de *coupures*. Nous les supposons menées de manière à ne pas se rencontrer; à cela près, leur tracé est arbitraire.

Il est permis d'admettre que le contour C à étudier ne rencontre ces coupures qu'en un nombre limité de points. En effet, on peut, si cela est utile, choisir pour coupures des lignes droites. D'autre part, si nous décomposons, comme au n° **224**, la ligne C en arcs $z_0 z_1$, ..., $z_k z_{k+1}$, ... assez petits pour que chacun d'eux, tel que $z_k z_{k+1}$, soit contenu dans un cercle C_k ne contenant aucun point critique, les valeurs de u_i aux points successifs z_0, z_1, ... et enfin sa valeur finale seront évidemment les mêmes, qu'on suive la courbe C ou le polygone inscrit $P = z_0 z_1 \ldots$. Ce contour polygonal est donc équivalent à C et peut lui être substitué au besoin. Or ce nouveau contour ne peut rencontrer les coupures qu'en un nombre limité de points.

228. Cela posé, si C ne traverse aucune coupure, on pourra (*fig.* 4) l'envelopper par un contour fermé $\mathfrak{C}$ sans point multiple dont la distance à C soit partout moindre que celle de C à la coupure la plus voisine, et ce contour $\mathfrak{C}$ ne contiendra évidemment aucun point critique. Soit U_i la fonction de z déterminée dans $\mathfrak{C}$ par l'équation $f(u, z) = 0$ et la valeur initiale u_i^0 pour $z = z_0$; u_i étant égal tout le long de C à U_i, qui n'a qu'une valeur en chaque point de l'intérieur de $\mathfrak{C}$, reviendra à sa valeur initiale en même temps que z. Le contour C est donc équivalent à zéro.

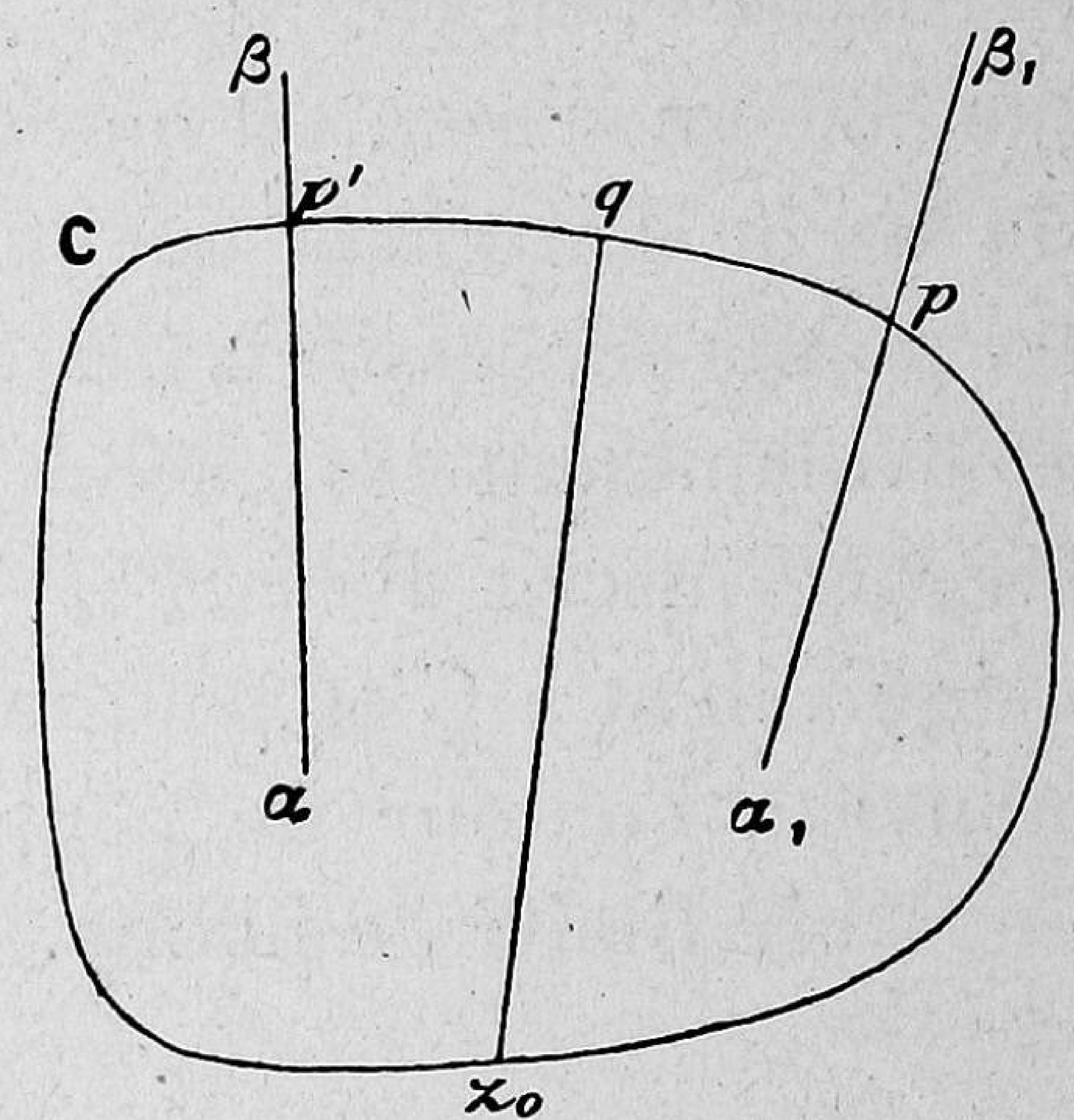
Si C traverse m fois les coupures, il équivaut à m contours successifs, dont chacun les traverse une fois seulement. En

Fig. 4.



effet, soient p (*fig.* 5) le premier point d'intersection qu'on rencontre en suivant le contour C; p' le second; q un point

Fig. 5.



de C intermédiaire entre p et p'. Joignons q à z_0 par une ligne qui ne traverse aucune coupure. Le contour

$$C = z_0 p q p' z_0$$

équivaut évidemment au suivant,

$$z_0 p q . q z_0 q . q p' z_0,$$

lequel se compose :

1° Du contour fermé $C_1 = z_0 p q z_0$ qui ne traverse les coupures qu'au seul point p;

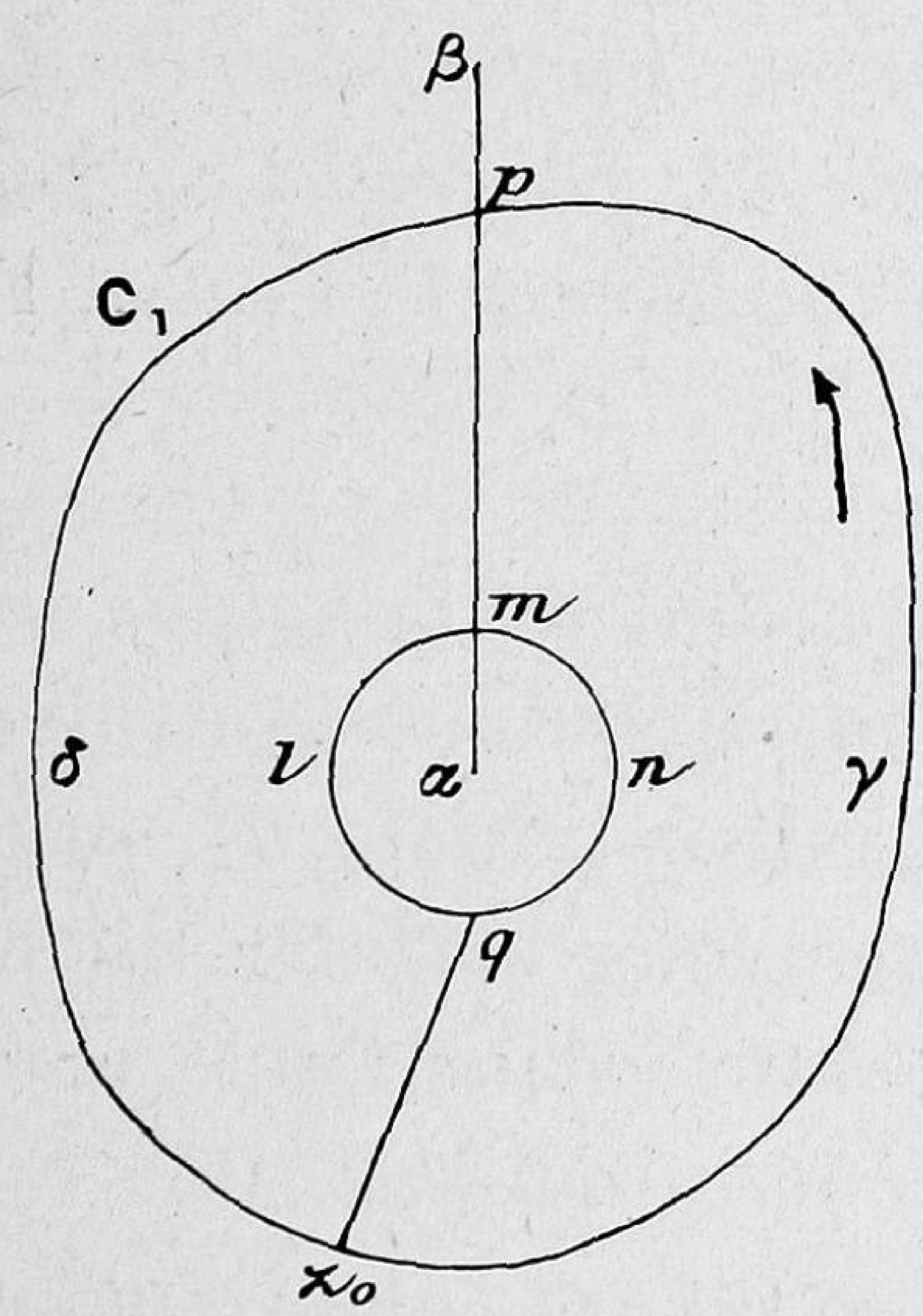
2° Du contour fermé $C' = z_0 q p' z_0$, qui ne les traverse que $m - 1$ fois.

Si $m > 2$, on appliquera à C' une décomposition analogue et l'on arrivera enfin à montrer que C est équivalent à $C_1 C_2 \ldots C_m$, les contours $C_1, \ldots, C_m$ ne traversant chacun les coupures qu'en un seul point.

229. Considérons un de ces derniers contours C_1, traversant en un point p la coupure $\alpha\beta$ correspondant au point critique α. Traçons autour du point α un cercle d'un rayon arbitraire assez petit pour laisser à son extérieur tous les autres points critiques.

Joignons ce cercle au point z_0 par une ligne déterminée $q z_0$

Fig. 6.



qui ne traverse aucune coupure, mais qui peut être choisie, d'ailleurs, arbitrairement.

Supposons le contour C_1 décrit dans le sens de la flèche. La portion $z_0 \gamma p$ de ce contour est évidemment équivalente à $z_0 q n m p$; car on peut envelopper le système de ces deux lignes par un contour ne contenant aucun point critique. Par la même raison, $p\,\delta z_0$ est équivalent à $p m l q z_0$. Donc, le contour total C_1 équivaut au contour $z_0 q n m p m l q z_0$ ou, en

supprimant dans ce dernier la ligne mp, décrite deux fois de suite en sens contraire, au contour $z_0 qnmlqz_0$.

Ce dernier contour, formé de la ligne $z_0 q$, du cercle $qnmlq$ et de la ligne de retour qz_0, est entièrement déterminé. Nous l'appellerons le *contour élémentaire* (ou le *lacet*) correspondant au point critique α.

Si le contour C_1 était décrit dans un sens contraire à celui que nous avons supposé, il serait équivalent au même lacet, décrit en sens inverse.

Nous avons donc ce théorème :

Soit L *une ligne déterminée joignant* z_0 *à* ζ; *soient d'autre part* Γ, Γ_1, ... *les lacets correspondant aux divers points critiques* α, α_1, ..., *ces lacets étant décrits dans le sens direct, c'est-à-dire de manière que dans le mouvement on laisse à sa gauche l'intérieur du petit cercle;* Γ^{-1}, Γ_1^{-1}, ... *les mêmes lacets, décrits dans le sens rétrograde. Tout chemin* L$'$, *joignant* z_0 *à* ζ, *sera équivalent à une combinaison des lacets* Γ, Γ_1, ..., Γ^{-1}, Γ_1^{-1}, ... *suivie du chemin* L.

230. Lorsque z, partant de la valeur initiale z_0, parcourt un lacet Γ (ou tout autre contour équivalent), la fonction u_i, qui correspond à la valeur initiale u_i^0, prendra une suite de valeurs que nous pouvons calculer de proche en proche; nous trouverons comme valeur finale une quantité u_k^0, qui sera, comme la valeur initiale u_i^0, une racine de l'équation $f(u, z_0) = 0$. En faisant un calcul analogue pour chacune des racines u_i^0 prise comme valeur initiale, on retrouvera, comme valeurs finales, la même série de quantités, dans le même ordre ou dans un ordre différent.

Le même contour, décrit dans le sens rétrograde, conduira réciproquement de la valeur initiale u_k^0 à la valeur finale u_i^0.

Supposons qu'on ait fait tous les calculs nécessaires pour établir la correspondance entre les valeurs initiales et les valeurs finales des u_i pour chaque valeur de i et pour chacun des lacets Γ, Γ_1, ...

Supposons qu'on ait fait également les calculs nécessaires pour déterminer la valeur finale v_i que chaque fonction u_i prend au point ζ lorsque z parcourt la ligne L.

On pourra dès lors, sans nouveau calcul, déterminer la valeur finale de u_i, lorsqu'on se rend de z_0 à ζ suivant une ligne quelconque L'. En effet, on voit immédiatement, à la seule inspection de la figure, quelle est la combinaison de lacets qui, suivie du chemin L, équivaut à L'.

Supposons, par exemple, que L' soit équivalent à $\Gamma\Gamma_1$L.

On sait, par les calculs précédents, que, lorsque z parcourt Γ, la fonction à étudier passe de la valeur initiale u_i^0 à une valeur finale connue u_k^0. On sait de même que, lorsque z parcourt ensuite Γ_1, la fonction définie par la valeur initiale u_k^0 acquiert une valeur finale connue u_l^0. Enfin, lorsque z parcourra L, la fonction passera de la valeur initiale u_l^0 à la valeur finale v_l.

231. Désignons par E l'ensemble de tous les points du plan à l'exclusion des coupures. Soient z_0 un point fixe et ζ un autre point quelconque, tous deux situés dans ce domaine. Lorsque z se rend de z_0 à ζ sans sortir de ce domaine, celle des racines de l'équation $f(u, z) = 0$, dont la valeur initiale était u_i^0, prendra en ζ une valeur finale v_i, racine de l'équation $f(u, \zeta) = 0$, et indépendante du chemin suivi par z. Il résulte d'ailleurs de l'analyse précédente que v_i est une fonction synectique de ζ. On voit donc qu'il existe, dans le domaine E, n fonctions synectiques $U_1, \ldots, U_n$ de z, satisfaisant à l'équation $f(u, z) = 0$ et caractérisées chacune par la valeur qu'elle prend pour $z = z_0$.

Mais ces fonctions, nettement séparées dans le domaine E, cessent de l'être si z devient libre de traverser les coupures (sans toutefois passer par les points critiques). Supposons, en effet, qu'en décrivant le contour élémentaire correspondant à la coupure $\alpha\beta$, par exemple, u passe de la valeur initiale u_i^0 à la valeur finale u_k^0. Si z se rend de z_0 à ζ par un chemin qui traverse la coupure $\alpha\beta$, u passera de la

valeur initiale u_i^0 à une valeur finale qui ne sera plus v_i, mais v_k.

Si donc z n'est assujetti dans sa variation à aucune restriction (sauf celle de ne pas passer par les points critiques), nous devrons considérer les fonctions $U_1, \ldots, U_n$ comme appartenant à un même système analytique, que nous appellerons la *fonction algébrique* u définie par l'équation $f(u, z) = 0$; à chaque valeur de z correspondront n valeurs différentes de u.

Nous dirons que $U_1, \ldots, U_n$ sont les *branches* ou les *déterminations* de cette fonction dans le domaine de E.

Cette répartition des valeurs de la fonction algébrique u sur des branches distinctes $U_1, \ldots, U_n$ synectiques dans le domaine E a l'avantage de permettre l'application des théorèmes établis précédemment pour les fonctions synectiques. Mais cette distinction est artificielle; car elle dépend du tracé des coupures, qui est arbitraire.

V. — Transcendantes élémentaires.

232. Les transcendantes les plus simples sont celles auxquelles on se trouve conduit en cherchant à intégrer les fractions rationnelles.

Une semblable fraction est une somme de termes entiers tels que Az^m et de fractions simples telles que $\frac{A}{(z-a)^n}$.

Or Az^m est la dérivée de $\frac{Az^{m+1}}{m+1}$. La forme générale de ses intégrales sera donc

$$\frac{Az^{m+1}}{m+1} + \text{const.}$$

C'est un polynome entier.

D'autre part, si $n > 1$, $\frac{A}{(z-a)^n}$ est évidemment la dérivée de $\frac{A}{(1-n)(z-a)^{n-1}}$; et la forme générale de ses intégrales

sera

$$\frac{A}{(1-n)(z-a)^{n-1}} + \text{const.},$$

expression rationnelle.

Il reste à trouver les fonctions primitives des fractions simples de la forme $\frac{A}{z-a}$.

233. Logarithme. — Supposons qu'on ait trouvé une fonction primitive $f(z)$ de la fonction $\frac{1}{z}$. Les fonctions primitives de $\frac{A}{z-a}$ seront évidemment

$$Af(z-a) + \text{const.}$$

On n'a donc qu'à chercher une fonction $f(z)$ ayant pour dérivée $\frac{1}{z}$ et satisfaisant par suite à l'équation

$$df = \frac{dz}{z}.$$

La fonction $\frac{1}{z}$ étant synectique dans tout le plan, à l'exception du point critique $z = 0$, nous savons d'avance (202) que, dans l'intérieur de tout contour fermé C qui n'enveloppe pas ce point, on pourra déterminer des fonctions synectiques f satisfaisant à cette équation.

Pour obtenir l'expression de ces fonctions, désignons par ρ le module de z, par φ l'un de ses arguments, de telle sorte qu'on ait

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Changeant ρ et φ en $\rho + d\rho$, $\varphi + d\varphi$, il viendra

$$dz = d\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \rho\, d\varphi(-\sin\varphi + i\cos\varphi),$$

d'où

$$df = \frac{dz}{z} = \frac{d\rho}{\rho} + i\,d\varphi = d\,\text{Log}\rho + i\,d\varphi$$

et par suite

$$f = \text{Log}\rho + i\varphi + \text{const.}$$

Supposons la constante nulle ; nous aurons

$$f = \operatorname{Log}\rho + i\varphi. \tag{1}$$

La quantité z a une infinité d'arguments ; φ' désignant l'un d'eux, leur formule générale sera

$$\varphi = \varphi' + 2k\pi,$$

k étant un entier positif ou négatif.

L'expression $\operatorname{Log}\rho + i\varphi$, trouvée ci-dessus, admet donc pour chaque valeur de z une infinité de valeurs

$$\operatorname{Log}\rho + i(\varphi' + 2k\pi).$$

On les nomme les *logarithmes* de z, et on les représente par $\log z$.

En donnant successivement à φ les diverses valeurs dont il est susceptible, on obtiendra une infinité de fonctions distinctes

$$f_0 = \operatorname{Log}\rho + i\varphi',$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$f_k = \operatorname{Log}\rho + i(\varphi' + 2k\pi),$$

dont chacune sera synectique à l'intérieur de C.

Cela posé, par le point critique $z = 0$, traçons une coupure arbitraire (par exemple, une demi-droite faisant un angle donné λ avec l'axe des x), et considérons le domaine formé par tous les points du plan, à l'exclusion de cette coupure.

Soit z un point de ce domaine, et prenons pour φ' celui de ses arguments qui est compris entre λ et $\lambda - 2\pi$. Il est clair que ρ et φ' sont entièrement déterminés en chaque point z.

Chacune des fonctions f_k a donc une valeur unique et déterminée pour chaque valeur de z ; elle a d'ailleurs pour dérivée $\frac{1}{z}$, qui est continue ; elle est donc synectique.

Mais il en est autrement si l'on cesse d'astreindre z à ne pas traverser la coupure. Supposons, en effet, que z décrive dans le sens direct un contour fermé sans point multiple

entourant le point critique $z = 0$. Lorsqu'il reviendra à sa valeur initiale z_0, son argument se sera accru de 2π et, au lieu de la valeur initiale

$$f_k = \operatorname{Log}\rho_0 + i(\varphi'_0 + 2k\pi),$$

on aura comme valeur finale

$$f_{k+1} = \operatorname{Log}\rho_0 + i[\varphi'_0 + 2(k+1)\pi].$$

Donc $f_0, \ldots, f_k, \ldots$ considérées dans tout le plan (à l'exclusion du point critique $z = 0$) ne sont pas des fonctions distinctes, mais des branches d'une même fonction, qu'on représente par $\log z$.

Ces branches se permutent circulairement par une rotation autour du point $z = 0$.

234. Soient

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

d'où

$$\log z = \operatorname{Log}\rho + i\varphi, \qquad \log z_1 = \operatorname{Log}\rho_1 + i\varphi_1.$$

On en déduit

$$\log z + \log z_1 = \operatorname{Log}\rho + \operatorname{Log}\rho_1 + i(\varphi + \varphi_1) = \operatorname{Log}\rho\rho_1 + i(\varphi + \varphi_1).$$

Or $\rho\rho_1$ est le module, et $\varphi + \varphi_1$ l'un des arguments de zz_1. Donc le second membre de cette équation est l'un des logarithmes de zz_1. Les autres ne diffèrent de celui-là que de multiples entiers de $2\pi i$. On aura donc

$$\log z + \log z_1 = \log zz_1 + 2k\pi i, \tag{2}$$

l'entier k dépendant du logarithme choisi.

235. Exponentielle. — Nous désignerons par e^z la fonction inverse de $\log z$, définie par l'équation

$$\log u = z.$$

Soit $z = x + iy$, $u = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. On aura, pour

déterminer ρ et φ, les équations

$$\operatorname{Log}\rho = x, \qquad y = \varphi.$$

La première équation donne $\rho = e^x$, e^x désignant la fonction de x inverse de $\operatorname{Log} x$, et définie au n° **116**. On aura, par suite,

$$e^z = u = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{3}$$

Cette fonction est synectique dans tout le plan. Elle prend toutes les valeurs possibles, zéro excepté. Quand x tend vers $-\infty$, elle tend vers o. Quand x tend vers $+\infty$, elle tend vers ∞, mais de telle sorte que son argument y reste indéterminé. Enfin, si x restant fini y tend vers ∞, elle ne tend nécessairement vers aucune limite déterminée.

Elle a d'ailleurs pour dérivée

$$\frac{1}{(\log u)'} = u = e^z;$$

donc

$$(e^z)' = e^z. \tag{4}$$

Soient

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x_1 + iy_1;$$

on aura

$$e^z e^{z_1} = e^{x+x_1}[\cos(y + y_1) + i\sin(y + y_1)] = e^{z+z_1}. \tag{5}$$

Remarquons enfin qu'on a

$$\left\{\begin{aligned} e^{\pi i} &= \cos\pi + i\sin\pi = -1, \\ e^{2\pi i} &= \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$e^{z+k\pi i} = e^z e^{k\pi i} = (-1)^k e^z. \tag{7}$$

Donc e^z ne change pas quand on accroît z d'un multiple de $2\pi i$; on énonce cette propriété en disant que la fonction est *périodique* et que sa période est $2\pi i$.

236. Puissances. — Nous définirons l'expression z^m, z et m désignant deux nombres complexes quelconques, dont le

premier n'est pas nul, par l'équation

$$z^m = e^{m \log z}.$$

Soient $m = \alpha + \beta i$, $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$; il viendra

$$z^m = e^{(\alpha+\beta i)\,[\operatorname{Log}\rho + i(\varphi+2k\pi)]}$$
$$= e^{\alpha \operatorname{Log}\rho - \beta(\varphi+2k\pi) + i\,[\beta \operatorname{Log}\rho + \alpha(\varphi+2k\pi)]}.$$

Le module M et l'argument Φ de z^m seront donc donnés par les formules

$$M = e^{\alpha \operatorname{Log}\rho - \beta(\varphi+2k\pi)}, \tag{8}$$

$$\Phi = \beta \operatorname{Log}\rho + \alpha(\varphi + 2k\pi) + 2k'\pi. \tag{9}$$

Si β n'est pas nul, à chaque valeur de k correspondra une valeur différente de M, et z^m aura une infinité de valeurs distinctes.

Si $\beta = 0$, M n'a plus qu'une seule valeur; toutefois, si α est irrationnel, aux diverses valeurs de k correspondront autant de valeurs de Φ, ne différant pas les unes des autres de multiples de 2π, et fournissant par suite autant de valeurs distinctes pour z^m.

Si, au contraire, α est un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, deux valeurs de k qui diffèrent de multiples de q donneront la même valeur pour z^m. Cette expression n'aura donc que q valeurs distinctes, correspondant à $k = 0, 1, \ldots, q-1$.

Dans ce cas, l'expression $z^m = u$ sera racine de l'équation algébrique

$$u^q = z^p;$$

car, en élevant les deux membres de l'équation

$$u = z^m = e^{\frac{p}{q}\log z}$$

à la puissance q, il viendra

$$u^q = e^{p \log z}.$$

Or, si p est positif, le second membre de cette équation est

le produit de p facteurs égaux à $e^{\log z}$ ou à z; si p est un nombre négatif $-p'$, ce sera le produit de p' facteurs égaux à $\frac{1}{z}$.

Lorsque m est réel et z positif, l'un des logarithmes de z, $\operatorname{Log} z$, est réel, et l'une des valeurs de z^m, $e^{m \operatorname{Log} z}$, est réelle.

237. On a, ρ étant le module et φ l'un des arguments de z,

$$\log z = \operatorname{Log} \rho + i\varphi + 2k\pi i$$

et, par suite,

$$z^m = e^{2mk\pi i} e^{m(\operatorname{Log} \rho + i\varphi)}. \tag{10}$$

1° Soit z' une autre quantité ayant le module ρ' et un argument φ'; on aura de même

$$z'^m = e^{2mk'\pi i} e^{m(\operatorname{Log} \rho' + i\varphi')},$$

$$(zz')^m = e^{2mk''\pi i} e^{m[\operatorname{Log} \rho\rho' + i(\varphi+\varphi')]};$$

d'où

$$z^m z'^m = (zz')^m e^{2m\mathrm{K}\pi i}, \tag{11}$$

K étant un entier, égal à $k + k' - k''$.

2° On aura, d'autre part,

$$z^{m'} = e^{2m'k'\pi i} e^{m'(\operatorname{Log} \rho + i\varphi)},$$

$$z^{m+m'} = e^{2(m+m')k''\pi i} e^{(m+m')(\operatorname{Log} \rho + i\varphi)};$$

d'où

$$z^m z^{m'} = z^{m+m'} e^{2\pi i[m(k-k'')+m'(k'-k'')]}. \tag{12}$$

3° Enfin z^m aura, pour l'un de ses logarithmes,

$$2mk\pi i + m(\operatorname{Log} \rho + i\varphi).$$

Donc

$$(z^m)^{m'} = e^{m' \log z^m} = e^{2m'k'\pi i} e^{2mm'k\pi i + mm'(\operatorname{Log} \rho + i\varphi)}.$$

D'ailleurs,

$$z^{mm'} = e^{2mm'k''\pi i} e^{mm'(\operatorname{Log} \rho + i\varphi)}.$$

Donc, enfin,

$$(z^m)^{m'} = z^{mm'} e^{[(k-k'')m+k']2m'\pi i}. \tag{13}$$

238. Supposons z variable ; l'expression

$$u = z^m = e^{m \log z}$$

sera une fonction de fonction de z qu'il est aisé d'étudier.

Traçons, à partir de l'origine des coordonnées, une coupure rectiligne, faisant l'angle λ avec l'axe des x. Dans tout le reste du plan, les diverses valeurs de $\log z$ peuvent être réparties en branches synectiques : u, étant déterminé sans ambiguïté en fonction de $\log z$, jouira de la même propriété. Si l'on adopte, pour φ, celui des arguments de z qui est $> \lambda$, mais $< 2\pi + \lambda$, ces diverses branches correspondront aux diverses valeurs qu'on peut donner à l'entier k dans la formule (10).

Il est aisé de voir comment ces diverses branches se permutent entre elles lorsque z décrit un contour fermé entourant le point critique o. Supposant ce contour suivi dans le sens direct, le module de z reviendra à sa valeur initiale ; mais son argument se sera accru de 2π. On aura donc passé de la valeur initiale

$$u_k = e^{2mk\pi i} e^{m(\text{Log}\,\rho + i\varphi)}$$

à la valeur finale

$$e^{2m\pi i} u_k = u_{k+1}.$$

239. La dérivée de z^m se trouvera en dérivant l'équation qui définit cette fonction. On trouve ainsi

$$(z^m)' = e^{m \log z} \frac{m}{z}.$$

Mais

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = e^{-\log z};$$

donc

$$(z^m)' - me^{(m-1)\log z}.$$

Cette expression peut s'écrire

$$(z^m)' = mz^{m-1}, \tag{14}$$

à la condition d'adopter, pour le calcul de z^{m-1}, la même valeur de $\log z$ que pour celui de z^m.

240. Cherchons enfin si z^m tend vers une limite lorsque z tend vers zéro ou vers ∞.

Posons

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad m = \alpha + \beta i;$$

le module M et l'argument Φ de z^m seront donnés par les formules (8) et (9).

Si β n'est pas nul, il est clair que, de quelque manière que ρ varie, on peut faire varier simultanément φ de telle sorte que M prenne une suite de valeurs entièrement arbitraire; donc z^m ne tendra vers aucune limite déterminée.

Supposons, au contraire, que β soit nul, ou que φ soit astreint à rester compris entre deux nombres fixes.

Soit d'abord $\alpha > 0$. Si z (et, par suite, ρ) tend vers zéro, $\text{Log}\,\rho$ tendra vers $-\infty$, M (et, par suite, z^m) vers zéro. Si z tend vers ∞, $\text{Log}\,\rho$ et M tendront vers $+\infty$; z^m tendra donc vers ∞, mais sans que son argument Φ tende nécessairement vers une limite.

Si $\alpha < 0$, le contraire aura lieu. Lorsque z tendra vers 0, z^m tendra vers ∞, sans que son argument tende nécessairement vers une limite; mais, si z tend vers ∞, z^m tendra vers zéro.

Enfin, si α est nul ainsi que β, on aura constamment

$$M = 1, \qquad \Phi = 2k\pi, \qquad \text{d'où} \qquad z^m = 1.$$

241. Fonctions trigonométriques. — Si, dans l'équation (3), qui définit e^z, nous posons $x = 0$, il viendra

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \tag{15}$$

et, en changeant le signe de y,

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y \tag{16}$$

On en déduit

$$(17) \qquad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \qquad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Ces formules, établies dans le cas où y est réel, pourront servir de définition à $\cos y$ et $\sin y$, lorsque cette variable est complexe.

Quant à $\tang y$ et $\cot y$, elles continuent à être définies par les formules

$$(18) \qquad \tang y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{\cot y}.$$

Ces fonctions n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de la variable. Les deux premières seront synectiques dans tout le plan; mais $\tang y$ et $\cot y$ deviendront respectivement infinies pour les valeurs de y qui annulent $\cos y$ ou $\sin y$.

Toutes les formules de la Trigonométrie subsistent pour les valeurs complexes de la variable, car elles se déduisent des suivantes :

$$\sin(0) = 0, \qquad \cos(0) = 1,$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\sin(-a) = -\sin a, \qquad \cos(-a) = \cos a,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

dont on peut vérifier immédiatement l'exactitude en substituant aux lignes trigonométriques leurs expressions en exponentielles.

On vérifie de même les formules

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z,$$

d'où

$$(\tang z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad (\cot z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

242. On a, d'après les formules d'addition,

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \sin x\cos iy + \cos x \sin iy \\ &= \sin x\,\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} + i\cos x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x+iy) &= \cos x\cos iy - \sin x\sin iy \\ &= \cos x\,\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - i\sin x\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}.\end{aligned}$$

Ces expressions ne peuvent s'annuler que si leur partie réelle et leur partie imaginaire s'annulent séparément. D'ailleurs $\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$ est toujours positif et différent de zéro; en outre, $\sin x$ et $\cos x$ ne peuvent s'annuler à la fois; donc $\sin(x+iy)$ ne s'annule que si l'on a

$$\sin x = 0, \qquad \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = 0,$$

d'où

$$x = k\pi, \qquad y = 0,$$

et $\cos(x+iy)$ ne s'annulera que si l'on a

$$\cos x = 0, \qquad \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = 0,$$

d'où

$$x = (k+\tfrac{1}{2})\pi, \qquad y = 0.$$

Si y tend vers ∞, $\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ tendra vers $+\infty$, et $\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$ vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, suivant que y sera positif ou négatif. Donc $\sin(x+iy)$ et $\cos(x+iy)$ tendront vers ∞; mais leur argument dépend de x et ne tendra pas nécessairement vers une limite.

Si y restant fini, x tend vers ∞, $\sin(x+iy)$ et $\cos(x+iy)$ resteront, au contraire, finis, sans tendre nécessairement vers une limite.

243. Tout produit de sinus et de cosinus peut être transformé en une somme de sinus et cosinus. Il suffit, pour cela,

de remplacer les sinus et cosinus par leur valeur en exponentielles, d'effectuer les multiplications et de revenir ensuite aux lignes trigonométriques.

Proposons-nous, par exemple, d'exprimer $\sin^m z$ en fonction des sinus et des cosinus de z et de ses multiples (m étant supposé entier). On aura

$$\begin{aligned}(2i)^m \sin^m z &= (e^{iz} - e^{-iz})^m \\ &= e^{miz} - me^{(m-2)iz} + \frac{m(m-1)}{2} e^{(m-4)iz} - \ldots.\end{aligned}$$

Associons ensemble les termes à égale distance des extrêmes; il viendra :

Si m est impair,

$$\begin{aligned}&(2i)^m \sin^m z \\ &= 2i\left[\sin mz - m\sin(m-2)z + \frac{m(m-1)}{2}\sin(m-4)z - \ldots\right];\end{aligned}$$

si m est pair,

$$\begin{aligned}(2i)^m \sin^m z = 2\cos mz &- 2m\cos(m-2)z \\ &+ 2\frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)z - \ldots \\ &+ (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1.2\ldots m}{\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

On aura, de même,

$$2^m \cos^m z = (e^{iz} + e^{-iz})^m = e^{miz} + me^{(m-2)iz} + \ldots$$

et, en associant les termes deux à deux,

$$2^m \cos^m z = 2\cos mz + 2m\cos(m-2)z + \ldots.$$

Cette série se terminera, si m est impair, par un terme en $\cos z$; si m est pair, par un terme constant $\dfrac{1.2\ldots m}{\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)^2}$.

244. On peut réciproquement exprimer $\cos mz$ et $\sin mz$

en fonction de $\sin z$ et de $\cos z$. On a, en effet,

$$\cos mz + i \sin mz = e^{miz} = (e^{iz})^m = (\cos z + i \sin z)^m,$$

d'où, en développant par la formule du binome et égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\cos mz = \cos^m z - \frac{m(m-1)}{2} \cos^{m-2} z \sin^2 z$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} z \sin^4 z + \ldots,$$

$$\sin mz = m \cos^{m-1} z \sin z - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} z \sin^3 z + \ldots.$$

Remplaçant dans ces formules $\sin^2 z$ par $1 - \cos^2 z$, ou réciproquement, on voit :

1° Que $\cos mz$ s'exprime par un polynome de degré m en $\cos z$;

2° Que $\sin mz$ est un polynome de degré m en $\sin z$ si m est impair; que, si m est pair, $\sin mz$ sera égal au produit de $\cos z$ par un polynome de degré $m - 1$ en $\sin z$.

245. Soit m un entier impair quelconque; on aura, comme nous venons de le voir,

$$\sin mz = f(\sin z),$$

f désignant un polynome de degré m. Il est aisé de mettre ce polynome sous forme d'un produit de facteurs.

En effet, $\sin mz$ s'annule pour les m valeurs suivantes de z,

$$0, \quad \pm \frac{\pi}{m}, \quad \ldots, \quad \pm \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m},$$

auxquelles correspondent autant de valeurs distinctes pour $\sin z$.

On aura donc

$$\sin mz = A \sin z \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{\pi}{m}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 z}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}}\right),$$

A désignant un facteur numérique.

Pour le déterminer, donnons à z une valeur infiniment petite. Le premier membre de l'équation précédente aura pour valeur principale mz et le second Az. Donc $A = m$.

Changeons z en $\frac{\pi z}{m}$; l'équation deviendra

$$\sin \pi z = m \sin \frac{\pi z}{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 \frac{\pi}{m}} \right) \cdots \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}} \right).$$

246. Arc tangente. — La fonction $u = \text{arc tang}\, z$, inverse de la tangente, sera définie par l'équation

$$z = \text{tang}\, u = \frac{1}{i} \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}}$$

ou

$$iz = \frac{e^{2iu} - 1}{e^{2iu} + 1}.$$

On en déduit

$$e^{2iu} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z},$$

$$(19) \quad u = \frac{1}{2i} \log \frac{i - z}{i + z} = \frac{1}{2i} [\log(i - z) - \log(i + z) + 2k\pi i].$$

Pour chaque valeur de z, les logarithmes ont chacun une infinité de valeurs, différant de multiples de $2\pi i$; u aura donc une infinité de valeurs différant entre elles de multiples de π.

Les valeurs $z = \pm i$ font exception. Pour chacune d'elles, l'un des logarithmes devient infini, et il en est de même de u.

Par chacun de ces deux points critiques traçons une coupure. Dans le reste du plan, les diverses valeurs de chaque logarithme et, par suite, celles de u forment des branches synectiques.

Il reste à voir comment ces branches se permutent entre elles à la traversée des coupures. Pour cela, supposons que z décrive, dans le sens direct, un contour fermé entourant le

point i en laissant le point $-i$ à son extérieur. L'argument de $i-z$, en variant d'une manière continue, se sera accru de 2π; celui de $i+z$ reprendra sa valeur initiale. Le premier logarithme se sera donc accru de $2\pi i$, sans que le second ait changé. La valeur initiale de u étant u_0, sa valeur finale sera donc $u_0+\pi$.

On voit de même que, si z tournait autour du point $-i$, u passerait de la valeur initiale u_0 à la valeur finale $u_0-\pi$.

En dérivant l'équation (19), on voit, d'ailleurs, que la fonction u a pour dérivée

$$u' = \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{i-z} - \frac{1}{i+z}\right) = \frac{1}{z^2+1}.$$

247. Arc sinus. — Considérons encore la fonction

$$u = \operatorname{arc}\sin z,$$

inverse du sinus et définie par l'équation

$$z = \sin u = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2i};$$

d'où, en résolvant par rapport à e^{iu},

$$e^{iu} = iz \pm \sqrt{1-z^2},$$

$$u = \frac{1}{i}\log\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right), \tag{20}$$

$\sqrt{1-z^2}$ désignant l'un des deux nombres réels ou complexes dont le carré est $1-z^2$.

Soit iu_0 l'un des logarithmes de $iz+\sqrt{1-z^2}$; les autres auront pour forme générale $iu_0+2k\pi i$; d'autre part, $iz-\sqrt{1-z^2}$ étant égal à $\dfrac{-1}{iz+\sqrt{1-z^2}}$ admettra, pour un de ses logarithmes, $i\pi - iu_0$, et la forme générale de ses logarithmes sera $i(\pi-u_0)+2k\pi i$. Les diverses valeurs de u seront donc données par le système des deux formules

$$u = \begin{cases} u_0 + 2k\pi, \\ \pi - u_0 + 2k\pi. \end{cases}$$

Ces valeurs sont toutes distinctes, à moins que u_0 ne soit un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, auquel cas la seconde formule donne les mêmes valeurs que la première. Si cela a lieu, on aura

$$\frac{1}{i}\log(iz+\sqrt{1-z^2}) = \frac{2k'+1}{2}\pi,$$

$$iz+\sqrt{1-z^2} = e^{\frac{2k'+1}{2}\pi i} = (-1^{k'})\, i,$$

d'où

$$z = (-1)^{k'} = \pm 1.$$

On a d'ailleurs, en dérivant l'équation (20),

$$u' = \frac{1}{i}\,\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\left(i - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,2z\right) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

dérivée finie et continue, sauf pour les valeurs critiques $z = \pm 1$.

248. Considérons la région du plan non extérieure à un contour fermé sans point multiple qui laisse à son extérieur les deux points critiques. Dans cette région, u_0, admettant une dérivée constamment finie, varie d'une manière continue et n'est jamais multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Le module de la différence entre u_0 et celui de ces multiples qui en est le plus voisin restera supérieur à un nombre positif fixe. Les différences mutuelles des racines u, étant de l'une des deux formes $2k\pi$, $2u_0 + (2k+1)\pi$, resteront aussi supérieures à un nombre fixe.

En raisonnant comme pour les fonctions algébriques, on en conclut que, si l'on trace, à partir des deux points critiques, des coupures quelconques, les valeurs de u pourront, dans tout le reste du plan, se répartir en branches synectiques.

249. Supposons, pour plus de simplicité, les coupures tracées de manière à ne pas rencontrer la portion de l'axe des x située entre -1 et $+1$. Chacune des branches de la

fonction u sera caractérisée par la valeur qu'elle prend pour $z = 0$, laquelle est un des nombres $k\pi$, k étant un entier. Désignons par u_k la branche qui correspond à la valeur $k\pi$.

Lorsque u varie de $(k - \frac{1}{2})\pi$ à $(k + \frac{1}{2})\pi$, son sinus z reste continu et réel et varie de -1 à $+1$ ou de $+1$ à -1, suivant que k est pair ou impair, en passant par la valeur 0 pour $u = k\pi$. Donc réciproquement, si z varie de -1 à $+1$, en restant réel, u_k variera de $\left[k - \frac{(-1)^k}{2}\right]\pi$ à $\left[k + \frac{(-1)^k}{2}\right]\pi$. Donc, en chacun de ces deux points, les branches prendront deux à deux des valeurs égales, de telle sorte qu'au point -1 on ait

$$u_{2k} = u_{2k-1} = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi,$$

au point $+1$,

$$u_{2k} = u_{2k+1} = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Les deux branches qui deviennent ainsi égales en un point critique se permutent entre elles si z décrit un contour fermé sans point multiple C entourant ce point. Supposons, en effet, ce qui est permis, que ce contour soit infiniment petit et soit décrit autour du point $+1$, par exemple. Tout le long de ce contour, chacune des branches de la fonction u conservera une valeur infiniment voisine de la valeur limite qu'elle atteint au point critique ; car, $1 - z^2$ étant infiniment petit, il en est de même de $\sqrt{1 - z^2}$; donc $iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ différera infiniment peu de sa valeur limite i ; son module et son argument, et, par suite, son logarithme, différeront infiniment peu de leurs valeurs limites.

Parmi les diverses branches de la fonction, il en existe donc deux seulement dont les valeurs le long de C soient infiniment voisines de $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$: ce sont les deux branches u_{2k} et u_{2k+1}, dont la valeur limite est $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Cela posé, soit z_0 un point de C; la valeur de u_{2k}, par

exemple, au point z_0 sera l'une des valeurs que l'expression

$$(21) \qquad \frac{1}{i}\log(iz + \varepsilon\sqrt{1 - z^2})$$

prend pour $z = z_0$, ε étant égal à ± 1.

Lorsque z décrira le contour C, cette expression restant infiniment voisine de $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$, sa valeur finale coïncidera avec la valeur au point z_0 de l'une des deux fonctions u_{2k}, u_{2k+1}.

Mais le premier cas ne peut se présenter. En effet, pendant ce mouvement, l'argument de $1 + z$ change infiniment peu et reprend au retour sa valeur primitive ; celui de $1 - z$ varie, au contraire, de 2π ; celui du produit $1 - z^2$ variera donc de 2π et le radical $\sqrt{1 - z^2} = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ se reproduira, multiplié par $e^{\frac{1}{2}2\pi i} = -1$. Donc, lorsque z reviendra à la valeur z_0, la valeur finale de la fonction sera l'une des valeurs de l'expression

$$\frac{1}{i}\log(iz_0 - \varepsilon\sqrt{1 - z_0^2}),$$

lesquelles sont toutes différentes des valeurs de l'expression

$$\frac{1}{i}\log(i^2 z_0 + \varepsilon\sqrt{1 - z_0^2}),$$

parmi lesquelles est comprise la valeur initiale. Donc, en décrivant le contour, on changera la valeur de u et l'on passera ainsi de la branche u_{2k} à une autre branche, qui ne peut être que u_{2k+1}.

250. — La fonction $\arccos z$ inverse du cosinus, définie par l'équation

$$\cos u = z,$$

ne nécessite aucune étude nouvelle ; en effet, $\cos u$ étant

égal à $\sin\left(\frac{\pi}{2}+u\right)$, on aura

$$\text{arc}\cos z = -\frac{\pi}{2} + \text{arc}\sin z.$$

Cette expression admet, pour chaque valeur de z, une infinité de valeurs données par les formules

$$\text{arc}\cos z = \left\{\begin{matrix} -\frac{\pi}{2} + a + 2k\pi \\ \frac{\pi}{2} - a + 2k\pi \end{matrix}\right\} = \pm b + 2k\pi,$$

en posant $\frac{\pi}{2} - a = b$.

CHAPITRE III.

SÉRIES.

I. — Formule de Taylor.

251. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x, qui reste continue, ainsi que ses n premières dérivées, dans un intervalle AA'.

Désignant par a et $a+h$ deux points de cet intervalle, posons

$$(1)\quad \begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dfrac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots \\ \qquad + \dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n. \end{cases}$$

Le *reste* R_n sera une nouvelle fonction de h que nous allons déterminer.

En prenant les dérivées successives de (1) par rapport à h, on voit : 1° que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de R_n est égale à $f^n(a+h)$; 2° que R_n et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent pour $h=0$.

Ces deux conditions suffisent à définir complètement R_n; car, si φ est une fonction qui y satisfasse, la différence $R_n-\varphi$, ayant sa dérivée $n^{\text{ième}}$ nulle, sera un polynome entier d'ordre $n-1$, mais ce polynome et ses $n-1$ premières dérivées s'annulent pour $h=0$; il est donc identiquement nul.

Or on peut vérifier immédiatement que l'intégrale définie

$$I = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{a+h}(a+h-x)^{n-1}f^n(x)\,dx$$

satisfait aux conditions précédentes.

Pour le montrer, posons d'abord $x = a + t$; il viendra

$$I = \frac{1}{(n-1)!}\int_0 (h-t)^{n-1}f^n(a+t)\,dt.$$

Cherchons la dérivée de cette intégrale. On voit que h figure dans I à la fois comme limite et comme paramètre. Il faut donc appliquer la règle de dérivation des fonctions composées. Mais la fonction à intégrer s'annule pour $t = h$; donc la dérivée par rapport à la limite est nulle et il reste simplement le terme provenant de la dérivation par rapport au paramètre

$$\frac{dI}{dh} = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^h (h-t)^{n-2}f^n(a+t)\,dt.$$

On trouvera de même

$$\frac{d^2I}{dh^2} = \frac{1}{(n-3)!}\int_0^h (h-t)^{n-3}f^n(a+t)\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}I}{dh^{n-1}} = \int_0^h f^n(a+t)\,dt.$$

Toutes ces expressions s'annulent pour $h = 0$. Enfin, une dernière dérivation donnera

$$\frac{d^nI}{dh^n} = f^n(a+h).$$

Nous trouvons ainsi pour R_n l'expression suivante :

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1}f^n(a+t)\,dt.$$

Posons $t = uh$; u variera de 0 à 1, et l'on aura

$$(2) \qquad R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^n(a+uh)\, du.$$

252. Soit p un entier positif arbitraire non supérieur à n; la fonction à intégrer sera le produit des deux facteurs

$$(1-u)^{p-1} \quad \text{et} \quad (1-u)^{n-p} f^n(a+uh),$$

dont le premier est positif et le second continu dans le champ d'intégration. On aura donc, en appliquant le théorème de la moyenne,

$$R_n = h^n \frac{(1-\theta)^{n-p} f^n(a+\theta h)}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{p-1}\, du,$$

θ désignant une quantité comprise entre 0 et 1. D'ailleurs

$$\int_0^1 (1-u)^{p-1}\, du = \left[-\frac{(1-u)^p}{p} \right]_0^1 = \frac{1}{p}.$$

Donc

$$R_n = h_n \frac{(1-\theta)^{n-p} f^n(a+\theta h)}{(n-1)!\, p},$$

et, en particulier, si nous prenons $p = n$,

$$(3) \qquad R_n = \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h).$$

253. La formule (1) est connue sous le nom de *formule de Taylor*. L'expression (3) du reste, donnée par Lagrange, est parfois commode; elle a toutefois l'inconvénient de contenir un nombre inconnu θ, dont on sait seulement qu'il est compris entre 0 et 1. L'expression (2), qui ne contient rien d'indéterminé, est à cet égard préférable.

Si l'on suppose n constant et h infiniment petit, les formules (2) et (3) montrent que R_n est infiniment petit, d'ordre n au moins. On aura donc, pour l'infiniment petit

$f(a+h)-f(a)$, la valeur

$$hf'a + \frac{h^2}{1.2}f''a + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}a$$

approchée aux infiniment petits près de l'ordre n.

Supposons, au contraire, h constant ou assujetti à rester entre certaines limites et n croissant indéfiniment. Si l'on peut démontrer que dans ces conditions R_n tend vers zéro, on aura, à la limite,

$$f(a+h) = \lim\left[fa + hf'a + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}a\right].$$

On dira, dans ce cas, que *la série infinie*

$$f(a) + hf'a + \frac{h^2}{1.2}f''a + \ldots$$

converge vers $f(a+h)$, ou a cette quantité pour *somme.*

254. Posons, dans la formule de Taylor, $a=0$, $h=x$; nous obtiendrons la *formule de Maclaurin*

$$(4)\quad f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0) + R_n,$$

où R_n peut être mis sous les formes suivantes :

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}f^n(ux)\,du, \qquad R_n = \frac{x^n}{n!}f^n(\theta x).$$

Cette formule suppose que la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre n soient continues dans un intervalle comprenant à son intérieur les points 0 et x.

255. On peut aisément étendre la formule de Taylor aux fonctions de plusieurs variables.

Soit, en effet, $f(x, y)$ une fonction des variables réelles x, y, dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre n restent continues tant que x est compris entre A et A', et y entre B

et B'. Soient a, $a+h$ deux nombres compris entre A et A', b, $b+k$ deux nombres compris entre B et B'.

Posons $\alpha = a + ht$, $\beta = b + kt$. L'expression

$$f(\alpha, \beta) = f(a+ht, b+kt) = \varphi(t),$$

considérée comme fonction de t, aura des dérivées

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial \alpha} + k\frac{\partial f}{\partial \beta} = \left(h\frac{\partial}{\partial \alpha} + k\frac{\partial}{\partial \beta}\right)f = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)f,$$

$$\varphi''(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)\varphi'(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^2 f,$$

. . . .

Ces dérivées seront continues tant que $a+ht$ sera compris entre A et A', et $b+kt$ entre B et B', et *a fortiori* quand t variera de 0 à 1.

Appliquant à cette fonction la formule de Maclaurin et posant $t=1$ dans l'équation obtenue, nous aurons

$$(5)\quad \begin{cases} f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a,b) + \ldots \\ \qquad + \frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1} f(a,b) + \mathrm{R}_n, \end{cases}$$

R_n pouvant être mis sous l'une des formes suivantes :

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a+hu, b+ku)\,du,$$

$$\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k).$$

En posant $f(a,b) = y$, $f(a+h, b+k) = y + \Delta y$, cette formule prendra la forme plus simple

$$\Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \ldots + \frac{d^{n-1}y}{(n-1)!} + \mathrm{R}_n,$$

laquelle subsisterait évidemment pour un nombre quelconque de variables indépendantes.

Si h et k sont des infiniment petits du premier ordre, R_n

sera un infiniment petit d'ordre n au moins, et pourra être supprimé de la formule, si l'on veut borner l'approximation à cet ordre de grandeur.

256. Les considérations précédentes s'étendent sans peine aux fonctions de variables complexes.

Soit $f(z)$ une fonction de z, synectique tant que cette variable reste dans l'intérieur d'un domaine E. Soit L une ligne rectifiable située dans l'intérieur de ce domaine et joignant les points a, $a+h$. On verra, par un raisonnement identique à celui du n° **251**, qu'on a

$$f(a+h) = fa + hf'a + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}a + \mathrm{R}_n,$$

le reste R_n étant donné par l'intégrale

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{\mathrm{L}} [a+h-z]^{n-1} f^n(z)\,dz.$$

Si la droite qui joint les points a et $a+h$ est tout entière comprise dans l'intérieur de E, on pourra la prendre pour ligne d'intégration; sa longueur sera $|h|$. D'autre part, $|a+h-z|$ variera de $|h|$ à o. Si donc μ est le maximum de $|f^n(z)|$ sur cette ligne, on aura

$$|\mathrm{R}_n| \leqq \frac{\mu |h|^n}{(n-1)!}.$$

Cette hypothèse se réalisera toujours si l'on admet qu'on puisse tracer du point a comme centre un cercle K contenant le point $a+h$ dans son intérieur, et tel que tous les points non extérieurs à ce cercle soient intérieurs à E.

257. On peut aisément établir que, dans ce cas, R_n tend vers zéro lorsque n tend vers ∞.

En effet, $f^k(z)$ étant continue dans l'intérieur de E, son module le long du cercle K ne pourra surpasser un certain maximum M'; soient ρ le rayon du cercle, δ la distance

du point z au point a, laquelle varie de o à $|h|$. Sa distance au cercle K sera $\rho - \delta$, et, $f^n(z)$ étant la dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ de $f'(z)$, on aura, d'après la formule du n° 207,

$$|f^n(x)| \overline{\overline{<}} \frac{(n-1)!\,M'}{(\rho-\delta)^{n-1}}.$$

D'autre part,

$$|a+h-z| = |h| - \delta.$$

Donc

$$|a+h-z|^{n-1}|f^n z| \overline{\overline{<}} \left(\frac{|h|-\delta}{\rho-\delta}\right)^{n-1}(n-1)!\,M'$$
$$\overline{\overline{<}} \left(\frac{|h|}{\rho}\right)^{n-1}(n-1)!\,M';$$

car le maximum de $\dfrac{|h|-\delta}{\rho-\delta}$ correspond évidemment à $\delta = 0$.

On aura donc, $|h|$ étant la longueur de la ligne L,

$$|R_n| \overline{\overline{<}} \left(\frac{|h|}{\rho}\right)^{n-1} M'\,|h|,$$

et, comme $|h| < \rho$, cette expression tend vers zéro pour $n=\infty$.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

La série infinie

$$fa + hf'a + \frac{h^2}{1.2}f''a + \ldots$$

est convergente et a pour somme $f(a+h)$ tant que le point $a+h$ restera intérieur à un cercle K *ayant son centre en a et qui soit entièrement intérieur à* E.

En posant, en particulier, $a=0$, $h=z$, on aura la formule de Maclaurin, qui, pour $n=\infty$, donnera une série convergente dans les mêmes conditions.

258. Le théorème établi dans le numéro précédent peut être démontré par une autre voie, qui donne une nouvelle expression du reste.

Les points a et $a+h$ étant contenus dans le cercle K, où la fonction $f(z)$ est synectique, on aura

$$fa = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)\,dz}{z-a}, \quad \ldots, \quad f^{n-1}a = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^n},$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(z)\,dz}{z-a-h} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz\left[\frac{1}{z-a} + \frac{h}{(z-a)^2} + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{h^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{h^n}{(z-a)^n(z-a-h)}\right] \\ &= fa + hf'a + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}a + R_n, \end{aligned}$$

où

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{h^n f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-a-h)}.$$

Soient ρ le rayon du cercle K, M le maximum de $f(z)$ sur ce cercle ; on aura

$$|R_n| \leqq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{|h|}{\rho}\right)^n \frac{M}{\rho - |h|}\,2\pi\rho,$$

quantité qui tend vers zéro pour $n = \infty$.

259. L'extension aux fonctions de plusieurs variables ne souffre aucune difficulté.

Soit, par exemple, une fonction $f(z, u)$ de deux variables qui reste synectique tant que z ne sort pas d'un cercle K de rayon r ayant son centre en a, ni u d'un cercle K_1 de rayon r_1 ayant son centre en b. Soient $a+h$ un point intérieur à K, $b+k$ un point intérieur à K_1, enfin ρ une quantité > 1, mais qui ne surpasse ni $\frac{r}{|h|}$ ni $\frac{r_1}{|k|}$. L'expression

$$f(a+ht, a+kt)$$

sera une fonction de t, synectique tant que t ne sortira pas d'un cercle de rayon ρ. On peut donc la développer, pour

$t = 1$, par la formule de Maclaurin. Le résultat sera identique à celui du n° 255, et le reste R_n tendra vers zéro pour $n = \infty$.

260. Appliquons la formule de Maclaurin à quelques fonctions simples.

La fonction e^z a toutes ses dérivées successives égales à e^z. Pour $z = 0$, elles se réduisent à l'unité. On aura donc le développement

$$(6) \qquad e^3 = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

qui sera toujours convergent, quel que soit z, car e^z est synectique dans tout le plan.

Posant $z = 1$ dans cette formule, nous trouverons la valeur de la constante e

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots,$$

Changeant z en iz, puis en $-iz$ et combinant les formules obtenues, il viendra

$$(7) \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$(8) \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

séries également convergentes dans tout le plan.

261. Considérons la fonction $u = (1 + z)^m$, et, pour préciser, dans le cas où m n'est pas un entier réel, celle des branches de cette fonction qui se réduit à 1 pour $z = 0$. On aura

$$u = (1+z)^m, \qquad u' = m(1+z)^{m-1}, \qquad \ldots,$$
$$u^n = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+z)^{m-n}, \qquad \ldots.$$

Pour $z = 0$, ces expressions se réduiront à

$$1, \quad m, \quad m(m-1), \quad \ldots, \quad m(m-1)\ldots(m-n+1), \quad \ldots$$

Substituant ces valeurs dans le développement de Maclau-

rin, on obtient la formule du binome :

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+z)^m &= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2} z^2 + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} z^n + \ldots . \end{aligned} \right.$$

La fonction $(1+z)^m$ n'ayant qu'un point critique $z=-1$, la série ci-dessus sera convergente tant que $|z|<1$. Car, si cette condition est satisfaite, soit ρ une quantité comprise entre $|z|$ et l'unité. La fonction sera synectique dans un cercle de rayon ρ ayant pour centre l'origine, et le point z lui est intérieur.

Au contraire, si $|z|>1$, la série ne sera pas convergente. Il faudrait, en effet, pour qu'elle le fût, que la somme S_n de ses n premiers termes tendît pour $n=\infty$ vers une limite fixe et, par suite, que $S_{n+1}-S_n$ tendît vers zéro. Or cette différence est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série. Ces termes devraient donc tendre vers zéro pour $n=\infty$, ce qui n'a pas lieu, car leur module augmente au contraire avec n dès que n est suffisamment grand. En effet, le rapport du terme général

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} z^n$$

au précédent est

$$\frac{m-n+1}{n} z,$$

et, quand n tend vers ∞, le module de ce rapport tend vers $|z|$, quantité >1.

262. Passons à la fonction $u=\log(1+z)$. Ses dérivées successives sont

$$u'=(1+z)^{-1}, \qquad u''=-(1+z)^{-2}, \qquad \ldots,$$
$$u^n=(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+z)^{-n}.$$

Pour $z=0$, elles se réduisent respectivement à

$$1, \quad -1, \quad \ldots, \quad (-1)^{n-1}(n-1)!$$

On aura donc, en adoptant celle des branches du logarithme qui s'annule pour $z = 0$,

$$(10) \qquad \log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \ldots$$

Par les mêmes raisons que pour la formule du binome, ce développement sera convergent si $|z| < 1$, divergent si $|z| > 1$.

En changeant z en $-z$, nous trouvons

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \ldots - \frac{z^n}{n} - \ldots$$

et en retranchant

$$\log \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots\right).$$

Posons

$$z = \frac{x}{2a+x},$$

a et x étant deux nombres réels et positifs; il viendra

$$\log \frac{a+x}{a} = \log(a+x) - \log a$$
$$= 2\left[\frac{x}{2a+x} + \frac{x^3}{3(2a+x)^3} + \ldots\right].$$

C'est sur cette formule et sur la suivante,

$$\log x + \log y = \log xy,$$

qu'est fondé le calcul des Tables de logarithmes.

En posant $a = 1$, $x = 1$, on aura tout d'abord

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \ldots\right).$$

Posant ensuite $a = 125$, $x = 3$, il viendra

$$\log 128 - \log 125 = 2\left(\frac{3}{253} + \ldots\right),$$

et, comme $\log 128 = \log 2^7 = 7 \log 2$, $\log 125 = 3 \log 5$, cette équation donnera $\log 5$.

On trouvera de même $\log 3$ par l'équation

$$4\log 3 - 4\log 2 - \log 5 = \log 81 - \log 80 = 2\left(\frac{1}{161} + \ldots\right),$$

puis $\log 7$ par l'équation

$$4\log 7 - 5\log 2 - \log 3 - 2\log 5 = \log 7^4 - \log(7^4 - 1)$$

$$= \left(\frac{1}{2.7^4 - 1} + \ldots\right),$$

et ainsi de suite pour les autres nombres premiers. Une simple addition donnera ensuite les logarithmes des nombres composés.

Les logarithmes ainsi calculés sont népériens. Pour obtenir les logarithmes vulgaires, on devra les multiplier par le facteur

$$\frac{1}{\log 10} = 0,43429448\ldots.$$

263. Nous avons trouvé (**246**) la formule

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i}[\log(i - z) - \log(i + z) + 2k\pi i]$$

$$= \frac{1}{2i}[\log(1 + iz) - \log(1 - iz) + 2k\pi i].$$

Développant les logarithmes par la formule précédente, on aura pour celle des branches de l'arc tangente qui s'annule pour $z = 0$

$$\operatorname{arc\,tang} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots.$$

Ce développement sera encore convergent si $|z| < 1$, divergent si $|z| > 1$.

Il donne un procédé commode pour le calcul numérique du nombre π. On calcule d'abord l'arc φ qui a pour tangente $\frac{1}{5}$. La formule donnera

$$\varphi = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \ldots.$$

On aura ensuite

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tang} 4\varphi = \frac{2 \operatorname{tang} 2\varphi}{1 - \operatorname{tang}^2 2\varphi} = \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{tang}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tang} 4\varphi - 1}{1 + \operatorname{tang} 4\varphi} = \frac{1}{239},$$

d'où

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots,$$

équation qui donnera π.

264. Considérons enfin la fonction $u = \arcsin z$. Chacune de ses branches sera synectique dans tout cercle qui laisse à son extérieur les deux points critiques $+1$ et -1. On pourra donc la développer par la formule de Maclaurin en une série convergente, si $|z| < 1$.

Choisissons en particulier celle de ses branches qui s'annule avec z. On aura pour $z = 0$

$$u = 0, \qquad u' = 1$$

et, d'après le n° **162**,

$$u^{(2n)} = 0, \qquad u^{(2n+1)} = 1^2.3^2\ldots(2n-1)^2.$$

Substituant ces valeurs des dérivées dans la formule de Maclaurin, il vient

$$\arcsin z = z + \frac{1}{2}\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{z^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{z^7}{7} + \ldots.$$

Si $|z| > 1$, cette série sera divergente, car le rapport du terme général au précédent est égal à

$$\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} z,$$

quantité dont le module tend, pour $n = \infty$, vers $|z|$ qui est supposé > 1.

II. — Procédés pour effectuer les développements en séries.

265. Soient x un infiniment petit, $y = f(x)$ une quantité qui en dépend. Proposons-nous d'en déterminer une valeur approchée, de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Mx^\mu$$

et qui ne diffère de la véritable que d'un infiniment petit d'ordre n au moins.

Si $f^n(x)$ est continue aux environs de $x = 0$, la formule de Maclaurin résoudra la question. Elle donne, en effet,

$$y = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n-1} f^{(n-1)}(0)}{1.2\ldots(n-1)} + R_n,$$

R_n étant d'ordre $\geqq n$ et, par suite, négligeable. Mais cette méthode exige le calcul des dérivées successives de $f(x)$, qui peut être fort pénible. Elle est d'ailleurs inapplicable si $f^n(x)$ n'est pas continue aux environs de $x = 0$. Il convient donc d'indiquer d'autres procédés.

266. Si $y = u + v + \ldots$, la valeur approchée de y sera évidemment la somme des valeurs approchées des fonctions partielles u, v, ...

Si l'on veut se borner à calculer la valeur principale de y, on ne conservera, parmi les fonctions u, v, ..., que celles dont l'ordre est le moins élevé; on calculera leurs valeurs principales et on les ajoutera ensemble.

Si toutefois ces valeurs principales avaient une somme nulle, ce serait une preuve que l'approximation est insuffisante; il faudrait donc recommencer le calcul en prenant un terme de plus dans le développement de chacune des quantités u, v, ...

Soit, par exemple,

$$y = 2\sin x - \sin 2x + x^3.$$

Les quantités $2\sin x$ et $-\sin 2x$ sont du premier ordre; mais la somme de leurs valeurs principales est nulle. Poussant donc l'approximation plus loin, on posera

$$2\sin x = 2x - \frac{2x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

d'où

$$y = x^3\left(-\tfrac{2}{6} + \tfrac{8}{6} + 1\right) + \ldots = 2x^3 + \ldots.$$

267. Si $y = uv$, u et v étant respectivement d'ordre α et β, on aura sa valeur approchée en multipliant ensemble les valeurs approchées des quantités u et v et négligeant dans ce produit les termes d'ordre $\overline{\gtrless} n$. Il suffira évidemment de pousser l'approximation de u jusqu'aux termes d'ordre $n - \beta$, celle de v jusqu'aux termes d'ordre $n - \alpha$.

Le premier terme de l'expression de y, qui constitue sa valeur principale, est évidemment le produit des valeurs principales de u et de v.

268. Si $y = \frac{u}{v}$, soient

$$u_1 = Ax^\alpha + A'x^{\alpha'} + \ldots.$$

$$v_1 = Bx^\beta + B'x^{\beta'} + \ldots$$

des valeurs approchées de u et de v, et soient

$$u = u_1 + R, \qquad v = v_1 + S.$$

On aura

$$\frac{u}{v} - \frac{u_1}{v_1} = \frac{uv_1 - vu_1}{vv_1} = \frac{Rv_1 - Su_1}{vv_1};$$

v et v_1 étant d'ordre β, et u_1 d'ordre α, cette expression sera d'ordre $\overline{\gtrless} n$ si l'ordre de R est $\overline{\gtrless} n + \beta$, et si celui de S est $\overline{\gtrless} n - \alpha + 2\beta$.

On aura alors, dans les limites d'approximation demandées,

$$y = \frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Cela posé, on effectuera la division de u_1 par v_1 jusqu'au moment où l'on introduirait au quotient des termes de degré $\overline{\gtrless} n$.

Soient $q = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots$ le quotient de la division, T le reste; on aura

$$y = \frac{u_1}{v_1} = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots + \frac{T}{v_1}.$$

Le premier terme du quotient $\frac{T}{v_1}$ étant, par hypothèse, d'ordre $\overline{\gtrless} n$, $\frac{T}{v_1}$ sera d'ordre $\overline{\gtrless} n$ et pourra être négligé.

On aura donc

$$y = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots$$

avec l'approximation demandée.

Le premier terme de ce développement Cx^γ, qui est la valeur principale de y, sera évidemment le quotient des termes Ax^α, Bx^β, valeurs principales de u et de v.

Si $\beta > \alpha$, les premiers termes de la suite $\gamma, \gamma', \ldots$ seront négatifs. Dans ce cas, la formule de Maclaurin n'aurait pas été applicable à la fonction y, car cette fonction, devenant infinie pour $x = 0$, sera discontinue, et ses dérivées également.

Au lieu d'effectuer la division de u_1 par v_1, on aurait pu, ce qui est au fond la même chose, poser

$$y = Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots,$$

$C, C', \ldots, \gamma, \gamma', \ldots$ étant des indéterminées.

Cela posé, l'équation $y = \frac{u_1}{v_1}$ pourrait s'écrire

$$yv_1 = u_1$$

ou

$$(Cx^\gamma + C'x^{\gamma'} + \ldots)(Bx^\beta + B'x^{\beta'} + \ldots) = Ax^\alpha + A'x^{\alpha'} + \ldots,$$

ou, en développant les calculs dans le premier membre,

$$BCx^{\beta+\gamma}+\ldots = Ax^{\alpha}+A'x^{\alpha'}+\ldots.$$

En exprimant l'identité des termes du second membre de cette équation avec les termes correspondants du premier membre, on obtiendra une série d'équations de condition qui détermineront C, γ, ...

Ainsi, par exemple, les premiers termes

$$BCx^{\beta+\gamma} \quad \text{et} \quad Ax^{\alpha}$$

devant être identiques, on aura

$$\beta+\gamma=\alpha,$$
$$BC=A,$$

d'où

$$\gamma=\alpha-\beta, \qquad C=\frac{A}{B}.$$

269. Comme application de cette méthode, proposons-nous de calculer les premiers termes du développement en série de l'expression

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1}.$$

Cette fonction ne changeant pas quand x change de signe, le développement ne contiendra que des puissances paires. Posons donc

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1}=A+B_1\frac{x^2}{1.2}-B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}+B_3\frac{x^6}{1.2\ldots6}-\ldots;$$

il viendra, en chassant les dénominateurs et remplaçant e^x par son développement,

$$\left(2+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots\right)$$
$$=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots\right)\left(A+B_1\frac{x^2}{1.2}-B_2\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\right).$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on trouvera

$$1 = \mathrm{A}, \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.2\ldots n} = \frac{\mathrm{A}}{1.2\ldots(n+1)} + \frac{\mathrm{B}_1}{1.2.1.2\ldots(n-1)} - \frac{\mathrm{B}_2}{1.2.3.4.1.2\ldots(n-3)} + \ldots,$$

équations qui détermineront successivement A, B_1, B_2, ... On aura même deux équations pour calculer chacune des quantités B. On trouve ainsi

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}, \quad \mathrm{B}_2 = \frac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_3 = \frac{1}{42},$$

$$\mathrm{B}_4 = \frac{1}{30}, \quad \mathrm{B}_5 = \frac{5}{66}, \quad \mathrm{B}_6 = \frac{691}{2730}, \quad \ldots.$$

270. Les nombres B_1, B_2, ... portent le nom de *nombres de Bernoulli*. Ils se rencontrent dans une foule de questions d'Analyse. Ils ont, en particulier, une liaison intime avec les sommes de puissances des nombres entiers.

Pour établir cette relation, posons

$$y = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x}.$$

On aura

$$y^{(\alpha} = 1^\alpha e^x + 2^\alpha e^{2x} + \ldots + (n-1)^\alpha e^{(n-1)x}$$

et pour $x = 0$

$$(y^{(\alpha)})_0 = 1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha.$$

Mais on a d'ailleurs

$$y = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = \frac{e^{nx}-1}{x}\,\frac{x}{e^x-1}$$

$$= \frac{nx + \dfrac{n^2x^2}{1.2} + \ldots}{x}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{\mathrm{B}_1 x^2}{1.2} - \frac{\mathrm{B}_2 x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)$$

$$= \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 x + \ldots + \mathrm{A}_\alpha x^\alpha + \ldots,$$

en posant

$$A_\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{1.2\ldots(\alpha+1)} - \frac{1}{2}\,\frac{n^\alpha}{1.2\ldots\alpha} + \frac{B_1}{1.2}\,\frac{n^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)} - \ldots.$$

On aura donc

$$1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + (n-1)^\alpha = (y^{(\alpha)})_0 = 1.2\ldots\alpha A_\alpha$$
$$= \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{2}n^\alpha + \frac{B_1}{1.2}\alpha n^{\alpha-1} - \frac{B_2}{1.2.3.4}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)n^{\alpha-3} + \ldots.$$

271. Soient $y = \sqrt{u}$ et $u = u_1 + R$,

$$u_1 = Ax^\alpha + A'x^{\alpha'} + \ldots$$

étant une valeur approchée de u. On aura

$$\sqrt{u} - \sqrt{u_1} = \frac{u - u_1}{\sqrt{u} + \sqrt{u_1}} = \frac{R}{\sqrt{u} + \sqrt{u_1}}.$$

Le dénominateur de cette expression étant d'ordre $\frac{\alpha}{2}$, elle sera négligeable si l'ordre de R est $\overline{\gtrless} n + \frac{\alpha}{2}$.

Si donc u_1 a été calculé avec cette approximation, on pourra poser

$$y = \sqrt{u_1}$$

et y pourra se calculer en extrayant la racine carrée de u_1 jusqu'aux termes de l'ordre n. En effet, soit q la racine ainsi obtenue. On aura

$$\sqrt{u_1} - q = \frac{u_1 - q^2}{\sqrt{u_1} + q},$$

quantité négligeable, car $\sqrt{u_1}$ et q sont d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $u_1 - q^2$ d'ordre $\overline{\gtrless} n + \frac{\alpha}{2}$; en effet, le terme suivant de la racine carrée, lequel s'obtiendrait, d'après la règle connue, en divisant le premier terme de $u_1 - q^2$ par le double du premier terme de q, lequel est d'ordre $\frac{\alpha}{2}$, serait d'ordre $\overline{\gtrless} n$ par hypothèse.

On aura donc, avec l'approximation demandée,

$$y = q.$$

On aurait pu également employer la méthode des coefficients indéterminés, en posant

$$y = Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'} + \ldots$$

et déterminant $C, C', \ldots, \gamma, \gamma', \ldots$ de manière à rendre identique l'équation

$$(Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'} + \ldots)^2 = Ax^{\alpha} + A'x^{\alpha'} + \ldots.$$

272. Soit, plus généralement,

$$y = u^m,$$

m étant fractionnaire ou incommensurable.

Posons $u = u_1 + v$, u_1 désignant sa valeur principale. On aura, par la formule du binome,

$$y = u_1^m + mu_1^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{1.2}u_1^{m-2}v^2 + \ldots + R.$$

Connaissant les ordres respectifs de u_1 et de v, on verra aisément combien il faut prendre de termes dans la formule pour que R soit d'ordre n, et par suite négligeable. Cela fait, on n'aura plus qu'à calculer v avec une approximation suffisante, et l'on en déduira aisément $v^2, v^3, \ldots$.

273. Proposons-nous, comme application, de développer le radical

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances croissantes de α.

Cette expression peut s'écrire

$$[1 - \alpha(2x - \alpha)]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha(2x - \alpha) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}\,\frac{\alpha^m(2x-\alpha)^m}{1.2\ldots m} + \ldots.$$

Il ne restera plus qu'à développer les puissances du binome $2x - \alpha$ et à réunir ensemble les termes qui contiennent une même puissance de α. On obtiendra ainsi un développement de la forme

$$1 + X_1\alpha + \ldots + X_n\alpha^n + \ldots,$$

où X_n désigne un polynome en x dont nous allons déterminer la forme.

Le terme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2m-1}{2}\;\frac{\alpha^m(2x-\alpha)^m}{1.2\ldots m}$$

ne fournira évidemment de terme en α^n que si m est $\overline{\gtrless}\frac{n}{2}$, mais $\overline{\gtrless} n$. S'il est compris entre ces limites, il donnera le terme

$$\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2^m.1.2\ldots m}\;\frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots(n-m).1.2\ldots(2m-n)}(2x)^{2m-n}(-1)^{n-m}\alpha^n$$
$$= \frac{1.3\ldots(2m-1)2^{m-n}(-1)^{n-m}}{1.2\ldots(n-m).1.2\ldots 2m}\;\frac{d^n x^{2m}}{dx^n}\alpha^n.$$

Mais on a

$$\frac{1.3\ldots(2m-1)}{1.2\ldots 2m} = \frac{1}{2.4\ldots 2m} = \frac{1}{2^m.1.2\ldots m}.$$

Le terme précédent pourra donc s'écrire

$$\frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(-1)^{n-m}\,\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\,x^{2m}\right]\alpha^n,$$

et l'on aura, par suite, en ajoutant tous les termes en α^n,

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\,\frac{d^n}{dx^n}\sum_m\left[(-1)^{n-m}\,\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\,x^{2m}\right].$$

On peut d'ailleurs sans inconvénient étendre la sommation aux valeurs de m qui sont moindres que $\frac{n}{2}$, les termes ainsi ajoutés ayant une dérivée $n^{\text{ième}}$ nulle. La somme entre paren-

thèses deviendra égale à $(x^2-1)^n$. On aura donc, comme résultat final,

$$X_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Les expressions X_n sont connues sous le nom de *polynomes de Legendre*. Elles jouissent de propriétés remarquables, et nous aurons plusieurs fois l'occasion de les retrouver.

274. L'expression $y = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ satisfaisant, comme nous l'avons vu (165), à l'équation différentielle

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0,$$

et X_n n'en différant que par un facteur constant, on aura évidemment

$$(x^2-1)X''_n + 2xX'_n - n(n+1)X_n = 0.$$

275. Trois polynomes successifs X_{n-1}, X_n, X_{n+1} sont liés par une relation linéaire que nous allons établir.

Prenons la dérivée par rapport à α de l'équation

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1\alpha + \ldots + X_n\alpha^n + \ldots;$$

il viendra

$$(x-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = X_1 + \ldots + nX_n\alpha^{n-1} + \ldots.$$

Multipliant par $1-2\alpha x+\alpha^2$ et remplaçant ensuite

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

par sa valeur, nous trouverons

$$\begin{aligned}(x-\alpha)(1 + X_1\alpha + \ldots + X_n\alpha^n + \ldots)\\ = (1-2\alpha x+\alpha^2)(X_1 + \ldots + nX_n\alpha^{n-1} + \ldots),\end{aligned}$$

d'où, en égalant les coefficients de α^n,

$$xX_n - X_{n-1} = (n+1)X_{n+1} - 2nxX_n + (n-1)X_{n-1},$$

ou enfin

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0.$$

276. D'après les définitions que nous avons données, une quantité y, dépendant d'un infiniment petit (ou infiniment grand) x, est d'ordre α si le rapport $\frac{y}{x^\alpha}$ tend vers une limite finie et différente de zéro lorsque x tend vers o (ou vers ∞). Mais ce serait une erreur de croire que l'ordre d'infinitude d'une fonction quelconque de x soit toujours susceptible d'une semblable évaluation numérique, ainsi que cela avait lieu dans les exemples précédents.

Considérons, par exemple, la fonction $y = e^x$. On a, comme nous l'avons vu,

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots$$

et, par suite, si $x > 0$,

$$y > \frac{x^m}{1.2\ldots m},$$

m étant un entier quelconque. On aura donc

$$\frac{y}{x^\alpha} > \frac{x^{m-\alpha}}{1.2\ldots m}.$$

Prenons $m > \alpha$ et faisons tendre x vers ∞. On aura

$$\lim \frac{y}{x^\alpha} \geq \lim \frac{x^{m-\alpha}}{1.2\ldots m} = \infty.$$

On voit donc que, si x tend vers $+\infty$, e^x tendra également vers $+\infty$, et cela *plus rapidement qu'une puissance quelconque de* x.

277. L'équation

$$y = e^x$$

donne, en supposant x réel et prenant les logarithmes arithmétiques,

$$x = \operatorname{Log} y.$$

Donc, si $\operatorname{Log} y$ tend vers $+\infty$, il en sera de même de y, qui croîtra plus rapidement qu'une puissance quelconque de

$\operatorname{Log} y$. Donc, réciproquement, si y tend vers $+\infty$, $\operatorname{Log} y$ tendra vers $+\infty$, mais moins rapidement qu'une puissance quelconque de y.

Posons

$$y = \frac{1}{z},$$

d'où

$$\operatorname{Log} y = -\operatorname{Log} z.$$

Si y tend vers $+\infty$, z tendra vers 0 et $\operatorname{Log} z$ tendra vers $-\infty$, mais moins rapidement qu'une puissance quelconque de $\frac{1}{z}$, prise avec le signe $-$.

Donc, pour x infiniment petit (ou infiniment grand), $\operatorname{Log} x$ sera un infiniment grand négatif (ou positif), mais dont l'ordre est inférieur à tout nombre positif fixe. Il ne saurait donc être question de lui assigner une valeur principale de la forme Ax^α. C'est un infini d'une espèce particulière et irréductible à ceux que nous avons considérés jusqu'ici.

278. Soit maintenant $u = Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + R$ une fonction quelconque développable suivant les puissances de x. Proposons-nous de développer $\log u$.

On aura évidemment

$$\log u = \alpha \log x + \log A + \log\left(1 + \frac{Bx^{\beta-\alpha} + \ldots + Rx^{-\alpha}}{A}\right).$$

Le dernier terme de cette expression sera développable au moyen de la formule qui donne $\log(1+x)$. Mais le terme $\alpha \log x$ par lequel commence le développement de $\log u$ sera irréductible avec ceux qui le suivent.

279. Les divers développements que nous avons obtenus, étant limités à un certain nombre de termes, donneront toujours une valeur approchée de la fonction qu'on développe lorsque x sera suffisamment petit (ou suffisamment grand si les puissances de x vont en décroissant).

En les prolongeant indéfiniment, on obtiendra des séries

infinies. Si ces séries sont divergentes, elles n'ont aucun sens. Mais Cauchy a signalé ce fait remarquable que, même en étant convergentes, elles peuvent ne pas être égales à la fonction qui leur donne naissance.

Considérons, en effet, la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Ses dérivées successives sont des sommes de termes de la forme $\frac{a}{x^\alpha} e^{-\frac{1}{x}}$. Cela se voit immédiatement sur la dérivée première, et l'on vérifie non moins facilement que la dérivée d'un semblable terme se compose de deux termes de cette forme.

Ces dérivées s'annulent toutes pour $x = 0$, car, en posant $\frac{1}{x} = z$, on aura

$$\frac{a}{x^\alpha} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{a z^\alpha}{e^z},$$

quantité dont la limite est nulle pour $x = 0$, d'où $z = \infty$.

La série de Maclaurin

$$f(0) + x f'(0) + \ldots,$$

prolongée indéfiniment, sera donc convergente, tous ses termes étant nuls. Mais elle est égale à zéro et non à $f(x)$.

Il est donc nécessaire, pour reconnaître si une fonction est développable en série infinie par la formule de Maclaurin, d'étudier le reste R_n et de s'assurer qu'il tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. C'est ainsi que nous avons procédé pour développer $(1 + x)^m$, $\log(1 + x)$, ...

280. Soit $f(x)$ une fonction qui devienne indéterminée pour une valeur particulière a de la variable. On nomme *vraie valeur* de cette fonction pour $x = a$ la limite vers laquelle tend $f(a + h)$ lorsque h tend vers zéro. Cette vraie valeur peut être finie, infinie ou indéterminée. Si elle est déterminée, elle se trouvera en cherchant la valeur principale du développement de $f(a + h)$ suivant les puissances croissantes de h.

Soit, par exemple, $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, φ et ψ s'annulant pour $x = a$, mais étant développables par la série de Taylor; on aura

$$f(a+h) = \frac{\varphi(a+h)}{\psi(a+h)} = \frac{\varphi(a) + h\varphi'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^n(a) + R_{n+1}}{\psi(a) + h\psi'(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(a) + \rho_{n+1}}.$$

Soient respectivement $\varphi^p(a)$ et $\psi^q(a)$ les premiers termes qui ne s'annulent pas dans les deux suites

$$\varphi(a),\ \varphi'(a),\ \ldots \quad \text{et} \quad \psi(a),\ \psi'(a),\ \ldots.$$

La vraie valeur sera la limite de

$$\frac{1.2\ldots q}{1.2\ldots p} h^{p-q} \frac{\varphi^p(a)}{\psi^q(a)}.$$

Elle sera nulle si $p > q$, infinie si $p < q$, égale à $\frac{\varphi^p(a)}{\psi^p(a)}$ si $p = q$.

281. Si $f(x)$ devenait indéterminée pour $x = \infty$, on développerait $f(x)$ suivant les puissances décroissantes de x; et la vraie valeur serait nulle, finie ou infinie, suivant que l'ordre du premier terme du développement serait négatif, nul ou positif.

282. *Exemples.* — 1° Soit à déterminer la vraie valeur de

$$\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$$

pour $m = \infty$.

Cette expression est, par définition, égale à

$$e^{m \log\left(1 + \frac{z}{m}\right)} = e^{m\left(2k\pi i + \frac{z}{m} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{m^2} + \ldots\right)}$$
$$= e^{2mk\pi i}\, e^z\, e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{m} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{m^2} - \ldots},$$

k étant un entier qui dépend de la branche de logarithme que l'on aura choisie.

Le dernier facteur tend évidemment vers $e^0 = 1$. Si donc on choisit la branche pour laquelle $k = 0$, d'où $e^{2mk\pi i} = 1$, on aura une vraie valeur, égale à e^z.

Pour les autres branches du logarithme, la vraie valeur sera entièrement indéterminée, tant que m ne sera assujetti qu'à la seule condition de tendre vers ∞. En effet, soit μ une quantité quelconque; si l'on pose $m = \frac{2n\pi i + \text{Log}\,\mu}{2k\pi i}$, n étant un entier qui tend vers ∞, m tendra également vers ∞, et $e^{2mk\pi i}$ sera égal à $e^{\text{Log}\,\mu} = \mu$.

2° Cherchons la vraie valeur de

$$m(\sqrt[m]{z} - 1)$$

pour $m = \infty$.

Cette expression est, par définition, égale à

$$m\left(e^{\frac{1}{m}\log z} - 1\right) = m\left(\frac{\log z}{m} + \frac{1}{2}\frac{\log^2 z}{m^2} + \ldots\right)$$
$$= \log z + \frac{1}{2}\frac{\log^2 z}{m} + \ldots.$$

Sa vraie valeur est $\log z$.

3° Cherchons enfin la vraie valeur de z^z pour $z = 0$.

On a

$$z^z = e^{z\log z}.$$

La vraie valeur sera donc e^v, en désignant par v la vraie valeur de $z\log z$.

Or, soient ρ le module et φ l'argument de z; on aura

$$z\log z = z(\text{Log}\,\rho + i\varphi).$$

Le premier terme $z\,\text{Log}\,\rho$ a pour module $\rho\,\text{Log}\,\rho$. Lorsque ρ tend vers zéro, $\text{Log}\,\rho$ tend vers $-\infty$, mais moins rapidement; donc $\rho\,\text{Log}\,\rho$ tend vers zéro.

Le second terme $zi\varphi$ a pour module $\rho\varphi$, qui peut prendre une suite de valeurs quelconques lorsque ρ tend vers zéro, à condition de choisir convenablement les valeurs correspondantes de φ. La vraie valeur est donc indéterminée, tant qu'on ne précisera rien sur la manière dont φ varie.

Mais, si cet argument est astreint à rester compris entre deux nombres fixes (en particulier, si z reste réel), $\rho\varphi$ tendra vers zéro. Donc on aura

$$v = \lim z \log z = 0, \qquad \lim z^z = e^v = 1.$$

283. La vraie valeur d'une fonction de plusieurs variables est généralement indéterminée.

Considérons, par exemple, la fonction $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$. Supposons que φ et ψ s'annulent pour $x = a$, $y = b$, mais que leurs dérivées partielles ne s'annulent pas. La vraie valeur serait la limite du rapport

$$\frac{\varphi(a+h, b+k)}{\psi(a+h, b+k)} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}h + \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}k + R}{\dfrac{\partial\psi}{\partial a}h + \dfrac{\partial\psi}{\partial b}k + \rho}$$

ou

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}h + \dfrac{\partial\varphi}{\partial b}k}{\dfrac{\partial\psi}{\partial a}h + \dfrac{\partial\psi}{\partial b}k}.$$

On voit qu'elle dépend du rapport variable $\frac{h}{k}$, à moins que l'on n'ait

$$\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial a}} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial b}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial b}}.$$

III. — Séries et produits infinis à termes numériques.

284. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ une suite indéfinie de quantités. Ainsi que nous l'avons déjà indiqué, si les sommes successives

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_n &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

tendent vers une limite finie s, on dit que la série infinie

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \Sigma u_n$$

est *convergente* et a pour *somme s*.

Dans le cas contraire, la série est *divergente*.

285. La divergence peut se manifester de plusieurs manières :

1° Les sommes $s_1, \ldots, s_n, \ldots$ peuvent tendre vers ∞. Ce mode de divergence est le seul qui puisse se présenter si les quantités $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ sont réelles et positives, car alors les quantités $s_1, \ldots, s_n, \ldots$ sont positives et forment une suite croissante (10).

2° Les sommes $s_1, \ldots, s_n$ ne tendent vers aucune limite finie ou infinie.

Ce cas se présenterait, par exemple, pour la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

286. Lorsqu'on peut trouver l'expression générale des sommes s_n, on devra la discuter pour s'assurer si pour $n = \infty$ elle tend vers une limite finie et déterminer celle-ci.

Considérons, par exemple, la progression géométrique

$$a + ar + \ldots + ar^n + \ldots = \Sigma ar^n.$$

On a

$$(1) \qquad s_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

Si $|r| < 1$, $|r|^n$ et, par suite, r^n tendra vers zéro. La série est donc convergente et a pour somme $\frac{a}{1 - r}$.

Si $|r| \geqq 1$, s est, au contraire, divergente ; car, pour qu'elle convergeât, il faudrait qu'on eût

$$0 = \lim_{n=\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim ar^n,$$

ce qui n'a pas lieu ; car on a

$$|ar^n| = |a| \, |r|^n \overline{\geqq} |a|.$$

287. Considérons, comme second exemple, la série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(z+n-1)(z+n)\dots(z+n+k)}.$$

Le terme général peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{(z+n-1)\dots(z+n+k-1)} - \frac{1}{(z+n)\dots(z+n+k)}\right].$$

Sommant de 1 à m toutes ces expressions, il viendra

$$s_m = \frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{z(z+1)\dots(z+k)} - \frac{1}{(z+m)\dots(z+m+k)}\right],$$

les autres termes se détruisant deux à deux.

Passant à la limite, il viendra

$$s = \frac{1}{k+1}\left[\frac{1}{z(z+1)\dots(z+k)}\right].$$

288. Dans le cas beaucoup plus fréquent où l'on n'est pas en mesure de déterminer les sommes s_n, on sait (9) que la condition nécessaire et suffisante pour la convergence est que l'on ait, pour toute valeur de p,

$$|s_n - s_{n+p}| = |u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon_n,$$

ε_n ne croissant pas quand n croît, et tendant vers zéro pour $n = \infty$.

On aura d'ailleurs, en passant à la limite, pour $p = \infty$,

$$|s_n - s| \leqq \varepsilon_n.$$

La condition de convergence sera évidemment satisfaite si l'on a

$$|u_{n+1}| + \dots + |u_{n+p}| < \varepsilon_n.$$

Cette dernière relation, suffisante, mais non nécessaire pour que S converge, exprime que la série à termes réels et positifs

$$T = |u_1| + \dots + |u_n| + \dots,$$

formée par les modules des termes de S, est elle-même con-

vergente. Si cette circonstance se présente, on dira que la série S est *absolument convergente*. On dira, au contraire, que cette série S est *semi-convergente* si elle est convergente, sans que T le soit.

Les propositions suivantes mettront en évidence la différence profonde qui existe entre ces deux classes de séries.

289. Théorème. — *On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre de ses termes.*

Soit $s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ la série donnée. Changeons l'ordre de ses termes; soient $\nu_1, \nu_2, \ldots$ les rangs respectivement occupés dans la nouvelle série s' par les termes $u_1, u_2, \ldots$. Soit s'_m la somme des m premiers termes de s'. Il faut montrer qu'on peut assigner un nombre μ tel que, si $m > \mu$, $|s'_m - s|$ devienne moindre que toute quantité δ fixée d'avance.

Soit n un entier à déterminer ultérieurement; désignons par μ le plus grand des entiers $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Si $m > \mu$, la somme s'_m se composera : 1° des termes $u_1, \ldots, u_n$; 2° d'un certain nombre d'autres termes $u_\alpha, u_\beta, \ldots$ d'indice $> n$; soit $n + p$ le plus grand de ces indices.

De l'égalité

$$s'_m - s = s_n - s + s'_m - s_n = s_n - s + u_\alpha + u_\beta + \ldots$$

on déduit

$$\begin{aligned} |s'_m - s| &\overline{\overline{<}} |s_n - s| + |u_\alpha| + |u_\beta| + \ldots \\ &\overline{\overline{<}} |s_n - s| + [|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|] < 2\varepsilon_n, \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand n tend vers ∞. Donc, en choisissant n assez grand, on peut la rendre $< \delta$.

290. *Remarque.* — On peut, d'une infinité de manières, répartir les termes de s en une infinité de classes contenant chacune une infinité de termes. (Nous pouvons, par exemple, mettre dans une première classe les termes dont l'indice est un

nombre premier; dans une seconde, ceux où il est le produit de deux facteurs premiers, et ainsi de suite.)

Soient $v_{i1}, v_{i2}, \ldots$ les termes de la classe i, écrits dans un ordre déterminé : les séries

$$t_i = v_{i1} + v_{i2} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty)$$

seront absolument convergentes, et l'on aura

$$s = t_1 + t_2 + \ldots.$$

Soient, en effet, t_{im} la somme des m premiers termes de t_i, s_n celle des n premiers termes de s. Il faut montrer d'abord que, si m tend vers ∞, la somme

$$|v_{i,m+1}| + \ldots + |v_{i,m+p}|$$

tend vers zéro, quel que soit p.

L'entier n étant choisi à volonté, prenons m assez grand pour que tous ceux des termes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ qui figurent dans t_i figurent dans $t_{i,m}$. Les termes $v_{i,m+1}, \ldots, v_{i,m+p}$ seront de la forme $u_\alpha, u_\beta, \ldots$, où les indices $\alpha, \beta, \ldots$ sont $> n$. Soit $n+q$ le plus grand d'entre eux; on aura

$$\begin{aligned}|v_{i,m+1}| + \ldots + |v_{i,m+p}| &= |u_\alpha| + |u_\beta| + \ldots \\ &\overline{\overline{<}} |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+q}| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n,\end{aligned}$$

quantité qui tend vers zéro, pour n infini.

Considérons, en second lieu, la somme

$$s_{lm} = t_{1m} + t_{2m} + \ldots + t_{lm},$$

où l, m seront pris assez grands pour que s_{lm} contienne tous les termes de s_n; on aura

$$s_{lm} - s_n = u_\alpha + u_\beta + \ldots,$$

$\alpha, \beta, \ldots$ étant $> n$; et, par suite,

$$|s_{lm} - s_n| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n.$$

Faisons tendre m vers ∞; nous aurons à la limite

$$|t_1 + t_2 + \ldots + t_l - s_n| \leqq \varepsilon_n,$$

puis, en faisant tendre l vers ∞,

$$|t_1 + t_2 + \ldots - s_n| \leqq \varepsilon_n.$$

Faisant tendre enfin n vers ∞, il viendra

$$s = t_1 + t_2 + \ldots.$$

291. Théorème. — *La somme d'une série semi-convergente, à termes réels, dépend de l'ordre de ces termes; en disposant ceux-ci convenablement, on peut lui donner la valeur que l'on veut.*

Soit $s = u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ la série donnée. Puisqu'elle est convergente, on aura

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon_n$$

et, en particulier, comme $u_{n+1} = s_{n+1} - s_n$,

$$|u_{n+p}| = |s_{n+p-1} - s_{n+p}| < \varepsilon_{n+p-1} < \varepsilon_n.$$

Soient d'ailleurs A_n et $-B_n$ la somme des termes positifs et celle des termes négatifs qui sont contenus dans s_n; on aura

$$\lim_{n=\infty} s_n = \lim(A_n - B_n) = s.$$

Mais, d'autre part, la série des modules

$$|u_1| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

est divergente par hypothèse. Donc les sommes

$$\sigma_1 = |u_1|, \quad \ldots, \quad \sigma_n = |u_1| + \ldots + |u_n| = A_n + B_n, \quad \ldots$$

ne tendent pas vers une limite finie, et, comme elles sont positives et vont en croissant, elles tendent vers ∞.

Les deux conditions que nous venons de trouver,

$$\lim |A_n - B_n| = s, \qquad \lim |A_n + B_n| = \infty,$$

donnent évidemment

$$\lim A_n = \infty, \qquad \lim B_n = \infty.$$

Soient donc $c_1, c_2, \ldots$ les termes positifs, et $-d_1, -d_2, \ldots$

les termes négatifs de la série s. Les deux sommes

$$c_1 + c_2 + \ldots \quad \text{et} \quad d_1 + d_2 + \ldots,$$

considérées séparément, seront infinies.

D'ailleurs, le rang d'un terme quelconque dans l'une de ces séries étant au plus égal à celui qu'il occupe dans la série $u_1 + \ldots + u_n + \ldots$, qui résulte de leur réunion, on aura

$$|c_{n+p}| < \varepsilon_n, \qquad d_{n+p} < \varepsilon_n.$$

Cela posé, il est aisé de voir qu'en rangeant convenablement les termes de la série, on pourra lui donner pour somme un nombre M choisi à volonté.

Prenons, en effet, dans la suite positive $c_1, c_2, \ldots$ le nombre de termes strictement nécessaire pour que leur somme surpasse M (ce qui est toujours possible, puisque la somme $c_1 + \ldots + c_n + \ldots$ est infinie), puis dans la suite négative $-d_1, -d_2, \ldots$ le nombre de termes nécessaire pour ramener la somme au-dessous de M, puis dans la suite positive assez de termes pour lui faire dépasser de nouveau M, etc.

Soient s' la nouvelle série ainsi formée, s'_m la somme de ses m premiers termes. Les quantités $s'_m - \text{M}$ oscilleront autour de zéro et convergeront d'ailleurs vers cette limite.

En effet, la différence $s'_m - \text{M}$ est au plus égale en valeur absolue au terme dont l'adjonction a produit le dernier changement de signe dans la suite

$$s'_1 - \text{M}, \quad \ldots, \quad s'_m - \text{M}.$$

Chacun de ces changements de signe exige alternativement l'emploi d'un terme au moins de l'une des suites $c_1, c_2, \ldots$ ou $-d_1, -d_2, \ldots$. Dès que m sera devenu assez grand pour que le nombre des changements de signe qui se sont produits avant le terme $s'_m - \text{M}$ soit $> 2n$, le terme qui a produit le dernier d'entre eux occupera un rang supérieur à n dans celle des suites $c_1, c_2, \ldots, -d_1, -d_2, \ldots$ à laquelle il appartient ; on aura donc

$$|s'_m - \text{M}| < \varepsilon_n.$$

292. Supposons que les termes de la série s, au lieu d'être réels, comme on l'a admis, soient des quantités complexes

$$u_n = a_n + b_n i.$$

La série Σu_n tendant vers une limite finie $c+di$, Σa_n et Σb_n tendront respectivement vers c et d. D'autre part, la série $\Sigma|u_n| = \Sigma\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ est divergente, par hypothèse, et, ses termes étant positifs, elle a une somme infinie. Il en sera de même *a fortiori* de la somme $\Sigma(|a_n|+|b_n|)$ dont les termes sont au moins égaux aux siens. Donc, l'une au moins des deux séries $\Sigma|a_n|$, $\Sigma|b_n|$ a une somme infinie. Donc, l'une au moins des deux séries Σa_n et Σb_n est semi-convergente. On pourra donc, en modifiant l'ordre des termes de la série s, donner une valeur arbitraire à sa partie réelle, ou à sa partie imaginaire.

293. Théorème. — *Si deux séries $s = \Sigma u_n$ et $t = \Sigma v_n$ sont absolument convergentes, la série $\sigma = \Sigma u_\alpha v_\beta$ formée par les produits deux à deux de leurs termes, écrits dans un ordre quelconque, sera absolument convergente et aura pour somme st.*

Soit, en effet, σ_m la somme des m premiers termes de la série σ, le nombre m étant quelconque, mais suffisant pour qu'on retrouve dans σ_m tous les termes du produit

$$s_n t_n = (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n),$$

n étant un nombre donné. On aura

$$\sigma_m = s_n t_n + \mathrm{R},$$

R étant une somme de termes $u_\alpha v_\beta$, dans chacun desquels l'un au moins des deux indices α, β sera $> n$.

Soit $\mathrm{R} = u_\alpha v_\beta + u_{\alpha'} v_{\beta'} + \ldots$ et soit $n+p$ le plus grand des indices α, β, α', β', ... On aura

$$\begin{aligned}
|\sigma_m - st| &\leqq |s_n t_n - st| + |\mathrm{R}| \\
&\leqq |s_n t_n - st| + |u_\alpha||v_\beta| + |u_{\alpha'}||v_{\beta'}| + \ldots \\
&\leqq |s_n t_n - st| + (|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|)(|v_1| + \ldots + |v_{n+p}|) \\
&\quad + (|u_1| + \ldots + |u_n|)(|v_{n+1}| + \ldots + |v_{n+p}|).
\end{aligned}$$

Or, les séries $S = \Sigma |u_n|$, $T = \Sigma |v_n|$ étant convergentes, par hypothèse on aura

$$|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon_n,$$
$$|v_{n+1}| + \ldots + |v_{n+p}| < \varepsilon'_n$$

et, d'autre part,

$$|u_1| + \ldots + |u_n| \quad < S,$$
$$|v_1| + \ldots + |v_{n+p}| < T.$$

Donc

$$|\sigma_m - st| < |s_n t_n - st| + \varepsilon_n T + \varepsilon'_n S,$$

quantité dont chaque terme converge vers zéro si n tend vers ∞. Mais on peut prendre n aussi grand qu'on veut, à condition de faire croître en même temps m. On aura donc bien, pour $m = \infty$,

$$\lim |\sigma_m - st| = 0.$$

294. Ce théorème ne subsiste évidemment pas si les séries s et t ne sont pas absolument convergentes. Mais si l'une d'elles seulement, t, est semi-convergente, on peut le remplacer par le suivant :

La série W *qui a pour terme général*

$$w_n = (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1)$$

est convergente et a pour produit st.

En effet, on a par hypothèse

$$|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon_n,$$
$$|v_{n+1} + \ldots + v_{n+p}| < \varepsilon'_n.$$

Cela posé, la somme

$$W_n = w_1 + \ldots + w_n$$

est évidemment égale à

$$s_n t_n - u_2 v_n - u_3(v_{n-1} + v_n) - \ldots$$
$$- u_n(v_2 + v_3 + \ldots v_n).$$

On en déduit

$$|W_n - st| \leqq |s_n t_n - st| + |u_2||v_n| + |u_3||v_{n-1} + v_n| + \ldots$$
$$+ |u_n||v_2 + v_3 + \ldots + v_n|$$
$$< |s_n t_n - st| + |u_2|\varepsilon'_{n-1} + |u_3|\varepsilon'_{n-2} + \ldots + |u_n|\varepsilon'_n.$$

Soit m le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$. Les quantités $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n$ formant une suite non croissante, on aura, *a fortiori*,

$$\begin{aligned} |W_n - st| &< |s_n t_n - st| + (|u_2| + \ldots + |u_m|)\varepsilon'_{n-m+1} \\ &\quad + (|u_{m+1}| + \ldots + |u_n|)\varepsilon'_1 \\ &< |s_n t_n - st| + \varepsilon_1 \varepsilon'_{n-m+1} + \varepsilon_m \varepsilon'_1. \end{aligned}$$

Si n tend vers ∞, il en sera de même de m et $n - m + 1$. Donc tous les termes du second membre tendront vers zéro, et l'on aura

$$\lim |W_n - st| = 0.$$

295. Si les séries s et t sont toutes deux semi-convergentes, la série W pourra ne plus être convergente; mais, si elle l'est, on aura encore

$$W = st.$$

Pour le faire voir, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Si les quantités $s_1, \ldots, s_n$ convergent vers une limite s on aura

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s.$$

On a, en effet,

$$\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s + \frac{(s_1 - s) + \ldots + (s_n - s)}{n},$$

d'où

$$\left| \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} - s \right| \overline{\overline{<}} \frac{|s_1 - s| + \ldots + |s_n - s|}{n}.$$

D'ailleurs, $s_1, s_2, \ldots$ tendant vers une limite s, on a

$$|s_n - s_{n+p}| < \varepsilon_n,$$

et à la limite, en faisant tendre p vers ∞,

$$|s_n - s| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n.$$

Donc

$$\left|\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}-s\right| \leqq \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n}{n}.$$

Les quantités ε formant une suite non croissante, on aura, *a fortiori*, en désignant par λ l'entier positif le plus voisin de $\sqrt{n}$,

$$\left|\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}-s\right| \leqq \frac{\lambda\varepsilon_1+(n-\lambda)\varepsilon_{\lambda+1}}{n}$$
$$\leqq \frac{\lambda\varepsilon_1}{n}+\varepsilon_{\lambda+1},$$

et, en faisant tendre n vers ∞,

$$\lim\left(\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}-s\right)=0.$$

Les quantités $s_1, \ldots, s_n$ étant toujours supposées converger vers s, leurs modules $|s_1|, \ldots, |s_n|$ convergent évidemment vers $|s|$. Donc on aura également

$$\lim\left|\frac{|s_1|+\ldots+|s_n|}{n}\right|=|s|.$$

Si donc les séries s, t, W sont convergentes, on aura, en désignant respectivement par s_n, t_n, W_n les sommes de leurs n premiers termes,

$$s=\lim\frac{s_1+\ldots+s_n}{n}, \qquad t=\lim\frac{t_1+\ldots+t_n}{n},$$
$$W=\lim\frac{W_1+\ldots+W_n}{n}.$$

296. Cela posé, on a

$$\begin{aligned}W_n &= w_1+\ldots+w_n\\ &= u_1(v_1+\ldots+v_n)+u_2(v_1+\ldots+v_{n-1})+\ldots\\ &= u_1t_n+u_2t_{n-1}+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_1+\ldots+W_n &= u_1t_n+(u_1+u_2)t_{n-1}+\ldots\\ &= s_1t_n+s_2t_{n-1}+\ldots+s_nt_1.\end{aligned}$$

Posons

$$s_\mu - s = h_\mu, \qquad t_\mu - t = k_\mu,$$

d'où

$$|h_\mu| \leqq \varepsilon_\mu, \qquad |k_\mu| \leqq \varepsilon'_\mu.$$

On aura, en désignant encore par m le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{2}$,

$$\begin{gathered} s_1 t_n + \ldots + s_m t_{n-m+1} \\ = (s_1 + \ldots + s_m)t + s_1 k_n + \ldots + s_m k_{n-m+1}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} s_{m+1} t_{n-m} + \ldots + s_n t_1 \\ = (t_1 + \ldots + t_{n-m})s + h_{m+1} t_{n-m} + \ldots + h_n t_1, \end{gathered}$$

et, par suite,

$$\begin{gathered} \frac{W_1 + \ldots + W_n}{n} - \frac{(s_1 + \ldots + s_m)t}{m}\frac{m}{n} - \frac{(t_1 + \ldots + t_{n-m})s}{n-m}\frac{n-m}{n} \\ = \frac{(s_1 k_n + \ldots + s_m k_{n-m+1}) + (h_{m+1} t_{n-m} + \ldots + h_n t_1)}{n}. \end{gathered}$$

Passons à la limite pour $n = \infty$. Si l'on remarque que m et $n - m$ deviennent infinis avec n et que $\frac{m}{n}$, $\frac{n-m}{n}$ ont pour limite commune $\frac{1}{2}$, on voit que la limite du premier membre sera

$$W - \frac{st}{2} - \frac{st}{2} = W - st.$$

Donc on aura

$$W - st = \lim \left[\frac{(s_1 k_n + \ldots + s_m k_{n-m+1}) + h_{m+1} t_{n-m} + \ldots + h_n t_1}{n} \right].$$

Or ce second membre tend vers zéro. En effet, son module est au plus égal à

$$\begin{gathered} \frac{|s_1|\varepsilon'_n + \ldots + |s_m|\varepsilon'_{n-m+1} + \varepsilon_{m+1}|t_{n-m}| + \ldots + \varepsilon_n |t_1|}{n} \\ \leqq \frac{|s_1| + \ldots + |s_m|}{m}\frac{m}{n}\varepsilon'_{n-m+1} + \frac{|t_1| + \ldots + |t_{n-m}|}{n-m}\frac{n-m}{n}\varepsilon_{m+1}. \end{gathered}$$

Or, si n tend vers ∞, $\dfrac{|s_1|+\ldots+|s_m|}{m}$ tendra vers $|s|$, $\dfrac{|t_1|+\ldots+|t_{n-m}|}{n-m}$ vers $|t|$, $\dfrac{m}{n}$ et $\dfrac{n-m}{n}$ vers $\frac{1}{2}$, ε'_{n-m+1} et ε_{m+1} vers zéro.

297. Cherchons à obtenir des règles qui nous permettent de distinguer si une série est ou non convergente.

Considérons à cet effet une série dont le terme général soit un produit de deux facteurs, telle que la suivante :

$$\Sigma \alpha_n u_n.$$

Cette série sera convergente si la quantité

$$(2) \qquad |\alpha_{n+1} u_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} u_{n+p}|$$

tend vers zéro pour $n = \infty$, quel que soit p. Elle sera même absolument convergente si

$$|\alpha_{n+1}|\,|u_{n+1}| + \ldots + |\alpha_{n+p}|\,|u_{n+p}|$$

tend également vers zéro.

Cette dernière condition sera certainement satisfaite si : 1° la série Σu_n est absolument convergente; 2° les modules des facteurs α_n ne surpassent pas un nombre fixe A.

On aura en effet, dans ce cas,

$$|\alpha_{n+1}|\,|u_{n+1}| + \ldots + |\alpha_{n+p}|\,|u_{n+p}| \overline{\overline{<}} A(|u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|)$$
$$< A\varepsilon_n,$$

quantité qui tend vers zéro pour $n = \infty$.

Donc, *en multipliant les termes d'une série absolument convergente par des facteurs dont les modules ne surpassent pas un nombre fixe, on obtient une nouvelle série de même nature.*

Si, de plus, les modules des facteurs α_n ne deviennent jamais inférieurs à un autre nombre fixe a, leurs inverses ne pourront surpasser $\frac{1}{a}$, et l'on pourra réciproquement conclure de la convergence absolue de la série $\Sigma \alpha_n u_n$ celle de

la série Σu_n. Les deux séries seront donc en même temps absolument convergentes ou non.

298. Deux autres cas de convergence certaine peuvent être mis en évidence, en mettant l'expression (2) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&|\alpha_{n+p}(u_{n+p}+\ldots+u_{n+1})\\&\quad+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})(u_{n+p-1}+\ldots+u_{n+1})+\ldots+(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})u_{n+1}|\\&=|\alpha_{n+p}(s_{n+p}-s_n)\\&\quad+(\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p})(s_{n+p-1}-s_n)+\ldots+(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2})(s_{n+1}-s_n)|.\end{aligned}$$

Soit M_n le plus grand des nombres $|s_{n+p}-s_n|$, ..., $|s_{n+1}-s_n|$. L'expression précédente sera au plus égale à

$$(3)\qquad (|\alpha_{n+p}|+|\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|+\ldots+|\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}|)M_n.$$

Cette quantité tendra vers zéro pour $n=\infty$, si l'un des deux facteurs qui la composent tend vers zéro, l'autre restant fini.

299. Supposons, en premier lieu, avec Dirichlet :

1° Que la série

$$(4)\qquad |\alpha_1-\alpha_2|+\ldots+|\alpha_{n+1}-\alpha_n|+\ldots$$

soit convergente ;

2° Qu'on ait, pour $n=\infty$,

$$\lim \alpha_n = 0;$$

3° Que les modules des sommes $s_1, s_2, \ldots$ ne surpassent pas une limite fixe L.

Si ces conditions sont remplies, on aura

$$(5)\qquad |\alpha_{n+p-1}-\alpha_{n+p}|+\ldots+|\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}|<\varepsilon'_n,$$

ε'_n tendant vers zéro.

D'après la seconde hypothèse, α_{n+p} tendra également vers zéro. Enfin les quantités $|s_{n+p}-s_n|$, ... et, par suite, M_n ne surpasseront pas $2L$. Il y aura donc convergence.

Le cas particulier le plus intéressant est celui où l'on suppose :

1° Que les quantités α sont positives et décroissantes;

2° Qu'on ait $\lim \alpha_n = 0$; dans ce cas, la série (4), qui se réduit à

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots,$$

est évidemment convergente, et a pour somme α_1;

3° Que les quantités $u_1, u_2, \ldots$ forment une suite périodique, telle que la somme des termes d'une période soit nulle.

Particularisons encore, en supposant que la suite des u se réduise à la suivante,

$$+1, \quad -1, \quad +1, \quad -1, \quad \ldots;$$

nous obtiendrons ce théorème :

Une série

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \ldots,$$

dont les termes sont positifs et décroissants, et tels que l'on ait $\lim \alpha_n = 0$, *est toujours convergente.*

300. Supposons, en second lieu, avec Abel :

1° Que la série (4) soit convergente;

2° Que la série $u_1 + \ldots + u_n + \ldots$ le soit aussi.

L'expression (5) tendra encore vers zéro. On a, d'autre part,

$$\alpha_{n+p} = \alpha_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) - \ldots - (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}),$$

d'où

$$|\alpha_{n+p}| < |\alpha_1| + A,$$

A désignant la somme de la série (4).

Donc le premier facteur de (3) restera au-dessous d'un nombre fixe. Quant aux quantités $|s_{n+p} - s_n|, \ldots$, elles seront toutes moindres que ε_n. Le second facteur tend donc vers zéro, et il y a encore convergence.

La convergence de la série (4) est évidemment assurée si les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont réelles, positives et non crois-

santes; dans ce cas particulier, on aura donc le théorème suivant :

Une série convergente reste encore convergente si l'on multiplie ses divers termes par des nombres positifs formant une suite non croissante.

301. Les séries absolument convergentes, étant les seules où l'on puisse changer à son gré l'ordre des termes, peuvent seules être employées commodément dans l'analyse. Il importe d'apprendre à les reconnaître. Cette recherche doit se faire sur la série des modules, dont les termes sont réels et positifs. Cette circonstance donne un intérêt particulier à l'étude de la convergence de ce genre de séries, qui va désormais nous occuper exclusivement.

Cette recherche est fondée sur le principe suivant :

Si une série (à termes positifs) Σv_n a ses termes plus petits à partir d'un certain rang que ceux d'une série convergente de même nature Σu_n, elle sera elle-même convergente.

En effet, si l'on a

$$v_n < u_n, \qquad u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} < \varepsilon_n,$$

on aura *a fortiori*

$$v_{n+1} + \ldots + v_{n+p} < \varepsilon_n.$$

Il est d'ailleurs évident qu'on n'altère pas la convergence d'une série en modifiant arbitrairement un certain nombre de termes au début. Il suffit donc que l'inégalité $v_n < u_n$ ait lieu pour toutes les valeurs de n qui surpassent un nombre fixe ν.

Si, au contraire, la série Σv_n a ses termes plus grands que ceux de Σu_n, et si cette dernière série est divergente, Σv_n le sera.

La démonstration est la même, le sens des inégalités étant renversé.

Pour juger de la convergence ou de la divergence d'une série, il conviendra donc de former un tableau de séries convergentes, un autre de séries divergentes, auxquelles on comparera la série donnée.

302. La comparaison avec une progression géométrique nous fournit une première règle simple et suffisante dans un grand nombre de cas :

La série Σu_n est convergente si, à partir d'un certain rang, on a constamment $\sqrt[n]{u_n} < r$, r étant une constante < 1; divergente si, à partir d'un certain rang, on a $\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$, d'où $u_n \geqq 1$.

Car on a, dans le premier cas,

$$u_n < r^n, \qquad \Sigma r^n \text{ convergente,}$$

et, dans le second,

$$u_n > 1^n, \qquad \Sigma 1^n \text{ divergente.}$$

Le premier cas se présentera, en particulier, si $\sqrt[n]{u_n}$ tend pour $n = \infty$ vers une limite l moindre que 1; car soit r une quantité quelconque comprise entre l et l'unité; on pourra trouver un nombre ν à partir duquel $\sqrt[n]{u_n}$ différera de l d'une quantité moindre en valeur absolue que $r - l$. A partir de ce moment, on aura constamment $\sqrt{u_n} < r$.

On voit de même que le second cas se présente si $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers une limite > 1.

303. Lorsque la règle précédente ne s'applique plus, on se trouve conduit à chercher de nouvelles séries moins rapidement convergentes (ou divergentes) que les progressions géométriques, pour leur comparer la série donnée.

On peut construire à volonté de semblables séries par les considérations suivantes :

Soit $M_1, \ldots, M_n$ une suite de quantités positives crois-

santes, et telles que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} M_n = \infty$. La série

$$(6) \qquad M_1 + (M_2 - M_1) + \ldots + (M_n - M_{n-1}) + \ldots$$

sera une série divergente à termes positifs, où la somme s_n des n premiers termes sera M_n.

La série

$$(7) \quad \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right) + \left(\frac{1}{M_2} - \frac{1}{M_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{M_n} - \frac{1}{M_{n+1}}\right) + \ldots = \sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} M_n}$$

sera, au contraire, convergente; la somme s_n des n premiers termes a pour valeur $\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_{n+1}}$, expression dont la limite s est $\frac{1}{M_1}$.

Réciproquement, toute série à termes positifs pourra être mise sous la forme (6) si elle est divergente, sous la forme (7) si elle est convergente. Les quantités $M_1, \ldots, M_n$ seront déterminées, dans le premier cas, par la condition

$$M_n = s_n,$$

dans le second, par les conditions

$$\frac{1}{M_1} = s, \qquad \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_{n+1}} = s_n,$$

d'où l'on tire les valeurs

$$M_1 = \frac{1}{s}, \qquad M_{n+1} = \frac{1}{s - s_n}.$$

304. Nous allons montrer que la suite $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ permet de construire deux systèmes de séries en nombre illimité, à convergence (ou à divergence) de moins en moins rapide, et dont les séries (7) et (6) ne sont que les premiers termes.

Nous nous appuierons, pour le faire, sur quelques inégalités de la théorie des logarithmes que nous allons établir.

Si $x > 0$, on aura

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots > 1 + x,$$

d'où, en posant $x = \frac{y-z}{z}$ $(y > z)$,

$$e^{\frac{y-z}{z}} > \frac{y}{z}.$$

Mais on a, d'autre part, si $0 < x < 1$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots < 1 + x + x^2 + \ldots < \frac{1}{1-x},$$

d'où, en posant $x = \frac{y-z}{y}$ $(y > z)$,

$$e^{\frac{y-z}{y}} < \frac{y}{z}.$$

En prenant les logarithmes dans les deux membres de ces inégalités, il viendra

$$(8) \qquad \frac{y-z}{y} < \operatorname{Log} y - \operatorname{Log} z < \frac{y-z}{z}.$$

Plus généralement, posons

$$\operatorname{Log}\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}_2 x, \qquad \operatorname{Log}\operatorname{Log}_2 x = \operatorname{Log}_3 x, \qquad \ldots,$$
$$\Lambda_\mu x = \operatorname{Log} x \operatorname{Log}_2 x \ldots \operatorname{Log}_\mu x.$$

On aura, si $y > z$,

$$\operatorname{Log} y > \operatorname{Log} z, \qquad \ldots, \qquad \operatorname{Log}_\mu y > \operatorname{Log}_\mu z, \qquad \ldots.$$

Appliquant les inégalités (8) à l'expression

$$\operatorname{Log}_{\mu+1} y - \operatorname{Log}_{\mu+1} z = \operatorname{Log} \frac{\operatorname{Log}_\mu y}{\operatorname{Log}_\mu z},$$

il viendra

$$\frac{\operatorname{Log}_\mu y - \operatorname{Log}_\mu z}{\operatorname{Log}_\mu y} < \operatorname{Log}_{\mu+1} y - \operatorname{Log}_{\mu+1} z < \frac{\operatorname{Log}_\mu y - \operatorname{Log}_\mu z}{\operatorname{Log}_\mu z}.$$

Faisons le produit des inégalités obtenues en posant successivement $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$; multiplions encore par l'inégalité (8); il viendra

$$(9)\qquad \frac{y-z}{y\Lambda_{m-1}y} > \operatorname{Log}_m y - \operatorname{Log}_m z < \frac{y-z}{z\Lambda_{m-1}z}.$$

305. Ces préliminaires posés, nous pouvons établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $M_1, \ldots, M_n$ *une suite de quantités positives satisfaisant aux conditions*

$$M_{n+1} > M_n, \qquad \lim_{n=\infty} M_n = \infty,$$

et soit ρ *une quantité positive quelconque :*

Les séries

$$\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}M_n^\rho}, \quad \sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}\operatorname{Log}M_{n+1}\operatorname{Log}^\rho M_n}, \quad \ldots,$$
$$\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}\Lambda_m M_{n+1}\operatorname{Log}_m^\rho M_n}, \quad \ldots$$

seront toutes convergentes, et les séries

$$\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_n}, \quad \sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_n\operatorname{Log}M_n}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_n\Lambda_m M_n}, \quad \ldots$$

seront toutes divergentes.

En effet, les quantités $M_1^\rho, \ldots, M_n^\rho, \ldots$ satisfaisant évidemment aux conditions

$$M_{n+1}^\rho > M_n^\rho \qquad \text{et} \qquad \lim_{n=\infty} M_n^\rho = \infty,$$

la série $\sum \frac{M_{n+1}^\rho - M_n^\rho}{M_{n+1}^\rho M_n^\rho}$ sera convergente $\left(\text{et aura pour somme } \frac{1}{M_1^\rho}\right)$. La série $\sum \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}M_n^\rho}$ le sera également (297) si le rapport

$$\alpha_n = \frac{M_{n+1}-M_n}{M_{n+1}M_n^\rho} : \frac{M_{n+1}^\rho - M_n^\rho}{M_{n+1}^\rho M_n^\rho}$$

des termes généraux de ces deux séries reste inférieur à une limite fixe. Il est aisé de voir qu'il en est ainsi; car, si nous posons, pour abréger,

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = q,$$

on aura

$$\alpha_n = \frac{1-q}{1-q^\rho},$$

et q sera positif et < 1. Soit μ un entier quelconque, tel que l'on ait $\frac{1}{\mu} < \rho$. On aura

$$\alpha_n < \frac{1-q}{1-q^{\frac{1}{\mu}}} < 1 + q^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + q^{\frac{\mu-1}{\mu}} < \mu.$$

Donc la série

$$\sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} M_n^\rho}$$

est convergente, et l'on sait d'ailleurs que la série

$$\Sigma(M_{n+1} - M_n)$$

est divergente.

En second lieu, les quantités

$$\text{Log}_m M_1, \quad \ldots, \quad \text{Log}_m M_n \quad \ldots$$

satisfont évidemment aux relations

$$\text{Log}_m M_{n+1} > \text{Log}_m M_n, \qquad \lim_{n=\infty} \text{Log}_m M_n = \infty.$$

Donc la série

$$\sum \frac{\text{Log}_m M_{n+1} - \text{Log}_m M_n}{\text{Log}_m M_{n+1} \, \text{Log}_m^\rho M_n}$$

est convergente. Or, en appliquant l'inégalité (9), on voit que ses termes sont plus grands que ceux de la série

$$\sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} \Lambda_{m-1} M_{n+1} \, \text{Log}_m M_{n+1} \, \text{Log}_m^\rho M_n}$$
$$= \sum \frac{M_{n+1} - M_n}{M_{n+1} \Lambda_m M_{n+1} \, \text{Log}_m^\rho M_n}.$$

Celle-ci est donc convergente.

De même, la série

$$\sum (\mathrm{Log}_m \mathrm{M}_{n+1} - \mathrm{Log}_m \mathrm{M}_n)$$

est divergente, et ses termes sont plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{\mathrm{M}_{n+1} - \mathrm{M}_n}{\mathrm{M}_n \Lambda_{m-1} \mathrm{M}_n}.$$

Celle-ci est donc divergente.

306. Comme application particulière, posons

$$\mathrm{M}_1 = 1, \quad \ldots, \quad \mathrm{M}_n = n, \quad \ldots.$$

Nous obtiendrons la suite de séries divergentes

$$(10) \qquad \sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n \,\mathrm{Log}\, n}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{n \Lambda_m n}, \quad \ldots.$$

Posant, d'autre part, $\mathrm{M}_n = n - 1$, nous aurons de même la suite de séries convergentes

$$\sum \frac{1}{n(n-1)^\rho}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{n \,\mathrm{Log}\, n \,\mathrm{Log}^\rho (n-1)}, \quad \ldots.$$

A cette dernière suite, on peut substituer celle-ci, dont les termes sont respectivement plus petits et dont la forme est un peu plus simple :

$$(11) \qquad \sum \frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \sum \frac{1}{n \,\mathrm{Log}^{1+\rho} n}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{1}{n \Lambda_m n \,\mathrm{Log}_m^\rho n}.$$

On remarquera que, x étant un nombre donné quelconque, ses logarithmes successifs $\mathrm{Log}\, x$, $\mathrm{Log}_2 x$, ... décroîtront sans cesse et finiront par devenir négatifs.

Si $\mathrm{Log}_\mu x$ est négatif, il n'aura plus de logarithme arithmétique, et les symboles suivants $\mathrm{Log}_{\mu+1} x$, ... n'auront plus de sens. Il pourra donc se présenter au début de chacune des séries types (10) et (11) un nombre limité de termes illusoires, suivis d'un terme négatif. Mais on pourra leur sub-

stituer des nombres positifs arbitraires sans altérer la convergence ou la divergence.

307. Les considérations suivantes montrent directement la divergence des séries (10) et la convergence des séries (11). Elles permettent, en outre, d'assigner deux limites entre lesquelles se trouve comprise la somme d'un nombre quelconque de termes consécutifs de chacune d'elles.

Soit $F(n)$ une fonction de n, dont la dérivée $f(n)$ soit positive, continue et décroissante, et tende vers zéro pour $n = \infty$. On a, pour les valeurs de x comprises entre n et $n+1$,

$$f(n) > f(x) > f(n+1)$$

et, en intégrant de n à $n+1$,

$$f(n) > \int_n^{n+1} f(x)\,dx > f(n+1).$$

Posons successivement $n = \nu, \nu+1, \ldots, \nu+p-1$ et ajoutons les inégalités obtenues; il viendra

$$f(\nu)+\ldots+f(\nu+p-1) > \int_\nu^{\nu+p} f(x)\,dx$$
$$> f(\nu+1)+\ldots+f(\nu+p).$$

La somme $f(\nu+1)+\ldots+f(\nu+p)$ sera donc comprise entre les deux nombres fixes

$$\int_\nu^{\nu+p} f(x)\,dx = F(\nu+p) - F(\nu)$$

et

$$\int_\nu^{\nu+p} f(x)\,dx + f(\nu+p) - f(\nu).$$

Soit en particulier

$$F(n) = \operatorname{Log} n, \qquad \text{d'où} \qquad f(n) = \frac{1}{n};$$

posons en outre $\nu = 1$, nous voyons que la somme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p+1}$$

est comprise entre $\operatorname{Log}(p+1)$ et $\operatorname{Log}(p+1) + \frac{1}{p+1} - 1$.

Si ν tend vers ∞, $f(\nu)$ et $f(\nu+p)$ tendant vers zéro, on aura

$$\lim_{\nu=\infty} [f(\nu+1) + \ldots + f(\nu+p)] = \lim_{\nu=\infty} \int_{\nu}^{\nu+p} f(x)\,dx.$$

Pour que la série $\Sigma f(n)$ soit convergente, il faut et il suffit que le premier membre de cette égalité soit nul quel que soit p. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence est donc que l'intégrale

$$\int_{\nu}^{\nu+p} f(x)\,dx = \mathrm{F}(\nu+p) - \mathrm{F}(\nu)$$

tende vers zéro ou, ce qui revient au même, que $\mathrm{F}(n)$ tende vers une limite finie pour $n = \infty$.

308. Cela posé, les fonctions

$$\operatorname{Log} n, \quad \operatorname{Log}_2 n, \quad \ldots, \quad \operatorname{Log}_{m+1} n, \quad \ldots,$$

qui ont respectivement pour dérivées

$$\frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n \operatorname{Log} n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n \Lambda_m n}, \quad \ldots,$$

deviennent infinies pour $n = \infty$. Donc les séries (10) sont divergentes.

Au contraire, les fonctions

$$\frac{n^{-\rho}}{-\rho}, \quad \frac{\operatorname{Log}^{-\rho} n}{-\rho}, \quad \ldots, \quad \frac{\operatorname{Log}_m^{-\rho} n}{-\rho}, \quad \ldots,$$

qui ont pour dérivées

$$\frac{1}{n^{1+\rho}}, \quad \frac{1}{n \operatorname{Log}^{1+\rho} n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n \Lambda_m n \operatorname{Log}_m^{\rho} n}, \quad \ldots,$$

s'annulent pour $n = \infty$. Donc les séries (11) sont convergentes.

309. La remarque suivante fournit un second procédé pour juger de la convergence d'une série à termes positifs par comparaison avec une autre série de même nature :

La série Σv_n est convergente si, pour toutes les valeurs de n non inférieures à un nombre fixe ν, on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \geqq \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

la série Σu_n étant convergente.

Elle est divergente si, pour $n \geqq \nu$, on a

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \leqq \frac{u_n}{u_{n+1}},$$

la série Σu_n étant divergente.

On a, en effet, dans le premier cas,

$$\frac{v_\nu}{u_\nu} \geqq \frac{v_{\nu+1}}{u_{\nu+1}} \geqq \ldots \geqq \frac{v_n}{u_n} \geqq \ldots$$

Donc, à partir du rang ν, la série Σv_n aura ses termes au plus égaux à ceux de la série convergente $\frac{v_\nu}{u_\nu} \Sigma u_n$; elle est donc elle-même convergente.

La seconde partie du théorème s'établit de même, le sens des inégalités étant changé.

310. Si l'on suppose que Σu_n soit une progression géométrique de raison r, on aura la proposition suivante :

La série Σv_n sera convergente si, pour $n \geqq \nu$, on a constamment

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} > \frac{1}{r}, \qquad r \text{ étant } < 1$$

$\left(\textit{et en particulier si } \frac{v_n}{v_{n+1}} \textit{ tend vers une limite } l \textit{ plus grande}\right.$
$\left.\textit{que } 1\right)$.

Elle sera divergente si, pour $n \gtreqless \nu$, *on a constamment*

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} < 1.$$

311. La considération des séries (10) et (11) conduit à des règles plus précises. Pour les formuler, calculons pour chacune de ces séries la valeur approchée du rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$, en y négligeant les termes d'ordre plus élevé que $\frac{1}{n^2}$.

On a, avec cette approximation,

$$\frac{(n+1)^\rho}{n^\rho} = \frac{n^\rho + \rho n^{\rho-1} + \ldots}{n^\rho} = 1 + \frac{\rho}{n} + \frac{\rho(\rho-1)}{2}\frac{1}{n^2},$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}(n+1) &= \operatorname{Log} n + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\\
&= \operatorname{Log} n\left(1 + \frac{1}{n \operatorname{Log} n}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}_2(n+1) &= \operatorname{Log}_2 n + \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{n \operatorname{Log} n}\right)\\
&= \operatorname{Log}_2 n + \frac{1}{n \operatorname{Log} n}\\
&= \operatorname{Log}_2 n\left(1 + \frac{1}{n \Lambda_2 n}\right),
\end{aligned}$$

. . . .

et généralement

$$\operatorname{Log}_m(n+1) = \operatorname{Log}_m n\left(1 + \frac{1}{n \Lambda_m n}\right),$$

$$\operatorname{Log}_m^\rho(n+1) = \operatorname{Log}_m^\rho n\left(1 + \frac{\rho}{n \Lambda_m n}\right).$$

Enfin

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n},$$

. . . . ,

$$\frac{(n+1)\Lambda_m(n+1)}{n\Lambda_m n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n\operatorname{Log}n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n\Lambda_m n}\right)$$
$$=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\operatorname{Log}n}+\ldots+\frac{1}{n\Lambda_m n},$$

. . . . ,

$$\frac{(n+1)^{1+\rho}}{n^{1+\rho}}=1+\frac{1+\rho}{n}+\frac{(1+\rho)\rho}{2n^2},$$

. . . . ,

$$\frac{(n+1)\Lambda_m(n+1)\operatorname{Log}_m^\rho(n+1)}{n\Lambda_m n\operatorname{Log}_m^\rho n}$$
$$=1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\operatorname{Log}n}+\ldots+\frac{1+\rho}{n\Lambda_m n}.$$

Telles sont les valeurs du rapport $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ pour les séries (10) et (11). La première de ces valeurs seule est exacte. Les autres doivent être complétées par un reste de la forme $\frac{\theta_n}{n^2}$, θ_n étant infiniment petit pour $n=\infty$.

312. Cela posé, une série Σv_n sera divergente si, à partir de $n=\nu$, on a constamment

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}<1+\frac{1}{n}$$

ou, plus généralement,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}\overline{\overline{<}}\left(1+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n\Lambda_m n}\right)-\frac{\lambda}{n^2},$$

λ étant une quantité positive fixe.

En effet, en la comparant à la série (10) correspondante, la différence

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\overline{<}} - \frac{\lambda + \theta_n}{n^2}$$

finira par devenir négative, θ_n étant infiniment petit.

Au contraire, Σv_n sera convergente, si l'on peut trouver une quantité positive λ telle que l'on ait, à partir de $n = \nu$,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{\overline{>}} 1 + \frac{1+\lambda}{n}$$

ou, plus généralement,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \overline{\overline{>}} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \operatorname{Log} n} + \ldots + \frac{1+\lambda}{n \Lambda_m n}.$$

En effet, comparons la série Σv_n à la série correspondante Σu_n, formée avec une valeur de ρ moindre que λ. La différence

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{\overline{>}} \frac{\lambda - \rho}{n \Lambda_m n} - \frac{\theta_n}{n^2}$$

prendra, pour de grandes valeurs de n, le signe de son premier terme, qui est positif.

313. Lorsque le rapport $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ est développable suivant les puissances entières de $\frac{1}{n}$ (ce cas est à peu près le seul qui se présente dans la pratique), les règles précédentes permettent de décider, dans tous les cas, s'il y a ou non convergence.

Soit, en effet, en s'arrêtant aux termes du second ordre,

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\theta'_n}{n^2},$$

θ'_n restant fini pour $n = \infty$.

Si $\alpha < 1$, ou $\alpha = 1$, $\beta \overline{\overline{<}} 1$, il y aura divergence; car, en

comparant la série Σv_n à la suivante,

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n \operatorname{Log} n},$$

qui est divergente, on aura

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha - 1 + \frac{\beta - 1}{n} - \frac{1}{n \operatorname{Log} n} + \frac{\theta'_n - \theta_n}{n^2},$$

et le terme principal, qui, pour de grandes valeurs de n, donne son signe à cette expression, sera négatif.

Au contraire, si $\alpha > 1$, ou $\alpha = 1$, $\beta > 1$, il y aura convergence; car, en comparant la série Σv_n à la série convergente

$$\sum u_n = \sum \frac{1}{n \operatorname{Log}^{1+\rho} n},$$

on aura

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \alpha - 1 + \frac{\beta - 1}{n} - \frac{1 + \rho}{n \operatorname{Log} n} + \frac{\theta'_n - \theta_n}{n^2},$$

expression qui, pour n suffisamment grand, sera positive, car son terme principal est positif.

314. Voici une dernière règle de convergence, due à M. Kummer :

Si, pour $n \gtreqless \nu$, on peut mettre le rapport $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ sous la forme

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{e_{n+1} + \alpha}{e_n},$$

α, e_ν, ..., e_n, ... désignant des quantités positives quelconques, la série Σv_n sera convergente.

On a, en effet,

$$v_{n+1} = \frac{v_n e_n - v_{n+1} e_{n+1}}{\alpha}.$$

Ajoutons les équations obtenues en donnant successivement

à n les valeurs ν, $\nu+1$, $\nu+p-1$; il viendra

$$v_{\nu+1}+\ldots+v_{\nu+p}=\frac{v_\nu e_\nu - v_{\nu+p}e_{\nu+p}}{\alpha}<\frac{v_\nu e_\nu}{\alpha}.$$

Donc la somme du premier membre tend, pour $p=\infty$, vers une limite au plus égale à $\frac{v_\nu e_\nu}{\alpha}$.

315. Séries a double sens. — On considère parfois des séries telles que

$$(12) \qquad \ldots+u_{-m}+\ldots+u_{-1}+u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots,$$

formées d'une infinité de termes s'étendant dans les deux sens à partir d'un terme central u_0. La somme s d'une semblable série sera, par définition, la limite de la somme

$$s_{mn}=(u_{-m}+\ldots+u_0+\ldots+u_n),$$

lorsque m et n tendent tous deux vers ∞, sans être liés par aucune relation. S'il existe une semblable limite, la série sera convergente. Pour cela, il est évidemment nécessaire et suffisant que les deux séries partielles

$$u_0+\ldots+u_n+\ldots \quad \text{et} \quad u_{-1}+\ldots+u_{-m}+\ldots$$

soient convergentes séparément.

La série (12) sera absolument convergente si ces deux séries le sont. On pourra, dans ce cas, altérer à volonté l'ordre des termes sans changer la somme de la série; les écrire, par exemple, dans l'ordre suivant,

$$u_0+u_1+u_{-1}+\ldots+u_n+u_{-n}+\ldots,$$

de manière à n'avoir plus qu'une série ordinaire.

Pour former le produit de deux séries de l'espèce (12), lorsqu'elles sont absolument convergentes, on n'aura évidemment qu'à former les produits de leurs termes deux à deux; les termes ainsi obtenus, écrits dans un ordre quelconque à la suite les uns des autres, formeront une nouvelle série, égale au produit cherché.

316. Séries multiples. — Soit $u_{m_1 m_2 \ldots}$ un système de quantités, distinguées les unes des autres au moyen de plusieurs indices $m_1, m_2, \ldots$, dont chacun peut prendre une infinité de valeurs entières (par exemple, toutes les valeurs entières et positives).

On peut, d'une infinité de manières, écrire ces termes à la suite les uns des autres et former ainsi une série où chaque terme figure à un rang déterminé, sans qu'aucun d'eux soit omis. (On peut, par exemple, en désignant par $e_1, e_2, \ldots$ une suite quelconque d'entiers croissants, écrire d'abord, dans l'ordre qu'on voudra, ceux des termes $u_{m_1 m_2 \ldots}$ en nombre limité pour lesquels $|m_1| + |m_2| + \ldots \overline{\leq} e_1$, puis ceux, en nombre limité, où cette somme est $> e_1$, mais $\overline{\leq} e_2$, et ainsi de suite).

Une série ainsi formée

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

dont les termes successifs ne sont autres que les nombres $u_{m_1 m_2 \ldots}$ écrits dans un certain ordre, représentera pour nous, si elle est convergente, une valeur de la *série multiple*

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots} u_{m_1 m_2 \ldots}.$$

Toutes les séries V se déduisant de l'une d'elles V′ par le changement de l'ordre de ses termes, on voit (291-292) que, si V′ est semi-convergente, la série multiple admet une infinité de valeurs différentes. Le symbole $\Sigma u_{m_1 m_2 \ldots}$ n'acquerra donc un sens précis que lorsqu'on aura fixé l'ordre dans lequel les termes devront être successivement ajoutés.

Au contraire, si V′ est absolument convergente, la série multiple n'aura qu'une valeur unique (289). Nous dirons, dans ce cas, qu'elle est absolument convergente. La série plus générale $\Sigma \alpha_{m_1 m_2 \ldots} u_{m_1 m_2 \ldots}$ le sera également, si les modules des multiplicateurs $\alpha_{m_1 m_2 \ldots}$ ne surpassent pas un nombre fixe (297). Enfin, on obtiendra le produit de deux semblables

séries en multipliant leurs termes deux à deux et ajoutant dans un ordre quelconque les produits ainsi obtenus.

317. Considérons en particulier la série à termes réels et positifs

$$(13)\qquad S = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha}$$

(où l'on exclut le terme correspondant à $m_1 = m_2 \ldots = m_n = 0$, qui serait infini), et cherchons dans quel cas elle sera convergente.

Soit x un entier positif quelconque. Le nombre des systèmes de valeurs de $m_1, \ldots, m_n$ dont la valeur absolue ne surpasse pas x est évidemment égal à $(2x+1)^n - 1$. Si nous excluons ceux de ces systèmes où $m_1, \ldots, m_n$ sont tous $< x$ en valeur absolue, il en restera

$$(2x+1)^n - (2x-1)^n = n 2^n x^{n-1} + \ldots.$$

Soit S_x l'ensemble des termes de S qui correspondent aux systèmes restants. Chacun de ces termes est évidemment compris entre les deux limites suivantes $\frac{1}{x^{2\alpha}}$ et $\frac{1}{(nx^2)^\alpha}$; on aura donc

$$\frac{n 2^n x^{n-1} + \ldots}{x^{2\alpha}} \overline{>} S_x \overline{>} \frac{1}{n^\alpha} \, \frac{n 2^n x^{n-1} + \ldots}{x^{2\alpha}}.$$

On a d'ailleurs, évidemment,

$$S = S_1 + \ldots + S_x + \ldots$$

et, par suite,

$$T \overline{>} S \overline{>} \frac{1}{n^\alpha} T,$$

en posant, pour abréger,

$$T = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{n 2^n x^{n-1} + \ldots}{x^{2\alpha}}.$$

S sera donc convergente ou divergente en même temps que T.

Mais on peut évidemment écrire

$$T = \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{A_n}{x^{2\alpha-n+1}},$$

A_n tendant pour $x=\infty$ vers la limite constante $n\,2^n$. Pour que T soit convergent, il sera nécessaire et suffisant que la série

$$\sum \frac{1}{x^{2\alpha-n+1}}$$

le soit, ce qui donne (306) la condition

$$2\alpha > n.$$

318. Ce résultat peut être généralisé comme il suit :

Soient φ une fonction continue homogène de degré 2α des indices $m_1, \ldots, m_n$; ψ une fonction des mêmes indices, de degré inférieur à 2α.

Si la fonction φ est de telle nature qu'elle ne s'annule pour aucun système de valeurs réelles des variables $m_1, m_2, \ldots$ (le système o, o, ... excepté), la série

$$\sum \frac{1}{\varphi + \psi}$$

(où l'on exclut de la sommation les termes pour lesquels on aurait $\varphi + \psi = 0$) sera convergente si $\alpha > \frac{n}{2}$, divergente si $\alpha \leqq \frac{n}{2}$.

En effet, donnons successivement aux variables $m_1, m_2, \ldots$ tous les systèmes de valeurs réelles qui satisfont à la condition

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots = 1.$$

Les valeurs correspondantes de φ seront évidemment finies et de même signe, car φ ne pourrait changer de signe qu'en s'annulant.

Soient K la plus grande de ces valeurs, k la plus petite. Le rapport des fonctions φ et $(m_1^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha$ restera com-

pris entre K et k pour tous les systèmes de valeurs qu'on considère. D'ailleurs ce rapport, étant une fonction homogène et de degré zéro de $m_1, \ldots, m_n$, ne dépend que des rapports mutuels de ces quantités; il sera donc toujours compris entre K et k.

D'autre part, ψ étant de degré $< 2\alpha$ par rapport à $m_1, \ldots, m_n$, son rapport à $(m_1^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha$ tendra vers zéro si les variables $m_1, \ldots, m_n$, ou seulement quelques-unes d'entre elles, croissent indéfiniment; car ce rapport est moindre que $\frac{\psi}{m_\rho^{2\alpha}}$, m_ρ désignant la plus grande en valeur absolue des quantités $m_1, \ldots, m_n$, et ce dernier rapport tend évidemment vers zéro.

On aura donc

$$\varphi + \psi = A_{m_1 \ldots m_n}(m_1^2 + \ldots + m_n^2)^\alpha,$$

$A_{m_1 \ldots m_n}$ étant une quantité finie, comprise pour des valeurs suffisamment grandes des variables entre deux limites fixes, voisines de K et de k. La série $\sum \frac{1}{\varphi + \psi}$ sera donc convergente ou divergente en même temps que la série S considérée tout à l'heure.

319. Comme application, considérons la série

$$S_\alpha = \frac{1}{(2\omega_1 m_1 + 2\omega_2 m_2 + z)^\alpha},$$

où $2\omega_1 = a' + a''i$, $2\omega_2 = b' + b''i$, $z = z' + z''i$ sont des quantités complexes et α une quantité positive. La série des modules a pour terme général

$$\frac{1}{[(a'm_1 + b'm_2 + z')^2 + (a''m_1 + b''m_2 + z'')^2]^{\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\varphi + \psi},$$

en posant

$$\varphi = [(a'm_1 + b'm_2)^2 + (a''m_1 + b''m_2)^2]^{\frac{\alpha}{2}}.$$

La fonction φ est continue et homogène de degré α. Enfin, elle ne s'annulera que si $m_1 = m_2 = 0$, pourvu que le déterminant $a' b'' - b' a''$ soit différent de zéro.

On voit donc, en appliquant le théorème précédent, que la série sera absolument convergente si $\alpha > 2$. Elle sera divergente, ou semi-convergente, si $\alpha \overline{\gtrless} 2$.

320. Produits infinis. — Soient, comme précédemment,

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

une suite indéfinie de quantités. Formons les produits successifs

$$\Pi_1 = u_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Pi_n = u_1 u_2 \ldots u_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si n augmente indéfiniment, il peut se faire :

1° Que ces produits successifs ne tendent vers aucune limite déterminée;

2° Qu'ils tendent vers ∞;

3° Qu'ils tendent vers une limite finie Π.

On dira, dans ce dernier cas, que le produit infini

$$u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$$

est *convergent* et a pour valeur Π.

321. Nous admettrons, pour plus de généralité, que $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ puissent être complexes. Soit, en général,

$$u_n = a_n + b_n i = \rho_n(\cos \alpha_n + i \sin \alpha_n).$$

Le produit Π_n aura pour module $\rho_1 \ldots \rho_n$ et pour argument $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Deux cas de convergence seront à distinguer suivant que, pour $n = \infty$, Π_n tend vers zéro ou vers une limite différente de zéro.

Le premier cas se présentera, quels que soient les arguments, si l'on a

$$\lim \rho_1 \ldots \rho_n = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim \operatorname{Log} \rho_1 \ldots \rho_n = \lim(\operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n) = -\infty.$$

Ce cas se reconnaîtra donc à ce caractère que la série

$$\operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n + \ldots$$

est divergente et a pour limite $-\infty$.

322. Supposons, au contraire, que Π_n tende vers une quantité fixe différente de zéro, ayant P pour module et A pour l'un de ses arguments. Il faudra évidemment pour cela qu'on ait

$$\operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n = \operatorname{Log} P + R_n,$$
$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = A + 2k_n\pi + R'_n,$$

k_n étant un entier et R_n, R'_n des quantités qui tendent vers zéro pour $n = \infty$. D'ailleurs les arguments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, n'étant déterminés chacun qu'aux multiples près de 2π, pourront être choisis successivement de manière à faire évanouir les entiers k_n, de sorte que les deux séries

$$\operatorname{Log} \rho_1 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n + \ldots, \tag{14}$$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \ldots \tag{15}$$

soient convergentes (leurs sommes étant Log P et A).

Au lieu de la série (14), il sera souvent plus commode de considérer la série

$$\operatorname{Log} \rho_1^2 + \ldots + \operatorname{Log} \rho_n^2 + \ldots, \tag{16}$$

qui s'obtient en doublant tous ses termes.

Si les séries (15) et (16) sont absolument convergentes, il en sera de même du produit Π, dont la valeur sera évidemment indépendante de l'ordre des facteurs. Il en dépendra, au contraire, et sera semi-convergent, si l'une ou l'autre des deux séries est semi-convergente.

Une condition nécessaire, sinon suffisante, pour la convergence des séries ci-dessus est que leurs termes tendent vers zéro pour $n=\infty$. Il faut pour cela que ρ_n^2 tende vers l'unité et α_n vers zéro. Mais on a

$$\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \qquad \alpha_n = \text{arc}\begin{cases} \sin \dfrac{b_n}{\rho_n} \\ \cos \dfrac{a_n}{\rho_n}. \end{cases}$$

Il faudra donc que a_n tende vers l'unité et b_n vers zéro.

323. Théorème. — *Pour que le produit*

$$\Pi = u_1 \ldots u_n \ldots$$

soit absolument convergent vers une limite différente de zéro, il faut et il suffit que la série

$$s = (u_1 - 1) + \ldots + (u_n - 1) + \ldots$$

soit absolument convergente.

En effet, la convergence de cette série, comme celle du produit, exige évidemment qu'on ait

$$\lim a_n = 1, \qquad \lim b_n = 0, \qquad \lim \rho_n = 1.$$

Cela posé, les expressions

$$\frac{\text{Log}\,\rho_n^2}{\rho_n^2 - 1} = \frac{\text{Log}(1 + \rho_n^2 - 1)}{\rho_n^2 - 1} = 1 - \tfrac{1}{2}(\rho_n^2 - 1) + \ldots$$

et

$$\frac{\alpha_n}{b_n} = \frac{\text{arc} \sin \dfrac{b_n}{\rho_n}}{b_n}$$

tendront évidemment vers l'unité pour $n=\infty$. Ces facteurs seront donc, à partir d'un certain rang, inférieurs à une limite fixe, et il en sera de même de leurs inverses. Donc les séries (15) et (16) seront absolument convergentes en même temps que les séries plus simples

$$\sum \frac{\rho_n^2 - 1}{\text{Log}\,\rho_n^2} \text{Log}\,\rho_n^2 = \sum (\rho_n^2 - 1) = \sum (a_n^2 + b_n^2 - 1)$$

et

$$\sum \frac{b_n}{\alpha_n} \alpha_n = \sum b_n.$$

Mais, si la série $\sum b_n$ est absolument convergente, il en sera de même de la série $\sum b_n^2$, dont les termes ont des modules moindres, au moins à partir d'un certain rang. D'autre part, la série $\sum (a_n^2 - 1)$ peut s'écrire

$$\sum (a_n + 1)(a_n - 1)$$

et sera absolument convergente en même temps que la série $\sum (a_n - 1)$, puisque le facteur $a_n + 1$ tend, pour $n = \infty$, vers une limite fixe égale à 2. Donc, pour que Π soit absolument convergent, il faut et il suffit que les deux séries

$$\sum (a_n - 1) \quad \text{et} \quad \sum b_n$$

soient absolument convergentes, ou, ce qui revient au même, que la série

$$\sum (a_n - 1 + b_n i) = \sum (u_n - 1)$$

le soit.

324. Considérons, comme exemple, le produit

$$\Pi = \left(1 + \frac{A_1}{1^\alpha}\right) \cdots \left(1 + \frac{A_n}{n^\alpha}\right) \cdots$$

Il sera absolument convergent si, α étant > 1, les coefficients $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ ont leurs modules inférieurs à une limite fixe M. On aura, en effet,

$$\sum |u_n - 1| = \sum \frac{|A_n|}{n^\alpha} < M \sum \frac{1}{n^\alpha},$$

et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, comme nous l'avons vu.

Le contraire aura lieu si $\alpha \leqq 1$ et si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ ont leurs modules supérieurs à une limite fixe.

325. Comme application, considérons l'expression

$$\Pi(n, z) = \frac{1.2\ldots(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} n^z.$$

Soit $\Gamma(z)$ la limite vers laquelle elle tend pour $n = \infty$. On aura évidemment $\Gamma(z) = \infty$ si z est un entier négatif, car, à partir de la valeur $n = -z+1$, toutes les fonctions $\Pi(n, z)$ auront un facteur nul au dénominateur.

Pour toute autre valeur de z, $\Gamma(z)$ aura, au contraire, une valeur finie et déterminée. En effet, on peut évidemment écrire

$$\Gamma(z) = \Pi(2, z)\frac{\Pi(3, z)}{\Pi(2, z)}\cdots\frac{\Pi(n+1, z)}{\Pi(n, z)}\cdots,$$

et il ne reste qu'à prouver la convergence de ce produit infini.

Or on a

$$\begin{aligned}\frac{\Pi(n+1, z)}{\Pi(n, z)} &= \frac{n}{n+z}\,\frac{(n+1)^z}{n^z}\\ &= 1 + \frac{z(z-1)}{2n^2} + \ldots = 1 + \frac{A_n}{n^2},\end{aligned}$$

A_n tendant, pour $n = \infty$, vers la limite fixe $\frac{z(z-1)}{2}$. Le produit est donc absolument convergent.

326. On a parfois à considérer des produits infinis dans les deux sens ou des produits multiples. Leur introduction ne peut plus offrir aucune difficulté.

IV. — Séries de fonctions.

327. Si une série

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions d'une ou plusieurs va-

riables x, y, ... est convergente pour tous les systèmes de valeurs de ces variables constituant un certain domaine, elle représentera dans ce domaine une fonction de x, y, ...

La convergence de la série sera uniforme, si l'on peut, quelle que soit la quantité positive ε, déterminer un entier ν, indépendant de x, y, ... et tel que, pour $n > \nu$, on ait toujours

$$|s - s_n| < \varepsilon.$$

Les séries uniformément convergentes peuvent, à beaucoup d'égards, être assimilées aux sommes formées d'un nombre limité de termes, ainsi que le montrent les théorèmes suivants :

328. Théorème I. — *Une série uniformément convergente, dont les termes sont des fonctions continues de x, y, ..., est elle-même une fonction continue.*

Posons, en effet,

$$s = s_n + R.$$

Changeons x, y, ... en $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, ...; soient Δs, Δs_n, ΔR les accroissements correspondants de s, s_n, R; on aura

$$\Delta s = \Delta s_n + \Delta R = \Delta s_n + R + \Delta R - R,$$

d'où

$$|\Delta s| \leqq |\Delta s_n| + |R + \Delta R| + |R|.$$

La continuité étant supposée uniforme, on pourra prendre n assez grand pour que $|R + \Delta R|$ et $|R|$ soient moindres qu'une quantité positive quelconque $\frac{\varepsilon}{3}$.

Le nombre n ayant été ainsi choisi, s_n, qui est la somme d'un nombre fini de fonctions continues, sera continue. On pourra donc assigner une quantité δ telle que, si $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, ... sont $< \delta$, $|\Delta s_n|$ soit $< \frac{\varepsilon}{3}$. On aura alors

$$|\Delta s| < \varepsilon,$$

ce qui démontre la continuité de s.

329. Théorème II. — *Une série uniformément convergente*

$$s = u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et dont les termes sont des fonctions intégrables dans un domaine borné E, *est elle-même intégrable dans ce domaine; elle a pour intégrale la série*

$$\mathbf{S}_{\mathrm{E}} u_1 \, de + \ldots + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} u_n \, de + \ldots,$$

laquelle sera uniformément convergente.

En effet, décomposons E en éléments infiniment petits $de_1, \ldots, de_k, \ldots$. Soit O_k l'oscillation de s dans l'élément de_k. Il faut prouver que $\Sigma O_k de_k$ tend vers zéro en même temps que l'étendue des éléments.

Posons encore

$$s = s_n + R,$$

et soient O'_k, ω_k les oscillations de s_n et de R dans l'élément de_k. On aura évidemment

$$O_k \leqq O'_k + \omega_k,$$

d'où

$$\Sigma O_k de_k \leqq \Sigma O'_k de_k + \Sigma \omega_k de_k.$$

On peut, par hypothèse, prendre n assez grand pour que R soit constamment moindre en valeur absolue qu'une quantité positive quelconque ε. Son oscillation ω_k sera dès lors moindre que 2ε, et l'on aura

$$\Sigma \omega_k de_k < 2\varepsilon \Sigma de_k < 2\varepsilon \mathrm{E}.$$

Le nombre n étant ainsi choisi, s_n étant la somme d'un nombre fini de fonctions intégrables sera intégrable; on pourra donc assigner une quantité δ telle que, si $de_1, \ldots, de_k$ sont tous $< \delta$, $\Sigma O'_k de_k$ soit $< \varepsilon$. On aura alors

$$\Sigma O_k de_k < \varepsilon(2\mathrm{E} + 1),$$

quantité qui tend vers zéro avec ε; donc s est intégrable.

Son intégrale sera donnée par la formule

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathrm{E}} s\,de &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}} s_n\,de + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de \\ &= \mathbf{S}_{\mathrm{E}} u_1\,de + \ldots + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} u_n\,de + \mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à montrer que, si n tend vers ∞, $\mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de$ tend vers zéro, et cela uniformément.

Or, on peut, par hypothèse, déterminer un entier ν tel que, si $n > \nu$, $|\mathrm{R}|$ soit constamment moindre qu'un nombre positif quelconque ε. Mais alors

$$\left| \mathbf{S}_{\mathrm{E}} \mathrm{R}\,de \right| \leqq \varepsilon \mathrm{E},$$

quantité qui tend vers zéro avec ε.

330. Théorème III. — *Si la série*

$$s(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

est convergente, et la série

$$\sigma(x) = f'_1(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

uniformément convergente dans l'intérieur d'un domaine E; *si, de plus, les fonctions* $f'_1(x), \ldots, f'_n(x), \ldots$ *sont continues dans l'intérieur de* E, $s(x)$ *admettra dans l'intérieur de* E *une dérivée, égale à* $\sigma(x)$.

Soient, en effet, x un point quelconque intérieur à E; a un autre point, assez voisin de x pour que tous les points de l'intervalle ax soient encore intérieurs à E; $\sigma(x)$ sera intégrable de a à x; et l'on aura

$$\begin{aligned} \int_a^x \sigma(t)\,dt &= \int_a^x f'_1(t)\,dt + \ldots + \int_a^x f'_n(t)\,dt + \ldots \\ &= f_1(x) - f_1(a) + \ldots + f_n(x) - f_n(a) + \ldots \\ &= s(x) - s(a). \end{aligned}$$

Le premier membre admet une dérivée, égale à $\sigma(x)$; donc il en est de même du second; $s(a)$ étant une constante, $s(x)$ aura une dérivée, égale à $\sigma(x)$.

331. Théorème IV. — *Soit*

$$s(z) = f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

une série convergente dont les termes soient, dans un certain domaine, des fonctions synectiques de z. Si la série

$$\sigma(z) = f'_1(z) + \ldots + f'_n(z) + \ldots$$

est uniformément convergente, $s(z)$ sera dans ce domaine une fonction synectique de z, ayant pour dérivée $\sigma(z)$.

La démonstration est la même que pour le théorème précédent.

332. L'uniformité de la convergence, admise dans les raisonnements précédents, est une condition essentielle pour la validité des démonstrations.

Voici, en effet, quelques exemples où, cette condition n'étant pas remplie, nos théorèmes se trouvent en défaut :

1° Considérons la série s qui a pour terme général

$$u_n = x(1 - x^2)^{n-1}.$$

Pour $x = 0$, elle se réduit à zéro. Pour les autres valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, s est une progression géométrique convergente, et a pour valeur

$$\frac{1}{x},$$

quantité qui tend vers ∞ si x tend vers 0. La série s est donc discontinue pour $x = 0$, bien qu'elle soit convergente et que ses termes soient des fonctions continues.

Ce résultat s'explique en remarquant que la convergence n'est pas uniforme. Soit, en effet, s_n la somme des n pre-

miers termes de la série. On aura

$$s - s_n = R_n = \frac{(1 - x^2)^n}{x},$$

et, quel que soit n, on pourra toujours trouver une valeur de x assez petite pour que R_n soit plus grand que toute quantité donnée ε.

2° Considérons la série

$$s = u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

où

$$u_1 = xe^{-x^2}, \qquad \ldots, \qquad u_n = nxe^{-nx^2} - (n-1)xe^{-(n-1)x^2}.$$

La somme s_n des n premiers termes est égale à nxe^{-nx^2} et tend vers zéro, quel que soit x, pour $n = \infty$. La série a donc pour valeur zéro, quel que soit x.

On a, par suite,

$$\int_0^b s\,dx = 0;$$

mais, d'autre part,

$$\int_0^b s_n\,dx = \int_0^b nxe^{-nx^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^b de^{-nx^2} = -\frac{1}{2}(e^{-nx^2})_0^b$$

$$= \frac{1}{2}[1 - e^{-nb^2}]$$

et, pour $n = \infty$,

$$\lim_{n=\infty} \int_0^b s_n\,dx = \frac{1}{2}.$$

Le théorème II est donc en défaut pour cette série.

Cela tient encore à ce que la convergence n'est pas uniforme. En effet, on a

$$s - s_n = R_n = -nxe^{-nx^2},$$

et, si l'on pose $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$, il viendra

$$|R_n| = \frac{\sqrt{n}}{e} \geqq \frac{1}{e}.$$

Il est donc impossible de choisir n de telle sorte que, pour toute valeur de x, $|R_n|$ soit $< \varepsilon$, dès que ε sera $< \frac{1}{e}$.

333. Considérons encore, avec M. Weierstrass, la série

$$F(x) = \sum_0^\infty b^n \cos a^n \pi x,$$

où b est une constante positive < 1, et a un entier impair > 1.

Cette série est uniformément convergente ; car, si l'on désigne par $F_m(x)$ la somme des m premiers termes, par R_m le reste, on aura

$$|R_m| \leqq b^m + b^{m+1} + \ldots \leqq \frac{b^m}{1-b},$$

quantité indépendante de x et qui tend vers zéro pour $m = \infty$.

Si $ab < 1$, $F(x)$ aura pour dérivée la série

$$F'(x) = -\sum_0^\infty a^n b^n \pi \sin a^n \pi x,$$

car cette dernière série sera aussi uniformément convergente.

Nous allons montrer, au contraire, que, si ab surpasse un certain nombre fixe, $F(x)$ n'aura pas de dérivée.

On peut évidemment écrire

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m,$$

α_m étant un entier et ξ_m une fraction comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. Posons

$$h = \frac{e_m - \xi_m}{a^m},$$

e_m étant égal à ± 1. La quantité

$$a^m(x+h) = \alpha_m + e_m$$

sera un entier. D'autre part, h aura le signe de e_m, et son module sera au plus égal à $\frac{3}{2a^m}$; donc h tendra vers zéro si m croît indéfiniment.

Considérons l'expression

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\sum_0^\infty \frac{b^n[\cos a^n(x+h)\pi-\cos a^n x\pi]}{h}.$$

Soient S_m la somme de ses m premiers termes, R_m le reste. On aura

$$S_m=\sum_0^{m-1}\frac{b^n[\cos a^n(x+h)\pi-\cos a^n x\pi]}{h}$$
$$=\sum_0^{m-1}\left(-\frac{\pi a^n b^n}{h}\int_x^{x+h}\sin a^n\pi t\,dt\right)$$

et, par suite,

$$|S_m|\leqq\sum_0^{m-1}\frac{\pi a^n b^n}{|h|}|h|$$
$$\leqq\sum_0^{m-1}\pi a^n b^n\leqq\frac{\pi(a^m b^m-1)}{ab-1}<\frac{\pi}{ab-1}a^m b^m.$$

Passons à la considération de R_m. Pour $n\geqq m$, on aura (a et e_m étant impairs)

$$\cos a^n(x+h)\pi=\cos a^{n-m}(\alpha_m+e_m)\pi=(-1)^{\alpha_m+1},$$
$$\cos a^n x\pi\quad=\cos a^{n-m}(\alpha_m+\xi_m)\pi=(-1)^{\alpha_m}\cos a^{n-m}\xi_m\pi$$

et, par suite,

$$R_m=\frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h}\sum_m^\infty b^n(1+\cos a^{n-m}\xi_m\pi).$$

La quantité sous le signe $\sum$ a tous ses termes positifs. D'ailleurs, le premier de ces termes, $b^m(1+\cos\xi_m\pi)$, est

$\overline{\overline{>}} b^m$; car, $\xi_m \pi$ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, son cosinus ne peut être négatif.

On aura donc

$$|R_m| \overline{\overline{>}} \frac{b^m}{|h|} \overline{\overline{>}} \frac{2}{3} a^m b^m,$$

et R_m aura, d'ailleurs, le signe de $(-1)^{\alpha_m+1} e_m$.

Si donc on a

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}, \qquad \text{d'où} \qquad ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

on aura

$$|R_m| > |S_m|,$$

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\right| \overline{\overline{>}} |R_m| - |S_m| \overline{\overline{>}} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) a^m b^m,$$

quantité qui croît indéfiniment avec m.

D'ailleurs, $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ a, ainsi que R_m, le signe de $(-1)^{\alpha_m+1} e_m$, et, comme on peut, pour chaque valeur de m, se donner arbitrairement le signe de e_m, on voit qu'on pourra à volonté faire tendre $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ vers l'infini positif ou négatif, ou lui faire parcourir une suite de valeurs de signes différents et indéfiniment croissantes, h tendant toujours vers zéro.

On voit, par l'exemple qui précède, qu'*il existe des fonctions continues n'ayant de dérivée pour aucune valeur de la variable.*

334. La fonction précédente $F(x)$ n'a une variation bornée dans aucun intervalle.

Soit, en effet, cd un intervalle quelconque. Soient $\frac{\beta}{a^m}$, $\frac{\beta+1}{a^m}, \ldots, \frac{\beta+\gamma}{a^m}$ celles des fractions de dénominateur $\frac{1}{a^m}$ qui sont contenues dans cet intervalle; si nous donnons à x la série de ces valeurs intermédiaires entre c et d, la variation

totale T correspondante sera

$$\left|F\left(\frac{\beta}{a^m}\right) - F(c)\right| + \sum_0^{\gamma-1}\left|F\left(\frac{\beta+i+1}{a^m}\right) - F\left(\frac{\beta+i}{a^m}\right)\right|$$
$$+\left|F(d) - F\left(\frac{\beta+\gamma}{a^m}\right)\right|$$

et sera au moins égale à $\gamma\eta$, η désignant la plus petite des quantités

$$\left|F\left(\frac{\beta+i+1}{a^m}\right) - F\left(\frac{\beta+i}{a^m}\right)\right|.$$

Or on a, par hypothèse,

$$\frac{\beta-1}{a^m} < c, \qquad \frac{\beta+\gamma+1}{a^m} > d,$$

d'où

$$d - c < \frac{\gamma+2}{a^m}, \qquad \gamma > a^m(d-c) - 2.$$

D'autre part, nous avons vu, dans le numéro précédent, qu'en posant

$$a^m x = \alpha_m + \xi_m, \qquad h = \frac{e_m - \xi_m}{a^m}$$

on avait

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| \overline{>} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) a^m b^m.$$

Faisant, en particulier, $\xi_m = 0$, $e_m = +1$, $\alpha_m = \beta + i$, d'où $x = \frac{\beta+i}{a^m}$, $h = \frac{1}{a^m}$, il viendra

$$\left|F\left(\frac{\beta+i+1}{a^m}\right) - F\left(\frac{\beta+i}{a^m}\right)\right| \overline{>} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) b^m.$$

On aura donc

$$T \overline{>} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) b^m[a^m(d-c) - 2].$$

Si nous faisons croître m indéfiniment, b étant < 1 et $ab > 1$, cette expression croîtra indéfiniment, ce qui établit notre proposition.

335. Considérons encore la série

$$s = \frac{\psi(z) + \varphi(z)}{2} + \sum_1^\infty [\psi(z) - \varphi(z)] \left(\frac{1}{1 + z^n} - \frac{1}{1 + z^{n-1}} \right),$$

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ étant des fonctions quelconques de z. La somme des n premiers termes de s est

$$s_n = \varphi(z) + \frac{\psi(z) - \varphi(z)}{1 + z^n}.$$

Si $|z| < 1$, z^n a pour limite zéro, pour $n = \infty$, et l'on aura $s = \psi(z)$. Si $|z| > 1$, z^n tend vers ∞, et $s = \varphi(z)$.

Si nous remplaçons $\varphi(z)$ par une autre fonction $\varphi_1(z)$, nous obtiendrons une autre série s_1, égale comme la précédente à $\psi(z)$ lorsque $|z| < 1$, mais égale à $\varphi_1(z)$ pour $|z| > 1$.

On voit par là que deux séries convergentes et égales entre elles dans une région donnée du plan peuvent converger toutes deux, mais vers des valeurs différentes, dans une autre région du plan.

V. — Séries de puissances.

336. Soit

$$S = \sum_0^\infty A_n (z - a)^n$$

une série procédant suivant les puissances entières et positives de $z - a$.

Si, pour une valeur particulière ζ de z autre que a, la série est convergente, son terme général tendra nécessairement vers zéro quand n augmente indéfiniment. On aura donc, en posant pour abréger $|\zeta - a| = r$,

$$\lim_{n=\infty} |A_n r^n| = 0. \tag{1}$$

Cette condition n'est pas suffisante; mais si elle est

remplie, et si l'on désigne par ρ une quantité positive quelconque moindre que r, la série S sera absolument et uniformément convergente pour les valeurs de z qui satisfont à l'inégalité

$$|z-a| \leqq \rho.$$

Les séries dérivées

$$S' = \sum n A_n (z-a)^{n-1},$$

$$S'' = \sum n(n-1) A_n (z-a)^{n-2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

jouissent de la même propriété.

En effet, soit ε une quantité positive quelconque. On peut, par hypothèse, déterminer un nombre ν tel que toutes celles des quantités $|A_n r^n|$ où $n > \nu$ soient $< \varepsilon$. Les autres sont en nombre limité ; soient η la plus grande d'entre elles, M la plus grande des deux quantités ε, η : on aura, quel que soit n,

$$|A_n r^n| \leqq M, \qquad |A_n| \leqq \frac{M}{r^n}.$$

Cela posé, considérons, par exemple, la série S'. Les modules de ses termes sont au plus égaux aux termes de la série

$$\sum n M \frac{\rho^{n-1}}{r^n},$$

laquelle est convergente, car le rapport d'un terme au suivant a pour limite $\frac{r}{\rho}$, quantité > 1.

L'uniformité de la convergence résulte d'ailleurs de ce que la nouvelle série a ses termes indépendants de z.

La série S représentera donc une fonction synectique dans un cercle de rayon ρ décrit du point a comme centre, et sur ce cercle lui-même.

337. Cela posé, soit r une quantité positive variable de 0

à ∞. L'expression

$$|A_n r^n|$$

sera croissante avec r, et trois cas seront à distinguer :

1° La condition (1) n'est satisfaite pour aucune valeur de r. Ce cas se présentera, par exemple, si $A_n = 1.2\ldots n$. S'il en est ainsi, S ne convergera pour aucune valeur de z, autre que a.

2° La condition (1) est au contraire satisfaite pour toute valeur de r. Dans ce cas, r et par suite ρ pouvant être choisis aussi grands qu'on voudra, S sera convergente et définira une fonction synectique dans tout le plan.

Une semblable fonction se nomme une *fonction entière*. Telles sont, par exemple, les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$.

3° La condition (1) est satisfaite pour des valeurs suffisamment petites de r, mais ne l'est plus pour les valeurs suffisamment grandes. Ces deux classes de valeurs sont séparées par une valeur frontière R.

Traçons, autour du point a comme centre, un cercle K de rayon R, auquel nous donnerons le nom de *cercle de convergence*.

Si z est extérieur à K, on aura $|z - a| > R$, et la série sera divergente.

Si z est intérieur à K, on aura $|z - a| < R$, et, en choisissant deux quantités ρ et r telles que l'on ait

$$|z - a| \leqq \rho < r < R,$$

on voit que la série sera convergente. La fonction qu'elle représente sera d'ailleurs synectique dans tout cercle décrit du point a comme centre avec un rayon ρ moindre que R.

Enfin, si z est sur la circonférence de K, S pourra, suivant les cas, être convergente ou non.

La fonction synectique $f(z)$ représentée par une série S de puissances entières $z - a$ dans l'intérieur de son cercle de convergence se nomme un *élément de fonction analytique*. Nous dirons, pour abréger, que le point a est le *centre* de cet élément et que R est son *rayon*.

338. Si A_0 est nul, $f(z)$ s'annulera pour $z = a$, et l'on dira que ce point est un *zéro* de $f(z)$. Ce zéro sera d'un degré de multiplicité m, si A_m est le premier des coefficients de la suite $A_0, A_1, \ldots$ qui ne soit pas nul.

On aura dans ce cas

$$f(z) = (z-a)^m [A_m + A_{m+1}(z-a) + \ldots]$$

et l'on pourra déterminer une quantité δ telle que, si $0 < |z-a| < \delta$, on ait toujours $f(z) \gtrless 0$.

Nous avons vu en effet qu'il existe deux quantités M et r telles que l'on ait

$$|A_n| \leqq \frac{M}{r^n},$$

et, par suite, si $|z-a| < r$,

$$\begin{aligned} &|A_{m+1}(z-a) + A_{m+2}(z-a)^2 + \ldots| \\ &\leqq \frac{M}{r^m}\left(\frac{|z-a|}{r} + \frac{|z-a|^2}{r^2} + \ldots\right) \\ &\leqq \frac{M}{r^m}\left(\frac{|z-a|}{r - |z-a|}\right). \end{aligned}$$

Cette quantité décroît avec $|z-a|$; si donc on détermine δ par la condition

$$|A_m| = \frac{M}{r^m} \frac{\delta}{r-\delta},$$

on aura pour les valeurs de $|z-a|$ inférieures à δ

$$|f(z)| \geqq |z-a|^m [|A_m| - |A_{m+1}(z-a) + \ldots|] > 0.$$

339. Théorème. — *Soit $f(z)$ une fonction synectique de z définie dans l'intérieur d'un contour fermé et continu C. Les points de l'intérieur de ce contour pour lesquels $f(z)$ prend une valeur déterminée λ sont nécessairement isolés, si la fonction $f(z)$ ne se réduit pas à la constante λ.*

On peut supposer pour plus de simplicité $\lambda = 0$; car, s'il était différent de zéro, on n'aurait qu'à raisonner sur la

fonction $f(z)-\lambda$, qui est définie dans le même domaine que $f(z)$.

Supposons donc qu'il existe dans l'intérieur de C un point a, qui soit la limite d'une suite de points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ pour chacun desquels $f(z)$ s'annule. Soit b un autre point quelconque intérieur à C. On peut joindre les points a et b par une ligne polygonale L située dans l'intérieur de C. Soit ε une quantité moindre que la plus courte distance de L et de C. Partageons la ligne L en arcs partiels $aa_1, \ldots, a_k a_{k+1}, \ldots$ dont chacun ait une longueur $< \varepsilon$.

Si de l'un des points $a, a_1, \ldots$, par exemple du point a_k, comme centre, on décrit un cercle de rayon ε, la fonction $f(z)$ sera représentée dans l'intérieur de ce cercle par la série de Taylor

$$f(z)=f(a_k)+(z-a_k)f'(a_k)+\ldots,$$

et ce développement sera valable sur les arcs $a_{k-1}a_k$ et $a_k a_{k+1}$, qui sont contenus en entier dans ce cercle.

Considérons le premier développement, relatif au point a,

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\ldots.$$

Si l'un des coefficients $f(a), f'(a), \ldots$ n'était pas nul, on pourrait, comme on l'a vu au numéro précédent, assigner une quantité δ telle que $f(z)$ ne s'annulât pour aucune valeur de z pour laquelle on aurait $0<|z-a|<\delta$, ce qui est contraire à la supposition que a est la limite d'une suite de points pour lesquels $f(z)$ s'annule. Donc $f(a), f'(a), \ldots$ seront tous nuls, et l'on aura $f(z)=0$ tout le long de l'arc aa_1.

Mais a_1 sera la limite d'une suite de points de cet arc; on verra donc, par le même raisonnement, que tous les coefficients du second développement

$$f(z)=f(a_1)+(z-a_1)f'(a_1)+\ldots$$

s'annulent, et que $f(z)$ est nul tout le long de l'arc $a_1 a_2$.

Continuant ainsi, on voit que $f(z)$ doit s'annuler tout le long de L et en particulier à son extrémité b, laquelle est,

par hypothèse, un point quelconque de l'intérieur de C. Donc $f(z)$ est nul dans tout ce domaine.

340. *Corollaire.* — Soient $f(z)$, $f_1(z)$ deux fonctions synectiques respectivement définies dans l'intérieur de deux contours fermés C, C_1 qui se coupent mutuellement en deux points. Si dans la région D, intérieure à la fois à C et à C_1, les deux fonctions $f(z)$ et $f_1(z)$ sont égales autrement qu'en des points isolés, les relations

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z) \quad \text{dans l'intérieur de C,} \\ &= f_1(z) \quad \text{dans l'intérieur de } C_1 \end{aligned}$$

définiront une fonction synectique $F(z)$ dans tout l'intérieur de la région du plan entourée par ces deux contours.

On doit remarquer que $F(z)$ est définie de deux manières différentes dans la région D; mais ces deux définitions coïncident; car la différence $f_1(z)-f(z)$, étant synectique dans cette région, et ne s'y annulant pas seulement en des points isolés, y est identiquement nulle.

Ce point établi, la proposition devient évidente.

341. Nous dirons que deux éléments de fonction analytique

$$\begin{aligned} S &= \Sigma A_n(z-a)^n, \\ S_1 &= \Sigma A'_n(z-a_1)^n, \end{aligned}$$

ayant respectivement pour centres les points a et a_1, sont *contigus*, si : 1° leurs cercles de convergence empiètent l'un sur l'autre; 2° dans la région commune à ces deux cercles, on a $S = S_1$.

D'après ce qui précède, il suffit, pour que cette dernière circonstance se réalise, que l'égalité $S = S_1$ soit satisfaite dans cette région commune autrement qu'en des points isolés.

Si deux éléments S, S_1 sont contigus à un troisième élément

$$S_2 = \Sigma A''_n(z-a_2)^n$$

et si les trois cercles de convergence K, K_1, K_2 ont une région commune, S et S_1 seront contigus. Car on a dans cette région commune

$$S = S_2, \qquad S_1 = S_2, \qquad \text{d'où} \qquad S = S_1,$$

et cette dernière égalité, ayant lieu ailleurs qu'en des points isolés, subsistera dans le reste de la région commune à K et K_1.

Remarquons enfin que, si a_1 est un point quelconque intérieur au cercle de convergence K de l'élément S, on aura, par la formule de Taylor, dans l'intérieur de tout cercle décrit du point a_1 comme centre avec un rayon moindre que la distance de a_1 à la circonférence de K,

$$S = f(a_1) + f'(a_1)(z - a_1) + \ldots.$$

Le second membre de cette égalité sera donc un élément de fonction analytique contigu à S.

342. Ces préliminaires posés, tout élément de fonction analytique tel que

$$S = \Sigma A_n (z - a)^n$$

sert de point de départ, comme il suit, pour la définition d'une *fonction analytique* $f(z)$.

Soit L une ligne continue quelconque partant du point a pour aboutir à un autre point b.

Admettons qu'on puisse marquer sur cette ligne une suite de points $a, a_1, \ldots, a_i, \ldots, b$ en nombre limité et jouissant des propriétés suivantes :

Il existe une suite d'éléments de fonctions analytiques S, $S_1, \ldots, S_i, \ldots$ dont chacun est contigu au suivant, et tels que les arcs $aa_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots$ soient respectivement contenus à l'intérieur des cercles de convergence K, ..., K_i, ... de ces éléments.

Nous définirons $f(z)$ en chaque point de la ligne L comme il suit :

De a à a_1 nous poserons

$$f(z) = S, \quad \ldots;$$

de a_i à a_{i+1},

$$f(z) = S_i, \quad \ldots.$$

On a ainsi, au point a_i,

$$f(a_i) = S_{i-1} \quad \text{et} \quad f(a_i) = S_i;$$

mais comme en ce point, intérieur à K_{i-1} et à K_i, on a

$$S_{i-1} = S_i,$$

ces deux définitions sont concordantes.

343. Si $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ sont les équations de la ligne L, la fonction $f(z)$, ainsi définie sur cette ligne, est évidemment une fonction continue de t. Sa valeur en chaque point de L sera déterminée et ne dépendra pas de la manière dont on aura pu choisir les points $a_1, \ldots, a_i, \ldots$ et les éléments $S_1, \ldots, S_i, \ldots$.

En effet, soit $a'_1, a'_2, \ldots$ et $S'_1, S'_2, \ldots$ un second système de points intermédiaires et d'éléments correspondants. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les points des deux systèmes $a_1, a_2, \ldots$ et $a'_1, a'_2, \ldots$ écrits dans l'ordre où on les rencontre en cheminant de a à b.

Dans les deux modes de procéder, on a sur l'arc $a\alpha_1$

$$f(z) = S.$$

Admettons plus généralement que, jusqu'au point α_i, la valeur de $f(z)$ reste la même; nous allons prouver qu'il en sera encore de même sur l'arc $\alpha_i\alpha_{i+1}$.

Avec le premier mode de division, $f(z)$ sera déterminé par une relation de la forme

$$f(z) = S_e,$$

S_e étant un élément dont le cercle de convergence K_e contient à son intérieur l'arc $\alpha_i\alpha_{i+1}$, et, par suite, une portion de

l'arc $\alpha_{i-1}\alpha_i$ avoisinant α_i. Sur cette dernière, on aura encore

$$f(z) = S_e.$$

En effet, cela a lieu par définition si α_i n'appartient pas à la suite $a_1, a_2, \ldots$. Si au contraire il appartient à cette suite, il sera égal à a_e et la définition donnera

$$f(z) = S_{e-1}.$$

Mais S_e et S_{e-1} sont deux éléments contigus; donc, dans toute la région commune à leurs cercles de convergence, on aura

$$S_e = S_{e-1},$$

et, par suite,

$$f(z) = S_e.$$

Dans le second mode de division, on aura de même, sur l'arc $\alpha_i\alpha_{i+1}$ et sur une portion de l'arc $\alpha_{i-1}\alpha_i$, voisine de α_i,

$$f(z) = S'_m,$$

S'_m étant un nouvel élément, dont le cercle de convergence K'_m contient à son intérieur l'arc $\alpha_i\alpha_{i+1}$.

Mais, dans les deux modes de procéder, $f(z)$ a la même valeur sur l'arc $\alpha_{i-1}\alpha_i$; donc les deux éléments S_e et S'_m ont la même valeur sur toute la portion de cet arc commune à K_e et à K'_m. Ils sont donc contigus, et restent encore égaux sur l'arc $\alpha_i\alpha_{i+1}$.

La valeur finale de $f(z)$ au point b, extrémité de la ligne L, ne dépend donc que du tracé de cette ligne, lequel définit la loi de variation de z.

344. Nous avons admis, dans tout ce qui précède, qu'on pouvait passer du point a au point b (et *a fortiori* à un point quelconque de L) au moyen d'un nombre fini d'éléments S, $S_1, \ldots$. Supposons qu'il en soit autrement. La ligne L étant à ses débuts intérieure à K, il y aura sur cette ligne des points que l'on peut atteindre de la manière indiquée et d'autres plus éloignés qui ne jouissent plus de cette propriété. Ils

sont séparés les uns des autres par un point frontière c que nous appellerons un *point critique*. Notre procédé permettra de définir la valeur de $f(z)$ pour tous les points de l'arc ac (le point c excepté), mais on ne pourra aller plus loin.

345. Nous avons vu que, si z se rend de a à b suivant une ligne L n'offrant pas de point critique, on peut déterminer sans ambiguïté la valeur de $f(z)$ en chaque point de cette ligne, et notamment au point b et dans ses environs où elle sera donnée par un développement

$$f(z) = \Sigma B_n (z - b)^n$$

procédant suivant les puissances de $z - b$.

Si z suivait une autre ligne L', on obtiendrait de même sur la partie de cette ligne avoisinant le point b un nouveau développement

$$f(z) = \Sigma B'_n (z - b)^n.$$

Si ces deux développements sont identiques, nous dirons que les lignes L et L' donnent à leur extrémité des valeurs concordantes pour $f(z)$. Il n'en est pas nécessairement ainsi. Les fonctions algébriques et les transcendantes élémentaires nous en ont déjà fourni plusieurs exemples.

Il peut même arriver que le point b soit critique sur l'une des lignes L, L', sans l'être sur l'autre.

Il est donc, en général, nécessaire, pour pouvoir fixer la valeur de $f(z)$ en un point donné b ou dans ses environs, de définir le chemin suivi pour y parvenir.

Il existe pourtant, comme nous allons le voir, certains cas où l'on peut s'affranchir, au moins dans une certaine mesure, de cette considération.

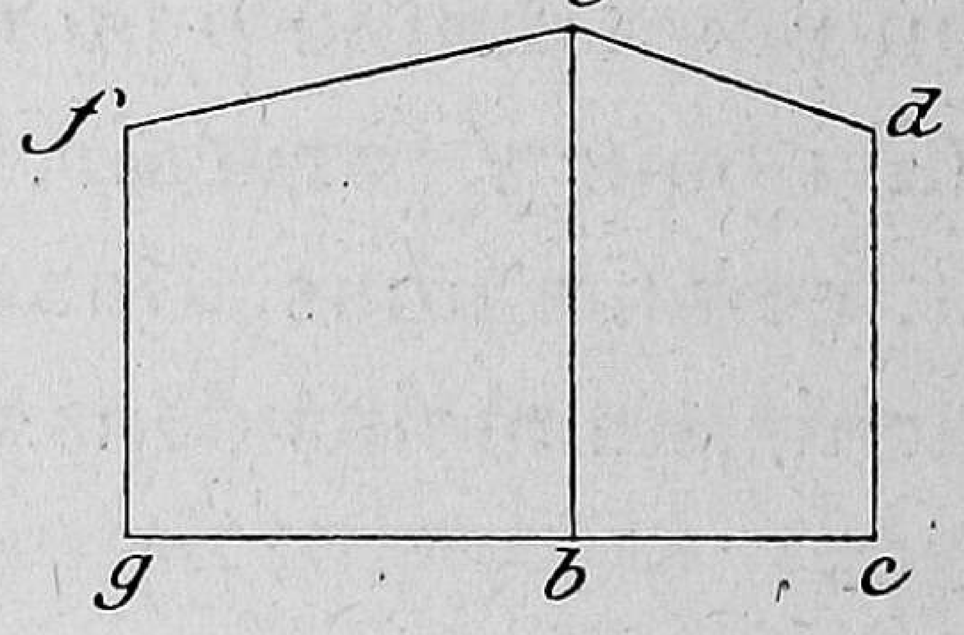
346. Théorème. — *Supposons z assujetti à rester constamment dans l'intérieur d'un contour fermé* C; *si, dans ces conditions, on ne rencontre jamais de point critique, quelle que soit la ligne décrite par z, la fonction $f(z)$ dé-*

finie par le moyen de ces lignes dans l'intérieur de C *n'a qu'une valeur unique pour chaque valeur de* z, *et c'est une fonction synectique.*

On peut tout d'abord se borner à la considération des lignes L qui sont polygonales. En effet, soit L une ligne quelconque allant de a à b; soient $a, a_1, \ldots, a_i, \ldots, b$ et $S, S_1, \ldots, S_i, \ldots$ les points de division et les éléments successifs qui servent à la détermination de $f(z)$ le long de cette ligne; $K, K_1, \ldots, K_i, \ldots$ les cercles de convergence de ces éléments. Remplaçons chacun des arcs partiels $a_i a_{i+1}$ par un polygone inscrit ayant mêmes extrémités et qui s'en rapproche assez pour être encore contenu en entier dans l'intérieur de C et de K_i. Pour déterminer la valeur de $f(z)$ en chaque point de ce polygone P, on fera usage des mêmes éléments que pour la ligne L; on arrivera donc aux extrémités de ces deux lignes à des valeurs concordantes de $f(z)$.

347. Considérons donc un polygone P et un autre polygone P′ aboutissant également au point b. La valeur finale $f(b)$ fournie par la ligne P′ est évidemment la même qu'on obtiendrait en suivant la ligne $P.P^{-1}P'$. Tout revient donc à montrer que, après être arrivé en un point quelconque b par une ligne P avec la valeur finale $f(b)$, on retrouve la même valeur après avoir décrit un contour polygonal fermé tel que $P^{-1}P'$.

Fig. 7.



Cette proposition sera évidemment vraie pour un contour polygonal quelconque, si elle l'est pour un contour Π sans point multiple (199). On voit également que, si elle est vraie pour deux contours $bcdeb$ et $befgb$ ayant un côté

commun be (*fig.* 7), elle le sera pour le contour $bcdefgb$ formé par la réunion des autres côtés.

Cela posé, soit Π l'un des contours considérés. On peut le décomposer par des diagonales en triangles, ayant chacun un côté commun avec le suivant; et il suffira d'établir le théorème pour un des triangles T.

348. Soit $z - b = \varphi(t) + i\psi(t)$ la loi de variation de z le long du pourtour de ce triangle. Réduisons tous les rayons vecteurs dans un même rapport; nous obtiendrons un nouveau triangle T_u, semblable à T, et sur le pourtour duquel on aura

$$z - b = u[\varphi(t) + i\psi(t)],$$

u étant < 1. Le triangle T_u sera contenu en entier dans T et, par suite, sera intérieur à C.

Désignons par U l'accroissement que prend $f(b)$ lorsque z revient au point b après avoir décrit le triangle T_u. Si u varie de 0 à 1, U sera une fonction de u; il nous faut montrer qu'elle est constamment nulle.

Tout d'abord, sa dérivée est nulle. En effet, pour obtenir les valeurs de $f(z)$ sur le périmètre de T_u, nous partageons ce contour en arcs partiels $bb_1, \ldots, b_i b_{i+1}, \ldots$ et nous déterminons une suite d'éléments $S, \ldots, S_i, \ldots$ dont les cercles de convergence $K, \ldots, K_i, \ldots$ contiennent ces arcs à leur intérieur. Si nous changeons u en $u + du$, chaque arc $b_i b_{i+1}$ sera remplacé par un autre arc infiniment voisin, qui sera encore intérieur à K_i. On pourra donc utiliser la même suite d'éléments $S, \ldots, S_i$ que précédemment; on obtiendra donc pour $f(b)$ la même valeur finale.

Donc U est une constante. D'ailleurs cette constante est nulle. En effet, si u est infiniment petit, tous les points de T_u se rapprocheront indéfiniment de b et finiront par être contenus dans K. On pourra donc dans ce cas déterminer $f(z)$ en chaque point de T_u au moyen du seul élément S, lequel n'a au point b qu'une valeur unique et déterminée égale à la valeur initiale $f(b)$.

La fonction $f(z)$ n'a donc bien qu'une valeur en chaque point intérieur à C. Elle est, d'ailleurs, synectique, car elle est représentée aux environs de chacun de ces points par un développement en série qui admet une dérivée continue.

349. *Corollaire.* — La fonction $f(z)$, déduite d'un élément de fonction analytique S, admet au moins un point critique sur la circonférence du cercle de convergence K de cet élément.

Supposons, en effet, qu'il en soit autrement. Dans tout le cercle K, y compris sa circonférence, $f(z)$ n'aura qu'une seule valeur en chaque point, et, aux environs d'un point b de ce domaine, cette fonction sera représentée par un développement

$$S_b = \Sigma A_n (z - b)^n$$

convergent dans un cercle K_b, de rayon R_b plus grand que zéro. Ce rayon R_b est une fonction continue de b. Soient, en effet, $b + db$ un point voisin de b, R_{b+db} le rayon correspondant. La formule de Taylor permet de développer S_b suivant les puissances de $z - (b + db)$ en une série sûrement convergente dans l'intérieur de tout cercle ayant pour centre $b + db$ et un rayon moindre que $R_b - |db|$; car ce cercle sera intérieur à K_b. Donc R_{b+db} ne peut être moindre que $R_b - |db|$. On verra de même que R_b ne peut être moindre que $R_{b+db} - |db|$. Donc $|R_{b+db} - R_b|$ sera $\overline{\gtrless} |db|$ et tendra vers zéro avec db.

D'ailleurs le domaine K (la circonférence comprise) est parfait. Donc R_b admet dans ce domaine un minimum et l'atteint. Comme R_b n'est jamais nul, ce minimum ρ sera > 0.

Cela posé, considérons un cercle K' concentrique à K et de rayon $R + \frac{1}{2}\rho$. Soit L une ligne quelconque tracée dans ce cercle. Partageons-la en arcs $aa_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots$ assez petits pour que chacun d'eux, $a_i a_{i+1}$, soit contenu en entier à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{\rho}{2}$ ayant a_i pour centre. On

pourra déterminer un point b_i situé dans l'intérieur de K ou sur sa circonférence et dont la distance à a_i soit $< \frac{\rho}{2}$. Le cercle K_i de rayon ρ ayant son centre en b_i contiendra donc à son intérieur l'arc $a_i a_{i+1}$ tout entier. Deux cercles consécutifs K_i, K_{i+1} et le cercle K auront une région commune; car la droite $b_i b_{i+1}$ est contenue dans K, et, sa longueur étant au plus égale à $b_i a_i + a_i a_{i+1} + a_{i+1} b_{i+1} \leqq \frac{3}{2}\rho$, son milieu est intérieur à chacun des trois cercles.

Cela posé, on peut déterminer un élément

$$S_i = \Sigma A_n (z - b_i)^n$$

contigu à S et convergent dans le cercle K_i (ou dans un cercle concentrique plus grand). Les éléments S_i, S_{i+1} ainsi définis seront contigus, car l'égalité

$$S_i = S = S_{i+1}$$

a lieu dans toute la région commune à K, K_i, K_{i+1}. La suite des éléments S, ..., S_i, ... permettra donc de déterminer la valeur de $f(z)$ tout le long de L.

Donc $f(z)$ n'a aucun point critique dans l'intérieur du cercle K' de rayon $R + \frac{1}{2}\rho$. Elle sera synectique dans ce cercle; donc le développement S sera convergent dans tout l'intérieur de ce cercle, et le rayon de convergence ne sera pas R comme nous l'avions supposé, mais une quantité plus grande.

350. Si les lignes L tracées dans l'intérieur d'un contour fermé C et aboutissant au même point b donnent toujours pour chaque position de b une valeur finale unique $f(b)$, on dira que $f(z)$ est *monodrome* dans l'intérieur de C.

Si $f(z)$ est monodrome dans tout le plan, nous dirons qu'elle est *uniforme*.

351. Théorème. — *Si $f(z)$ est monodrome dans l'intérieur de C, un point intérieur à C, critique pour l'une*

des lignes L (*intérieures à* C) *qui y passent, le sera pour toutes les autres.*

Soient en effet b un point quelconque intérieur à C; L et L′ deux lignes qui le joignent au point de départ a et qui n'offrent ni l'une ni l'autre de point critique avant b.

Supposons que le point b ne soit pas critique sur L. Sur la dernière partie de cette ligne, on aura $f(z) = S_m$, S_m étant un élément tel que b soit dans l'intérieur de son cercle de convergence K_m. Soit δ la distance de b à la circonférence de ce cercle. Déterminons sur la ligne L′ un point β assez voisin de b pour que l'arc $b\beta$ soit encore contenu dans K_m. Le développement S_m pourra encore servir à déterminer la valeur de $f(z)$ au delà du point b sur l'arc $b\beta$. La fonction étant monodrome, cette valeur doit coïncider en chaque point de cet arc avec celle qu'on aurait obtenue en suivant la ligne L′. Dans ce dernier cas, on aurait au point β et dans son voisinage $f(z) = S'_{m'}$, $S'_{m'}$ étant un élément tel que β soit intérieur à son cercle de convergence $K'_{m'}$. Les deux cercles K_m, $K'_{m'}$ empiètent l'un sur l'autre, et sur la portion de l'arc $b\beta$ voisine de β on a constamment $S_m = S'_{m'}$. Donc l'élément S_m est contigu à $S'_{m'}$ et peut servir à définir $f(z)$ sur la portion de la ligne L′ située au delà de β, y compris le point extrême b. Donc b n'est pas critique pour L′.

352. Les points critiques d'une fonction monodrome forment un ensemble parfait. Car un point non critique, étant le centre d'un élément qui définit la fonction dans son voisinage, est nécessairement à distance finie des points critiques et ne peut être un point limite pour ceux-ci.

353. Les détails circonstanciés que nous venons de donner sur les fonctions analytiques d'une seule variable nous permettront d'être plus bref sur les fonctions de plusieurs variables.

Soit

$$S = \Sigma A_{nn'}(z-a)^n (z'-a')^{n'}$$

une série procédant suivant les puissances entières et positives de $z-a$ et $z'-a'$. Si elle est convergente pour des valeurs $z=\zeta$, $z'=\zeta'$, telles que $|\zeta-a|$ et $|\zeta'-a'|$ soient tous deux différents de zéro, on aura, en appelant r la plus petite de ces deux quantités,

$$(2) \qquad \lim_{n+n'=\infty} |A_{nn'} r^{n+n'}| = 0$$

et, par suite,

$$|A_{nn'}| \leqq \frac{M}{r^{n+n'}},$$

M désignant une quantité fixe.

Si cette condition est remplie, soit ρ une quantité quelconque $< r$: la série S sera absolument et uniformément convergente, ainsi que les séries dérivées

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \Sigma A_{nn'} n(z-a)^{n-1}(z'-a')^{n'},$$

$$\frac{\partial S}{\partial z'} = \Sigma A_{nn'}(z-a)^{n} n'(z'-a')^{n'-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

pour l'ensemble des valeurs de z, z' qui satisfont aux inégalités

$$|z-a| \leqq \rho, \qquad |z'-a'| \leqq \rho.$$

En effet, considérons $\frac{\partial S}{\partial z}$ par exemple ; on aura

$$\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right| \leqq \sum \frac{Mn}{r^{n+n'}} \rho^{n+n'-1},$$

quantité qui est le produit des deux séries convergentes

$$\sum_{n} \frac{Mn\rho^{n-1}}{r^{n}}, \quad \sum_{n'} \frac{\rho^{n'}}{r^{n'}}.$$

On conclut de là que : 1° si pour aucune valeur positive de r la condition (2) n'est satisfaite, S ne peut converger que si l'une au moins des deux quantités $z-a$, $z'-a'$ s'annule ;

2° Si elle est satisfaite quel que soit r, S sera convergente dans tout le plan et représente une fonction synectique;

3° Enfin, si elle est satisfaite seulement pour certaines valeurs de r sans l'être pour les valeurs plus grandes, soit R la frontière entre ces deux classes de valeurs : S sera convergente et synectique tant que z et z' resteront respectivement à l'intérieur de cercles K, K' de rayon R décrits autour de a et de a'. Elle sera divergente si z et z' sortent tous deux de ces cercles. Il y aura doute dans tous les autres cas.

Une semblable série S, considérée dans la région de convergence certaine définie par les deux cercles ci-dessus, constituera pour nous un élément de fonction analytique à deux variables.

354. La série S sera identiquement nulle si l'on peut déterminer deux séries de valeurs $z_1, \ldots, z_i, \ldots$ et $z'_1, \ldots, z'_k, \ldots$ convergeant respectivement vers a et a' et telles qu'on ait, pour toutes les valeurs de i et de k,

$$S(z_i, z'_k) = \Sigma A_{nn'}(z_i - a)^n (z'_k - a')^{n'} = 0.$$

En effet, la série S ordonnée suivant les puissances de $z - a$ peut s'écrire

$$\Sigma T_n (z - a)^n,$$

les T étant des séries qui procèdent suivant les puissances de $z' - a'$.

Assignons à z' la valeur constante z'_k; S deviendra une fonction de la seule variable z, admettant une infinité de zéros ayant a pour limite; on a donc nécessairement $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, ... Or chacune des quantités T est une série procédant suivant les puissances de z' et admettant une infinité de zéros qui convergent vers a'. Elle est donc identiquement nulle. Donc tous les coefficients A seront nuls, ce qu'il fallait démontrer.

355. Théorème. — *Soit $f(z, z')$ une fonction synectique, définie pour tous les systèmes de valeurs de z et z'*

respectivement compris dans l'intérieur de deux contours fermés C *et* C′. *S'il existe deux séries de valeurs* $z_1, \ldots,$ $z_i, \ldots$ *et* $z'_1, \ldots, z'_k, \ldots$ *de ces variables, convergeant respectivement vers* a *et* a', a *étant intérieur à* C *et* a' *intérieur à* C′, *et pour lesquelles on ait constamment*

$$f(z_i, z'_k) = 0,$$

$f(z, z')$ *sera identiquement nulle.*

Soient en effet b, b' deux points quelconques pris dans l'intérieur de C et de C′; joignons-les aux points a, a' par des lignes polygonales L, L′ intérieures à ces contours. Désignons par ε une quantité moindre que les plus courtes distances de L à C et de L′ à C′. Partageons les lignes L, L′ en arcs partiels $aa_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots$ et $a'a'_1, \ldots, a'_k a'_{k+1}, \ldots$ de longueur moindre que ε.

La fonction $f(z, z')$ sera développable par la série de Taylor aux environs de chacun des systèmes de valeurs a_i, a'_i, et le développement, étant convergent tant que $|z - a_i|$, $|z' - a'_i|$ sont $< \varepsilon$, s'appliquera tant que z et z' resteront sur les arcs $a_i a_{i+1}$, $a'_i a'_{i+1}$.

En vertu des hypothèses faites, le premier développement suivant les puissances de $z - a$, $z' - a'$ aura ses coefficients identiquement nuls.

Les points a_1, a'_1 seront à leur tour des limites de suites de points $z_1, z_2, \ldots$ et $z'_1, z'_2, \ldots$ respectivement situés sur aa_1 et $a'a'_1$ et qui, associés deux à deux, annuleront $f(z, z')$. Donc le second développement suivant les puissances de $z - a_1$, $z' - a'_1$ sera aussi identiquement nul. Continuant ainsi, on arrivera jusqu'aux points b, b', où l'on aura encore $f(b, b') = 0$.

La condition exprimée dans l'énoncé du théorème sera évidemment satisfaite si l'on peut tracer à partir des points a, a' deux arcs de courbe λ, λ' (quelque petits qu'ils puissent être) tels que $f(z, z')$ s'annule pour tous les systèmes de valeurs de z et z' respectivement situés sur λ et λ'.

356. Nous dirons que deux éléments de fonction analytique S, S_1 dont les régions de convergence certaine sont respectivement définies par les couples de cercles K, K' ayant pour centres a, a' et K_1, K'_1 ayant pour centres a_1, a'_1 sont contigus, si : 1° K_1 empiète sur K, et K'_1 sur K'; 2° S et S_1 ont la même valeur pour tous les systèmes de valeurs de z, z' tels que z soit dans la région commune à K_1 et K, et z' dans la région commune à K'_1 et K'.

Cette condition sera évidemment remplie si l'égalité $S=S_1$ est satisfaite pour tous les systèmes de valeurs de z et z' respectivement situés sur deux lignes λ, λ' tracées dans l'intérieur des régions ci-dessus.

Si a_1 est intérieur à K et a'_1 intérieur à K', la fonction S pourra être développée par la série de Taylor suivant les puissances de $z-a_1$ et $z'-a'_1$ en une série convergente aux environs des points a_1, a'_1. Ce nouveau développement S_1 sera un élément de fonction analytique contigu à S.

357. Tout élément

$$S=\Sigma A_{nn'}(z-a)^n(z'-a')^{n'}$$

peut servir de point de départ, comme il suit, à la définition d'une fonction analytique $f(z, z')$.

Supposons que z, z', partant des valeurs initiales a, a', varient simultanément, d'une manière continue, suivant une loi exprimée par les équations

$$z=\varphi(t)+i\psi(t), \qquad z'=\varphi_1(t)+i\psi_1(t).$$

A chaque valeur τ de t correspondront pour z et z' deux valeurs associées ζ et ζ'; ces deux variables décriront ainsi deux lignes L, L' se terminant respectivement en des points associés b, b'.

Admettons qu'on puisse décomposer la ligne L en un nombre fini d'arcs partiels aa_1, ..., a_ia_{i+1}, ... et déterminer une suite d'éléments correspondants S, ..., S_i, ..., jouissant des propriétés suivantes :

La région de convergence certaine de S_i étant définie par les deux cercles K_i, K'_i, l'arc $a_i a_{i+1}$ sera contenu en entier dans l'intérieur de K_i, et l'arc associé $a'_i a'_{i+1}$ de la ligne L′ sera contenu dans l'intérieur de K'_i.

La fonction $f(z, z')$ que nous nous proposons de former sera définie pour chaque système de valeurs associées de z, z' situées sur les arcs $a_i a_{i+1}$, $a'_i a'_{i+1}$ par la relation

$$f(z, z') = S_i.$$

En utilisant successivement les divers développements S, ..., S_i, ..., la fonction se trouvera définie pour tous les systèmes de points associés situés sur L et L′, et en particulier pour le système des deux valeurs extrêmes b, b'.

On démontrera comme au n° 343 que la valeur trouvée ne dépend que de la loi de variation simultanée de z, z' et nullement du choix des points de division a_1, ..., a_i, ..., et des éléments S_1, ..., S_i, ...

S'il est impossible de passer, comme on l'a supposé, des points initiaux a, a' aux points b, b' au moyen d'un nombre fini d'éléments S, ..., S_i, ..., les couples de points associés α, α' des lignes L, L′ qui pourront être atteints par ce procédé seront séparés des suivants par un couple frontière β, β'; et nous dirons que ce système de valeurs $z = \beta$, $z' = \beta'$ est *critique*.

358. On peut établir, par une analyse identique à celle des n°s 346 à 349, les propositions suivantes :

Si, lorsque z et z' se déplacent d'une manière quelconque dans l'intérieur de contours fermés C et C′, on ne rencontre aucun système de valeurs critiques; $f(z, z')$ n'aura qu'une valeur en chaque point de ce domaine, et sera synectique.

La fonction analytique $f(z, z')$ déduite d'un élément S, aux cercles de convergence K, K′, admet au moins un système de valeurs critiques dans le domaine constitué par ces cercles (y compris les circonférences frontières).

La définition d'une fonction *monodrome* dans le domaine formé par deux contours C, C′ sera la même qu'au n° 350. On verra aisément que pour ces fonctions un système de valeurs critiques restera toujours tel, quelle que soit la loi suivant laquelle z et z' se déplacent pour y parvenir.

Enfin une fonction sera *uniforme* si elle est monodrome dans tout le plan.

359. Théorème. — *Soit*

$$S = \Sigma A_{nn'\ldots} z^n z'^{n'} \ldots$$

une série procédant suivant les puissances entières et positives de $z, z', \ldots$.

Posons

$$z = \Sigma a_{ll'\ldots} u^l u'^{l'} \ldots,$$
$$z' = \Sigma a'_{ll'\ldots} u^l u'^{l'} \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et supposons : 1° *que les séries ci-dessus admettent chacune un rayon de convergence;* 2° *que les termes constants* $a_{00}, \ldots, a'_{00}, \ldots$ *des séries en* $u, u', \ldots$ *soient nuls. La fonction* S, *exprimée au moyen des nouvelles variables* u, u', ..., *sera donnée par une série*

$$S = \Sigma C_{nn'\ldots} u^n u'^{n'} \ldots$$

admettant un rayon de convergence.

Substituons en effet dans S les valeurs de $z, z', \ldots$, effectuons les multiplications et groupons les termes affectés des mêmes puissances de $u, u', \ldots$. Nous obtiendrons pour S un développement de la forme demandée.

Les opérations que nous indiquons seront licites et la série obtenue sera convergente si la série intermédiaire où tous les termes étaient encore séparés est absolument convergente.

La somme σ des modules des termes de celle-ci est égale à

$$\Sigma |A_{nn'\ldots}| [\Sigma | a_{ll'\ldots} u^l u'^{l'} \ldots |]^n [\Sigma | a'_{ll'\ldots} u^l u'^{l'} \ldots |]^{n'} \ldots.$$

Il faut prouver que cette quantité restera finie tant que $|u|$, $|u'|$, ... ne surpasseront pas une quantité fixe λ convenablement choisie.

On peut déterminer, par hypothèse, des quantités M, R, m, r, m', r', ... telles que l'on ait

$$|A_{nn'\dots}| < \frac{M}{R^{n+n'+\dots}}, \qquad |a_{ll'\dots}| < \frac{m}{r^{l+l'+\dots}}, \qquad \dots.$$

Posons, pour abréger,

$$\Sigma|a_{ll'\dots}u^l u'^{l'}\dots| = v, \qquad \Sigma|a'_{ll'\dots}u^l u'^{l'}\dots| = v', \qquad \dots.$$

On aura

$$\sigma < M\sum\frac{v^n v'^{n'}\dots}{R^{n+n'+\dots}} < \frac{M}{\left(1-\frac{v}{R}\right)\left(1-\frac{v'}{R}\right)\dots}.$$

Cette quantité restera donc finie tant que v, v', ... seront $< R$.

Or on a

$$v < m\sum\left|\frac{u^l u'^{l'}\dots}{r^{l+l'+\dots}}\right| \qquad (l+l'+\dots>0)$$

$$< m\left[\frac{1}{\left(1-\frac{|u|}{r}\right)\left(1-\frac{|u'|}{r}\right)\dots}-1\right],$$

ou, si tous les modules $|u|$, $|u'|$, ... sont $<\lambda$, et si k désigne le nombre des variables u, u', ...,

$$v < m\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)^k}-1\right].$$

Cette quantité sera $< R$, si l'on a

$$m\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{r}\right)^k}-1\right] < R,$$

d'où

$$\lambda < r\left(1-\sqrt[k]{\frac{m}{m+R}}\right).$$

On trouvera de même pour λ des valeurs au-dessous desquelles chacune des quantités v', ... sera $< R$. En prenant pour λ le plus petit des nombres ainsi trouvés, la convergence sera assurée.

360. *Cas particuliers.* — Si l'on prend pour S, au lieu d'une série infinie, un des polynomes $z + z'$, $z - z'$, zz', on voit que l'addition, la soustraction ou la multiplication de séries ayant un rayon de convergence donne une série de même nature.

Si l'on prend pour S la série

$$\frac{1}{a_{00\ldots} + z} = \frac{1}{a_{00\ldots}} - \frac{z}{a_{00\ldots}^2} + \ldots,$$

on voit que l'inverse de la série

$$\sum a_{ll\ldots} u^l u'^{l'} \ldots$$

est développable suivant les puissances entières et positives de u, u', ..., en une série admettant un rayon de convergence, pourvu que le terme constant $a_{00}\ldots$ ne soit pas nul.

361. Théorème. — *Soit* $S(u, z_1, \ldots, z_n)$ *un élément de fonction analytique à* $n+1$ *variables. Si l'équation*

$$S(u, 0, \ldots, 0) = 0$$

a n *racines nulles, l'équation*

$$S(u, z_1, \ldots, z_n) = 0$$

admettra, si $z_1, \ldots, z_n$ *sont infiniment petits,* n *racines infiniment petites.*

Nous renverrons à plus tard la démonstration générale de cette proposition. Pour le moment nous nous bornerons à traiter le cas où $n = 1$. Dans ce cas particulier, l'énoncé précédent peut être complété comme il suit :

Théorème. — *Si l'équation* $S(u, 0) = 0$ *a* n *racines*

nulles, l'équation $S(u, z) = 0$ *admettra, pour* z *infiniment petit,* n *racines infiniment petites.*

Chacune d'elles sera représentée, aux environs du point $z = 0$, *par un développement convergent, de la forme*

$$U = M z^{\mu} + M_1 z^{\mu_1} + \ldots,$$

où $\mu, \mu_1, \ldots$ *sont des fractions positives croissantes, telles que le plus petit commun multiple* m *de leurs dénominateurs soit* $\overline{\gtrless} n$.

Dans certains cas particuliers, plusieurs de ces racines pourront être égales et seront représentées par le même développement. D'autre part, il peut arriver que quelques-unes des séries U s'arrêtent après un nombre limité de termes [ou même se réduisent à zéro si $S(u, z)$ contient u en facteur commun].

Pour établir cette proposition, nous supposerons provisoirement que les racines cherchées existent et admettent chacune un développement de la forme U ; nous déterminerons les nombres $M, \mu, M_1, \mu_1, \ldots$ par la méthode des coefficients indéterminés, au moyen de l'équation

$$S(U, z) = 0.$$

Nous verrons qu'il existe n développements U satisfaisant à cette condition ; et nous montrerons qu'ils sont convergents aux environs de $z = 0$.

362. Ordonnons S suivant les puissances croissantes de u ; en remarquant que quelques-unes des puissances de u peuvent manquer dans cette série, nous pourrons écrire généralement

$$S(u, z) = \varphi_1 u^{\beta_1} + \varphi_2 u^{\beta_2} + \ldots + \varphi_n u^n + R,$$

R désignant l'ensemble des termes qui contiennent u à une puissance supérieure à n, et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des séries de puissances entières de z.

Ordonnons ces séries suivant les puissances croissantes

de z; en vertu des hypothèses faites sur S, φ_n commencera par un terme constant A_n; et si $i<n$, φ_i commencera par un terme $A_i z^{\alpha_i}$, où $\alpha_i > 0$.

Mettant ces termes en évidence, on aura

$$S(u,z) = (A_1 z^{\alpha_1}+\ldots)u^{\beta_1} + (A_2 z^{\alpha_2}+\ldots)u^{\beta_2} + \ldots + (A_n+\ldots)u^n + R.$$

Substituons dans cette expression à la place de u le développement

$$U = Mz^{\mu} + M_1 z^{\mu_1} + \ldots = Mz^{\mu} + \rho.$$

Le résultat $S(u, z)$ de la substitution sera une série de puissances entières de $z^{\frac{1}{m}}$. Pour qu'il soit identiquement nul, il faudra que les termes d'un même degré, et en particulier ceux du degré minimum, se détruisent. Il faut donc : 1° qu'il y ait plusieurs termes de degré minimum; 2° que la somme de leurs coefficients soit nulle.

363. Or il est clair que les termes de degré minimum ne peuvent se trouver que parmi les suivants :

$$A_1 M^{\beta_1} z^{\alpha_1+\beta_1\mu}, \quad A_2 M^{\beta_2} z^{\alpha_2+\beta_2\mu}, \quad \ldots, \quad A_n M^n z^{n\mu}.$$

Donc la suite des exposants

$$(3) \qquad \alpha_1+\beta_1\mu, \quad \alpha_2+\beta_2\mu, \quad \ldots, \quad n\mu$$

doit présenter plusieurs termes minima.

Pour déterminer μ par cette condition, remarquons que les entiers β_1, β_2, ..., n vont en croissant. Si donc nous faisons varier μ de 0 à ∞, chacun des nombres de la suite (3) croîtra plus rapidement que les précédents, et finira par les surpasser.

Mais, pour μ infiniment petit, $n\mu$ sera évidemment le plus petit nombre de la suite. Si l'on fait croître μ, il arrivera un moment où $n\mu$ deviendra pour la première fois égal à un ou à plusieurs des nombres précédents. Supposons qu'on ait à cet instant

$$\alpha_i+\beta_i\mu = \alpha_{i'}+\beta_{i'}\mu = \ldots = n\mu \qquad (i<i'<\ldots<n).$$

Si μ continue à croître, l'exposant $\alpha_i+\beta_i\mu$, qui, à cet instant, n'est supérieur à aucun des suivants, et croît moins vite qu'eux, deviendra à son tour minimum, jusqu'à ce qu'il atteigne un ou plusieurs des précédents. Soit à cet instant

$$(4) \quad \alpha_k+\beta_k\mu=\alpha_{k'}+\beta_{k'}\mu=\ldots=\alpha_i+\beta_i\mu \quad (k<k'<\ldots<i).$$

A partir de là, $\alpha_k+\beta_k\mu$ deviendra à son tour minimum, et ainsi de suite, jusqu'à ce que $\alpha_1+\beta_1\mu$ devienne, et reste définitivement minimum.

Nous obtenons ainsi un certain nombre de valeurs de μ, donnant chacune plusieurs exposants minima. Considérons l'une d'elles, par exemple celle qui est définie par les équations (4). Elle sera rationnelle, car on a

$$\mu=\frac{\alpha_k-\alpha_{k'}}{\beta_{k'}-\beta_k}=\ldots=\frac{\alpha_k-\alpha_i}{\beta_i-\beta_k},$$

et les quantités α, β sont des entiers. Soit d'ailleurs $\mu=\frac{p}{q}$ cette fraction, réduite à sa plus simple expression : on aura

$$\beta_{k'}-\beta_k=\gamma' q, \qquad \ldots, \qquad \beta_i-\beta_k=\gamma q,$$

$\gamma', \ldots, \gamma$ étant des entiers.

364. Les valeurs de M correspondant à cette valeur de μ s'obtiennent en égalant à zéro la somme des coefficients des termes de degré minimum. On obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned} o=\psi(M) &= A_k M^{\beta_k}+A_{k'}M^{\beta_{k'}}+\ldots+A_i M^{\beta_i} \\ &= M^{\beta_k}(A_k+A_{k'}M^{\gamma' q}+\ldots+A_i M^{\gamma q}). \end{aligned}$$

Le nombre des racines non nulles de cette équation est égal à $\beta_i-\beta_k$. Si donc on considère toutes les valeurs ci-dessus trouvées pour μ avec les valeurs correspondantes de M, on trouve un nombre total de systèmes de valeurs de (μ, M) égal à

$$(n-\beta_i)+(\beta_i-\beta_k)+\ldots=n-\beta_1.$$

D'ailleurs l'équation $S(u, z)=o$, admettant u^{β_1} comme

facteur commun à son premier membre, a β_1 racines identiquement nulles. Nous avons donc bien trouvé le premier terme du développement de chacune des autres racines.

On remarquera toutefois que, l'équation $\psi(M) = 0$ pouvant présenter des racines multiples, plusieurs des systèmes de valeurs (μ, M) peuvent être égaux.

Soient M une des racines non nulles de l'équation $\psi(M) = 0$, n_1 son ordre de multiplicité. Le premier membre de cette équation ne contenant (après suppression du facteur commun M^{β_k}) que des puissances de M multiples de q, elle admettra évidemment la racine θM, θ désignant une quelconque des racines $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et avec le même ordre de multiplicité. Le nombre total de ces racines sera donc au moins égal à $n_1 q$; d'où l'inégalité

$$n_1 q \leqq \beta_i - \beta_k$$

et, *a fortiori*,

$$n_1 q \leqq n.$$

365. Posons maintenant

$$u = (M + u_1) z^{\mu}, \qquad z = z_1^q,$$

u_1, z_1 étant de nouvelles variables : il viendra, en posant pour abréger $\alpha_i + \beta_i \mu = \lambda$,

$$(5) \qquad S[(M + u_1) z^{\mu}, z] = z^{\lambda} S_1(u_1, z_1),$$

S_1 désignant un nouvel élément de fonction analytique qui, pour $z = 0$, se réduit à $\psi(M + u_1)$. Or l'équation

$$\psi(M + u_1) = 0$$

admet la racine $u_1 = 0$, avec le degré de multiplicité n_1.

L'équation $S_1(u_1, z_1) = 0$ admettra donc, pour z infiniment petit, n_1 racines infiniment petites; nous pourrons calculer la valeur principale de chacune d'elles, laquelle sera de la forme

$$M_1 z_1^{\mu'},$$

où μ' est une fraction de la forme $\frac{p_1}{q_1}$. Si n_2 est le nombre

des racines qui ont cette même valeur principale, on aura

$$n_2 q_1 \overline{\overline{<}} n_1,$$

et, en posant

$$u_1 = (M_1 + u_2) z_1^{\mu'} = (M_1 + u_2) z^{\frac{\mu'}{q}}, \qquad z_1 = z_2^{q_1},$$

on aura une relation de la forme

$$S_1[(M_1 + u_2) z_1^{\mu'}, z_1] = z_1^{\lambda'} S_2(u_2, z_2),$$

$S_2 = 0$ admettant, pour z infiniment petit, n_2 racines infiniment petites.

Substituant la valeur ci-dessus de u_1 dans l'équation (5), et posant, pour abréger,

$$\mu + \frac{\mu'}{q} = \mu_1, \qquad \lambda + \frac{\lambda'}{q} = \lambda_1,$$

il viendra

$$S[M z^{\mu} + (M_1 + u_2) z^{\mu_1}, z] = z^{\lambda_1} S_2(u_2, z_2).$$

366. Poursuivant ainsi, on aura, en désignant par i un entier aussi grand qu'on veut,

$$S[M z^{\mu} + M_1 z^{\mu_1} + \ldots + (M_{i-1} + u_i) z^{\mu_{i-1}}, z] = z^{\lambda_{i-1}} S_i(u_i, z_i),$$

$\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{i-1}$ étant une série de fractions de dénominateurs $q, qq_1, \ldots, qq_1 \ldots q_{i-1}$, z_i étant égal à $z^{\frac{1}{qq_1 \ldots q_{i-1}}}$, et S_i une série de puissances telle que, pour $z = 0$, l'équation $S_i = 0$ admette n_i racines nulles. Enfin, on aura la suite d'inégalités

$$n_1 q \overline{\overline{<}} n, \qquad n_2 q_1 \overline{\overline{<}} n_1, \qquad \ldots, \qquad n_i q_{i-1} \overline{\overline{<}} n_{i-1}$$

et, *a fortiori*,

$$qq_1 \ldots q_{i-1} \overline{\overline{<}} n.$$

Les entiers positifs $n, n_1, n_2, \ldots$ forment une suite non croissante qu'on peut prolonger indéfiniment. Comme ils ne peuvent s'abaisser au-dessous de 1, il arrivera nécessaire-

ment un moment où ils cesseront de décroître; à partir du même instant, les q deviendront égaux à l'unité.

On aura donc, pour toutes les valeurs de i qui surpassent un nombre fini,

$$n_i = \nu, \qquad z_i = z^{\frac{1}{m}},$$

ν et m étant des entiers constants, au plus égaux à n; et μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_{i-1}$ seront des multiples de $\frac{1}{m}$.

367. Deux cas seront à distinguer ici :

1° Si $\nu = 1$, la série

$$S_i(u_i, z_i) = S_i\left(u_i, z^{\frac{1}{m}}\right)$$

s'annule pour $u_i = 0$, $z = 0$, mais sa dérivée partielle $\frac{\partial S_i}{\partial u_i}$ n'est pas nulle. L'équation

$$S_i\left(u_i, z^{\frac{1}{m}}\right) = 0$$

définit donc aux environs de $z = 0$ une fonction synectique de $z^{\frac{1}{m}}$, développable suivant les puissances de cette quantité. Substituant ce développement à la place de u_i dans l'expression

$$u = M z^{\mu} + M_1 z^{\mu_1} + \ldots + (M_{i-1} + u_i) z^{\mu_{i-1}},$$

on aura un développement U qui satisfait à l'équation

$$S(U, z) = 0.$$

2° Si $\nu > 1$, le second membre de l'équation

$$(6)\quad S(u, z) = S[M z^{\mu} + \ldots + (M_{i-1} + u_i) z^{\mu_{i-1}}, z] = z^{\lambda_{i-1}} S_i\left(u_i, z^{\frac{1}{m}}\right)$$

contiendra un terme de la forme $z^{\lambda_{i-1}} \beta u_i^{\nu}$, β étant une constante. Mais, au premier membre, u_i ne figure que multiplié par $z^{\mu_{i-1}}$; on aura donc nécessairement

$$\lambda_{i-1} \overline{\overline{>}} \nu \mu_{i-1}.$$

Cela posé, soit ρ un entier quelconque $< \nu$. Prenons la $\rho^{\text{ième}}$ dérivée par rapport à u de l'équation (6); il viendra

$$\frac{\partial^\rho}{\partial u^\rho} S(u, z) = z^{\lambda_{i-1} - \rho\mu_{i-1}} \frac{\partial^\rho}{\partial u_i^\rho} S_i\left(u_i, z^{\frac{1}{m}}\right).$$

Cette équation montre qu'en partant de la série $\frac{\partial^\rho}{\partial u^\rho} S(u, z)$ on obtiendrait un développement qui coïncide dans ses i premiers termes $Mz^\mu + \ldots + M_{i-1} z^{\mu_{i-1}}$ avec celui déduit de $S(u, z)$. Le nombre i étant quelconque, la coïncidence sera complète.

Ce développement est convergent; car, si l'on pose en particulier $\rho = \nu - 1$, la fonction $\frac{\partial^{\nu-1} S_i}{\partial u_i^{\nu-1}}$ s'annulera pour $u_i = 0$, $z = 0$, mais non sa dérivée partielle $\frac{\partial^\nu S_i}{\partial u_i^\nu}$. L'équation $\frac{\partial^{\nu-1} S_i}{\partial u_i^{\nu-1}} = 0$ définira donc une fonction u_i synectique en $z^{\frac{1}{m}}$ et dont le développement est convergent.

Le développement $U = Mz^\mu + M_1 z^{\mu_1} + \ldots$ ainsi obtenu, substitué dans les équations

$$S(u, z) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u} S(u, z) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^\rho S(u, z)}{\partial u^\rho} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

y satisfait identiquement. En effet, le résultat de la substitution de U dans l'un des premiers membres sera une série convergente procédant suivant les puissances entières et positives de $z^{\frac{1}{m}}$; mais cette série contient en facteur commun z avec une puissance au moins égale à

$$\lambda_{i-1} - \rho\mu_{i-1} \geqq (\nu - \rho)\mu_{i-1},$$

et cela quel que soit i. Or les quantités $\mu_1, \mu_2, \ldots$ sont

des multiples de $\frac{1}{m}$ dont chacun est plus grand que le précédent. Donc μ_{i-1} croît indéfiniment avec i. Toutes les puissances de $z^{\frac{1}{m}}$, quel que soit leur degré, disparaîtront donc de la série, qui devra se réduire identiquement à zéro.

368. Soit U un des développements dont l'existence vient d'être établie, et qui satisfont à $S(u, z) = 0$. Posons

$$u = U + v;$$

$S(U + v, z)$ sera une série de puissances entières de $z^{\frac{1}{m}}$ et de v, qui s'annule pour $v = 0$ et qui, par suite, contient v en facteur. Donc, en remettant pour v sa valeur $u - U$, et remarquant que U est une série de puissances de $z^{\frac{1}{m}}$, il viendra

$$S(u, z) = (u - U)\,T\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right),$$

T désignant une nouvelle série de puissances.

Si ν est > 1, on sait en outre que U doit satisfaire aux équations

$$\frac{\partial S}{\partial u} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\nu-1} S}{\partial u^{\nu-1}} = 0.$$

Or, pour $u = U$, $\frac{\partial S}{\partial u}$ se réduit à $T\left(U, z^{\frac{1}{m}}\right)$. Donc T, s'annulant pour $u = U$, pourra être mis sous la forme

$$(u - U)\,T_1\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right),$$

T_1 désignant une autre série de puissances. On aura donc

$$S(u, z) = (u - U)^2\,T_1\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right).$$

L'équation $\frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = 0$ montre de même que T_1 contient $u - U$ en facteur et ainsi de suite : donc $S(u, z)$ pourra se mettre

sous la forme

$$(7) \qquad S(u, z) = (u - U)^\nu T\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right).$$

Si $m > 1$, z admet m racines $m^{\text{ièmes}}$ distinctes; $z^{\frac{1}{m}}$ désignant l'une d'elles, elles auront pour forme générale $e^{\frac{2r\pi i}{m}} z^{\frac{1}{m}}$, où r prend les valeurs $0, 1, \ldots, m-1$. En substituant successivement ces racines dans U, on obtiendra une suite de développements $U_1, \ldots, U_{m-1}$ tous différents les uns des autres. Cela posé, changeons dans l'identité (7) $z^{\frac{1}{m}}$ en $e^{\frac{2\pi i}{m}} z^{\frac{1}{m}}$. Le premier membre restant inaltéré, il viendra

$$S(u, z) = (u - U_1)^\nu T\left(u, e^{\frac{2\pi i}{m}} z^{\frac{1}{m}}\right).$$

Donc

$$(8) \qquad (u - U)^\nu T\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right) = (u - U_1)^\nu T\left(u, e^{\frac{2\pi i}{m}} z^{\frac{1}{m}}\right).$$

Le second membre s'annulant pour $u = U_1$, il en est de même du premier; mais $U_1 - U$ n'est pas nul. Donc $T\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right)$ s'annule pour $u = U_1$, et pourra être mis sous la forme $(u - U_1) T_1\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right)$.

Substituant cette valeur de T dans l'identité (8) et supprimant le facteur $u - U_1$ commun aux deux membres, on voit que, si $\nu > 1$, T_1 s'annulera encore pour $u = U_1$ et pourra être mis sous la forme $(u - U_1)T_2$. Continuant ainsi, on voit que $S(u, z)$ peut être mis sous la forme

$$(u - U)^\nu (u - U_1)^\nu \Theta\left(u, z^{\frac{1}{m}}\right).$$

Par une suite de raisonnements semblables, on voit que $S(u, z)$ peut être mis sous la forme

$$S(u, z) = (u - U)^\nu (u - U_1)^\nu \ldots (u - U_{m-1})^\nu \Phi,$$

Φ étant une nouvelle série de puissances de u et $z^{\frac{1}{m}}$. D'ailleurs, en remplaçant $z^{\frac{1}{m}}$ par une autre détermination $e^{\frac{2r\pi i}{m}} z^{\frac{1}{m}}$

du même radical, $S(u, z)$ ne change pas, et les facteurs $u - U$, $u - U_1$, ... se permutent entre eux. Donc $(u - U)\ldots(u - U_{m-1})$ d'une part, et Φ d'autre part, ne contiendront que des puissances de $z^{\frac{1}{m}}$ dont l'ordre est multiple de m; ce seront donc des séries de puissances entières de u et de z.

Nous dirons que les développements $U, U_1, \ldots, U_{m-1}$, qui se déduisent l'un de l'autre en changeant la détermination du radical $z^{\frac{1}{m}}$, forment un *cycle* de racines de l'équation $S(u, z) = 0$. Ces racines se permutent circulairement les unes dans les autres si z décrit un contour fermé autour de l'origine. Le nombre ν sera *l'ordre de multiplicité* des racines du cycle.

Si $n > m\nu$, il y aura d'autres racines. Soient U' l'une d'elles, m', ν' les nombres analogues à m, ν qui lui correspondent. Un raisonnement tout semblable au précédent montre que Φ peut se mettre sous la forme

$$(u - U')^{\nu'}\ldots(u - U'_{m'-1})^{\nu'}\Phi_1(u, z).$$

Continuant ainsi, on mettra finalement $S(u, z)$ sous la forme

$$\begin{aligned} S(u, z) = {} & [(u - U)\ldots(u - U_{m-1})]^{\nu} \\ & [(u - U')\ldots(u - U'_{m'-1})]^{\nu'}\ldots\Psi(u, z), \end{aligned}$$

Ψ désignant une nouvelle série, qui ne s'annule pas pour $u = 0$, $z = 0$.

369. Soit u une fonction de z définie par l'équation

$$Z_0 u^n + Z_1 u^{n-1} + \ldots + Z_n = 0,$$

les Z étant des séries de puissances entières et positives de z convergentes aux environs du point $z = 0$. Les n racines de cette équation seront représentées aux environs de ce point par des séries convergentes, procédant chacune suivant les puissances entières et croissantes de $z^{\frac{1}{m}}$, m étant un entier $\overline{\leq} n$. Toutefois, si les i premiers coefficients $Z_0, \ldots, Z_{i-1}$

contiennent z en facteur, i de ces développements contiendront au début des puissances négatives.

En effet, en posant $z = 0$, on aura, pour déterminer les valeurs correspondantes de u, une équation de degré $n - i$. Soient a l'une de ses racines, α son ordre de multiplicité. Posons $u = a + u_1$. L'équation transformée en u_1 aura, pour $z = 0$, α racines nulles, et d'après l'analyse précédente, pour z infiniment petit, α racines infiniment petites, dont chacune sera développable suivant les puissances positives et croissantes de $z^{\frac{1}{m}}$, m étant $\overline{\leq} \alpha$.

Pour développer les i autres racines, qui cessent d'exister pour $z = 0$, posons $u = \frac{u_1}{z^{\lambda+1}}$, z^λ étant la plus haute puissance de z qui divise Z_0. L'équation transformée

$$z^{-\lambda} Z_0 u_1^n + z Z_1 u_1^{n-1} + z^{\lambda+2} Z_2 u_1^{n-2} + \ldots = 0$$

aura n racines nulles pour $z = 0$, et pour z infiniment petit n racines infiniment petites, développables suivant les puissances entières et positives de $z^{\frac{1}{m}}$. En les divisant par $z^{\lambda+1}$, on aura les valeurs correspondantes de u; ceux de ces n développements qui commencent par des exposants négatifs donneront les racines cherchées.

370. Tous les raisonnements ci-dessus subsistent si les coefficients Z ne sont plus des séries infinies, mais des polynomes en z. Dans ce cas, u sera une fonction algébrique de z.

Si d'ailleurs on pose $z = a + z_1$, a désignant une constante, ou $z = \frac{1}{z_1}$, u sera une fonction algébrique de z_1. Les racines de l'équation en u seront donc développables suivant les puissances croissantes (en général fractionnaires) de $z - a$ ou de $\frac{1}{z}$.

371. La théorie précédente est susceptible de nombreuses

applications. Nous nous bornerons pour le moment à la suivante :

1° *Soient*

$$f(x, y) = \mathrm{M}y^m + \mathrm{M}_1 y^{m_1} + \ldots = 0,$$
$$\varphi(x, y) = \mathrm{N}y^n + \mathrm{N}_1 y^{n_1} + \ldots = 0$$

deux équations algébriques. On demande de former l'équation finale en x résultant de l'élimination de y entre ces équations.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les valeurs de y en x, déduites de la première équation, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ les valeurs déduites de la seconde. La variable x, devant évidemment être choisie de telle sorte que l'une des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_m$ soit égale à l'une des valeurs $\eta_1, \ldots, \eta_n$, satisfera à l'équation

$$(9)\quad (y_1 - \eta_1)\ldots(y_1 - \eta_n)(y_2 - \eta_1)\ldots(y_2 - \eta_n)\ldots(y_m - \eta_1)\ldots(y_m - \eta_n) = 0.$$

Or on a d'une part

$$\mathrm{N}(y_1 - \eta_1)\ldots(y_1 - \eta_n) = \varphi(x, y_1) = \mathrm{N}y_1^n + \mathrm{N}_1 y_1^{n_1} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{N}(y_m - \eta_1)\ldots(y_m - \eta_n) = \varphi(x, y_m) = \mathrm{N}y_m^n + \mathrm{N}_1 y_m^{n_1} + \ldots,$$

et d'autre part

$$\mathrm{M}(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_1)\ldots(y_m - \eta_1)$$
$$= (-1)^m f(x, \eta_1) = (-1)^m(\mathrm{M}\eta_1^m + \mathrm{M}_1 \eta_1^{m_1} + \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{M}(y_1 - \eta_n)(y_2 - \eta_n)\ldots(y_m - \eta_n)$$
$$= (-1)^m f(x, \eta_n) = (-1)^m(\mathrm{M}\eta_n^m + \mathrm{M}_1 \eta_n^{m_1} + \ldots).$$

L'équation (9) pourra donc se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\frac{1}{\mathrm{N}^m}\varphi(x, y_1)\ldots\varphi(x, y_m) = 0,$$

$$\frac{(-1)^{mn}}{\mathrm{M}^n} f(x, \eta_1)\ldots f(x, \eta_n) = 0.$$

Multipliant par $\mathrm{N}^m\mathrm{M}^n$ pour chasser les dénominateurs, il

viendra

$$(10)\quad 0 = M^n \varphi(x, y_1)\ldots\varphi(x, y_m) = (-1)^{mn} N^m f(x, \eta_1)\ldots f(x, \eta_n).$$

On voit, par cette double forme donnée au premier membre de l'équation finale (10), que son premier membre est une fonction entière, d'une part par rapport aux coefficients N, N_1, ... de la fonction φ, d'autre part par rapport aux coefficients M, M_1, ... de la fonction f. C'est donc un polynome entier en x.

Pour obtenir sous forme explicite le premier membre de cette équation, il suffira de calculer son développement suivant les puissances descendantes de x, par les règles qui ont été exposées. Pour cela, on calculera d'abord les développements des racines $y_1, \ldots, y_m$, puis ceux des fonctions entières M^n, $\varphi(x, y_1), \ldots, \varphi(x, y_m)$, et enfin celui de leur produit. Comme d'ailleurs on sait d'avance que ce produit est un polynome entier en x, on arrêtera le développement aux termes de degré zéro.

Ce procédé de formation de l'équation finale serait assez compliqué, mais il permet de reconnaître facilement son degré. Il suffira pour cela de calculer le premier terme de l'équation.

On peut reconnaître, par un procédé analogue, si l'équation finale a une racine nulle, et assigner son degré de multiplicité. Il faudra pour cela chercher le premier terme du développement de son premier membre suivant les puissances croissantes de x.

VI. — Applications.

372. Nouveaux développements des fonctions trigonométriques. — Nous avons trouvé (245), m désignant un entier impair, la formule

$$\sin \pi z = m \sin \frac{\pi z}{m} \prod_1^{\frac{m-1}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 \dfrac{\pi z}{m}}{\sin^2 \dfrac{n\pi}{m}} \right).$$

Cherchons quelle est la limite de cette expression, lorsque m croît indéfiniment.

Le premier facteur $m \sin \frac{\pi z}{m}$ tend évidemment vers πz.

Soit $1 - \dfrac{\sin^2 \frac{\pi z}{m}}{\sin^2 \frac{p\pi}{m}}$ un des autres facteurs; nous supposerons d'abord $p \leqq k$, k étant un entier arbitraire que nous fixerons ultérieurement.

Les quantités $\sin^2 \frac{\pi z}{m}$ et $\sin^2 \frac{p\pi}{m}$ sont des infiniment petits dont les valeurs principales sont $\frac{\pi^2 z^2}{m^2}$ et $\frac{p^2\pi^2}{m^2}$; leur rapport tend donc vers $\frac{z^2}{p^2}$. Le produit des $k+1$ premiers facteurs du second membre tendra donc vers

$$\pi z\left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right).$$

Nous allons voir que, en prenant k assez grand, le produit des facteurs suivants différera de l'unité aussi peu qu'on voudra.

Considérons, en effet, un de ces facteurs, où p soit $> k$, sans pouvoir surpasser $\frac{m-1}{2}$. La quantité $\sin^2 \frac{\pi z}{m}$ sera de la forme $\frac{\pi^2 z^2}{m^2}(1 + \varepsilon)$, ε étant infiniment petit. D'autre part, on a, par la formule de Maclaurin,

$$\sin \frac{p\pi}{m} = \frac{p\pi}{m} - \left(\frac{p\pi}{m}\right)^3 \frac{\cos\theta \frac{p\pi}{m}}{1.2.3},$$

θ étant compris entre 0 et 1. D'ailleurs, $\frac{p\pi}{m}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$0 \leqq \cos\theta \frac{p\pi}{m} \leqq 1;$$

d'où

$$\sin\frac{p\pi}{m} = \frac{p\pi}{m}A_p,$$

A_p étant compris entre 1 et $1 - \frac{\pi^2}{24}$.

On aura, par suite,

$$1 - \frac{\sin^2\frac{\pi z}{m}}{\sin^2\frac{p\pi}{m}} = 1 - \frac{z^2(1+\varepsilon)^2}{p^2 A_p^2} = 1 - \frac{B_p}{p^2},$$

B_p ayant son module compris entre des limites fixes (en supposant que z soit fixe, ou tout au moins renfermé dans un domaine borné).

Or on a vu qu'un produit infini, dont le facteur général est de la forme ci-dessus, est absolument convergent (324). Donc le produit d'un nombre quelconque de facteurs consécutifs

$$\left[1 - \frac{B_{k+1}}{(k+1)^2}\right]\left[1 - \frac{B_{k+2}}{(k+2)^2}\right]\cdots$$

sera aussi voisin qu'on voudra de l'unité, si k est assez grand. On aura donc

$$\sin\pi z = \pi z\left(1 - \frac{z^2}{1}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)K,$$

K tendant vers 1 à mesure que k augmente. En le faisant tendre vers ∞, on aura à la limite

$$(1) \qquad \sin\pi z = \pi z\prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

373. On a identiquement

$$1 - \frac{z^2}{n^2} = \left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{-n}\right);$$

on pourrait donc être tenté d'écrire

$$\sin\pi z = \pi z\prod\left(1 + \frac{z}{n}\right),$$

le produit s'étendant à toutes les valeurs positives et négatives de l'entier n. Mais le produit ainsi obtenu ne serait plus absolument convergent.

On peut remédier à cet inconvénient en posant

$$1 - \frac{z^2}{n^2} = \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{-n}\right) e^{-\frac{z}{-n}};$$

d'où

$$(2) \qquad \sin \pi z = \pi z \prod \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}.$$

Ce nouveau produit est absolument convergent. On a, en effet, pour le logarithme du terme général,

$$\log\left(1 + \frac{z}{n}\right) - \frac{z}{n} = \frac{\theta_n z^2}{n^2},$$

θ_n tendant vers $\frac{-1}{2}$ pour n infini; et la série qui a pour terme général $\frac{\theta_n z^2}{n^2}$ est absolument convergente pour toute valeur de z; elle le sera même uniformément dans tout domaine borné.

374. Posons $z = \frac{1}{2}$ dans la formule (1), il viendra

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right);$$

d'où

$$\frac{\pi}{2} = \prod_1^\infty \frac{4n^2}{4n^2 - 1},$$

formule découverte par Wallis.

375. Pour obtenir l'expression de $\cos \pi z$ par un produit infini, le plus simple est de partir de la formule

$$\cos \pi z = \frac{\sin 2\pi z}{2 \sin \pi z} = \frac{2\pi z \prod \left(1 + \frac{2z}{n}\right) e^{-\frac{2z}{n}}}{2\pi z \prod \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}}.$$

Supprimant les facteurs communs, qui correspondent aux valeurs paires données à n dans le numérateur, il vient

$$(3)\qquad \cos\pi z = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{2z}{2n+1}\right)e^{-\frac{2z}{2n+1}}.$$

A chaque valeur négative n' de l'indice de sommation correspond une autre valeur n, positive ou nulle, telle qu'on ait

$$2n' + 1 = -(2n+1).$$

Faisant le produit des deux facteurs associés correspondant à ces deux valeurs n et n', il vient

$$\cos\pi z = \prod_{0}^{\infty}\left[1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right].$$

376. Prenons la dérivée logarithmique de la formule (2); il viendra

$$(4)\qquad \pi\cot\pi z = \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right),$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs entières de n, zéro excepté.

Développons chaque terme suivant les puissances croissantes de z; il viendra

$$\pi\cot\pi z = \frac{1}{z} - \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{z}{n^2} + \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{n^3} - \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{z^3}{n^4} + \ldots$$

$$= \frac{1}{z} - 2z\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 2z^3\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \ldots.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \pi i \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}$$

$$= \frac{1}{z} \frac{2\pi i z}{2} \frac{e^{2i\pi z} + 1}{e^{2i\pi z} - 1}$$

$$= \frac{1}{z}\left[1 + B_1 \frac{(2i\pi z)^2}{1.2} - B_2 \frac{(2i\pi z)^4}{1.2.3.4} + \ldots\right],$$

B_1, B_2, ... désignant les nombres bernoulliens (269).

Égalant les coefficients des mêmes puissances de z dans ces développements, il viendra

$$B_1 \frac{2\pi^2}{1.2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$B_m \frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{1.2\ldots 2m} = \sum_1^\infty \frac{1}{n^{2m}}.$$

377. On peut mettre aisément en évidence sur les formules qui précèdent la périodicité des fonctions trigonométriques.

Considérons par exemple le développement (4) de $\cot \pi z$.

Ajoutons ensemble les termes qui correspondent à deux valeurs égales et contraires de n; il viendra

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)$$

$$= \frac{1}{z} + \lim_{N=\infty} \sum_1^N \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}\right)$$

$$= \lim_{N=\infty} \sum_{-N}^{N} \frac{1}{z+n}.$$

Changeons z en $z+1$. La somme précédente se repro-

duira, accrue de la quantité

$$\frac{1}{z+1+N} - \frac{1}{z-N},$$

qui tend vers zéro pour $N = \infty$. Donc $\cot \pi z$ a la période 1.

378. Pour le sinus, nous aurons

$$\begin{aligned}
\sin \pi z &= \pi z \lim_{N=\infty} \prod_1^N \left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(1 - \frac{z}{n}\right) \\
&= \pi \lim_{N=\infty} \frac{(-1)^N z}{(1.2\ldots N)^2} \prod_1^N (z+n)(z-n) \\
&= \pi \lim_{N=\infty} \frac{(-1)^N}{(1.2\ldots N)^2} \prod_{-N}^N (z+n).
\end{aligned}$$

Si l'on change z en $z+1$, ce dernier produit se reproduira multiplié par $\frac{z+1+N}{z-N}$, facteur qui tend vers -1 quand N tend vers ∞. Donc

$$\sin \pi(z+1) = -\sin \pi z,$$

et $\sin \pi z$ admet 2 pour période.

379. Série hypergéométrique. — Considérons la série *hypergéométrique*

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \ldots \\ &+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} x^n + \ldots . \end{aligned} \right.$$

Cette expression est symétrique en α et β. Elle se réduira à un polynome entier si α ou β est entier et négatif; car tous ses termes, à partir d'un certain rang, s'annuleront. Elle n'a d'ailleurs aucun sens si γ est entier et négatif, car ses termes deviendraient infinis à partir d'un certain rang.

Excluons donc le cas où l'un des paramètres α, β, γ serait entier et négatif; nous obtiendrons une série infinie dont nous allons étudier tout d'abord la convergence.

Soit u_n le terme général; on aura

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\,\frac{1}{x},$$

expression qui tend vers $\frac{1}{x}$ quand n augmente indéfiniment. La série sera donc absolument convergente si $|x| < 1$.

Soit enfin $|x| = 1$. Admettons, pour plus de généralité, que α, β, γ soient complexes, et posons $\alpha = \alpha' + \alpha'' i$, $\beta = \beta' + \beta'' i$, $\gamma = \gamma' + \gamma'' i$. On aura

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| &= \left|\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}\right| \\
&= \sqrt{\frac{(n+1)^2[(n+\gamma')^2+\gamma''^2]}{[(n+\alpha')^2+\alpha''^2][(n+\beta')^2+\beta''^2]}} \\
&= \sqrt{\frac{n^4+2(1+\gamma')n^3+\ldots}{n^4+2(\alpha'+\beta')n^3+\ldots}} \\
&= \sqrt{1+2(1+\gamma'-\alpha'-\beta')\frac{1}{n}+\ldots} \\
&= 1+(1+\gamma'-\alpha'-\beta')\frac{1}{n}+\ldots.
\end{aligned}$$

La série des modules sera donc convergente, et la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ absolument convergente, si $\gamma' - \alpha' - \beta' > 0$. Au contraire, si $\gamma' - \alpha' - \beta' \leqq 0$, la série des modules sera divergente.

380. On peut former aisément une équation différentielle à laquelle satisfasse la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. En effet, considérons l'expression

$$\Phi = AF + BxF' + Cx^2F'' + DF' + ExF'',$$

où A, B, C, D, E sont des constantes arbitraires. Le terme en x^n aura pour coefficient

$$\left[\begin{array}{l} A(\gamma+n) + Bn(\gamma+n) + Cn(n-1)(\gamma+n) \\ \quad + D(\alpha+n)(\beta+n) + En(\alpha+n)(\beta+n) \end{array}\right] q,$$

en posant, pour abréger,

$$q = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\,\frac{1}{\gamma+n}.$$

La quantité qui multiplie q est un polynome en n du troisième degré, et l'on pourra évidemment disposer des rapports des cinq constantes A, B, C, D, E, de manière à annuler ses quatre coefficients; on aura alors identiquement

$$\Phi = 0.$$

On trouvera ainsi

$$(6) \qquad (x-x^2)F'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]F' - \alpha\beta F = 0.$$

381. En faisant varier les paramètres α, β, γ de la série F, on obtiendra une infinité de fonctions distinctes. Deux de ces fonctions seront dites *contiguës* si deux de leurs paramètres ont la même valeur, leurs troisièmes paramètres différant d'une unité.

Théorème. — *La fonction* F *et deux quelconques de ses contiguës sont liées par une équation linéaire ayant pour coefficients des polynomes du premier degré en* x.

La fonction F ayant six contiguës différentes, on aura ainsi $\frac{6.5}{2} = 15$ équations différentes. Nous allons indiquer comment on peut les établir.

Considérons, par exemple, les trois fonctions

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma-1, x), \quad F(\alpha, \beta, \gamma+1, x),$$

que nous représenterons, pour abréger, par

$$F, \quad F_{-1}, \quad F_1.$$

Soit N le coefficient de x^n dans F; formons son coefficient dans les fonctions F, xF, F_{-1}, xF_{-1}, F_1, xF_1. On trouvera

immédiatement les valeurs suivantes :

Pour F........ N

xF....... $N\dfrac{n(\gamma+n-1)}{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}$

F_{-1}...... $N\dfrac{\gamma+n-1}{\gamma-1}$

xF_{-1}..... $N\dfrac{\gamma+n-1}{\gamma-1}\,\dfrac{n(\gamma+n-2)}{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}$

F_1........ $N\dfrac{\gamma}{\gamma+n}$

xF_1...... $N\dfrac{\gamma}{\gamma+n}\,\dfrac{n(\gamma+n)}{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}$

On en déduit immédiatement que le coefficient de x^n dans l'expression

$$(A+Bx)F+(C+Dx)F_{-1}+ExF_1$$

sera égal au produit de $\dfrac{N}{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}$ par une fonction entière du troisième degré en n. On pourra déterminer les rapports des constantes A, B, C, D, E de manière à annuler cette fonction. On trouvera ainsi

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}&\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]F-\gamma(\gamma-1)(1-x)F_{-1}\\&\qquad+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF_1=0.\end{aligned}\right.$$

Les quatorze autres équations peuvent s'obtenir par un procédé identique. On simplifiera les calculs, soit en permutant les paramètres α et β par rapport auxquels F est symétrique, soit en profitant des équations déjà trouvées pour en obtenir d'autres, par l'élimination d'une des fonctions qui y figurent.

Trois fonctions

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x),\quad F(\alpha',\beta',\gamma',x),\quad F(\alpha'',\beta'',\gamma'',x),$$

dont les paramètres diffèrent de nombres entiers, sont liées

par une équation linéaire, dont les coefficients sont des polynomes en x. En effet, ces trois fonctions se rattachent les unes aux autres par une suite de fonctions contiguës. Formant les relations qui existent entre ces fonctions, et éliminant les fonctions intermédiaires, on obtiendra l'équation cherchée.

382. Il est intéressant de déterminer la valeur de la fonction $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ pour $x = 1$, lorsque cette série est convergente.

Posons $x = 1$ dans l'équation (7); il viendra

$$\gamma(\alpha+\beta-\gamma)F(\alpha, \beta, \gamma, 1) + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1) = 0,$$

d'où

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)} = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}.$$

Changeant, dans cette équation, γ en $\gamma+1, \gamma+2, \ldots, \gamma+n-1$ et multipliant ensemble les équations obtenues, il viendra

$$\begin{aligned}\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, 1)}{F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)} &= \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)\ldots(\gamma-\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\,\frac{(\gamma-\beta)\ldots(\gamma-\beta+n-1)}{(\gamma-\alpha-\beta)\ldots(\gamma-\alpha-\beta+n-1)}\\ &= \frac{\Pi(n, \gamma)\,\Pi(n, \gamma-\alpha-\beta)}{\Pi(n, \gamma-\alpha)\,\Pi(n, \gamma-\beta)},\end{aligned}$$

en posant, comme au n° 325,

$$\Pi(n, z) = \frac{1.2\ldots(n-1)\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}. \tag{8}$$

Faisons tendre n vers ∞; $F(\alpha, \beta, \gamma+n, 1)$ tendra évidemment vers l'unité; on aura donc, en posant encore

$$\lim_{n=\infty} \Pi(n, z) = \Gamma(z), \tag{9}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

383. *Fonction* Γ. — La fonction $\Gamma(z)$, définie par les équations (8) et (9), jouit de propriétés nombreuses et importantes. Nous allons en établir quelques-unes.

On a évidemment

$$\Pi(n, z+1) = \frac{zn}{z+n}\,\Pi(n, z),$$

d'où, en posant $n = \infty$,

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \tag{10}$$

et par suite, k étant un entier positif quelconque,

$$\Gamma(z+k) = z(z+1)\ldots(z+k-1)\,\Gamma(z).$$

On a d'ailleurs, identiquement,

$$\Pi(n, 1) = 1,$$

d'où

$$\Gamma(1) = 1$$

et, par suite,

$$\Gamma(1+k) = 1.2\ldots k.$$

384. On a, en second lieu,

$$\Pi(n, z)\,\Pi(n, -z) = -\frac{[1.2\ldots(n-1)]^2}{z^2(1-z^2)\ldots[(n-1)^2 - z^2]}$$

$$= -\frac{\pi}{z}\,\frac{1}{\pi z\left(1-\frac{z^2}{1}\right)\ldots\left[1-\frac{z^2}{(n-1)^2}\right]},$$

et, à la limite,

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z} \quad (372).$$

On en déduit

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = -z\,\Gamma(z)\,\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \tag{11}$$

Posons, en particulier, $z = \frac{1}{2}$; il viendra

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

d'où

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

385. Formons encore le produit

$$\frac{m^{mz}\Pi(n,z)\Pi\left(n,z+\frac{1}{m}\right)\ldots\Pi\left(n,z+\frac{m-1}{m}\right)}{\Pi(mn,mz)}.$$

On vérifie aisément qu'il a pour valeur

$$\frac{m^{mn}[1.2\ldots(n-1)]^m n^{\frac{m-1}{2}}}{1.2\ldots(mn-1)}=k,$$

quantité indépendante de z.

On aura donc, en posant $n=\infty$,

$$\frac{m^{mz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(mz)}=\lim k=\mathrm{C},$$

C désignant une constante indépendante de z.

Pour la déterminer, posons $z=\frac{1}{m}$. Il viendra

$$m\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{m-1}{m}\right)=\mathrm{C}.$$

Multiplions cette équation par elle-même, en renversant l'ordre des termes du premier membre. Il viendra, en tenant compte de l'équation (11),

$$m^2\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{m}}\,\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{m}}\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{(m-1)\pi}{m}}=\mathrm{C}^2.$$

Or on a

$$x^{2m}-1=\prod_0^{2m-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi i}{2m}}\right)=\prod_0^{m-1}\left(x-e^{\frac{2k\pi i}{2m}}\right)\left(x-e^{\frac{2(m+k)\pi i}{2m}}\right)$$

$$=(x^2-1)\left(x^2-2\cos\frac{2\pi}{2m}x+1\right)\cdots\left[x^2-2\cos\frac{2(m-1)\pi}{2m}x+1\right].$$

Posons $x=1+h$, et égalons les termes du premier degré en h dans les deux membres; il viendra

$$2m=2\left(2\sin\frac{\pi}{2m}\right)^2\cdots\left[2\sin\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]^2.$$

Posant $x = -1 + h$, on trouverait de même

$$2m = 2\left(2\cos\frac{\pi}{2m}\right)^2 \cdots \left[2\cos\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]^2.$$

Multiplions ces deux égalités et extrayons la racine carrée; il viendra

$$m = 2^{m-1}\sin\frac{\pi}{m}\cdots\sin\frac{(m-1)\pi}{m}$$

et, par suite,

$$C = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}}.$$

VII. — Fractions continues.

386. Soit A une quantité réelle et positive quelconque; on pourra évidemment poser

$$A = a_0 + \frac{1}{A_1},$$

a_0 étant un entier, et A_1 une quantité > 1.

On pourra poser de même

$$A_1 = a_1 + \frac{1}{A_2},$$

a_1 étant un entier au moins égal à 1, et A_2 une quantité > 1.

Continuant ainsi, on obtiendra pour A un développement en *fraction continue*, tel que

$$A = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$$

Ce développement sera évidemment limité si A est commensurable, illimité dans le cas contraire.

On nomme *réduites* de la fraction continue les fractions

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1}, \qquad \cdots.$$

387. Théorème. — *On a généralement*

$$(1)\qquad \begin{cases} P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2}, \\ Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}. \end{cases}$$

Cette formule est vérifiée pour $n=2$ par les valeurs ci-dessus de P_2 et de Q_2. Nous allons d'ailleurs montrer que, si elle est vraie pour un nombre n, elle le sera pour $n+1$.

En effet, $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ se déduit de $\frac{P_n}{Q_n}$ par le changement de a_n en $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$. On aura donc

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) P_{n-1} + P_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) Q_{n-1} + Q_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n+1}(a_n P_{n-1} + P_{n-2}) + P_{n-1}}{a_{n+1}(a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}) + Q_{n-1}} = \frac{a_{n+1} P_n + P_{n-1}}{a_{n+1} Q_n + Q_{n-1}}.$$

On voit par les formules (1) que les quantités Q_n croissent au delà de toute limite quand n augmente. En effet, a_n étant au moins égal à 1, on aura

$$Q_n \geqq Q_{n-1} + Q_{n-2} \geqq Q_{n-2} + Q_{n-3} + Q_{n-2} \geqq 2 Q_{n-2}.$$

On déduit encore des formules (1) la relation

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = -(P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1}),$$

et, comme $P_1 Q_0 - P_0 Q_1 = 1$, on aura

$$(2)\qquad P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}.$$

On voit par là que P_n et Q_n n'ont aucun diviseur commun. *Les réduites sont donc des fractions irréductibles.*

On a enfin

$$(3)\qquad \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n}{Q_{n-1} Q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n}.$$

388. Les quantités $\frac{P_n}{Q_n}$ convergent vers A. En effet, si dans

l'identité (3), qui peut s'écrire ainsi

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(a_n Q_{n-1} + Q_{n-2})},$$

on change a_n en $a_n + \frac{1}{A_{n+1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ étant évidemment changé en A, il viendra

$$(4) \qquad A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}\left(Q_n + \frac{1}{A_{n+1}} Q_{n-1}\right)}.$$

Les quantités Q croissant indéfiniment quand n augmente, cette différence décroîtra indéfiniment. D'ailleurs, $\frac{1}{A_{n+1}}$ étant compris entre 0 et 1, cette différence sera comprise entre les deux limites suivantes :

$$\frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1} Q_n} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(Q_n + Q_{n-1})}.$$

Changeant n en $n+1$, on trouvera de même que $A - \frac{P_n}{Q_n}$ est compris entre

$$\frac{(-1)^n}{Q_n Q_{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^n}{Q_n(Q_{n+1} + Q_n)}.$$

Ces deux quantités sont de signe contraire aux précédentes et moindres en valeur absolue ; car on a

$$Q_n > Q_{n-1}, \qquad Q_{n+1} \geqq Q_n + Q_{n-1},$$

d'où

$$Q_n Q_{n+1} > Q_{n-1}(Q_n + Q_{n-1}).$$

Donc A *est compris entre deux réduites consécutives quelconques et plus rapproché de la dernière.*

389. *Une réduite quelconque* $\frac{P_n}{Q_n}$ *est plus rapprochée de* A *qu'une fraction quelconque* $\frac{P}{Q}$ *dont le dénominateur est moindre que* Q_n.

Supposons, en effet, que $\frac{P}{Q}$ soit plus voisin de A que $\frac{P_n}{Q_n}$; $\frac{P}{Q}$ tombera nécessairement entre $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$. On aura donc

$$\left|\frac{P}{Q}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|<\left|\frac{P_n}{Q_n}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{PQ_{n-1}-P_{n-1}Q}{Q_{n-1}Q}\right|<\frac{1}{Q_{n-1}Q_n}.$$

Mais $PQ_{n-1}-P_{n-1}Q$ est un entier qui ne peut s'annuler; car on aurait

$$\frac{P}{Q}=\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

et cette fraction est moins approchée de A que $\frac{P_n}{Q_n}$. On aura donc

$$|PQ_{n-1}-P_{n-1}Q|\geqq 1,$$

et l'inégalité ne pourra avoir lieu que si

$$Q>Q_n,$$

contrairement à l'hypothèse faite.

390. Considérons maintenant une fonction A développable en série suivant les puissances entières et décroissantes d'une variable x. On pourra poser

$$A=a_0+\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\ldots,$$

a_0 désignant un polynome en x, et α_1, α_2, ... des constantes.

Posons

$$\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\ldots=\frac{1}{A_1}.$$

Si α_{μ_1} est le premier coefficient qui ne s'annule pas, A_1 deviendra infini d'ordre μ_1 avec x. En le développant suivant

les puissances décroissantes de x, il viendra donc

$$A_1 = a_1 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \ldots,$$

a_1 étant un polynome de degré μ_1.

Posons de même

$$\frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \ldots = \frac{1}{A_2};$$

on en déduira

$$A_2 = a_2 + \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots,$$

a_2 étant un polynome en x du premier degré au moins.

Continuant ainsi, on obtiendra un développement

$$A = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

limité si A est une fraction rationnelle, illimité dans le cas contraire ; a_1, a_2, ... étant des polynomes dont les degrés en x, que nous désignerons par μ_1, μ_2, ..., sont au moins égaux à l'unité.

391. Considérons les réduites

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad \ldots$$

Les relations (1) subsisteront avec toutes leurs conséquences.

On en déduit tout d'abord que le degré ν_n du polynome Q_n est égal à $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$.

La relation (2) montre ensuite que *la fraction algébrique* $\frac{P_n}{Q_n}$ *est irréductible.*

On voit enfin, par la relation (4), que la différence $A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ est d'ordre $-\nu_{n-1} - \nu_n$ par rapport à x. Car Q_{n-1}

est d'ordre ν_{n-1}, et $Q_n + \frac{1}{A_n} Q_{n-1}$ est évidemment d'ordre ν_n, comme son premier terme Q_n.

D'ailleurs, $\nu_n > \nu_{n-1}$; donc l'ordre de $A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ sera $< -2\nu_{n-1}$.

392. Nous allons démontrer que, réciproquement, toute fraction $\frac{P}{Q}$ telle que la différence $A - \frac{P}{Q}$ soit d'ordre $< -2\nu$, ν étant le degré du dénominateur Q, est nécessairement égale à l'une des réduites précédentes.

En effet, considérons la série des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots$; soit ν_{n-1} le dernier nombre de cette suite qui ne surpasse pas ν. On aura, par hypothèse,

$$A - \frac{P}{Q} = \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right),$$

en désignant, pour abréger, par $\left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right)$ une expression d'ordre $-(2\nu+1)$ au plus par rapport à x.

On a, d'autre part,

$$A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \left(\frac{1}{x^{\nu_{n-1}+\nu_n}}\right),$$

d'où

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{P}{Q} = \frac{P_{n-1}Q - PQ_{n-1}}{Q_{n-1}Q} = \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right) + \left(\frac{1}{x^{\nu_{n-1}+\nu_n}}\right).$$

Or on a

$$\nu_n > \nu \geqq \nu_{n-1}.$$

Donc le second membre de l'égalité précédente sera d'ordre inférieur à $-(\nu+\nu_{n-1})$. Donc il doit en être de même du premier. Mais le dénominateur $Q_{n-1}Q$ est d'ordre $\nu+\nu_{n-1}$. Donc le numérateur doit être d'ordre < 0. Mais c'est un polynome, et son ordre ne peut être < 0 que s'il s'annule identiquement.

On aura donc

$$P_{n-1}Q - PQ_{n-1} = 0,$$

d'où

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \begin{cases} P = kP_{n-1}, \\ Q = kQ_{n-1}, \end{cases}$$

k étant un polynome d'ordre $\nu - \nu_{n-1}$.

On voit par là que $\frac{P}{Q}$ ne sera irréductible que si $\nu = \nu_{n-1}$, auquel cas le facteur k se réduit à une constante.

393. Proposons-nous de déterminer directement une fraction $\frac{P}{Q}$ dont le dénominateur Q soit de degré ν, et telle qu'on ait

$$A - \frac{P}{Q} = \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right).$$

On en déduit, en chassant le dénominateur,

$$AQ = P + \left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right).$$

Il faut donc que, dans le produit AQ, les termes en $\frac{1}{x}, \dots, \frac{1}{x^\nu}$ disparaissent.

Soit, comme précédemment,

$$A = a_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots,$$

et posons

$$Q = B_0 + B_1 x + \dots + B_\nu x^\nu.$$

Le coefficient C_λ du terme en $\frac{1}{x^\lambda}$, dans le produit AQ, sera évidemment donné par la formule

$$C_\lambda = \alpha_\lambda B_0 + \alpha_{\lambda+1} B_1 + \dots + \alpha_{\lambda+\nu} B_\nu.$$

Nous aurons à satisfaire aux conditions suivantes :

$$(6) \qquad C_1 = 0, \quad \ldots, \quad C_\nu = 0.$$

1° Si le déterminant

$$\Delta_\nu = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{\nu+1} \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{\nu+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \ldots & \alpha_{2\nu+1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, ces équations détermineront, sans ambiguïté, les rapports des inconnues B; la fonction Q sera déterminée à un facteur constant près; on obtiendra la valeur correspondante de P en calculant la partie entière du produit AQ;

2° Si Δ_ν est nul, les équations (6) ne détermineront pas complètement les rapports des coefficients B, et le polynome Q contiendra plusieurs constantes arbitraires.

Dans tous les cas, les constantes arbitraires disparaîtront du rapport $\frac{P}{Q}$, en vertu de la relation

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

que nous avons trouvée plus haut.

On voit par ce qui précède que la condition $\Delta_\nu \gtrless 0$ exprime qu'il existe une réduite de degré ν. Si donc tous les déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ sont différents de zéro, ce qui aura lieu en général, les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots$ formeront la série complète des nombres entiers, et, par suite, les degrés μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ des polynomes $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ seront égaux à l'unité.

VIII. — Maxima et minima.

394. Soit $f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x. On dit que $f(x)$ est *maximum* pour $x = a$, si l'on peut déterminer une quantité ε telle qu'on ait

$$f(a+h) - f(a) < 0$$

pour toute valeur réelle de h moindre que ε en valeur absolue.

Elle sera *minimum*, si l'on a toujours

$$f(a+h)-f(a)>0$$

dans ces mêmes conditions.

Si, au point a, $f(x)$ admet une dérivée $f'(a)$ différente de zéro, nous avons vu que, pour h suffisamment petit,

$$f(a+h)-f(a)$$

a le signe de $hf'(a)$. Son signe changera donc avec celui de h, et il ne pourra y avoir ni maximum ni minimum.

Pour trouver les maxima et minima de $f(x)$, il faudra donc tout d'abord chercher les valeurs de la variable pour lesquelles $f'(x)$ s'annule ou cesse d'exister. Soit a l'une de ces valeurs. Pour s'assurer si elle donne effectivement un maximum ou un minimum, on calculera la valeur principale de la différence $f(a+h)-f(a)$; car c'est évidemment de son signe que dépend celui de cette différence pour les petites valeurs de h. Si ce terme principal est constamment négatif, on aura un maximum; s'il est constamment positif, un minimum. Sinon, il n'y aura ni maximum ni minimum.

Si $f(x)$ est développable aux environs du point a par la série de Taylor, la réponse à cette question sera immédiate.

En effet, dans ce cas, $f'(a)$ s'annule nécessairement. D'autres dérivées pourront s'annuler également. Soit $f^n(a)$ la première de celles qui ne s'annulent pas : on aura

$$f(a+h)-f(a)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^n(a+\theta h).$$

La dérivée $f^n(x)$ étant supposée continue au point a, $f^n(a+\theta h)$ aura pour limite $f^n(a)$ quand h tend vers zéro. Donc, pour toutes les valeurs de h suffisamment petites, elle aura le signe de $f^n(a)$. D'autre part, h^n sera toujours positif si n est pair; au contraire, si n est impair, son signe change avec le signe de h. Donc

Il y a maximum, si n est pair, et $f^n(a)<0$; minimum,

si n est pair, et $f^n(a) > 0$. Il n'y a ni maximum ni minimum si n est impair.

395. Une fonction réelle $f(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables réelles $x, y, \ldots$ sera *maximum* au point $a, b, \ldots$ si l'on peut déterminer une quantité ε telle qu'on ait

$$f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots) < 0$$

pour toutes les valeurs réelles de $h, k, \ldots$ de module $< \varepsilon$; elle sera *minimum*, si, dans les mêmes conditions, on a constamment

$$f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots) > 0.$$

Une première condition pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum est qu'au point $a, b, \ldots$ chacune des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots$ s'annule ou cesse d'exister.

En effet, si l'on pose en particulier $k = \ldots = 0$, la différence

$$f(a+h, b, \ldots) - f(a, b, \ldots)$$

devra conserver un signe constant, tant que $|h|$ sera $< \varepsilon$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ s'annule ou cesse d'exister au point $a, b, \ldots$. De même pour les autres dérivées partielles.

396. Supposons la fonction $f(x, y, \ldots)$ développable par la série de Taylor aux environs du point $a, b, \ldots$. Ses dérivées premières devront s'y annuler. Admettons qu'il en soit de même pour toutes les dérivées suivantes jusqu'à celles de l'ordre n exclusivement. On aura

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k, \ldots) &- f(a, b, \ldots) \\ &= \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + \ldots\right)^n f(a, b, \ldots)}{1.2\ldots n} \\ &+ \frac{\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + \ldots\right)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k, \ldots)}{1.2\ldots(n+1)}. \end{aligned}$$

Posons

$$\rho = \sqrt{h^2 + k^2 + \ldots}, \qquad h = \rho h', \qquad k = \rho k', \qquad \ldots,$$

d'où

$$h'^2 + k'^2 + \ldots = 1.$$

L'expression précédente prendra la forme

$$\frac{P_n \rho^n}{1.2\ldots n} + \frac{P_{n+1} \rho^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

P_n et P_{n+1} étant des polynomes homogènes en h', k', ..., de degré n et $n+1$ respectivement.

Les coefficients de P_{n+1} sont, à des facteurs binomiels près, les valeurs des dérivées d'ordre $n+1$ au point $a+\theta h$, $b+\theta k$, ..., lesquelles ont pour limites les valeurs des mêmes dérivées au point a, b, ... lorsque h, k, ... tendent vers zéro. D'autre part, $|h'|$, $|k'|$, ... ne peuvent surpasser l'unité. On pourra donc assigner un nombre fixe M tel qu'on ait

$$\left| \frac{P_{n+1} \rho^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} \right| < M \rho^{n+1}$$

dès que h, k, ... seront suffisamment petits.

Quant au premier terme, divers cas seront à distinguer :

1° Le polynome P_n reste constamment positif, pour tous les systèmes de valeurs réelles de h', k', ... (sauf pour $h' = k' = \ldots = 0$, auquel cas il s'annule). Dans ce cas, pour les systèmes de valeurs de ces variables qui satisfont à la condition

$$h'^2 + k'^2 + \ldots = 1,$$

P_n sera positif, et, comme c'est une fonction continue, sa valeur ne pourra s'abaisser au-dessous d'un minimum fixe m. On aura donc

$$f(a+h, b+k, \ldots) - f(a, b, \ldots) > \frac{m\rho^n}{1.2\ldots n} - M\rho^{n+1}.$$

Cette quantité sera positive dès que ρ sera devenu moindre que

$$\frac{m}{1.2\ldots n\mathrm{M}}.$$

Il y aura donc minimum.

2° Si P_n reste constamment négatif, le même raisonnement montre qu'il y a un maximum.

3° Si P_n peut prendre des valeurs positives et des valeurs négatives, il n'y aura ni maximum ni minimum.

Supposons, en effet, que P_n soit égal à $+m_1$ pour le système de valeurs h'_1, k'_1, ... et égal à $-m_2$ pour un autre système de valeurs h'_2, k'_2, ... Soient

$$h_1'^2+k_1'^2+\ldots=\lambda_1^2,$$
$$h_2'^2+k_2'^2+\ldots=\lambda_2^2.$$

Posons

$$h'=\frac{1}{\lambda_1}h'_1,\qquad k'=\frac{1}{\lambda_1}k'_1,\qquad \ldots,$$

d'où

$$h'^2+k'^2+\ldots=1;$$

on aura

$$\frac{\mathrm{P}_n(h',k',\ldots)\rho^n}{1.2\ldots n}=\frac{m_1\rho^n}{1.2\ldots n\lambda_1^n}$$

et

$$f(a+h,b+k,\ldots)-f(a,b,\ldots)>\frac{m_1\rho^n}{1.2\ldots\lambda_1^n}-\mathrm{M}\rho^{n+1},$$

quantité positive pour ρ infiniment petit.

Au contraire, si l'on déterminait h', k', ... par les relations

$$h'=\frac{1}{\lambda_2}h'_2,\qquad k'=\frac{1}{\lambda_2}k'_2,\qquad \ldots,$$

on aurait

$$f(a+h,b+k,\ldots)-f(a,b,\ldots)<-\frac{m_2\rho^n}{1.2\ldots n\lambda_2^n}+\mathrm{M}\rho^{n+1},$$

quantité négative pour ρ infiniment petit.

Ce cas se présentera nécessairement si n est impair, car

on changera le signe de P_n en changeant celui des variables.

4° Enfin, si P_n ne peut pas changer de signe, mais peut s'annuler pour quelque système de valeurs autre que

$$h' = k' = \ldots = 0,$$

il y aura doute.

397. La distinction des quatre cas ci-dessus est aisée à faire dans le cas le plus ordinaire, où $n = 2$. On n'aura qu'à mettre, par un procédé d'Algèbre connu, le polynome du second degré P_2 sous la forme

$$P_2 = a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 + \ldots + a_i X_i^2 \qquad (i \overline{\le} m),$$

les X étant des fonctions linéaires distinctes des m variables $h', k', \ldots$.

Supposons d'abord que les coefficients a ne soient pas tous de même signe et qu'on ait, par exemple, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$. Si l'on détermine $h', k', \ldots$ de telle sorte qu'on ait

$$X_1 \gtrless 0, \qquad X_2 = \ldots = X_i = 0,$$

P_2 sera positif. Si l'on pose, au contraire,

$$X_2 \gtrless 0, \qquad X_1 = X_3 = \ldots = X_i = 0,$$

il sera négatif. Il n'y a donc ni maximum ni minimum.

Supposons, au contraire, que les a soient tous de même signe; P_2 aura toujours le signe des a, à moins qu'on n'ait

$$X_1 = \ldots = X_i = 0,$$

auquel cas il s'annule.

Si $i < m$, on peut satisfaire à ces conditions par une infinité de valeurs de $h', k', \ldots$. On sera donc dans le cas douteux.

Si $i = m$, ces conditions ne seront satisfaites que pour $h' = k' = \ldots = 0$. Il y aura donc minimum si les a sont positifs, maximum s'ils sont négatifs.

398. Considérons, en particulier, le cas de deux variables. Posant, pour abréger,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \mathrm{A}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a\, \partial b} = \mathrm{B}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \mathrm{C},$$

nous aurons

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{A}h'^2 + 2\mathrm{B}h'k' + \mathrm{C}k'^2.$$

Si $\mathrm{A} \gtrless 0$, cette expression peut se mettre sous la forme

$$\mathrm{P}_2 = \frac{1}{\mathrm{A}}(\mathrm{A}h' + \mathrm{B}k')^2 + \frac{\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2}{\mathrm{A}} k'^2.$$

Donc

Si $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 < 0$		ni maximum ni minimum,
$\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = 0$		doute,
$\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 > 0,$	$\mathrm{A} > 0$	minimum,
$\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 > 0,$	$\mathrm{A} < 0$	maximum.

Si $\mathrm{A} = 0$, on trouve les mêmes caractères. En effet, soit d'abord $\mathrm{B} \gtrless 0$, d'où $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 < 0$. Il n'y aura ni maximum ni minimum, car $\mathrm{P}_2 = 2\mathrm{B}h'k' + \mathrm{C}k'^2$ aura à volonté le signe de k' ou le signe contraire, suivant qu'on prendra h' plus grand ou plus petit que $-\frac{\mathrm{C}k'}{2\mathrm{B}}$. Enfin, si $\mathrm{B} = 0$, d'où $\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 = 0$, P_2 se réduit à $\mathrm{C}k'^2$ et s'annule pour $k' = 0$, quel que soit h'. Il y a donc doute.

399. La discussion des cas douteux peut se faire d'une manière à peu près complète pour les fonctions de deux variables. En effet, dans ce cas,

$$f(a+h, b+k) - f(a, b)$$

est une série de puissances entières de h et de k.

Si cette série contient en facteur une puissance de h, telle que h^α, mettons-la en évidence; nous aurons une expression de la forme

$$h^\alpha \mathrm{S}(k, h).$$

Soit $\mathrm{A}k^n$ le terme de degré le moins élevé en k dans

$S(k, o)$. Pour h infiniment petit, l'équation $S(k, h) = o$ donnera, pour k, n racines infiniment petites, dont on pourra calculer les développements suivant les puissances croissantes (entières ou fractionnaires) de h par la méthode des nos 361 à 368. Soient $K, K', \ldots$ ces développements; $\nu, \nu', \ldots$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Nous pourrons écrire

$$h^\alpha S(k, h) = h^\alpha (k - K)^\nu (k - K')^{\nu'} \ldots \Psi(k, h),$$

Ψ étant une série de puissances entières, qui, pour $h = o$, $k = o$, ne s'annule plus et se réduit évidemment à A.

Pour les valeurs réelles et suffisamment petites de h et de k, Ψ aura évidemment le signe de A.

Considérons les autres facteurs du produit. Si l'un des développements K est compliqué d'imaginaires, il sera évidemment accompagné du développement conjugué K_1, qui sera du même ordre ν de multiplicité. Le produit

$$(k - K)^\nu (k - K_1)^\nu$$

sera toujours positif, et ces facteurs n'entreront pas en ligne de compte daus le signe du produit.

La même chose a lieu si K est réel, mais ν pair; car le facteur $(k - K)^\nu$ ne peut être négatif; la seule nuance est qu'il est susceptible de s'annuler.

De même, si α est pair, h^α ne pourra être négatif.

Si donc il n'existe que des facteurs de l'espèce considérée jusqu'à présent, la différence $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ aura toujours le signe de A; tout au plus sera-t-elle susceptible de s'annuler. Il y aura maximum ou minimum, suivant que A est négatif ou positif.

Mais si, cette suppression faite, il reste encore des facteurs, il n'y aura ni maximum ni minimum.

En effet, supposons par exemple qu'il nous reste les facteurs

$$h^\alpha (k - K)^\nu (k - K')^{\nu'},$$

K et K' étant réels, et α, ν, ν' impairs.

Faisons tendre h vers zéro plus rapidement que k, de telle sorte que K et K' soient très petits par rapport à k; $k-\mathrm{K}$ et $k-\mathrm{K}'$ conserveront leur signe si l'on change le signe de h, tandis que h^α changera de signe. Donc la différence $f(a+h, b+k)-f(a, b)$ ne garde pas un signe constant.

Supposons maintenant qu'il ne reste pas de facteur h^α, mais seulement les facteurs

$$(k-\mathrm{K})^\nu(k-\mathrm{K}')^{\nu'}.$$

Posons $k=\mathrm{K}+\varepsilon h^\lambda$, ε étant égal à ± 1, et h^λ étant d'un ordre plus élevé par rapport à h que la différence $\mathrm{K}-\mathrm{K}'$. On aura

$$(k-\mathrm{K})^\nu(k-\mathrm{K}')^{\nu'}=\varepsilon^\nu h^{\lambda\nu}(\mathrm{K}-\mathrm{K}'+\varepsilon h^\lambda)^{\nu'}.$$

Pour h infiniment petit, le signe du dernier facteur sera le même que celui de $(\mathrm{K}-\mathrm{K}')^{\nu'}$, quel que soit le signe de ε; donc le produit changera de signe avec ε et il n'y aura ni maximum ni minimum.

400. Nous aurons d'après cela, pour décider de l'existence d'un maximum ou d'un minimum, à effectuer les opérations suivantes :

Nous déterminerons d'abord le facteur h^α commun à tous les termes de $f(a+h, b+k)-f(a, b)$. Si α est impair, il n'y a ni maximum ni minimum.

Si α est pair ou nul, nous chercherons le premier terme $\mathrm{M}h^\mu$ de chacun des développements K, K', ... Nous obtiendrons, par la méthode du n° 362, un certain nombre de valeurs de μ, et, pour chacune d'elles, une équation

$$\Psi(\mathrm{M})=0$$

qui déterminera les M correspondants.

Nous chercherons les racines réelles de cette équation (les racines imaginaires peuvent être écartées, car les développements qui s'en déduisent n'influent pas sur le signe du produit).

Si l'une de ces racines est d'un ordre de multiplicité impair n_1, il n'y a ni maximum ni minimum; car, parmi les développements en nombre n_1 qui s'en déduisent, ceux qui sont imaginaires, étant conjugués deux à deux, sont en nombre pair; il reste donc un nombre impair de développements réels égaux ou inégaux; l'un au moins d'entre eux sera donc d'un ordre de multiplicité impair.

Si n_1 est pair, il faudra calculer le second terme $M_1 h^{\mu_1}$ des n_1 développements qui ont pour premier terme Mh^{μ}. Dans les équations qui déterminent les valeurs de M_1, on négligera encore les racines imaginaires, et, s'il existe une racine réelle d'ordre impair, on affirmera qu'il n'y a ni maximum ni minimum.

Si l'on arrive à n'avoir plus que des équations privées de racines réelles, il y aura maximum ou minimum.

On arrivera ainsi à trancher la question :

1° S'il existe des développements réels d'ordre de multiplicité impair;

2° S'il n'existe pas de développement réel d'ordre de multiplicité pair, et dont le nombre des termes soit illimité.

Mais, si aucune de ces deux conditions n'est satisfaite, on ne pourra jamais arriver à la certitude. En effet, on pourra, en poussant assez loin les calculs, éliminer les développements imaginaires, et ceux des développements réels d'ordre de multiplicité pair qui s'arrêteraient d'eux-mêmes après un nombre limité de termes; mais les autres resteront toujours, sans qu'on puisse assurer que la prolongation des opérations ne permettrait pas de les dédoubler.

401. *Maxima et minima relatifs.* — Soit à trouver les maxima et minima d'une fonction $f(x, y, z, u)$, les variables étant liées par deux relations

$$\varphi(x, y, z, u) = 0, \tag{1}$$

$$\psi(x, y, z, u) = 0. \tag{2}$$

Imaginons qu'on ait tiré de ces relations les valeurs de z,

u en x, y, pour les substituer dans f; il viendra

$$f(x, y, z, u) = \mathrm{F}(x, y);$$

et, pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faudra que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$ soient nulles ou cessent d'exister.

Bornons-nous encore au cas où l'on aura $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = 0$, ou plus simplement $d\mathrm{F} = 0$. On a

$$(3) \qquad d\mathrm{F} = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial u}du = 0,$$

et cette équation devra être identiquement satisfaite pour toute valeur de dx et de dy après qu'on y aura remplacé dz et du par leurs valeurs tirées des équations

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial \varphi}{\partial u}du = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial z}dz + \frac{\partial \psi}{\partial u}du = 0,$$

qu'on obtient en différentiant les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Il faudra donc éliminer dz, du entre ces équations (3), (4), (5) et égaler à zéro les coefficients de dx et de dy dans l'équation résultante.

Pour effectuer cette élimination, multiplions les équations (4) et (5) par des facteurs indéterminés λ, μ, puis ajoutons-les à l'équation (3); il viendra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)dy$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)dz + \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)du = 0,$$

et l'élimination sera effectuée si nous déterminons λ et μ de telle sorte qu'on ait

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0.$$

Égalant alors à zéro les coefficients de dx et de dy, nous aurons

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}=0.$$

Les équations (6) et (7), jointes aux équations (1) et (2), détermineront les six quantités x, y, z, u, λ, μ.

On remarquera que les équations (6) et (7) s'obtiendraient immédiatement en égalant à zéro les dérivées partielles de la fonction

$$f+\lambda\varphi+\mu\psi.$$

402. Soit à déterminer la plus grande (ou la plus petite) valeur que prend la fonction $f(x)$ lorsque x varie de x_0 à x_1. Cette valeur peut correspondre à l'une des limites ou à un point intermédiaire a. Dans ce dernier cas, il est clair que $f(a)$ sera un maximum (un minimum) de la fonction $f(x)$.

Pour résoudre la question, il faudra donc calculer les maxima (ou minima) $f(a)$, $f(b)$, ... de la fonction dans l'intervalle de x_0 à x_1, ainsi que ses valeurs extrêmes $f(x_0)$, $f(x_1)$, et prendre la plus grande (ou la plus petite) de ces quantités.

On agirait d'une manière analogue pour déterminer la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction de plusieurs quantités lorsque le champ de leurs variations est assujetti à certaines limitations.

403. Appliquons les méthodes précédentes à quelques problèmes.

Problème I. — *Trouver la plus courte distance d'un point* P *à une droite* D.

Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ les coordonnées du point; a, a_1, a_2 celles d'un point fixe pris arbitrairement sur la droite; b, b_1, b_2 ses *cosinus directeurs,* c'est-à-dire les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes. Les coordonnées x, y, z d'un point situé

sur la droite à la distance t du point a, a_1, a_2 seront évidemment

$$x = a + bt, \qquad y = a_1 + b_1 t, \qquad z = a_2 + b_2 t,$$

et sa distance δ au point P sera donnée par la formule

$$\begin{aligned}\delta^2 &= (a + bt - \alpha)^2 + (a_1 + b_1 t - \alpha_1)^2 + (a_2 + b_2 t - \alpha_2)^2 \\ &= \Sigma(a + bt - \alpha)^2.\end{aligned}$$

Il s'agit de déterminer la distance variable t, de telle sorte que cette expression soit minimum.

Elle a pour dérivée $\Sigma 2b(a + bt - \alpha)$, quantité toujours continue. Il faut donc égaler cette dérivée à zéro, ce qui donnera

$$\Sigma b(a - \alpha) + \Sigma b^2 t = 0,$$

d'où

$$t = -\frac{\Sigma b(a - \alpha)}{\Sigma b^2}.$$

Substituons cette valeur dans l'expression

$$\delta^2 = \Sigma(a + bt - \alpha)^2 = \Sigma(a - \alpha)^2 + 2t\Sigma b(a - \alpha) + t^2 \Sigma b^2;$$

il viendra

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \Sigma(a - \alpha)^2 - 2\frac{[\Sigma b(a - \alpha)]^2}{\Sigma b^2} + \frac{[\Sigma b(a - \alpha)]^2}{\Sigma b^2} \\ &= \frac{\Sigma(a - \alpha)^2 \Sigma b^2 - [\Sigma b(a - \alpha)]^2}{\Sigma b^2} \\ &= \frac{[(a-\alpha)b_1 - (a_1 - \alpha_1)b]^2 + [(a_1 - \alpha_1)b_2 - (a_2 - \alpha_2)b_1]^2 + [(a_2 - \alpha_2)b - (a - \alpha)b_2]^2}{b^2 + b_1^2 + b_2^2}.\end{aligned}$$

Cette expression représente bien un minimum, car la dérivée seconde

$$\frac{d^2\delta^2}{dt^2} = 2\Sigma b^2$$

est positive.

404. Problème II. — *Trouver la plus courte distance de deux droites.*

Soient

$$x = a + bt, \qquad y = a_1 + b_1 t, \qquad z = a_2 + b_2 t \tag{8}$$

les coordonnées d'un point de la première droite,

$$(9) \qquad \xi = \alpha + \beta\tau, \qquad \eta = \alpha_1 + \beta_1\tau, \qquad \zeta = \alpha_2 + \beta_2\tau$$

celles d'un point de la seconde droite.

La distance δ de ces points sera donnée par la formule

$$\begin{aligned}\delta^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \\ &= (a-\alpha+bt-\beta\tau)^2 + (a_1-\alpha_1+b_1t-\beta_1\tau)^2 \\ &\qquad + (a_2-\alpha_2+b_2t-\beta_2\tau)^2.\end{aligned}$$

Il s'agit de déterminer les variables t et τ de telle sorte que cette expression soit minimum.

Les dérivées partielles de cette expression par rapport à t et à τ sont toujours continues. En les égalant à zéro, on aura les deux équations de condition

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial\delta^2}{\partial t} &= b(a-\alpha+bt-\beta\tau) + b_1(a_1-\alpha_1+b_1t-\beta_1\tau) \\ &\qquad + b_2(a_2-\alpha_2+b_2t-\beta_2\tau) = 0, \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial\delta^2}{\partial\tau} &= \beta(a-\alpha+bt-\beta\tau) + \beta_1(a_1-\alpha_1+b_1t-\beta_1\tau) \\ &\qquad + \beta_2(a_2-\alpha_2+b_2t-\beta_2\tau) = 0.\end{aligned}$$

Éliminant successivement entre ces équations chacune des quantités entre parenthèses, et posant, pour abréger,

$$b_1\beta_2 - b_2\beta_1 = A, \qquad b_2\beta - b\beta_2 = A_1, \qquad b\beta_1 - b_1\beta = A_2,$$

on en déduit

$$\frac{a-\alpha+bt-\beta\tau}{A} = \frac{a_1-\alpha_1+b_1t-\beta_1\tau}{A_1} = \frac{a_2-\alpha_2+b_2t-\beta_2\tau}{A_2}.$$

Soit λ la valeur commune de ces rapports; on aura, pour déterminer t, τ et λ, les trois équations linéaires

$$\begin{aligned}A\lambda + \beta\tau - bt &= a - \alpha, \\ A_1\lambda + \beta_1\tau - b_1t &= a_1 - \alpha_1, \\ A_2\lambda + \beta_2\tau - b_2t &= a_2 - \alpha_2,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\lambda = \frac{L}{D}, \qquad \tau = \frac{M}{D}, \qquad t = \frac{N}{D},$$

L, M, N, D désignant les déterminants suivants :

$$L = \begin{vmatrix} a-\alpha & \beta & -b \\ a_1-\alpha_1 & \beta_1 & -b_1 \\ a_2-\alpha_2 & \beta_2 & -b_2 \end{vmatrix} = A(a-\alpha)+A_1(a_1-\alpha_1)+A_2(a_2-\alpha_2),$$

$$M = \begin{vmatrix} A & a-\alpha & -b \\ A_1 & a_1-\alpha_1 & -b_1 \\ A_2 & a_2-\alpha_2 & -b_2 \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} A & \beta & a-\alpha \\ A_1 & \beta_1 & a_1-\alpha_1 \\ A_2 & \beta_2 & a_2-\alpha_2 \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} A & \beta & -b \\ A_1 & \beta_1 & -b_1 \\ A_2 & \beta_2 & -b_2 \end{vmatrix} = A^2 + A_1^2 + A_2^2.$$

Enfin, l'on a

$$\delta = \sqrt{A^2\lambda^2 + A_1^2\lambda^2 + A_2^2\lambda^2} = \frac{\pm L}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}.$$

Il est évident, d'après la nature du problème, que cette valeur de δ^2 est un minimum. Pour le vérifier, formons les dérivées secondes

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t^2} = b^2 + b_1^2 + b_2^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t\,\partial\tau} = -b\beta - b_1\beta_1 - b_2\beta_2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial\tau^2} = \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2.$$

La quantité représentée dans la théorie générale par $AC - B^2$ est égale à

$$4(b^2 + b_1^2 + b_2^2)(\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2) - 4(b\beta + b_1\beta_1 + b_2\beta_2)^2$$
$$= 4(A^2 + A_1^2 + A_2^2).$$

Elle est positive. Donc, il y a bien maximum ou minimum. D'ailleurs

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta^2}{\partial t^2} = b^2 + b_1^2 + b_2^2 > 0;$$

ce sera donc un minimum.

405. *Remarque I.* — Les quantités b, b_1, b_2 et β, β_1, β_2, étant les cosinus directeurs des deux droites données, satisferont aux équations

$$b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1,$$
$$\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Mais nous n'avons pas fait usage de ces équations. Les formules trouvées subsisteraient donc en donnant à b, b_1, b_2, β, β_1, β_2 des valeurs quelconques. D'ailleurs, les équations (8) et (9), pouvant se mettre sous la forme

$$\frac{x-a}{b} = \frac{y-a_1}{b_1} = \frac{z-a_2}{b_2} = t,$$
$$\frac{\xi-\alpha}{\beta} = \frac{\eta-\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\zeta-\alpha_2}{\beta_2} = \tau,$$

ne cesseraient pas de représenter des lignes droites.

Remarque II. — Si nous posons

$$\alpha = a + \Delta a, \quad \alpha_1 = a_1 + \Delta a_1, \quad \alpha_2 = a_2 + \Delta a_2,$$
$$\beta = b + \Delta b, \quad \beta_1 = b_1 + \Delta b_1, \quad \beta_2 = b_2 + \Delta b_2,$$

les formules précédentes deviendront

$$A = b_1\Delta b_2 - b_2\Delta b_1, \quad A_1 = b_2\Delta b - b\Delta b_2, \quad A_2 = b\Delta b_1 - b_1\Delta b,$$

$$L = -(A\Delta a + A_1\Delta a_1 + A_2\Delta a_2) = \begin{vmatrix} \Delta a & \Delta b & b \\ \Delta a_1 & \Delta b_1 & b_1 \\ \Delta a_2 & \Delta b_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$M = \begin{vmatrix} A & \Delta a & b \\ A_1 & \Delta a_1 & b_1 \\ A_2 & \Delta a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} A & b + \Delta b & -\Delta a \\ A_1 & b_1 + \Delta b_1 & -\Delta a_1 \\ A_2 & b_2 + \Delta b_2 & -\Delta a_2 \end{vmatrix},$$

$$D = A^2 + A_1^2 + A_2^2,$$

et l'on aura encore

$$\lambda = \frac{L}{D}, \qquad \tau = \frac{M}{D}, \qquad t = \frac{N}{D}, \qquad \delta = \frac{\pm L}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}.$$

Nous ferons un fréquent emploi de ces formules.

406. Problème III. — *Trouver la plus courte distance d'un point à un plan.*

Soient a, b, c les coordonnées du point et

$$(10) \qquad mx + ny + pz + q = 0$$

l'équation du plan. Nous aurons à rendre minimum l'expression

$$\delta^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

où x, y, z sont liés par l'équation précédente. D'après la règle générale donnée pour la recherche des minima relatifs, nous aurons à égaler à zéro les dérivées partielles de l'expression

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda(mx + ny + pz + q),$$

ce qui donnera les équations

$$2(x-a) + \lambda m = 0,$$
$$2(y-b) + \lambda n = 0,$$
$$2(z-c) + \lambda p = 0,$$

auxquelles on joindra la suivante :

$$0 = mx + ny + pz + q$$
$$= m(x-a) + n(y-b) + p(z-c) + ma + nb + pc + q.$$

On en déduit

$$x - a = -\tfrac{1}{2}\lambda m, \qquad y - b = -\tfrac{1}{2}\lambda n, \qquad z - c = -\tfrac{1}{2}\lambda p,$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda = \frac{ma + nb + pc + q}{m^2 + n^2 + p^2},$$

$$\delta^2 = (\tfrac{1}{2}\lambda)^2(m^2 + n^2 + p^2) = \frac{(ma + nb + pc + q)^2}{m^2 + n^2 + p^2}.$$

Pour vérifier que cette expression représente bien un minimum, cherchons les dérivées secondes de δ^2 considéré comme fonction des variables indépendantes x, y, et d'une fonction z de ces variables, définie par l'équation (10). On aura successivement

$$\frac{\partial\delta^2}{\partial x} = 2(x-a) + 2(z-c)\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-a) - \frac{2m}{p}(z-c),$$

$$\frac{\partial^2\delta^2}{\partial x^2} = 2 - \frac{2m}{p}\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + \frac{2m^2}{p^2},$$

$$\frac{\partial^2\delta^2}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2m}{p}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2mn}{p^2}.$$

On trouvera de même

$$\frac{\partial^2\delta^2}{\partial y^2} = 2 + \frac{2n^2}{p^2}.$$

Les expressions désignées dans la théorie générale par $AC - B^2$ et A seront ici

$$\left(2+\frac{2m^2}{p^2}\right)\left(2+\frac{2n^2}{p^2}\right) - \frac{4m^2n^2}{p^4} = 4 + \frac{4m^2}{p^2} + \frac{4n^2}{p^2}$$

et

$$2 + \frac{2m^2}{p^2}.$$

Toutes deux étant positives, on aura un minimum.

407. Problème IV. — *Trouver les maxima et minima de la fraction* $\frac{f}{\varphi}$,

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx$$

et

$$\varphi = \alpha_{11}x^2 + \alpha_{22}y^2 + \alpha_{33}z^2 + 2\alpha_{12}xy + 2\alpha_{23}yz + 2\alpha_{13}zx$$

étant deux fonctions homogènes du second degré en x, y, z.

La valeur de cette fraction ne dépendant que des rapports

des variables x, y, z, il est permis de supposer leurs valeurs absolues choisies de telle sorte qu'on ait $\varphi = 1$.

On aura donc à trouver les maxima et minima de f, étant donnée l'équation de condition

$$\varphi - 1 = 0.$$

On devra, comme on sait, déterminer x, y, z, λ par les équations

$$\varphi = 1,$$

$$(11)\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(12)\quad \begin{cases} (a_{11} + \lambda\alpha_{11})x + (a_{12} + \lambda\alpha_{12})y + (a_{13} + \lambda\alpha_{13})z = 0, \\ (a_{12} + \lambda\alpha_{12})x + (a_{22} + \lambda\alpha_{22})y + (a_{23} + \lambda\alpha_{23})z = 0, \\ (a_{13} + \lambda\alpha_{13})x + (a_{23} + \lambda\alpha_{23})y + (a_{33} + \lambda\alpha_{33})z = 0. \end{cases}$$

Or l'équation $\varphi = 1$ montre que x, y, z ne peuvent être nuls à la fois. Donc le déterminant des équations (12) doit être nul, ce qui donnera une équation du troisième degré en λ.

Soit λ une des racines de cette équation; en la substituant dans les équations (12), elles se réduiront à deux équations distinctes, qui fourniront les rapports de x, y, z. L'équation $\varphi = 1$ achèvera de déterminer ces quantités.

La valeur correspondante de $\frac{f}{\varphi}$ sera $-\lambda$. En effet, f et φ étant des fonctions homogènes du second degré, on aura

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2f,$$

$$x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2\varphi.$$

Les équations (11), respectivement multipliées par x, y, z et ajoutées ensemble, donneront donc

$$2f + 2\varphi\lambda = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{f}{\varphi} = -\lambda.$$

Avant d'aller plus loin, nous remarquerons que la fonction φ peut se mettre sous la forme

$$\alpha_{11}\left(x + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} y + \frac{\alpha_{13}}{\alpha_{11}} z\right)^2 + \varphi_1,$$

φ_1 étant une fonction de y et de z, telle que

$$\beta_{11} y^2 + 2\beta_{12} yz + \beta_{22} z^2.$$

On pourra de même mettre φ_1 sous la forme

$$\beta_{11}\left(y + \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} z\right)^2 + \gamma z^2.$$

La fonction φ sera ainsi décomposée en une somme de trois carrés, respectivement multipliés par α_{11}, β_{11}, γ.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ces trois coefficients sont positifs. Il est clair que cette condition est nécessaire et suffisante pour que φ prenne une valeur positive et différente de zéro pour tout système de valeurs de x, y, z autre que o, o, o. Cette condition étant remplie, les valeurs de x, y, z pour lesquelles on a $\varphi = 1$ auront nécessairement un module borné; car il faudra que chacun des trois termes positifs dont φ se compose, pris isolément, soit $\leqq 1$. Les valeurs de f correspondant à ces divers systèmes de valeurs de x, y, z seront donc bornées, et, par suite, f présentera nécessairement au moins un maximum et un minimum réels, correspondant à des valeurs réelles des variables. Soient x_1, y_1, z_1 les valeurs qui correspondent au maximum, par exemple; λ_1 la valeur correspondante de λ.

Posons

$$\begin{aligned}
x &= x_1\xi + m\eta + n\zeta,\\
y &= y_1\xi + m_1\eta + n_1\zeta,\\
z &= z_1\xi + m_2\eta + n_2\zeta,
\end{aligned}$$

ξ, η, ζ étant de nouvelles variables, et m, n, m_1, n_1, m_2, n_2 des quantités quelconques telles que le déterminant de la substitution ne soit pas nul. Aux valeurs $x = x_1$, $y = y_1$,

$z = z_1$, qui donnent le maximum, correspondront les valeurs $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. D'ailleurs, après la transformation, f et φ deviendront des fonctions des nouvelles coordonnées, homogènes et du second degré, comme auparavant.

La transformation une fois exécutée, appelons x, y, z nos nouvelles variables primitivement désignées par ξ, η, ζ. Appelons également a_{11} ..., α_{11}, ... les coefficients des fonctions f et φ rapportés à ces nouvelles variables; $\frac{f}{\varphi}$ sera maximum et φ égal à l'unité pour $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $\lambda = \lambda_1$. On aura, par suite, $\alpha_{11} = 1$, et, les équations (12) étant satisfaites pour le maximum, on aura, d'autre part,

$$(13) \quad a_{11} + \lambda_1 = 0, \qquad a_{12} + \lambda_1 \alpha_{12} = 0, \qquad a_{13} + \lambda_1 \alpha_{13} = 0.$$

Posant maintenant, pour abréger,

$$X = x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z,$$

on aura

$$\varphi = X^2 + \varphi_1,$$
$$f = -\lambda_1 X^2 + f_1,$$

φ_1 et f_1 étant des fonctions de y, z, dont la première sera positive pour tout système de valeurs de y, z autre que $y = 0$, $z = 0$.

Opérant maintenant sur les fonctions φ_1, f_1 de la même manière que nous l'avons fait sur φ et f, nous pourrons les mettre sous la forme

$$\varphi_1 = Y^2 + \varphi_2, \qquad f_1 = -\lambda_2 Y^2 + f_2,$$

φ_2 et f_2 ne contenant plus que z, et par suite étant respectivement de la forme βz^2, γz^2.

Posant

$$Z = z\sqrt{\beta}, \qquad -\lambda_3 = \frac{\gamma}{\beta},$$

on aura

$$\varphi_2 = Z^2, \qquad f_2 = -\lambda_3 Z^2,$$

et, par suite,

$$(14)\quad \begin{cases} \varphi = X^2 + Y^2 + Z^2, \\ f = -\lambda_1 X^2 - \lambda_2 Y^2 - \lambda_3 Z^2, \end{cases}$$

d'où ce théorème :

Étant donné un système de deux fonctions quadratiques f et φ dont l'une est toujours positive, on pourra, par un changement de variables réel, en faire disparaître les rectangles des variables.

Les deux fonctions étant ainsi préparées, l'équation en λ deviendra

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda_1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 + \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

Cette équation a pour racines les trois quantités réelles λ_1, λ_2, λ_3. Donc, *l'équation en* λ *a toujours ses racines réelles.*

On voit immédiatement sur les équations (14) que la plus grande de ces racines rendra $\dfrac{f}{\varphi}$ minimum, la plus petite le rendra maximum, la troisième ne donnera ni maximum ni minimum.

408. Problème V. — *Déterminer un point* $M = (x, y)$ *tel que la somme de ses distances* ρ_1, ρ_2, ρ_3 *à trois points fixes* $A_1 = (a_1, b_1)$, $A_2 = (a_2, b_2)$, $A_3 = (a_3, b_3)$ *soit minimum.*

La somme des trois distances est

$$\sum \rho_i = \sum \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}.$$

Ses dérivées partielles sont

$$\sum \frac{x - a_i}{\rho_i} = \sum \cos \alpha_i,$$
$$\sum \frac{y - b_i}{\rho_i} = \sum \sin \alpha_i,$$

α_i désignant l'angle de la droite A_iM avec l'axe des x.

Au point M elles doivent être nulles ou cesser d'exister. Supposons-les d'abord nulles. On aura les deux équations

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0,$$
$$\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3 = 0.$$

Multiplions la première par $\sin\alpha_2$, la seconde par $\cos\alpha_2$, et retranchons; il vient

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) - \sin(\alpha_2 - \alpha_3) = 0,$$

d'où

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_2 - \alpha_3.$$

On trouve de même

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_3 - \alpha_1.$$

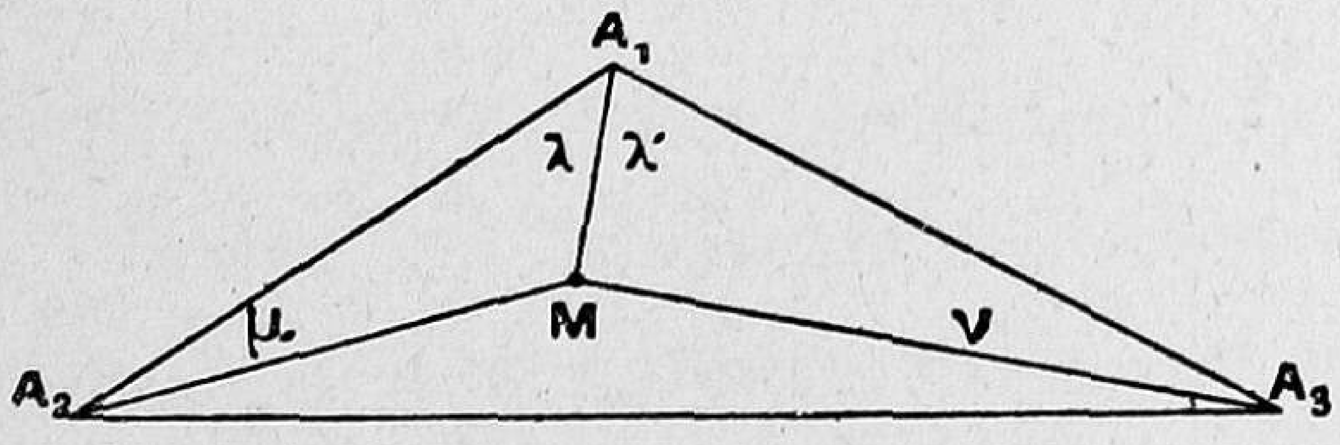
Les angles mutuels des droites A_1M, A_2M, A_3M seront donc de $\frac{2\pi}{3}$, et le point M s'obtiendra en décrivant sur chacun des côtés A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 un segment capable de $\frac{2\pi}{3}$.

Si l'un des angles du triangle $A_1A_2A_3$ est $> \frac{2\pi}{3}$, les arcs de cercle dont l'intersection devrait donner le point M ne se coupent pas.

Il doit pourtant y avoir un minimum. Mais il ne pourra se présenter qu'en un point où les dérivées partielles cessent d'exister, c'est-à-dire en l'un des points A_1, A_2, A_3.

Il est aisé de vérifier qu'il a lieu au point A_1, sommet de l'angle obtus.

Fig. 8.



Soit en effet M un autre point. Montrons que

$$A_1A_2 + A_1A_3 < MA_1 + MA_2 + MA_3.$$

On a

$$A_1A_2 + A_1A_3 = MA_2 \cos\mu + MA_3 \cos\nu + MA_1(\cos\lambda + \cos\lambda').$$

Or $\cos\mu$, $\cos\nu$ sont $\overline{\overline{<}}\,1$ et

$$\cos\lambda + \cos\lambda' = 2\cos\frac{\lambda+\lambda'}{2}\cos\frac{\lambda-\lambda'}{2} \overline{\overline{<}}\, 2\cos\frac{\lambda+\lambda'}{2} < 1,$$

car, $\frac{\lambda+\lambda'}{2}$ étant compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$, son cosinus est moindre que $\frac{1}{2}$.

CHAPITRE IV.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA SÉRIE DE TAYLOR.

I. — Points ordinaires et points singuliers.

409. Soient $F(X, Y) = 0$ l'équation d'une courbe plane; (x, y) l'un de ses points, aux environs duquel nous supposons F développable par la série de Taylor

$$0 = F(X, Y) = \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X - x)^2 + \ldots.$$

Coupons la courbe par une droite

$$X - x = \alpha t + h, \qquad Y - y = \beta t + k,$$

et supposons que cette sécante se rapproche indéfiniment du point (x, y) en conservant une direction constante et d'ailleurs arbitraire.

Si μ de ses points d'intersection avec la courbe se rapprochent indéfiniment de (x, y), on dira que ce point est de l'ordre μ de multiplicité. Si $\mu = 1$, ce sera un point *simple* ou *ordinaire;* si $\mu > 1$, ce sera un point *multiple* ou *singulier*.

Comme à chaque valeur de t correspond un seul point (x, y) de la sécante, l'ordre de multiplicité cherché sera évidemment égal au nombre des racines infiniment petites de l'équation

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(\alpha t + h) + \frac{\partial F}{\partial y}(\beta t + k) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\alpha t + h)^2 + \ldots,$$

ou, ce qui revient au même, à celui des racines nulles de l'équation limite

$$o = \left(\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y}\right) t + \frac{1}{2}\left(\alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \ldots\right) t^2 + \ldots.$$

Le nombre μ sera donc égal à l'unité, toutes les fois que $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ ne sont pas nuls simultanément; il sera égal à n, si les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, ... d'ordre $< n$ s'annulent toutes, l'une au moins des dérivées d'ordre n étant $\gtrless 0$.

Le nombre des racines nulles, étant supposé égal à n pour une direction arbitraire de la sécante, se trouvera accru si α, β sont déterminés de manière à annuler le coefficient

$$\alpha^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + n\alpha^{n-1}\beta \frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots$$

du terme en t^n, c'est-à-dire si la sécante est parallèle à l'une des droites du faisceau

$$o = (X - x)^n \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + n(X - x)^{n-1}(Y - y)\frac{\partial^n F}{\partial x^{n-1}\partial y} + \ldots.$$

Ces droites se nomment les *tangentes* au point (x, y).

En un point simple, on aura une seule tangente

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) = o.$$

410. A une valeur infiniment petite de $X - x$ correspondent une ou plusieurs valeurs infiniment petites de $Y - y$. Proposons-nous de les développer en série.

Supposons d'abord que (x, y) soit un point simple. Si l'axe des Y n'est pas parallèle à la tangente, $\frac{\partial F}{\partial y}$ n'étant pas nul, on n'aura qu'une valeur infiniment petite de $Y - y$, développable comme on l'a vu, suivant les puissances entières et positives de $X - x$.

Si l'axe des Y est parallèle à la tangente, $\frac{\partial F}{\partial y}$ est nul, mais $\frac{\partial F}{\partial x}$ ne l'est pas, et l'on aura

$$o = \frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \ldots + A(Y - y)^r + \ldots,$$

en mettant en évidence, parmi les termes qui ne contiennent pas $X - x$, celui dont le degré en $Y - y$ est le moindre. Cette équation admet r racines infiniment petites données par l'expression

$$Y - y = \left(\frac{1}{A}\frac{\partial F}{\partial x}\right)^{\frac{1}{r}}(X - x)^{\frac{1}{r}} + \alpha(X - x)^{\frac{2}{r}} + \ldots,$$

où l'on prendra successivement les diverses déterminations du radical $(X - x)^{\frac{1}{r}}$. On obtient ainsi un cycle de r branches.

Supposons au contraire (x, y) multiple d'ordre n, et admettons, pour plus de simplicité, que l'axe des Y ne soit parallèle à aucune des tangentes en ce point. On aura

$$\begin{aligned} o = F(X, Y) = A_0(X - x)^n + A_1(X - x)^{n-1}(Y - y) + \ldots \\ + A_n(Y - y)^n + B_0(X - x)^{n+1} + \ldots, \end{aligned}$$

le coefficient A_n n'étant pas nul. L'équation admet donc n racines infiniment petites, données par des séries

$$Y - y = M_1(X - x) + \ldots, \quad \ldots, \quad Y - y = M_n(X - x) + \ldots$$

où $M_1, \ldots, M_n$ sont les racines de l'équation

$$A_0 + A_1 M + \ldots + A_n M^n = o,$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes.

Si les racines de cette équation sont toutes inégales, les n développements seront séparés dès le début, et ne contiendront que des puissances entières. Si, au contraire, plusieurs tangentes coïncident, la singularité sera plus complexe, et les développements contiendront le plus souvent des puissances fractionnaires de $X - x$. Mais on sait que dans tous les cas ils peuvent être associés en cycles en réunissant ceux qui

s'obtiennent par les diverses déterminations d'un même radical.

En posant $(X - x)^{\frac{1}{r}} = t$, l'ensemble des branches d'un même cycle pourra être représenté par le système des deux équations

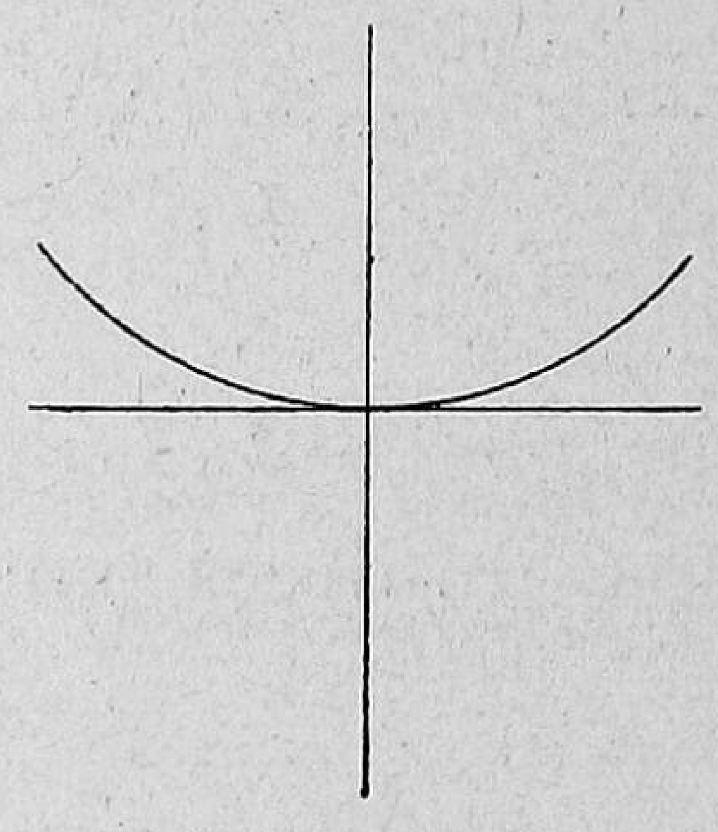
$$X - x = t^r,$$
$$Y - y = at^{r'} + a_0 t^{r_0} + \ldots,$$

où r, r_0 sont des entiers croissants sans diviseur commun.

Si les coefficients a, a_0, ... sont réels, le cycle admettra des points réels aux environs de l'origine. Pour discuter la forme de cette portion de courbe, il est permis d'admettre qu'on ait pris la tangente pour axe des x, auquel cas $x = 0$, $y = 0$, $a = 0$, et qu'on ait déterminé le sens des y de telle sorte que a_0 soit positif.

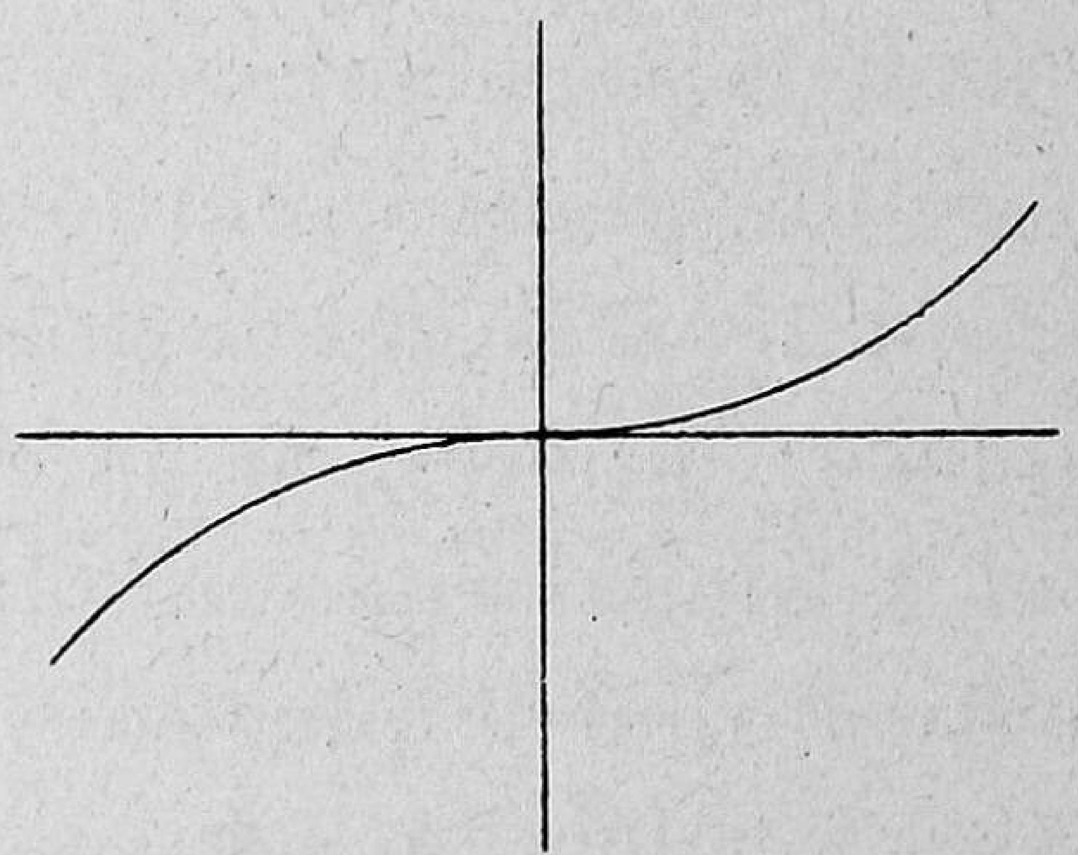
1° Si r est impair, r_0 pair, Y est toujours positif, et X a le signe de t. La courbe a donc la forme de la figure 9.

Fig. 9.



2° Si r et r_0 sont impairs, X et Y ont le signe de t; et la

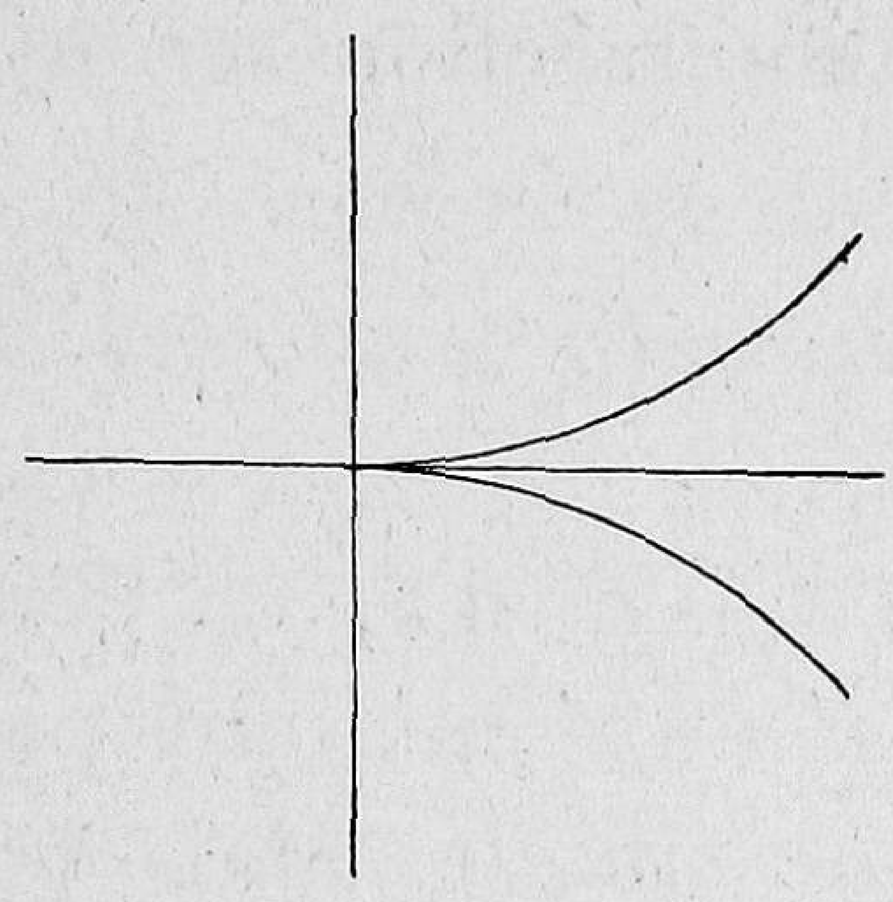
Fig. 10.



courbe présente l'inflexion représentée dans la figure 10.

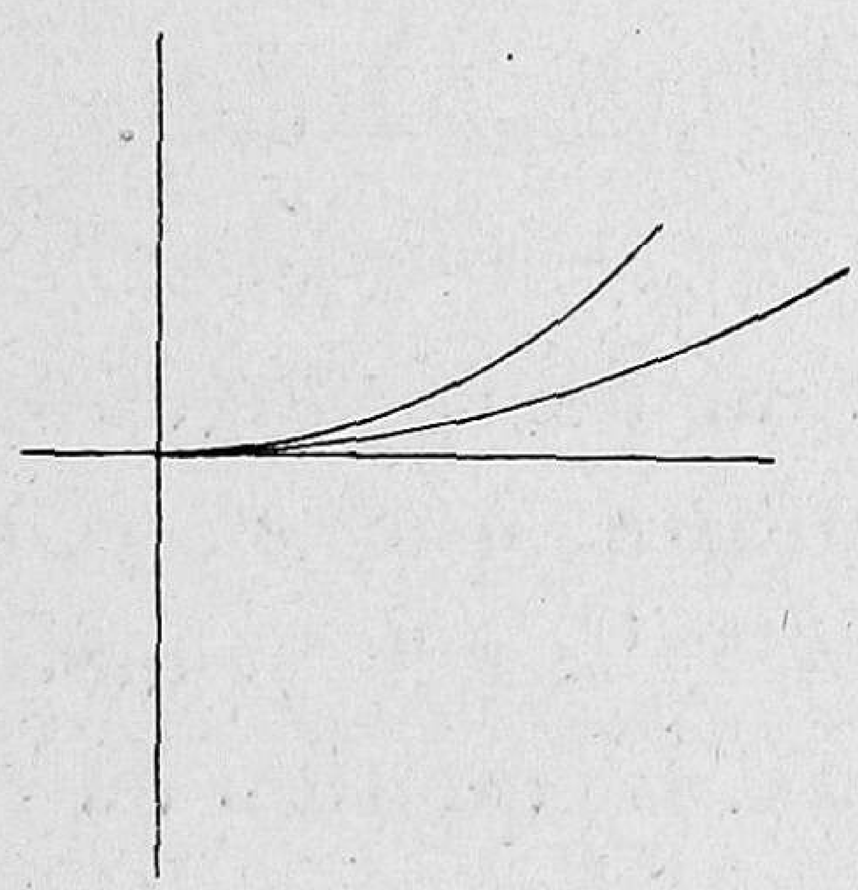
3° Si r est pair, r_0 impair, X est positif, Y change de signe avec t; on a un *rebroussement de première espèce* (*fig.* 11).

Fig. 11.



4° Si r et r_0 sont pairs, X et Y sont toujours positifs : on a un *rebroussement de deuxième espèce* (*fig.* 12).

g. 12.



411. Supposons maintenant la courbe définie par deux équations

$$X = f(t), \qquad Y = \varphi(t).$$

Soit t_0 la valeur de t pour laquelle on a $X = x$, $Y = y$, e admettons qu'aux environs de cette valeur les fonctions f et φ soient développables par la série de Taylor. On aura aux environs de ce point, en posant, pour abréger, $f'(t_0) = x'$, $f''(t_0) = x''$, ..., $\varphi'(t_0) = y'$, ...,

$$X - x = x'(t - t_0) + x''\frac{(t - t_0)^2}{2} + \ldots,$$

$$Y - y = y'(t - t_0) + y''\frac{(t - t_0)^2}{2} + \ldots.$$

Coupons la courbe par une droite

$$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)=h$$

infiniment voisine du point (x, y).

Les t des points d'intersection seront donnés par l'équation

$$(x'\alpha+y'\beta)(t-t_0)+(x''\alpha+y''\beta)\frac{(t-t_0)^2}{2}+\ldots=h.$$

Cette équation en $t-t_0$ n'a, en général, qu'une racine infiniment petite si x' et y' ne sont pas nuls à la fois. Le point (x,y) sera donc simple. Mais on aura une seconde racine infiniment petite si l'on a

$$x'\alpha+y'\beta=0,$$

auquel cas la sécante sera parallèle à la droite

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}.$$

Telle est donc l'équation de la tangente.

Supposons, au contraire, que x', y' s'annulent à la fois, ainsi que x'', y'', ..., $x^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$, mais que $x^{(n)}$ et $y^{(n)}$ ne soient pas nuls tous deux. L'équation en $t-t_0$ aura n racines infiniment petites; le point (x, y) sera donc multiple d'ordre n (pourvu qu'à ces n valeurs de $t-t_0$ correspondent autant de systèmes de valeurs différentes pour $X-x$, $Y-y$). Le nombre des racines infiniment petites deviendra d'ailleurs $>n$, si l'on a

$$x^{(n)}\alpha+y^{(n)}\beta=0.$$

On a donc, ici encore, une tangente ayant pour équation

$$\frac{X-x}{x^{(n)}}=\frac{Y-y}{y^{(n)}}.$$

Ces résultats supposent, comme on vient de le voir, que deux valeurs différentes de t, assez voisines de t_0, correspondent toujours à des points (x, y) différents, ce que nous

exprimerons d'une manière abrégée en disant que t correspond *uniformément* aux points du cycle. On peut toujours reconnaître si cette condition est satisfaite, et, si elle ne l'est pas, faire en sorte qu'elle le devienne, par un changement de paramètre.

Soit, en effet, en ne conservant dans l'écriture que les termes dont le coefficient n'est pas nul,

$$X - x = x^{(m)} \frac{(t - t_0)^m}{m!} + x^{(m_1)} \frac{(t - t_0)^{m_1}}{m_1!} + \ldots,$$

$$Y - y = y^{(n)} \frac{(t - t_0)^n}{n!} + y^{(n_1)} \frac{(t - t_0)^{n_1}}{n_1!} + \ldots.$$

Supposons, pour fixer les idées, $m \leqq n$, et posons

$$x^{(m)} \frac{(t - t_0)^m}{m!} + x^{(m_1)} \frac{(t - t_0)^{m_1}}{m_1!} + \ldots = u^m,$$

u étant un nouveau paramètre. On sait qu'il existe m développements suivant les puissances entières de u, qui, mis à la place de $t - t_0$, satisfont identiquement à cette équation. Soit

$$(1) \qquad t - t_0 = \lambda u + \ldots$$

l'un d'eux. Substituant cette valeur dans les expressions de X, Y, elles prendront la forme plus simple

$$X - x = u^m, \qquad Y - y = c u^n + c' u^{n'} + \ldots.$$

Soit δ le plus grand commun diviseur des exposants $m = \delta r$, $n = \delta s$, $n' = \delta s'$, ... Posant $u^\delta = v$, il viendra

$$X - x = v^r, \qquad Y - y = c v^s + c' v^{s'} + \ldots.$$

Ces deux équations représentent un cycle de r branches, et, comme r, s, s', ... n'ont pas de facteur commun, deux valeurs infiniment petites de v, distinctes entre elles, ne pourront répondre à un même point. En effet, v désignant l'une d'elles, l'autre devrait être égale à θv, θ étant une racine $r^{\text{ième}}$ de l'unité, pour que X eût la même valeur. Pour

que Y eût également la même valeur, on devrait avoir

$$cv^s + c'v^{s'} + \ldots = c\theta^s v^s + c'\theta^{s'} v^{s'} + \ldots$$

ou

$$c(1-\theta^s)v^s + c'(1-\theta^{s'})v^{s'} + \ldots = 0.$$

Or, les exposants r, s, s', ... n'ayant pas de facteur commun, quelle que soit la racine choisie pour θ, la série S du premier membre ne sera pas identiquement nulle et l'on pourra assigner un nombre fixe L tel que, si $0 < |v| < L$, S soit différent de zéro.

Si δ est égal à l'unité, u correspondra uniformément aux points du cycle; et il en sera de même pour t, car la relation (1) fait correspondre à chaque valeur de u une seule valeur de t, et réciproquement.

412. Dans ce qui précède, nous avons appelé t_0 la valeur de t pour laquelle on a $X = x$, $Y = y$. Il peut évidemment exister plusieurs valeurs t_0, t_1, ... de ce paramètre qui satisfassent à cette condition. Chacune d'elles donnera naissance à un cycle, suivant l'analyse précédente, et l'ordre total de multiplicité du point (x, y) sera la somme des ordres de multiplicité partiels ainsi calculés.

413. Soient $F(X, Y, Z) = 0$ l'équation d'une surface; (x, y, z) un de ses points, aux environs duquel F soit développable par la série de Taylor

$$0 = F(X, Y, Z) = \frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X-x)^2 + \ldots\right] + \ldots.$$

Coupons par une droite

$$X - x = \alpha t + h, \qquad Y - y = \beta t + k, \qquad Z - z = \gamma t + l$$

de direction fixe, et infiniment voisine du point (x, y, z).

Les points d'intersection seront donnés par l'équation

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\gamma\right]t + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\alpha^2 + \ldots\right]t^2 + \ldots = H,$$

H étant infiniment petit.

Si $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ne sont pas nuls à la fois, on n'aura, en général, qu'une racine infiniment petite. Le point (x, y, z) sera *simple*.

On aura toutefois deux racines infiniment petites, si

$$\frac{\partial F}{\partial x}\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\gamma = 0,$$

c'est-à-dire si la sécante est parallèle au *plan tangent*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0.$$

Si l'axe des Z, par exemple, n'est pas parallèle au plan tangent, on aura $\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0$, et $Z - z$ sera, aux environs du point (x, y, z), une fonction synectique de $X - x$, $Y - y$.

Supposons maintenant que $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ s'annulent, et qu'il en soit de même des dérivées jusqu'à l'ordre n exclusivement. L'équation en t se réduira à

$$\frac{t^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\alpha^n + \ldots\right] + \ldots = H$$

et admettra, en général, n racines infiniment petites. Le point (x, y, z) sera *multiple d'ordre n*. Le nombre des racines infiniment petites sera augmenté si

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n}\alpha^n + \ldots = 0,$$

autrement dit si la sécante est parallèle à une génératrice du *cône tangent*

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n}(X - x)^n + \ldots = 0.$$

414. Si, par le point (x, y, z), nous faisons passer un plan arbitraire

$$P = A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

il est évident que l'intersection C du plan avec la surface aura en (x, y, z) un point multiple, dont les tangentes seront les génératrices suivant lesquelles le plan coupe le cône tangent.

Si toutefois P entre en facteur dans l'équation du cône tangent, l'ordre de multiplicité du point (x, y, z) sur la courbe C se trouvera accru.

En particulier, le plan tangent en un point ordinaire coupe la surface suivant une courbe sur laquelle ce point sera multiple.

Si l'on coupe le cône tangent par un plan arbitraire ne passant plus par son sommet, on obtiendra une section plane algébrique et de degré n. Cette courbe peut présenter des points singuliers, ou se décomposer en courbes de degré moindre. Toutes ces circonstances devront être notées comme entrant dans la définition de la singularité.

Une surface peut présenter, non seulement des points singuliers isolés, mais des *lignes singulières* dont tous les points sont singuliers. Considérons, par exemple, un cône dont la base ait un point double. La génératrice correspondante sera une ligne double, en chaque point de laquelle on a un cône tangent, dégénérant en un système de deux plans.

415. Une surface est souvent représentée par un système de trois équations

$$X = \varphi_1(t, u), \qquad Y = \varphi_2(t, u), \qquad Z = \varphi_3(t, u),$$

t, u étant deux paramètres dont l'élimination donnerait l'équation de la surface sous la forme ordinaire

$$F(X, Y, Z) = 0.$$

Soit t_0, u_0 un système de valeurs des paramètres pour lequel on ait $X = x$, $Y = y$, $Z = z$. La formule de Taylor étant supposée applicable, on aura, en posant, pour abréger, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_0} = a_1$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_0} = b_1, \ldots$,

$$(2) \qquad \begin{cases} X - x = a_1(t - t_0) + b_1(u - u_0) + \ldots, \\ Y - y = a_2(t - t_0) + b_2(u - u_0) + \ldots, \\ Z - z = a_3(t - t_0) + b_3(u - u_0) + \ldots. \end{cases}$$

Si l'un des déterminants $(a_1 b_2 - a_2 b_1)$, $(a_2 b_3 - b_2 a_3)$, $(a_3 b_1 - a_1 b_3)$ est différent de zéro, (x, y, z) sera un point simple (pourvu toutefois que t_0, u_0 soit le seul système de valeurs des paramètres qui donne ce point). En effet, si $a_1 b_2 - a_2 b_1$, par exemple, n'est pas nul, les deux premières équations (2) permettront de déterminer $t - t_0$, $u - u_0$ en fonction synectique de $X - x$, $Y - y$. Ces valeurs, substituées dans la dernière équation, donneront une expression analogue pour $Z - z$.

Réciproquement, si (x, y, z) est un point simple, on pourra mettre l'équation de la surface aux environs de ce point sous la forme

$$Z - z = a(X - x) + b(Y - y) + c(X - x)^2 + \ldots,$$

équivalente au système des trois équations

$$X - x = t, \qquad Y - y = u, \qquad Z - z = at + bu + ct^2 + \ldots,$$

où le déterminant $a_1 b_2 - a_2 b_1$ a pour valeur l'unité.

Lorsque nous voudrons étudier une surface aux environs d'un point simple, nous pourrons donc toujours admettre que l'un au moins des déterminants $a_1 b_2 - a_2 b_1, \ldots$ est $\gtrless 0$.

416. Une courbe gauche, définie comme trajectoire d'un point mobile, sera représentée par un système de trois équations

$$X = f(t), \qquad Y = \varphi(t), \qquad Z = \psi(t).$$

Un point (x, y, z) de la courbe sera de l'ordre μ de multiplicité, si un plan de direction fixe

$$\alpha(X - x) + \beta(Y - y) + \gamma(Z - z) = h,$$

infiniment voisin de (x, y, z), coupe la courbe en μ points infiniment voisins de ce point.

Soit t_0 la valeur de t correspondant à (x, y, z). Les fonctions f, φ, ψ étant supposées développables par la série de Taylor, on aura, en posant, pour abréger, $f'(t_0) = x'$, $\varphi'(t_0) = y'$, $\psi'(t_0) = z'$, ...,

$$X - x = x'(t - t_0) + x''\frac{(t - t_0)^2}{2} + \ldots,$$

$$Y - y = y'(t - t_0) + y''\frac{(t - t_0)^2}{2} + \ldots,$$

$$Z - z = z'(t - t_0) + z''\frac{(t - t_0)^2}{2} + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation du plan, nous aurons, pour déterminer les t des points d'intersection, l'équation

$$(\alpha x' + \beta y' + \gamma z')(t - t_0) + (\alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'')\frac{(t - t_0)^2}{2} + \ldots = h.$$

Si x', y', z' ne sont pas nuls à la fois, cette équation en $t - t_0$ n'aura, en général, qu'une racine infiniment petite : le point est simple.

Mais on aura plusieurs racines infiniment petites dans le cas où l'on aurait

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0,$$

c'est-à-dire si le plan sécant est parallèle à la *tangente*

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}.$$

Si x', y', z', ..., $x^{(n-1)}$, $y^{(n-1)}$, $z^{(n-1)}$ s'annulent à la fois, sans qu'il en soit de même pour $x^{(n)}$, $y^{(n)}$, $z^{(n)}$, on aura n valeurs infiniment petites de t, et ce nombre sera accru si le plan sécant est parallèle à la tangente

$$\frac{X - x}{x^{(n)}} = \frac{Y - y}{y^{(n)}} = \frac{Z - z}{z^{(n)}}.$$

Donc (x, y, z) sera multiple d'ordre n, si à chaque valeur de t voisine de t_0 correspond un point différent de la courbe.

417. On peut toujours satisfaire à cette condition en changeant au besoin de paramètre. Soit, en effet, en ne conservant que les termes dont le coefficient n'est pas nul,

$$X - x = x^{(m)} \frac{(t - t_0)^m}{1.2\ldots m} + x^{(m_1)} \frac{(t - t_0)^{m_1}}{1.2\ldots m_1} + \ldots,$$

$$Y - y = y^{(n)} \frac{(t - t_0)^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$Z - z = z^{(p)} \frac{(t - t_0)^p}{1.2\ldots p} + \ldots,$$

et supposons, pour fixer les idées, $m \overline{\gtrless} n \overline{\gtrless} p$. Posons

$$x^{(m)} \frac{(t - t_0)^m}{1.2\ldots m} + x^{(m_1)} \frac{(t - t_0)^{m_1}}{1.2\ldots m_1} + \ldots = u^m.$$

Prenons, pour $t - t_0$, l'un des développements qui satisfont à cette équation, et substituons-le dans les équations précédentes ; elles prendront la forme

$$X - x = u^m, \qquad Y - y = d_n u^n + \ldots, \qquad Z - z = e_p u^p + \ldots.$$

Soit δ le plus grand commun diviseur des exposants $m = \delta r$, $n = \delta\nu$, $\ldots$, $p = \delta\pi$, $\ldots$. Posant $u^\delta = v$, il viendra

$$(3) \quad X - x = v^r, \quad Y - y = d_n v^\nu + \ldots, \quad Z - z = e_p v^\pi + \ldots.$$

Ces trois équations représentent un cycle de r branches, et il est clair qu'à deux valeurs infiniment petites de v, différentes l'une de l'autre, répondent deux points distincts.

On doit remarquer ici, comme pour les courbes planes, que, s'il existe plusieurs valeurs t_0, t_1, ... du paramètre qui correspondent au point (x, y, z), chacune d'elles donne naissance à un cycle analogue à celui que nous avons déterminé, et l'ordre total de multiplicité de ce point sera la somme des ordres de multiplicité partiels ainsi calculés.

Si le point (x, y, z) est simple, il ne correspondra donc qu'à une seule valeur de t. Il faut, en outre, que dans les

expressions (3) des coordonnées en fonction de v figure un terme du premier degré en v. Comme on a $r \overline{\gtrless} \nu \overline{\gtrless} \pi$, on aura $r = 1$, $X - x = v$ et, par suite,

$$Y - y = d_n(X - x)^\nu + \dots, \qquad Z - z = e_p(X - x)^\pi + \dots.$$

La courbe aux environs du point (x, y, z) est donc l'intersection de ces deux cylindres, dont les plans tangents sont différents.

418. Réciproquement, la courbe d'intersection de deux surfaces quelconques a un point simple partout où les plans tangents aux deux surfaces sont différents.

Soient, en effet, (x, y, z) un point de l'intersection, et

$$(4)\quad \begin{cases} 0 = F(X, Y, Z) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \dfrac{\partial F}{\partial z}(Z - z) + \dots \\ 0 = \Phi(X, Y, Z) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(X - x) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(Y - y) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}(Z - z) + \dots \end{cases}$$

les équations des deux surfaces. Les plans tangents étant supposés distincts, l'un au moins des trois déterminants

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}, \quad \dots,$$

par exemple le premier, sera $\gtrless 0$. Donc, aux environs du point (x, y, z), $Y - y$ et $Z - z$ seront synectiques en $X - x$ et admettront des développements de la forme

$$Y - y = b_1(X - x) + b_2(X - x)^2 + \dots,$$
$$Z - z = c_1(X - x) + c_2(X - x)^2 + \dots.$$

En joignant à ces équations l'identité

$$X - x = X - x,$$

on a les trois coordonnées exprimées en fonction du même paramètre $X - x$. Le point est simple et a pour tangente

$$\frac{X - x}{1} = \frac{Y - y}{b_1} = \frac{Z - z}{c_1}.$$

Pour déterminer les coefficients b_1 et c_1, substituons les valeurs de $Y - y$ et $Z - z$ dans les équations (4). L'identification des deux membres donnera

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} b_1 + \frac{\partial F}{\partial z} c_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} b_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} c_1 = 0.$$

On voit par là que la tangente cherchée est l'intersection des deux plans tangents

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(Z - z) = 0$$

et a pour équations

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Lorsque nous voudrons étudier une courbe gauche aux environs d'un point simple, en la considérant comme intersection de deux surfaces, il sera permis, d'après ce qui précède, d'admettre que les deux surfaces qui la déterminent n'ont pas le même plan tangent.

Nous nous bornerons exclusivement, dans ce Chapitre, à la considération des points simples des courbes et des surfaces.

II. — Théorie du contact.

419. Nous appellerons *écart* de deux points $P = (x, y, z)$, $Q = (x_1, y_1, z_1)$, et nous représenterons par [PQ] la somme

$$|x_1 - x| + |y_1 - y| + |z_1 - z|.$$

L'écart ainsi défini n'est nul que si P et Q coïncident. La distance $\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$ ne jouirait pas de cette propriété pour des points imaginaires. Mais, si l'on

se bornait aux points réels, on pourrait, sans rien changer aux théories qui suivent, la substituer à l'écart dans les définitions.

420. Soient F, F_1 deux figures (lignes ou surfaces) ayant un point commun P. Nous dirons que F a en ce point un *contact d'ordre n* avec F_1, si à chaque point Q_1 pris sur cette dernière figure dans le voisinage de P on peut associer un point Q de F, de telle sorte que, lorsque Q_1 tend vers P, $[QQ_1]$ soit infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à $[PQ_1]$.

421. *Contact des courbes planes.* — Soient

$$F(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe F; (x, y) les coordonnées de P; (x_1, y_1) et $(x_1+\alpha, y_1+\beta)$ celles de Q_1 et de Q. On aura

$$(1) \qquad 0 = F(x_1+\alpha, y_1+\beta) = F(x_1, y_1) + A\alpha + B\beta,$$

A et B étant des fonctions de x_1, y_1, α, β qui tendent respectivement vers $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ lorsque x_1, y_1, α, β tendent vers x, y, 0, 0.

S'il y a contact d'ordre n, $|\alpha|+|\beta|$ et *a fortiori* $|\alpha|$ et $|\beta|$ seront d'ordre $n+1$, et l'équation (1) montre qu'il en est de même pour $F(x_1, y_1)$. Réciproquement, si $F(x_1, y_1)$ est d'ordre $n+1$, il y aura contact d'ordre n. En effet, pour $x_1 = x$, $y_1 = y$, $\alpha = \beta = 0$, la fonction $F(x_1+\alpha, y_1+\beta)$ s'annule, et ses dérivées partielles par rapport à α, β se réduisent à $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$. Le point (x, y) étant simple sur F, l'une au moins de ces deux quantités, par exemple $\frac{\partial F}{\partial x}$, sera $\gtrless 0$.

L'équation (1) définit donc une fonction implicite α des variables x_1, y_1, β, laquelle s'annule pour $x_1 = x$, $y_1 = y$, $\beta = 0$ et admet des dérivées partielles; elle sera donc infiniment petite lorsque $x_1 - x$, $y_1 - y$, β seront infiniment

petits. Si α est défini de la sorte, le point $Q=(x_1+\alpha, y_1+\beta)$ sera sur la courbe F, de quelque manière qu'on ait choisi β, et pourra être associé au point Q_1.

Prenons pour β un infiniment petit quelconque d'ordre $n+1$ par rapport à $|x_1-x|+|y_1-y|$; $F(x_1, y_1)$ est du même ordre, par hypothèse; enfin x_1-x, y_1-y, α, β étant infiniment petits, A et B tendront vers les limites fixes $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, dont la première n'est pas nulle. La quantité

$$\alpha=-\frac{F(x_1, y_1)+B\beta}{A}$$

sera donc un infiniment petit d'ordre $n+1$ au moins, et $|\alpha|+|\beta|$ sera d'ordre $n+1$. Il y a donc bien contact d'ordre n.

Ainsi, *la condition nécessaire et suffisante pour un contact d'ordre n est que* $F(x_1, y_1)$ *soit d'ordre* $n+1$ *par rapport à* $[PQ_1]=|x_1-x|+|y_1-y|$.

422. Cela posé, admettons d'abord que la seconde courbe F_1 soit définie par les équations

$$x=\varphi(t), \qquad y=\varphi_1(t).$$

Soient t et $t+dt$ les valeurs du paramètre qui correspondent respectivement aux points $P=(x, y)$ et $Q_1=(x_1, y_1)$. On aura, en désignant par $x', x'', \ldots$ et $y', y'', \ldots$ les dérivées successives de $\varphi(t)$ et de $\varphi_1(t)$,

$$x_1-x=x'\,dt+x''\frac{dt^2}{2}+\ldots,$$

$$y_1-y=y'\,dt+y''\frac{dt^2}{2}+\ldots.$$

Donc x_1-x, y_1-y sont du premier ordre au moins par rapport à dt. D'ailleurs, l'une au moins de ces quantités sera effectivement du premier ordre; car, P étant un point simple

sur F_1, x' et y' ne peuvent être nuls à la fois. Donc $[PQ_1]$ sera du même ordre que dt.

Posons d'autre part

$$F[\varphi(t), \varphi_1(t)] = \Psi(t);$$

on aura

$$F(x_1, y_1) = F[\varphi(t+dt), \varphi_1(t+dt)] = \Psi(t+dt)$$
$$= \Psi(t) + \Psi'(t)\,dt + \ldots + \Psi^n(t)\frac{dt^n}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Cette quantité devant être d'ordre $n+1$, on aura, pour conditions du contact demandé, les relations

$$(2) \qquad \Psi(t) = 0, \qquad \Psi'(t) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Psi^n(t) = 0.$$

Ces conditions prennent une forme plus symétrique si l'on suppose les deux courbes données sous la forme

$$y = f(x) \qquad \text{et} \qquad y = f_1(x),$$

lesquelles équivalent, pour la première, à

$$y - f(x) = 0$$

et, pour la seconde, à

$$x = t, \qquad y = f_1(t).$$

On aura alors

$$\Psi(t) = f_1(t) - f(t) = f_1(x) - f(x)$$

et les équations (2) deviendront

$$(3) \quad f_1(x) = f(x), \quad f_1'(x) = f'(x), \quad \ldots, \quad f_1^n(x) = f^n(x).$$

Enfin, si les deux courbes sont données sous la forme implicite

$$F(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad F_1(x, y) = 0,$$

on n'aura qu'à déterminer l'ordonnée y et ses n premières dérivées dans la première courbe, au moyen des équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \qquad \ldots,$$

et, dans la seconde, par les équations

$$F_1 = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y} y' = 0, \qquad \dots$$

Les valeurs de ces quantités devant, comme on vient de le voir, être les mêmes dans les deuxcourbes, on n'aura qu'à les égaler pour obtenir les équations de condition cherchées.

423. *Contact d'une surface* S *avec une courbe* C_1. — Soient $F(x, y, z) = 0$ l'équation de S; x, y, z les coordonnées du point P; x_1, y_1, z_1 celles de Q_1; $x_1+\alpha$, $y_1+\beta$, $z_1+\gamma$ celles de Q. On aura

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 &= F(x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma) \\ &= F(x_1, y_1, z_1) + A\alpha + B\beta + C\gamma; \end{aligned} \right.$$

A, B, C tendent vers $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ lorsque $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma$ tendent vers $x, y, z, 0, 0, 0$.

S'il y a contact d'ordre n, α, β, γ et, par suite, $F(x_1, y_1, z_1)$ seront d'ordre $n+1$ au moins. Réciproquement, supposons que $F(x_1, y_1, z_1)$ soit d'ordre $n+1$; il y aura contact d'ordre n. En effet, pour $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, la fonction $F(x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma)$ s'annule et ses dérivées partielles, par rapport à α, β, γ, se réduisent à $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$. Le point P étant simple sur F, une au moins de ces dernières quantités, telle que $\frac{\partial F}{\partial x}$, sera $\gtrless 0$. L'équation (4) définira donc α en fonction implicite de $x_1, y_1, z_1, \beta, \gamma$.

Associons à Q_1 le point $Q = (x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma)$, β, γ étant deux infiniment petits quelconques d'ordre $n+1$: $\alpha = -\frac{F(x_1, y_1, z_1) + B\beta + C\gamma}{A}$ sera du même ordre au moins, car A, tendant vers $\frac{\partial F}{\partial x}$, n'est pas infiniment petit. Donc $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ sera d'ordre $n+1$.

Donc, ici encore, la condition nécessaire et suffisante pour le contact est que $F(x_1, y_1, z_1)$ soit d'ordre $n+1$.

424. Cela posé, soient $x=\varphi(t)$, $y=\varphi_1(t)$, $z=\varphi_2(t)$ les équations de la courbe C_1.

Soient t, $t+dt$ les valeurs du paramètre aux points P et Q_1; on aura

$$x_1 - x = x'\,dt + x''\frac{dt^2}{2} + \ldots,$$

$$y_1 - y = y'\,dt + y''\frac{dt^2}{2} + \ldots,$$

$$z_1 - z = z'\,dt + z''\frac{dt^2}{2} + \ldots.$$

Donc $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$ seront du premier ordre au moins en dt, et l'un d'eux sera effectivement du premier ordre, car, le point P étant simple sur C_1, x', y', z' ne s'annulent pas à la fois. Donc $[PQ_1]$ est de l'ordre de dt.

D'autre part, en posant

$$F[\varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)] = \Psi(t),$$

on aura

$$F(x_1, y_1, z_1) = \Psi(t+dt) = \Psi(t) + \Psi'(t)\,dt + \ldots.$$

Les conditions du contact seront donc

$$\Psi(t) = 0, \qquad \Psi'(t) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Psi^n(t) = 0.$$

425. Si C_1 était définie comme intersection des surfaces

$$\Phi(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_1(x, y, z) = 0,$$

il faudrait, pour appliquer ces formules, concevoir qu'on prenne $x=t$; y et z seraient alors des fonctions implicites de ce paramètre, définies par les équations $\Phi=0$, $\Phi_1=0$. On calculera alors par les méthodes connues, pour les égaler à zéro, es dérivées successives de la fonction

$$\Psi(t) = \Psi(x) = F(x, y, z)$$

par rapport à la variable indépendante x.

426. *Contact de deux courbes gauches* C *et* C_1. — Soient $F(x, y, z) = 0$, $\mathcal{F}(x, y, z) = 0$ les équations de C; (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), $(x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma)$ les coordonnées des points P, Q_1, Q; on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= F(x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma)\\ &= F(x_1, y_1, z_1) + A\alpha + B\beta + C\gamma,\\ 0 &= \mathcal{F}(x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma)\\ &= \mathcal{F}(x_1, y_1, z_1) + \mathcal{A}\alpha + \mathcal{B}\beta + \mathcal{C}\gamma. \end{aligned}\right.$$

S'il y a contact d'ordre n, α, β, γ et, par suite, $F(x_1, y_1, z_1)$, $\mathcal{F}(x_1, y_1, z_1)$ seront d'ordre $n+1$ au moins.

Réciproquement, supposons que

$$F(x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(x_1, y_1, z_1)$$

soient d'ordre $n+1$.

Pour $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ les fonctions

$$F(x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma),$$
$$\mathcal{F}(x_1+\alpha, y_1+\beta, z_1+\gamma)$$

s'annulent, et leurs dérivées partielles, par rapport à α, β, γ, se réduisent à

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z},$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}.$$

Le point P étant simple sur C, l'un des trois déterminants formés avec ces dérivées, par exemple $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d\mathcal{F}}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}$, sera $\gtrless 0$. Les équations (5) détermineront donc α, β en fonction implicite de x_1, y_1, z_1, γ.

Associons à Q_1 le point Q obtenu en prenant pour γ un infiniment petit quelconque d'ordre $n+1$; α et β seront du même ordre au moins; car la résolution des équations (5) les donne sous forme de fractions, dont le numérateur est d'ordre $n+1$, tandis que le dénominateur $A\mathcal{B} - B\mathcal{A}$, ayant

pour limite

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y},$$

n'est pas infiniment petit. Donc $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ sera d'ordre $n + 1$, et il y aura contact d'ordre n.

La condition nécessaire et suffisante pour un contact d'ordre n est donc que $F(x_1, y_1, z_1)$ et $\mathfrak{F}(x_1, y_1, z_1)$ soient d'ordre $n + 1$.

Soient maintenant

$$x = \varphi(t), \qquad y = \varphi_1(t), \qquad z = \varphi_2(t)$$

les équations de la courbe C_1. On verra, comme précédemment, que $[PQ_1]$ est de l'ordre de dt, et qu'en posant

$$F[\varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)] = \Psi(t),$$
$$\mathfrak{F}[\varphi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)] = \Psi_1(t),$$

les conditions du contact seront

$$(6) \qquad \begin{cases} \Psi(t) = \Psi'(t) = \ldots = \Psi^n(t) = 0, \\ \Psi_1(t) = \Psi'_1(t) = \ldots = \Psi^n_1(t) = 0. \end{cases}$$

427. Si les deux courbes étaient données par les équations

$$y = f(x), \qquad z = \varphi(x)$$

et

$$y = f_1(x), \qquad z = \varphi_1(x),$$

en prenant x pour variable indépendante, ces équations prendraient la forme symétrique

$$(7) \qquad \begin{cases} f(x) = f_1(x), \quad f'(x) = f'_1(x), \quad \ldots, \quad f^n(x) = f^n_1(x), \\ \varphi(x) = \varphi_1(x), \quad \varphi'(x) = \varphi'_1(x), \quad \ldots, \quad \varphi^n(x) = \varphi^n_1(x). \end{cases}$$

428. Enfin, si elles étaient définies par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0$$

et

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_1(x, y, z) = 0,$$

on n'aurait, pour obtenir les conditions du contact, qu'à

égaler les valeurs de y, z et de leurs n premières dérivées dans les deux courbes.

429. *Contact de deux surfaces* S *et* S_1. — Soient $F(x, y, z) = 0$ l'équation de S; (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) les coordonnées de P et de Q_1. On voit aisément que la condition d'un contact d'ordre n est que $F(x_1, y_1, z_1)$ soit d'ordre $n+1$ par rapport à $[PQ_1]$.

Cela posé, soient

$$x = \varphi(t, u), \qquad y = \varphi_1(t, u), \qquad z = \varphi_2(t, u)$$

les équations de S_1; (t, u) et $(t + dt, u + du)$ les valeurs des paramètres aux points P et Q_1; on aura

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 - x = A\, dt + B\, du, \\ y_1 - y = A_1\, dt + B_1\, du, \\ z_1 - z = A_2\, dt + B_2\, du, \end{cases}$$

A, B, ... étant des quantités variables qui ont pour limite $\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}, \ldots$.

On voit aisément que $[PQ_1]$ est de l'ordre de $|dt| + |du|$.

Soit, en effet, M une quantité positive plus grande que $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right|, \ldots$; on aura, pour toutes les valeurs suffisamment petites de t et de u,

$$|A| < M, \qquad |B| < M, \qquad \ldots;$$

donc $|x_1 - x|$, $|y_1 - y|$, $|z_1 - z|$ seront moindres que $M|dt| + M|du|$; et, en les ajoutant, il viendra

$$[PQ_1] < 3M(|dt| + |du|).$$

Mais, d'autre part, P étant un point simple de S_1, le déterminant

$$D = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$

(ou, à son défaut, l'un de ses deux homologues) sera $\lesseqgtr 0$. Or les deux premières équations (8), résolues par rapport à dt et du, donneront

$$(AB_1 - BA_1)\,dt = B_1(x_1 - x) - B(y_1 - y),$$
$$(AB_1 - BA_1)\,du = -A_1(x_1 - x) + A(y_1 - y),$$

d'où

$$|AB_1 - BA_1|(|dt| + |du|) < 2M(|x_1 - x| + |y_1 - y|) < 2M[PQ_1].$$

D'ailleurs $AB_1 - BA_1$ a pour limite le déterminant D; donc, en désignant par Δ une quantité quelconque un peu plus petite que $|D|$, on aura, pour toutes les valeurs suffisamment petites de dt et du,

$$|dt| + |du| \leqq \frac{2M}{\Delta}[PQ_1].$$

Le rapport de $[PQ_1]$ à $|dt| + |du|$ étant ainsi compris entre deux limites fixes différentes de zéro, ces deux quantités sont du même ordre.

Si donc nous posons

$$F[\varphi(t, u), \varphi_1(t, u), \varphi_2(t, u)] = \Psi(t, u),$$

la condition nécessaire et suffisante pour le contact d'ordre n sera que l'expression

$$F(x_1, y_1, z_1) = \Psi(t + dt, u + du) = \Psi(t, u) + \frac{\partial \Psi}{\partial t}dt + \frac{\partial \Psi}{\partial u}du + \ldots$$

soit d'ordre $n + 1$ par rapport à $|dt| + |du|$.

430. Cela revient à dire que *la fonction* Ψ *et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement sont toutes nulles*.

En effet, si ces dérivées sont nulles, $\Psi(t + dt, u + du)$

se réduira au reste de la série de Taylor

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-\theta)^n \left(dt\frac{\partial}{\partial t}+du\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+1} \Psi(t+\theta\, dt,\ u+\theta\, du)\, d\theta.$$

Soit N une constante plus grande que les modules des dérivées partielles d'ordre $n+1$, $\frac{\partial^{n+1}\Psi}{\partial t^{n+1}}, \ldots, \frac{\partial^{n+1}\Psi}{\partial u^{n+1}}$. Lorsque dt et du seront assez petits, le module de l'expression précédente sera moindre que

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 (|dt|+|du|)^{n+1}\,\mathrm{N}\, d\theta = \frac{\mathrm{N}}{n!}[|dt|+|du|]^{n+1}.$$

L'ordre du contact sera donc au moins égal à n.

Il ne pourra d'ailleurs surpasser n, si les dérivées d'ordre $n+1$ ne s'annulent pas simultanément. En effet, si dans l'expression de $\Psi(t+dt, u+du)$ nous négligeons les termes dépendant des dérivées d'ordre $> n+1$, et qui représentent, comme on vient de le voir, un infiniment petit d'ordre $> n+1$, on aura approximativement

$$\Psi(t+dt,\ u+du) = \frac{\left(dt\frac{\partial}{\partial t}+du\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+1}\Psi(t, u)}{1.2\ldots(n+1)}.$$

quantité dont l'ordre ne peut être supérieur à $n+1$ pour toutes les valeurs du rapport de du à dt. Supposons en effet

$$du = \lambda\, dt,$$

λ étant réel et positif. On aura

$$\frac{|\Psi(t+dt,\ u+du)|}{(|dt|+|du|)^{n+1}} = \frac{\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\frac{\partial}{\partial u}\right)^{n+1}\Psi(t, u)\right|}{1.2\ldots(n+1)(1+\lambda)^{n+1}},$$

quantité dont le numérateur ne s'annule pas en général, mais seulement pour un nombre fini de valeurs de λ.

431. Si les deux surfaces étaient représentées par les

équations

$$z = f(x, y) \quad \text{et} \quad z = f_1(x, y),$$

ces équations de condition deviendraient (en prenant x, y pour variables indépendantes)

$$(9) \quad f = f_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{dx}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = \frac{\partial^n f_1}{\partial y^n}.$$

432. Enfin, si elles sont représentées par des équations

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0$$

et

$$\mathrm{F}_1(x, y, z) = 0,$$

on exprimera que le contact a lieu en égalant les valeurs de z et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n, respectivement calculées dans les deux surfaces.

433. Pour le contact du premier ordre, par exemple, il faudra exprimer d'abord que (x, y, z) est un point commun aux deux surfaces, puis égaler les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$. Elles sont déterminées dans la première surface par les équations

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

et dans la seconde par les équations

$$\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

La condition de contact est donc que $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}$ soient proportionnels à $\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z}$, ou que le déterminant $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial y} = \Delta$ et ses analogues Δ_1 et Δ_2 soient nuls.

Ces conditions expriment que (x, y, z) est un point singulier sur la courbe d'intersection des deux surfaces F et F_1.

434. Remarques. — 1° *Si deux surfaces* S *et* S′ *ont un contact d'ordre n en un point, leurs intersections avec une troisième surface* S″ *passant en ce point sans les y toucher auront un contact d'ordre n.*

Car les coordonnées d'un point Q infiniment voisin de P pris sur la courbe $S = 0$, $S'' = 0$ satisfont par hypothèse à l'équation $S' = 0$ aux infiniment petits près d'ordre $n + 1$. D'autre part, elles satisfont rigoureusement à l'équation $S'' = 0$, qui, jointe à celle-ci, caractérise la courbe $S' = 0$, $S'' = 0$. Il y a donc contact d'ordre n entre les deux courbes.

2° *Deux lignes* (ou deux surfaces) *ayant un contact d'ordre n avec une troisième ont entre elles un contact de même ordre.*

Cela devient évident si l'on écrit les conditions du contact sous les formes (3), (7) et (9).

435. *Osculation.* — Soient C une courbe (ou surface) quelconque, K une autre courbe ou surface dont l'équation (ou les équations) contienne un nombre de paramètres égal à celui des conditions trouvées ci-dessus pour que K ait avec C un contact d'ordre n en un point donné.

Si l'on donne successivement à ces paramètres différentes valeurs, on obtiendra une famille de courbes (ou surfaces) K. Celle de ces courbes (ou surfaces) où ces paramètres sont déterminés de manière à satisfaire aux conditions du contact d'ordre n est dite *osculatrice* à C au point considéré.

436. Au lieu de déterminer les paramètres de K par la condition d'avoir avec C un contact donné en un point donné, on pourrait se proposer de les déterminer de telle sorte que K rencontrât C en un certain nombre de points donnés.

Soient, par exemple, C une courbe plane ayant pour équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \varphi_1(t),$$

K une autre courbe dont l'équation

$$F(x, y) = 0$$

contienne $n+1$ paramètres.

Posons, comme précédemment,

$$F[\varphi(t), \varphi_1(t)] = \Psi(t).$$

La courbe passera par les $n+1$ points $t+\Delta t$, $t+\Delta_1 t$, ..., $t+\Delta_n t$, si l'on a les équations de condition

$$\Psi(t+\Delta t) = 0, \quad \Psi(t+\Delta_1 t) = 0, \quad \ldots, \quad \Psi(t+\Delta_n t) = 0.$$

Il est aisé de voir que, *si les points* $t+\Delta t$, ..., $t+\Delta_n t$ *tendent simultanément vers le point fixe* t, *la courbe* K *aura pour limite la courbe osculatrice à* C *au point* t.

En effet, soit, pour fixer les idées, $\Delta t < \Delta_1 t < \ldots < \Delta_n t$. La fonction Ψ s'annulant aux points $t+\Delta t$, $t+\Delta_1 t$, ..., $t+\Delta_n t$, sa dérivée Ψ' devra, d'après le théorème de Rolle, s'annuler en n points $t+\Delta'_1 t$, $t+\Delta'_2 t$, ..., $t+\Delta'_n t$ respectivement compris entre $t+\Delta t$ et $t+\Delta_1 t$, entre $t+\Delta_1 t$ et $t+\Delta_2 t$, ... De même, la fonction Ψ'', dérivée de Ψ', devra s'annuler en $n-1$ points $t+\Delta''_2 t$, ..., $t+\Delta''_n t$ respectivement compris dans les intervalles de $t+\Delta'_1 t$ à $t+\Delta'_2 t$, ...; et ainsi de suite jusqu'à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de Ψ. On aura donc

$$\Psi(t+\Delta t) = 0, \quad \Psi'(t+\Delta'_1 t) = 0, \quad \ldots, \quad \Psi^n(t+\Delta^n_n t) = 0,$$

$\Delta'_1 t$, ..., $\Delta^n_n t$ étant compris entre Δt et $\Delta_n t$.

Si donc Δt et $\Delta_n t$ tendent vers zéro, ces équations deviendront à la limite

$$\Psi(t) = 0, \quad \Psi'(t) = 0, \quad \ldots, \quad \Psi^n(t) = 0.$$

Ce sont précisément les relations qui caractérisent l'osculation.

437. Ce raisonnement s'appliquerait identiquement au cas où, C étant une courbe gauche, K serait une surface ou une autre courbe gauche, et conduirait au même résultat.

Mais si C et K sont des surfaces, la fonction Ψ dépen-

dant de deux variables, on ne peut plus raisonner comme ci-dessus, et la proposition à établir, bien que restant vraie en général, est en défaut dans certains cas particuliers.

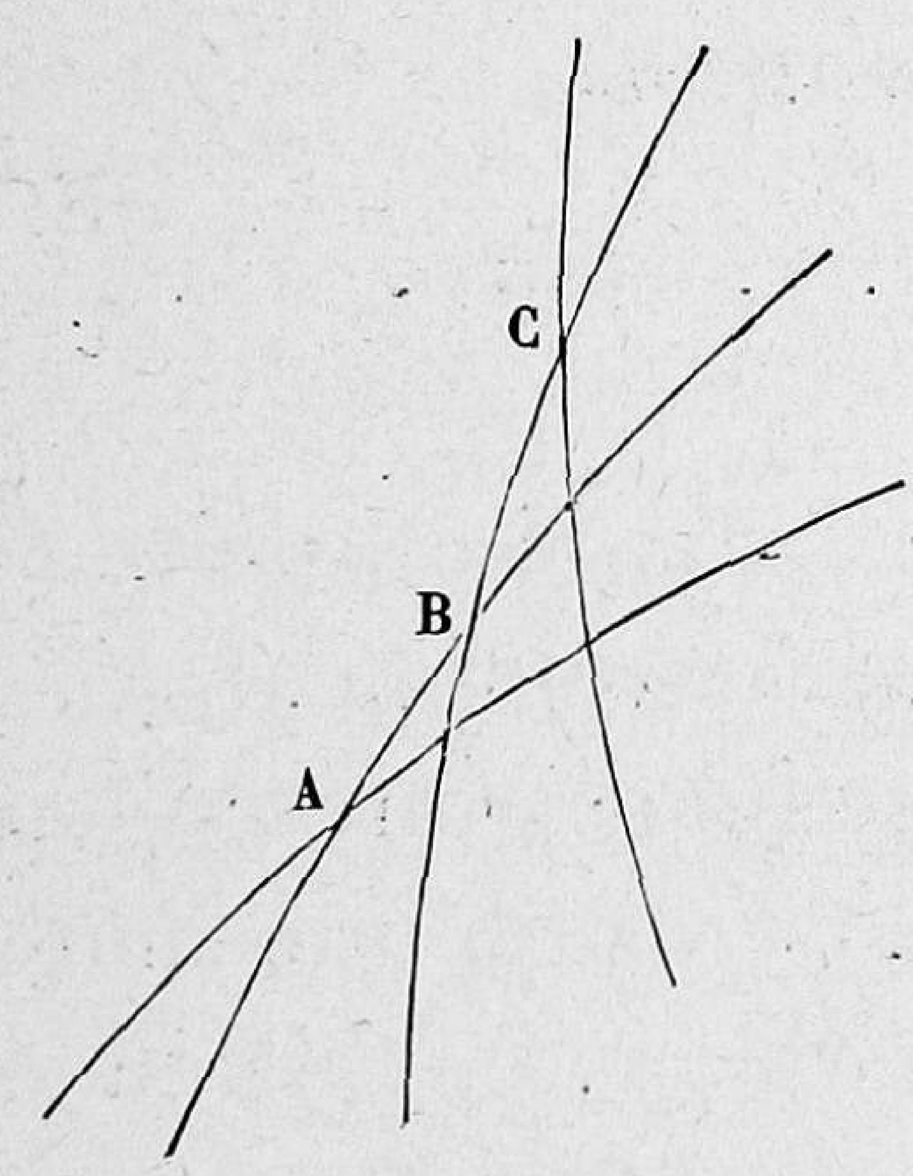
III. — Enveloppes.

438. Soit $F(x, y, c) = 0$ une famille de courbes planes, caractérisées par les différentes valeurs attribuées au paramètre c. Donnons à c une suite de valeurs $c_0, c_1, c_2, \ldots$. Nous obtiendrons une suite de courbes

$$F(x, y, c_0) = 0, \qquad F(x, y, c_1) = 0, \qquad F(x, y, c_2) = 0.$$

Marquons les points d'intersection A, B, C, ... (*fig.* 13)

Fig. 13.



de chacune de ces courbes avec la suivante. Si les valeurs successives attribuées à c se rapprochent indéfiniment les unes des autres, les points A, B, C, ... se rapprocheront également et finiront par dessiner une courbe continue, qu'on nomme l'*enveloppe* des courbes $F(x, y, c) = 0$.

Pour trouver l'équation de cette enveloppe, considérons l'une de ces courbes

$$F(x, y, c) = 0$$

et la courbe infiniment voisine

$$F(x, y, c + dc) = 0.$$

Leur point d'intersection sera défini par le système de ces deux équations.

Mais on a

$$F(x, y, c+dc) = F(x, y, c) + \frac{\partial F}{\partial c} dc + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \frac{dc^2}{1.2} + \ldots = 0,$$

ou en supprimant le terme $F(x, y, c)$, qui est nul, et divisant par dc,

$$\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \frac{dc}{1.2} + \ldots = 0.$$

A la limite, dc étant nul, on aura simplement

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

On obtiendra donc l'équation de l'enveloppe en éliminant c entre les équations

$$F(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

439. *Remarques.* — 1° Si ces deux équations sont incompatibles, il n'y a pas d'enveloppe.

2° La règle donnée pour trouver l'enveloppe suppose que l'expression $F(x, y, c)$ n'a qu'une seule valeur pour chaque système de valeurs de x, y, c. S'il en était autrement, l'enveloppe cherchée pourrait échapper en tout ou en partie à cette détermination.

Cherchons, par exemple, l'enveloppe des courbes

$$(1) \qquad x + \sqrt{1-y^2} + c = 0.$$

L'équation $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ se réduisant ici à $1 = 0$, il semble qu'on n'ait pas d'enveloppe; en effet, les branches de courbe

$$x + \sqrt{1-y^2} + c = 0 \quad \text{et} \quad x + \sqrt{1-y^2} + c + dc = 0$$

ne se coupent pas. Mais, le radical $\sqrt{1-y^2}$ pouvant être affecté du signe $\pm$, la courbe (1) contient une seconde

branche $x - \sqrt{1-y^2} + c = 0$, laquelle coupe la courbe $x + \sqrt{1-y^2} + c + dc = 0$ en un point qui tendra, lorsque dc se rapprochera de zéro, vers une limite définie par les équations

$$x + \sqrt{1-y^2} + c = 0, \qquad x - \sqrt{1-y^2} + c = 0.$$

Éliminant c, on aura, pour l'équation de l'enveloppe,

$$\sqrt{1-y^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 - y^2 = 0.$$

On aurait obtenu ce même résultat en chassant le radical de l'équation (1) qui serait devenue

$$1 - y^2 - (x+c)^2 = 0.$$

L'équation étant mise sous cette forme, on aurait

$$0 = \frac{\partial F}{\partial c} = 2(x+c),$$

et, en éliminant c,

$$1 - y^2 = 0.$$

440. Théorème. — *L'enveloppe est tangente en chacun de ses points à l'enveloppée correspondante.*

L'enveloppe est définie par le système des deux équations

$$F(x, y, c) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

Soient donc x_0, y_0 les coordonnées d'un de ses points, c_0 la valeur correspondante de c; on aura

$$F_0 = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial c_0} = 0,$$

en désignant, pour abréger, par F_0, $\frac{\partial F_0}{\partial c_0}$ ce que deviennent F et $\frac{\partial F}{\partial c}$ lorsqu'on y remplace x, y, c par x_0, y_0, c_0.

L'enveloppée correspondante au point (x_0, y_0) a pour équation

$$F(x, y, c_0) = 0.$$

Soit maintenant (x_1, y_1, c_1) un point de l'enveloppe infiniment voisin de c_0; on aura les équations

$$F_1 = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial c_1} = 0,$$

F_1 et $\frac{\partial F_1}{\partial c_1}$ désignant ce que deviennent F et $\frac{\partial F}{\partial c}$ pour $x = x_1$, $y = y_1$, $c = c_1$.

Pour établir qu'il y a contact entre l'enveloppe et l'enveloppée, il faut montrer que $F(x_1, y_1, c_0)$, résultat de la substitution des coordonnées x_1, y_1 dans l'équation de l'enveloppée, est au moins du second ordre par rapport à $|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$.

Or on a

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1, c_0) &= F[x_1, y_1, c_1 - (c_1 - c_0)] \\ &= F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial c_1}(c_1 - c_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial c_1^2}(c_1 - c_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Mais F_1 et $\frac{\partial F_1}{\partial c_1}$ sont nuls. Cette expression sera donc du second ordre au moins par rapport à $c_1 - c_0$.

D'autre part, posons, pour plus de clarté,

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \Phi(x, y, c);$$

on aura

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F_1}{\partial c_1} &= \Phi(x_1, y_1, c_1) \\ &= \Phi[x_0 + (x_1 - x_0), y_0 + (y_1 - y_0), c_0 + (c_1 - c_0)] \\ &= \Phi_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0}(x_1 - x_0) + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0}(y_1 - y_0) + \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_0}(c_1 - c_0) + R, \end{aligned}$$

R étant du second ordre en $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $c_1 - c_0$. Or Φ_0 est nul. Si donc $\frac{\partial \Phi_0}{\partial c_0} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial c_0^2}$ n'est pas nulle, cette équation montre que l'ordre de $c_1 - c_0$ est au moins égal à l'ordre de la plus grande des quantités $|x_1 - x_0|$, $|y_1 - y_0|$ et, par suite, à l'ordre de $|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0|$.

Cette démonstration serait en défaut si $\frac{\partial^2 F_0}{\partial c_0^2}$ était nul. Il serait aisé demontrer que, dans ce cas, (x_0, y_0) est un point de rebroussement sur la courbe enveloppe.

441. Soit maintenant $F(x, y, z, c) = 0$ une famille de surfaces contenant un paramètre c. Si l'on donne à c une suite de valeurs infiniment voisines, deux surfaces consécutives se couperont suivant une courbe. A la limite, ces courbes dessineront une surface, *enveloppe* des surfaces proposées. Proposons-nous de déterminer son équation.

Soient

$$F(x, y, z, c) = 0 \tag{2}$$

l'une des enveloppées,

$$F(x, y, z, c+dc) = F(x, y, z, c) + \frac{\partial F}{\partial c} dc + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \frac{dc^2}{1.2} + \ldots \tag{3}$$

la suivante. La courbe d'intersection sera définie par les deux équations (2) et (3), lesquelles équivalent aux suivantes :

$$F(x, y, z, c) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} \frac{dc}{1.2} + \ldots = 0.$$

A la limite, $dc = 0$, et les équations se réduisent à

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

La courbe définie par ces équations se nomme la *caractéristique*. L'enveloppe cherchée, lieu de ces caractéristiques, s'obtiendra en éliminant c entre les deux équations.

Une caractéristique coupe l'enveloppée voisine aux points définis par les trois équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0,$$

$$0 = F(x, y, c + dc) = F + \frac{\partial F}{\partial c} dc + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} dc^2 + \ldots.$$

Supprimant dans cette dernière les termes nuls F et $\frac{\partial F}{\partial c}\,dc$, divisant par $\frac{1}{2}\,dc^2$, puis faisant tendre dc vers zéro, on voit qu'à la limite les points cherchés sont donnés par le système des trois équations

$$(4)\qquad F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = 0.$$

Éliminant c entre ces trois équations, on obtiendra les équations du lieu de ces points. C'est une ligne évidemment située sur l'enveloppe et rencontrant les caractéristiques. Elle se nomme l'*arête de rebroussement*.

Ce nom est motivé par le fait aisé à établir que les sections planes de la surface enveloppe présentent un rebroussement aux points où elles rencontrent ladite arête.

442. Théorème. — *L'enveloppée est tangente à l'enveloppe tout le long de la caractéristique.*

En effet, l'enveloppe a pour équations

$$F(x, y, z, c) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

Soit (x_0, y_0, z_0, c_0) un de ses points ; on aura

$$F_0 = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial c_0} = 0.$$

L'enveloppée correspondante aura pour équation

$$F(x, y, z, c_0) = 0.$$

Soit (x_1, y_1, z_1, c_1) un point de l'enveloppe infiniment voisin de (x_0, y_0, z_0, c_0) ; on aura

$$F_1 = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial c_1} = 0,$$

et il faut prouver que $F(x_1, y_1, z_1, c_0)$ est du second ordre par rapport à $|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |z_1 - z_0|$.

Or on a

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1, z_1, c_0) &= F[x_1, y_1, z_1, c_1 - (c_1 - c_0)] \\ &= F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial c_1}(c_1 - c_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial c_1^2}(c_1 - c_0)^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial c_1^2}(c_1 - c_0)^2 + \ldots . \end{aligned}$$

Cette expression est du second ordre en $c_1 - c_0$.

D'autre part, posons, pour plus de clarté,

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \Phi(x, y, z, c);$$

on aura

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial F_1}{\partial c_1} &= \Phi(x_1, y_1, z_1, c_1) \\ &= \Phi[x_0 + (x_1 - x_0), \ldots, c_0 + (c_1 - c_0)] \\ &= \Phi_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0}(x_1 - x_0) + \ldots + \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_0}(c_1 - c_0) + R, \end{aligned}$$

Or Φ_0 est nul et R du second ordre en $x_1 - x_0, \ldots, c_1 - c_0$. Cette équation montre que, si $\frac{\partial \Phi_0}{\partial c_0} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial c_0^2}$ n'est pas nul, $c_1 - c_0$ sera au moins de l'ordre de la plus grande des quantités $|x_1 - x_0|$, $|y_1 - y_0|$, $|z_1 - z_0|$, et, par suite, au moins de l'ordre de leur somme. Donc $F(x_1, y_1, z_1, c_0)$ sera au moins d'ordre 2 par rapport à cette dernière quantité.

Cette démonstration serait en défaut si l'on avait $\frac{\partial^2 F_0}{\partial c_0^2} = 0$, auquel cas le point (x_0, y_0, z_0) appartiendrait à l'arête de rebroussement. Il serait d'ailleurs aisé de voir que cette arête est une ligne singulière sur l'enveloppe.

443. Théorème. — *L'arête de rebroussement a en chaque point un contact du second ordre avec l'enveloppée correspondante, et touche la caractéristique.*

Cette arête est définie par les équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = 0.$$

Soit (x_0, y_0, z_0, c_0) un de ses points; on aura

$$F_0 = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial c_0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_0}{\partial c_0^2} = 0.$$

L'enveloppée correspondante sera donnée par l'équation

$$F(x, y, z, c_0) = 0,$$

la caractéristique par les équations

$$F(x, y, z, c_0) = 0, \qquad \frac{\partial F(x, y, z, c_0)}{\partial c_0} = 0.$$

Soit (x_1, y_1, z_1, c_1) un point de l'arête de rebroussement infiniment voisin du précédent; on aura

$$F_1 = 0, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial c_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial c_1^2} = 0.$$

Le théorème sera évidemment démontré si nous prouvons que $F(x_1, y_1, z_1, c_0)$ est du troisième ordre, et $\dfrac{\partial F(x_1, y_1, z_1, c_0)}{\partial c_0}$ du second, par rapport à $|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| + |z_1 - z_0|$.

Or la quantité

$$\begin{aligned} F(x_1, y_1, z_1, c_0) &= F[x_1, y_1, z_1, c_1 - (c_1 - c_0)] \\ &= F_1 - \frac{\partial F_1}{\partial c_1}(c_1 - c_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial c_1^2}(c_1 - c_0)^2 + R \\ &= R \end{aligned}$$

est du troisième ordre en $c_1 - c_0$.

En second lieu, posons

$$\frac{\partial F(x, y, z, c)}{\partial c} = \Psi(x, y, z, c).$$

On aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x_1, y_1, z_1, c_0)}{\partial c_0} &= \Psi(x_1, y_1, z_1, c_0)\\ &= \Psi[x_1, y_1, z_1, c_1-(c_1-c_0)]\\ &= \Psi_1 - \frac{\partial \Psi_1}{\partial c_1}(c_1-c_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial c_1^2}(c_1-c_0)^2+\ldots,\end{aligned}$$

quantité du second ordre en $c_1 - c_0$, car on a

$$\Psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial c_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi_1}{\partial c_1} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial c_1^2} = 0.$$

Il reste à prouver que $c_1 - c_0$ est au moins de l'ordre de la plus grande des quantités $|x_1 - x_0|$, $|y_1 - y_0|$, $|z_1 - z_0|$, et, par suite, de l'ordre de leur somme. Pour l'établir, posons

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = \Phi(x, y, z, c).$$

On aura

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial c_1^2} &= \Phi(x_1, y_1, z_1, c_1)\\ &= \Phi(x_0 + x_1 - x_0, \ldots, c_0 + c_1 - c_0)\\ &= \Phi_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0}(x_1 - x_0) + \ldots + \frac{\partial \Phi_0}{\partial c_0}(c_1 - c_0) + R.\end{aligned}$$

Or $\Phi_0 = \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial c_0^2}$ est nul et R du second ordre en $x_1 - x_0, \ldots,$ $c_1 - c_0$. Cette équation montre que $c_1 - c_0$ est au moins de l'ordre de la plus grande des quantités $|x_1 - x_0|$, $|y_1 - y_0|$, $|z_1 - z_0|$, pourvu que $\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial c_0} = \dfrac{\partial^3 F_0}{\partial c_0^3}$ soit $\gtrless 0$.

Si cette quantité était nulle, la démonstration serait en défaut. Dans ce cas, (x_0, y_0, z_0) serait un point singulier sur l'arête de rebroussement.

444. Soit enfin $F(x, y, z, a, b)$ une famille de surfaces contenant deux paramètres a et b. Si l'on change a et b en

$a + da$ et $b + db$, on obtiendra une surface

$$F(x, y, z, a + da, b + db) = F + \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db + \ldots.$$

Si da et db sont infiniment petits, et quel que soit d'ailleurs leur rapport, la surface passera par le point défini par les équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

Éliminant a et b entre ces équations, on obtiendra l'équation de la surface enveloppe. On vérifiera sans peine qu'elle est tangente à l'enveloppée.

IV. — Courbes planes.

445. Considérons une courbe plane, définie par deux équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \varphi_1(t).$$

Les fonctions φ, φ_1, étant supposées développables suivant la série de Taylor, admettent une dérivée continue. La courbe est donc rectifiable, et son arc s a une dérivée égale à $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ (**111**); on aura donc

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

446. Soient P un point ordinaire pris sur la courbe; x, y, t ses coordonnées.

Tangente et normale. — L'équation générale d'une droite

$$(1) \qquad Y - aX - \alpha = 0$$

contient deux paramètres dont on pourra disposer pour faire passer la droite par le point P et établir entre elle et la courbe un contact du premier ordre.

Il faudra pour cela satisfaire aux deux équations

$$(2)\qquad 0=\Psi(t)=\varphi_1(t)-a\,\varphi(t)-\alpha=y-ax-\alpha,$$
$$(3)\qquad 0=\Psi'(t)=y'-ax'.$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$Y-y-a(X-x)=0.$$

Éliminant ensuite a entre cette équation et l'équation (3), on aura l'équation de la droite osculatrice

$$\frac{X-x}{x'}=\frac{Y-y}{y'}.$$

Cette droite se nomme la *tangente* au point P.

La perpendiculaire à la tangente, ou *normale*, aura pour équation

$$(X-x)x'+(Y-y)y'=0.$$

447. Pour appliquer cette formule (ou toute autre formule dans laquelle figureraient $x, x', x'', \ldots, y, y', y'', \ldots$) au cas où la courbe serait donnée par une seule équation

$$F(x, y)=0,$$

on n'aurait qu'à poser $x=\varphi(t)$, φ étant une fonction quelconque et t une variable auxiliaire. On aurait alors

$$x'=\varphi'(t),\qquad x''=\varphi''(t),\qquad \ldots.$$

Quant à y, ce sera une fonction implicite de t, définie par l'équation

$$F[\varphi(t), y]=0,$$

dont on pourra obtenir les dérivées par la règle connue.

Le plus simple est évidemment de poser $x=t$, d'où $x'=1$, $x''=\ldots=0$; $y', y'', \ldots$ ne seront autre chose que les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ et seront fournies par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}=0, \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\dfrac{dy^2}{dx^2}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dx^2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On aura donc la règle suivante pour transformer les formules :

Remplacer x' par l'unité, x'', x''', ... par zéro, y', y'', ... par les valeurs de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... tirées des équations (4).

Opérant cette substitution, l'équation de la tangente deviendra

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)=0,$$

et l'équation de la normale sera

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

448. *Cercle osculateur.* — L'équation d'un cercle

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2-R^2=0$$

contenant trois paramètres α, β, R, on pourra les déterminer de manière à établir un contact du second ordre au point P, entre le cercle et la courbe.

Ce contact sera exprimé par les équations

$$(5)\quad 0=\Psi(t)=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2,$$

$$(6)\quad 0=\tfrac{1}{2}\Psi'(t)=(x-\alpha)x'+(y-\beta)y',$$

$$(7)\quad 0=\tfrac{1}{2}\Psi''(t)=(x-\alpha)x''+(y-\beta)y''+x'^2+y'^2.$$

De ces deux dernières équations on tire

$$(8)\qquad x-\alpha=\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''},$$

$$(9)\qquad y-\beta=\frac{-x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''},$$

et, en substituant dans l'équation (5),

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}.$$

Le rayon R du cercle osculateur et les coordonnées α, β de son centre se trouvent ainsi déterminés.

449. Le lieu des centres des cercles osculateurs se nomme la *développée* de la courbe primitive C. Pour l'obtenir, il faudrait substituer, dans les équations (6) et (7), les valeurs de x, y, x', y', x'', y'' en fonction de t, et éliminer t entre les deux équations.

On remarquera que l'équation (6), en y regardant α, β comme des coordonnées courantes, n'est autre que l'équation de la normale à C. L'équation (7) est sa dérivée par rapport au paramètre t. *La développée est donc l'enveloppe des normales.*

450. *Courbure.* — On nomme *courbure moyenne* d'un arc le rapport de l'angle φ formé par les tangentes extrêmes à la longueur Δs de cet arc; *courbure en un point* (x, y) la limite vers laquelle tend la courbure moyenne d'un arc infiniment petit commençant en ce point.

Soient $\frac{y'}{x'}$ le coefficient angulaire de la tangente en x, y, $\frac{y'+\Delta y'}{x'+\Delta x'}$ celui de la tangente au point $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, φ l'angle de ces deux tangentes. On aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\dfrac{y'+\Delta y'}{x'+\Delta x'} - \dfrac{y'}{x'}}{1 + \dfrac{x'+\Delta x'}{y'+\Delta y'}\dfrac{y'}{x'}} = \frac{x'\,\Delta y' - y'\,\Delta x'}{(x'+\Delta x')x' + (y'+\Delta y')y'}.$$

Or on a sensiblement

$$\operatorname{tang}\varphi = \varphi,$$
$$\Delta y' = y''\,dt, \qquad \Delta x' = x''\,dt,$$
$$x'\,\Delta y' - y'\,\Delta x' = (x'y'' - y'x'')\,dt,$$
$$(x'+\Delta x')x' + (y'+\Delta y')y' = x'^2 + y'^2,$$

d'où

$$\varphi = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

aux infiniment petits près du second ordre.

On a d'ailleurs, avec la même approximation,

$$\Delta s = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

La courbure $k = \lim \frac{\varphi}{\Delta s}$ sera donc égale à $\frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Elle est, comme on le voit, égale à $\frac{1}{R}$, R étant le rayon du cercle osculateur.

Ce cercle a la même courbure que la courbe proposée. En effet, Δs désignant un arc de cercle et φ l'angle des tangentes à ses extrémités, ou, ce qui revient au même, l'angle des deux rayons menés à ses extrémités, on aura évidemment $\Delta s = R\varphi$, et la courbure $\frac{\varphi}{\Delta s}$ sera égale à $\frac{1}{R}$.

On donne souvent à ce cercle le nom de *cercle de courbure;* son centre et son rayon seront dits le *centre* et le *rayon de courbure*.

451. L'expression trouvée ci-dessus pour φ est positive ou négative, suivant le signe de la quantité

$$x'y'' - y'x'' = x'^2 \left(\frac{y'}{x'}\right)'.$$

Si cette quantité est de même signe que x', la quantité $\frac{y'}{x'}$, coefficient angulaire de la tangente, croîtra ou décroîtra en même temps que x. La courbe tournera donc sa convexité vers les y négatifs.

Ce serait l'inverse si $x'y'' - y'x''$ était de signe opposé à x'.

452. Les points où $x'y'' - y'x'' = 0$ se nomment *points d'inflexion*. La courbure y étant nulle, le cercle de courbure aura son rayon infini, et se confondra avec la tangente.

La tangente T *en un point d'inflexion se confondra avec la tangente* T' *en un point infiniment voisin aux infiniment petits près d'ordre supérieur au premier*. Car, en bornant l'approximation au premier ordre, l'angle φ de

ces deux droites est nul; en outre, le point de contact de T′ est sur la tangente T.

453. Les formules précédentes se simplifient si x est pris pour variable indépendante, auquel cas il faudra poser $x' = 1$, $x'' = 0$.

Il viendra dans ce cas, pour la différentielle de l'arc,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx;$$

pour l'équation de la tangente,

$$Y - y = y'(X - x);$$

pour la courbure,

$$c = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et, pour l'équation des points d'inflexion,

$$y'' = 0.$$

454. Il est souvent préférable, pour ne pas détruire la symétrie entre les deux coordonnées, de prendre comme variable indépendante l'arc s de la courbe.

Dans ce cas, la formule

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

où l'on pose $t = s$, montre qu'on a l'identité

$$x'^2 + y'^2 = 1, \tag{10}$$

dont la dérivation donne

$$x'x'' + y'y'' = 0, \tag{11}$$

$$x''^2 + y''^2 + x'x''' + y'y''' = 0. \tag{12}$$

La formule de la courbure devient

$$k = x'y'' - y'x''. \tag{13}$$

Des équations (11) et (13) on déduit

$$x'' = -ky', \qquad y'' = kx',$$

puis

$$x''^2 + y''^2 = k^2 = -x'x''' - y'y''', \tag{14}$$

et enfin

$$k^3 = -kx'x''' - ky'y''' = x''y''' - y''x'''. \tag{15}$$

On donne le nom d'*équation intrinsèque de la courbe* à la relation

$$k = \varphi(s)$$

qui existe entre la courbure k et l'arc s.

Une semblable équation définit complètement la forme de la courbe, sans déterminer sa situation dans le plan.

Les coordonnées x, y d'un point de la courbe s'obtiendront en effet en intégrant les équations différentielles

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$
$$x'y'' - y'x'' = \varphi(s).$$

On satisfait à la première en posant

$$x' = \cos u, \qquad y' = \sin u,$$

u désignant une nouvelle variable.

Il vient ensuite

$$x'' = -u'\sin u, \qquad y'' = u'\cos u,$$
$$x'y'' - y'x'' = u' = \varphi(s),$$
$$u = \Phi(s) + c,$$

$\Phi(s)$ désignant l'une des fonctions primitives de $\varphi(s)$.

Il vient ensuite

$$x' = \cos(\Phi s + c), \qquad y' = \sin(\Phi s + c),$$

$$x = \int_0^s \cos(\Phi s + c)\,ds + x_0,$$

$$y = \int_0^s \sin(\Phi s + c)\,ds + y_0$$

ou

$$x = \cos c \int_0^s \cos\Phi s\, ds - \sin c \int_0^s \sin\Phi s\, ds + x_0,$$

$$y = \sin c \int_0^s \cos\Phi s\, ds + \cos c \int_0^s \sin\Phi s\, ds + y_0.$$

Ces équations définissent une famille de courbes dépendant des trois paramètres c, x_0, y_0.

Mais toutes ces courbes sont superposables; car il suffit de changer l'origine et la direction des axes pour ramener les équations précédentes à la forme

$$x = \int_0^s \cos\Phi s\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\Phi s\, ds.$$

455. Proposons-nous d'appliquer les formules qui précèdent à quelques courbes simples.

Parabole. — On aura

$$y^2 = 2px,$$

d'où, en prenant x pour variable indépendante,

$$yy' = p, \qquad y' = \frac{p}{y},$$

$$yy'' + y'^2 = 0, \qquad y'' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Différentielle de l'arc :

$$ds = \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\, dx = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx.$$

Équation de la tangente :

$$Y - y = \frac{p}{y}(X - x).$$

Rayon de courbure :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-p^2}{y^3}} = -\frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Développée : les formules (8) et (9) donnent

$$\alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{p}{y}\,\frac{(p^2+y^2)y}{-p^2}$$
$$= x + \frac{p^2+y^2}{p} = 3x + p$$

$$\beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{(p^2+y^2)y}{-p^2} = -\frac{y^3}{p^2}.$$

On en déduit

$$x = \frac{\alpha - p}{3}, \qquad y^3 = -p^2\beta.$$

Mais l'équation $y^2 = 2px$ donne

$$y^6 = 8p^3x^3.$$

Substituant dans cette équation les valeurs de x et y^3, il vient

$$p\beta^2 = \frac{8}{27}(\alpha - p)^3.$$

456. *Ellipse.* — On a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

équation qui équivaut aux deux suivantes :

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

On déduit de celles-ci

$$x' = -a\sin t, \qquad y' = b\cos t,$$
$$x'' = -a\cos t, \qquad y'' = -b\sin t,$$

puis

$$x'^2 + y'^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t,$$
$$x'y'' - y'x'' = ab.$$

On aura donc, pour la différentielle de l'arc,

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt;$$

pour l'équation de la tangente,

$$\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - b\sin t}{b\cos t};$$

pour le rayon de courbure,

$$R = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab};$$

et, pour les coordonnées du centre de courbure,

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t$$

(en remplaçant $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$),

$$\beta = b\sin t - \frac{a\sin t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab} = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t$$

(en remplaçant $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$).

On en déduit

$$(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}\cos t = (a\alpha)^{\frac{1}{3}},$$

$$-(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}\sin t = (b\beta)^{\frac{1}{3}}.$$

Élevant au carré et ajoutant, on aura l'équation de la développée

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

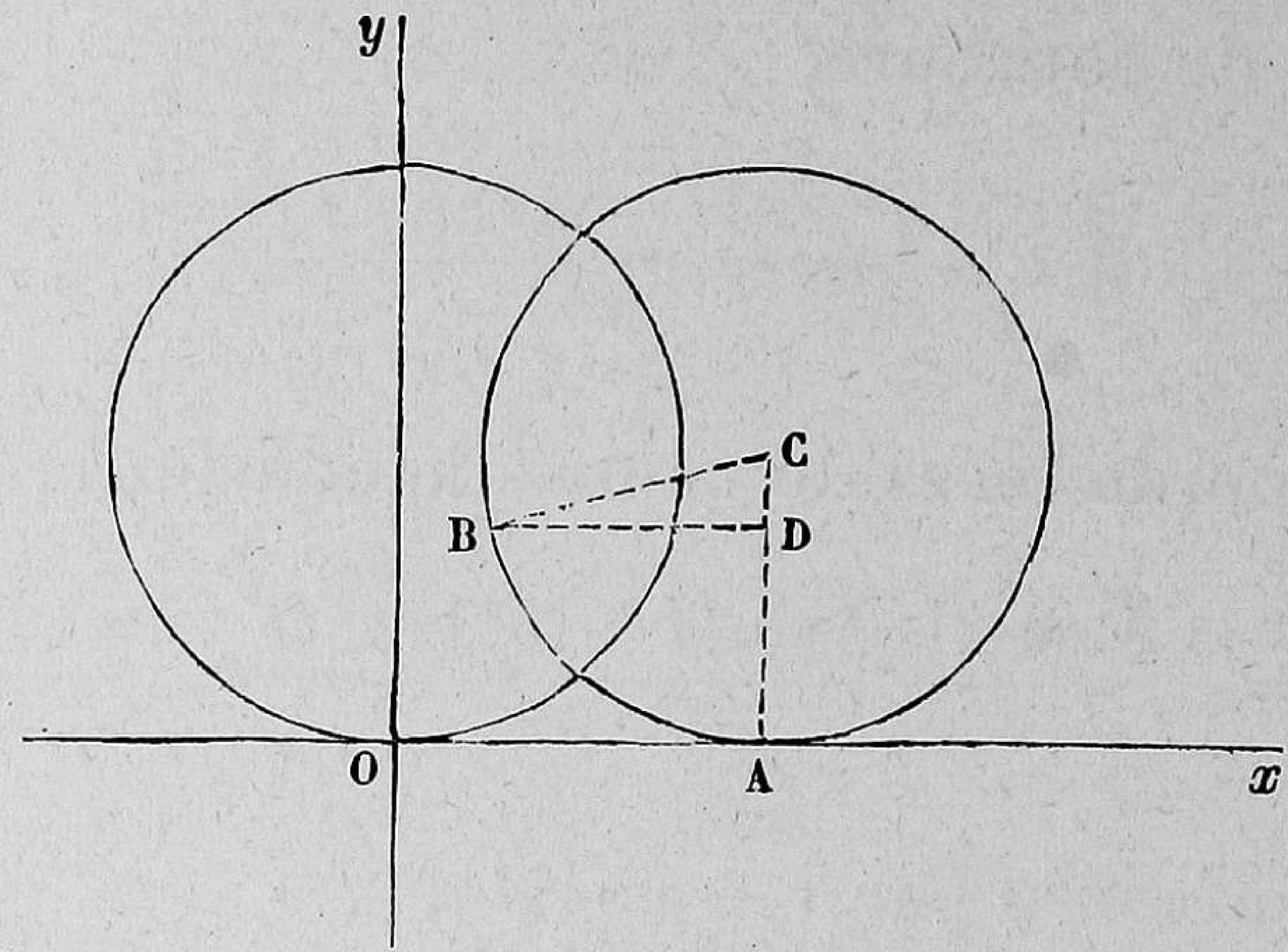
457. *Cycloïde*. — On donne ce nom à la courbe engendrée par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite fixe.

Pour obtenir les équations de cette courbe, prenons pour axe des x la droite fixe et pour axe des y la perpendiculaire menée par le point décrivant au moment où il se trouve sur l'axe des x.

Considérons une seconde position du cercle générateur. Soit OA (*fig.* 14) la quantité dont le point de contact s'est déplacé sur la droite OX. D'après la définition du roulement, il devra s'être déplacé de la même quantité sur le cercle. Le

point qui décrit la cycloïde se trouvera donc dans une position B, telle qu'on ait AB = AO.

Fig. 14.



Cela posé, soient a le rayon du cercle, t l'angle ACB, que nous considérons comme variable indépendante. On aura

$$\begin{aligned} AO &= AB = at, \\ x &= OA - BD = at - a\sin t, \\ y &= AC - CD = a - a\cos t. \end{aligned}$$

On déduit de ces équations

$$\begin{aligned} x' &= a(1-\cos t), \qquad & y' &= a\sin t, \\ x'' &= a\sin t, & y'' &= a\cos t, \end{aligned}$$

$$x'^2 + y'^2 = 2a^2(1-\cos t),$$

$$x'y'' - y'x'' = -a^2(1-\cos t).$$

La différentielle de l'arc sera donc

$$a\sqrt{2-2\cos t}\,dt.$$

La tangente aura pour équation

$$\frac{X-x}{a(1-\cos t)} = \frac{Y-y}{a\sin t}.$$

La normale aura pour équation

$$(X-x)(1-\cos t) + (Y-y)\sin t = 0.$$

Le point où elle coupe l'axe des x s'obtiendra en faisant $Y = 0$ dans cette équation. On trouvera

$$X = x + \frac{y \sin t}{1 - \cos t} = a(t - \sin t) + a \sin t = at.$$

La normale passe donc par le point A, où le cercle générateur touche l'axe des x.

La distance N de ce point au point B, qu'on nomme la *longueur de la normale,* sera donnée par l'expression

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{(X - x)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2(1 - \cos t)^2} = a\sqrt{2 - 2\cos t}. \end{aligned}$$

Le rayon de courbure sera égal à

$$\frac{[2a^2(1 - \cos t)]^{\frac{3}{2}}}{-a^2(1 - \cos t)} = -2a\sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Il est donc double de la normale en grandeur absolue.

Les coordonnées du centre de courbure seront

$$\begin{aligned} \alpha &= a(t - \sin t) + 2a \sin t = a(t + \sin t), \\ \beta &= a(1 - \cos t) - 2a(1 - \cos t) = -a(1 - \cos t). \end{aligned}$$

Posons, dans ces équations, $t = \pi + t_1$; elles deviendront

$$\begin{aligned} \alpha &= \quad a\pi + a(t_1 - \sin t_1), \\ \beta &= -2a + a(1 \ - \cos t_1), \end{aligned}$$

et l'on voit qu'elles représentent une cycloïde égale à la proposée, mais déplacée de $a\pi$ dans le sens des x et de $-2a$ dans le sens des y.

V. — Géométrie infinitésimale.

458. Soient $h, k, \ldots$ des infiniment petits connus, α, β des quantités qui leur soient liées par des équations

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \ldots, h, k, \ldots) &= 0, \\ \varphi(\alpha, \beta, \ldots, h, k, \ldots) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \end{aligned}$$

Supposons qu'on veuille déterminer α, β, ... aux infiniment petits près d'ordre n; il est clair qu'on pourra supprimer *a priori* dans les expressions de h, k, ... à porter dans les équations $f = 0$, $\varphi = 0$ tous les termes dont la présence n'altérerait α, β, ... que d'un infiniment petit d'ordre $\geqq n$. On verra aisément dans chaque cas, avec un peu d'attention, ce qui est négligeable et ce qui ne l'est pas.

Dans les applications géométriques du Calcul différentiel, les infiniment petits α, β, ..., h, k, ... qu'il s'agit de calculer en fonction les uns des autres sont rattachés ensemble par une figure de laquelle on déduit les équations

$$f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \ldots$$

qui les lient.

Au lieu d'établir les équations exactes et d'y négliger ensuite certaines quantités, il est souvent plus simple de considérer, au lieu de la figure rigoureuse, la figure approchée qui s'en déduirait en négligeant ces quantités; de cette nouvelle figure on tirera les équations approchées.

Pour que ce procédé soit légitime, il faut évidemment qu'on soit en mesure d'établir que les changements de la figure n'altèrent le résultat à obtenir que d'une quantité négligeable eu égard à l'approximation qu'on demande. La nécessité de cette discussion diminue notablement les avantages que présente souvent la méthode géométrique au point de vue de la simplicité et de l'évidence.

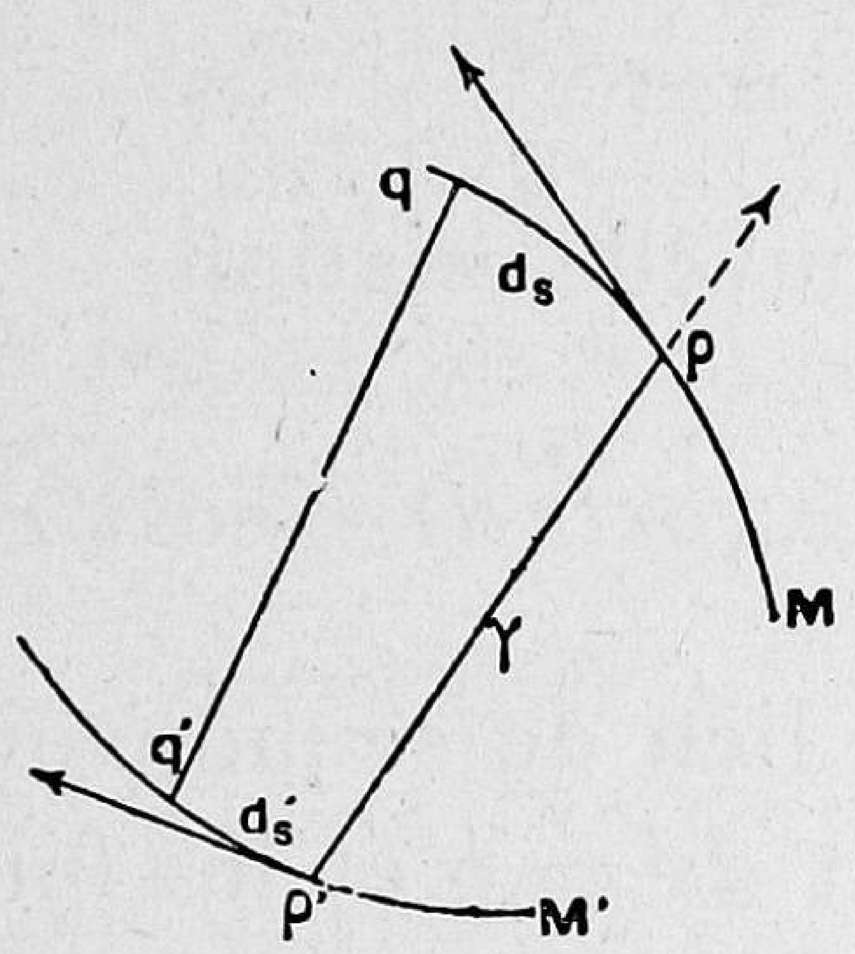
Les exemples suivants éclairciront ces considérations générales.

459. Soient P, P′ deux points pris respectivement sur deux courbes C, C′; r la longueur du segment de droite qui les joint; $\widehat{rx}$, $\widehat{tx}$, $\widehat{t'x}$ les angles que la demi-droite P′P et les tangentes Pt, P′t' forment respectivement avec la direction des x positifs; $\widehat{tr} = \widehat{tx} - \widehat{rx}$ et $\widehat{t'r} = \widehat{t'x} - \widehat{r'x}$ ceux que les tangentes forment avec la droite r; enfin s, s' les arcs comp-

tés respectivement sur les courbes C et C′ à partir des points M, M′, origines des arcs, jusqu'aux points P, P′. La longueur r et l'angle $\widehat{rx}$ seront des fonctions de s, s'; cherchons leur différentielle totale.

Projetons le quadrilatère curviligne P′PQQ′P′ sur une droite quelconque; la somme des projections sera nulle.

Fig. 15.



Opérons une première projection sur une droite D perpendiculaire à r. La projection de P′P sera nulle.

Celle de PQ est égale au produit de la longueur de sa corde (laquelle a pour valeur principale ds) par le sinus de l'angle qu'elle forme avec r, lequel est sensiblement égal à $\widehat{tr}$. La projection de PQ a donc pour valeur principale $\sin \widehat{tr}\, ds$.

Celle de QQ′ sera égale à $(r + \Delta r)\sin(\pi + \Delta\widehat{rx})$. La valeur principale est $-r\, d\widehat{rx}$.

Enfin, celle de Q′P′ a pour valeur principale

$$-\sin \widehat{t'r}\, ds'.$$

On aura donc cette première relation

$$r\, d\widehat{rx} = \sin \widehat{tr}\, ds - \sin \widehat{t'r}\, ds'. \tag{1}$$

Projetons maintenant la figure sur la droite r.

La projection de P′P sera r.

Celle de PQ sera sensiblement égale à $\cos \widehat{tr}\, ds$.

Celle de QQ′ sera $-(r+\Delta r)\cos \Delta\widehat{rx}$, ou $-(r+dr)$ en négligeant les infiniment petits du second ordre par rapport à ds, ds'; car, $\Delta\widehat{rx}$ étant du premier ordre d'après la formule précédente, $1-\cos\Delta\widehat{rx}$ sera du second ordre.

Enfin, la projection de Q′P′ a pour valeur principale $-\cos \widehat{t'r}\, ds'$.

On a donc cette nouvelle relation

$$dr = \cos \widehat{tr}\, ds - \cos \widehat{t'r}\, ds'. \tag{2}$$

Si le point P′, au lieu de se mouvoir sur une courbe C′, restait fixe, on aurait $ds' = 0$ et les formules deviendraient

$$r\, d\widehat{rx} = \sin \widehat{tr}\, ds, \tag{3}$$

$$dr = \cos \widehat{tr}\, ds. \tag{4}$$

Ces formules donnent lieu à des applications très nombreuses.

460. 1° Soit $r = f(\varphi)$ l'équation d'une courbe en coordonnées polaires. On demande l'expression de la différentielle de l'arc de cette courbe et la direction de sa tangente.

On aura ici $\widehat{rx} = \varphi$ et l'on déduit des équations (3) et (4)

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\varphi^2,$$

$$\operatorname{tang} \widehat{tr} = r\frac{d\varphi}{dr}.$$

461. 2° La courbe C étant supposée quelconque, portons sur ses diverses normales une longueur constante r. Le lieu de leurs extrémités sera une courbe C′, *parallèle* à C.

Appliquons la formule (2). Par hypothèse, dr et $\cos\widehat{tr}$ sont nuls; on en déduit $\cos\widehat{t'r} = 0$.

Donc *deux courbes parallèles ont les mêmes normales.*

462. 3° Soient encore C une courbe quelconque, C′ sa développée; r la normale à C; elle sera tangente à C′; on aura donc dans la formule (2)

$$\widehat{tr} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \widehat{t'r} = 0 \quad \text{ou} \quad \pi,$$

suivant le sens dans lequel les arcs sont comptés sur la courbe C′. La formule se réduit à

$$dr = \pm\, ds',$$

et en intégrant de s'_0 à s'_1 il viendra

$$r_1 - r_0 = \pm(s'_1 - s'_0).$$

Donc *un arc de la développée est égal à la différence entre les longueurs des tangentes à ses extrémités, arrêtées à la développante.*

463. 4° Considérons deux ellipses homofocales C, C′. Par un point M de C, menons deux tangentes

$$MA_1 = r_1, \qquad MA_2 = r_2$$

à la courbe C′. Elles seront également inclinées sur la tangente à C. On aura donc

$$\cos\widehat{tr_1} + \cos\widehat{tr_2} = 0.$$

On en conclut que la différence entre l'arc A_1A_2 et la somme des deux tangentes $r_1 + r_2$ a une valeur constante.

Soient en effet s'_1, s'_2 les valeurs de l'arc s' aux points A_1, A_2; on aura

$$\text{arc}\, A_1A_2 = s'_2 - s'_1.$$

Déplaçons infiniment peu le point M; r_1, r_2, A_1A_2 subiront des variations

$$dr_1, \quad dr_2, \quad ds'_2 - ds'_1.$$

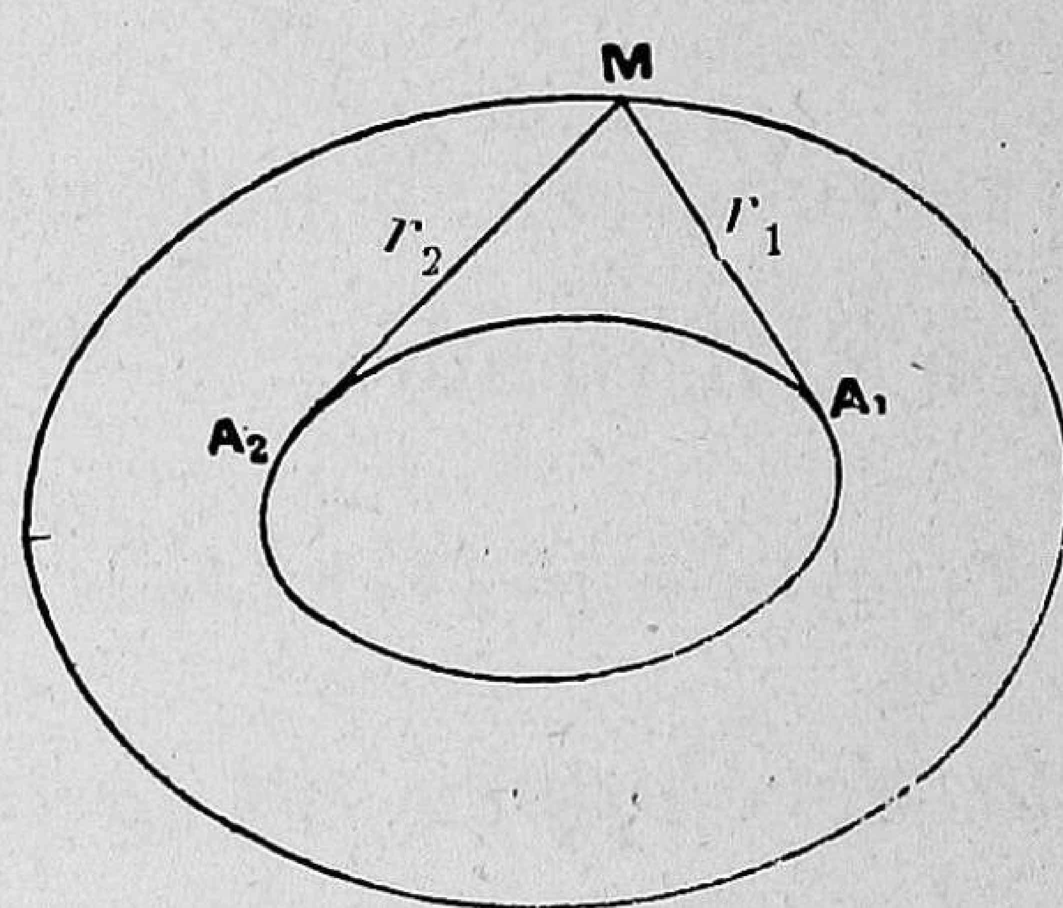
Or on a, d'après la formule (2),

$$dr_1 = \cos \widehat{tr_1}\, ds - ds'_1,$$

$$dr_2 = \cos \widehat{tr_2}\, ds + ds'_2,$$

l'angle $\widehat{t'r_1}$ étant nul et l'angle $\widehat{t'r_2}$ égal à π.

Fig. 16.



Ajoutant ces équations, il vient

$$dr_1 + dr_2 = ds'_2 - ds'_1 = d\,A_1A_2,$$

d'où

$$r_1 + r_2 = A_1A_2 + \text{const.}$$

464. 5° Soient $r_1, \ldots, r_n$ les distances d'un point M à n points fixes $F_1, \ldots, F_n$. Si on les assujettit à une relation

$$\varphi(r_1, \ldots, r_n) = 0,$$

le point M décrira une courbe C. Cherchons à déterminer sa tangente.

On déduit de la relation donnée

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_1} dr_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial r_n} dr_n = 0.$$

Mais, d'autre part, si M se déplace sur la courbe C, on aura, d'après l'équation (4),

$$dr_1 = \cos \widehat{tr_1}\, ds, \qquad \ldots, \qquad dr_n = \cos \widehat{tr_n}\, ds,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial \varphi}{dr_1} \cos \widehat{tr_1} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial r_n} \cos \widehat{tr_n} = 0.$$

Si donc sur chaque rayon vecteur r_i on porte une longueur $\frac{\partial \varphi}{\partial r_i}$, la projection de leur résultante sur la tangente cherchée sera nulle. Cette résultante est donc dirigée suivant la normale.

465. 6° Soient M un point d'une ellipse; r_1, r_2 les deux rayons vecteurs menés des foyers F_1, F_2 à M; $\widehat{r_1 x}$, $\widehat{r_2 x}$, $\widehat{tx}$ les angles que ces rayons vecteurs et la tangente forment avec l'axe des x. Cherchons le rayon de courbure R au point M.

On a, comme on sait,

$$\frac{1}{R} = \frac{d\widehat{tx}}{ds}.$$

D'ailleurs

$$\widehat{tx} = \widehat{tr_1} + \widehat{r_1 x} = \widehat{tr_2} + \widehat{r_2 x}.$$

Enfin, les rayons vecteurs ayant pour bissectrice la normale

$$\widehat{tr_1} + \widehat{tr_2} = \pi.$$

Donc

$$2\widehat{tx} = \pi + \widehat{r_1 x} + \widehat{r_2 x},$$

$$d\widehat{tx} = \frac{d\widehat{r_1 x} + d\widehat{r_2 x}}{2}.$$

Or la formule (3) donne

$$r_1\, d\widehat{r_1 x} = \sin \widehat{tr_1}\, ds,$$

$$r_2\, d\widehat{r_2 x} = \sin \widehat{tr_2}\, ds$$

et

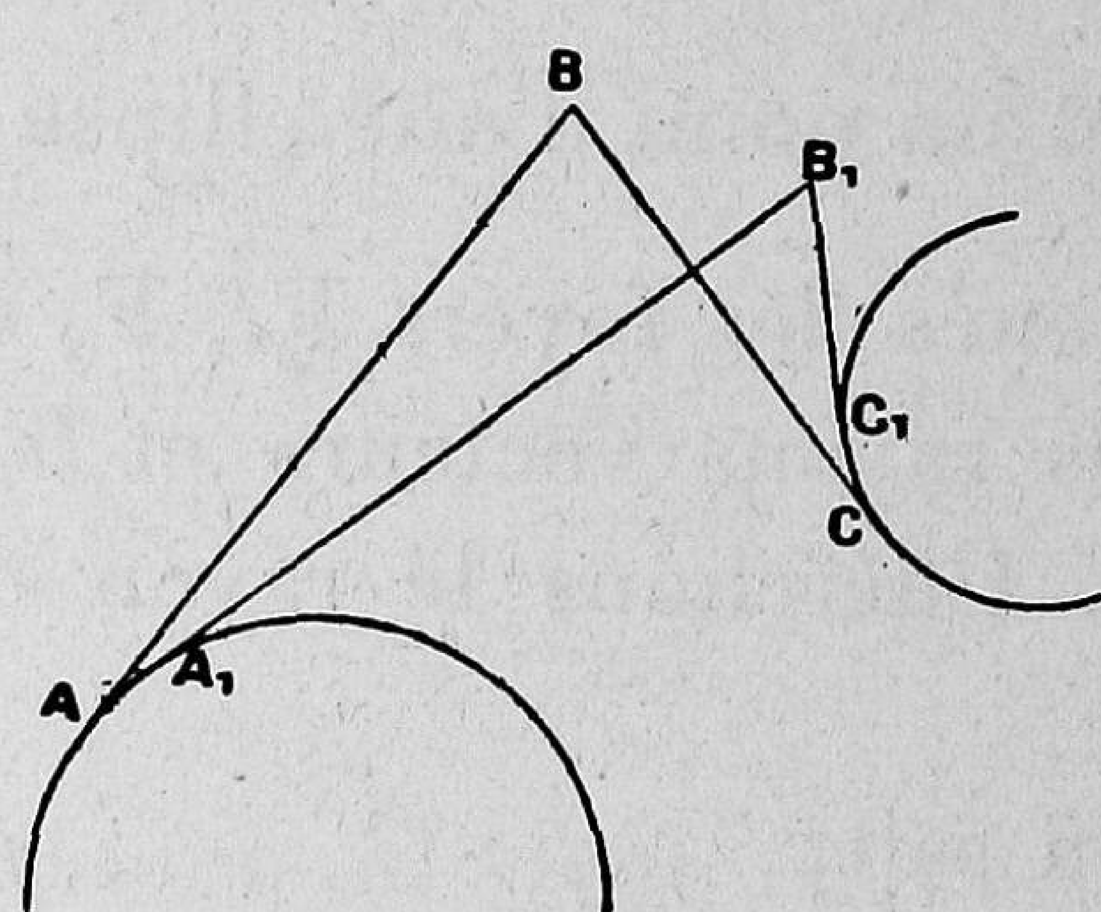
$$\sin \widehat{tr_1} = \sin \widehat{tr_2}.$$

On aura donc

$$\frac{2}{R} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \sin \widehat{tr_1}.$$

466. Soit à construire la tangente à la courbe K lieu des sommets d'un angle φ de grandeur constante dont les côtés restent tangents à deux courbes données.

Fig. 17.



Soient ABC, $A_1B_1C_1$ deux positions voisines de cet angle. Il s'agit de déterminer la direction limite de la droite BB_1.

L'angle des deux droites AB, A_1B_1 est égal à celui des droites BC, B_1C_1. Si nous le considérons comme du premier ordre, les arcs AA_1, CC_1 seront du même ordre et BB_1 également.

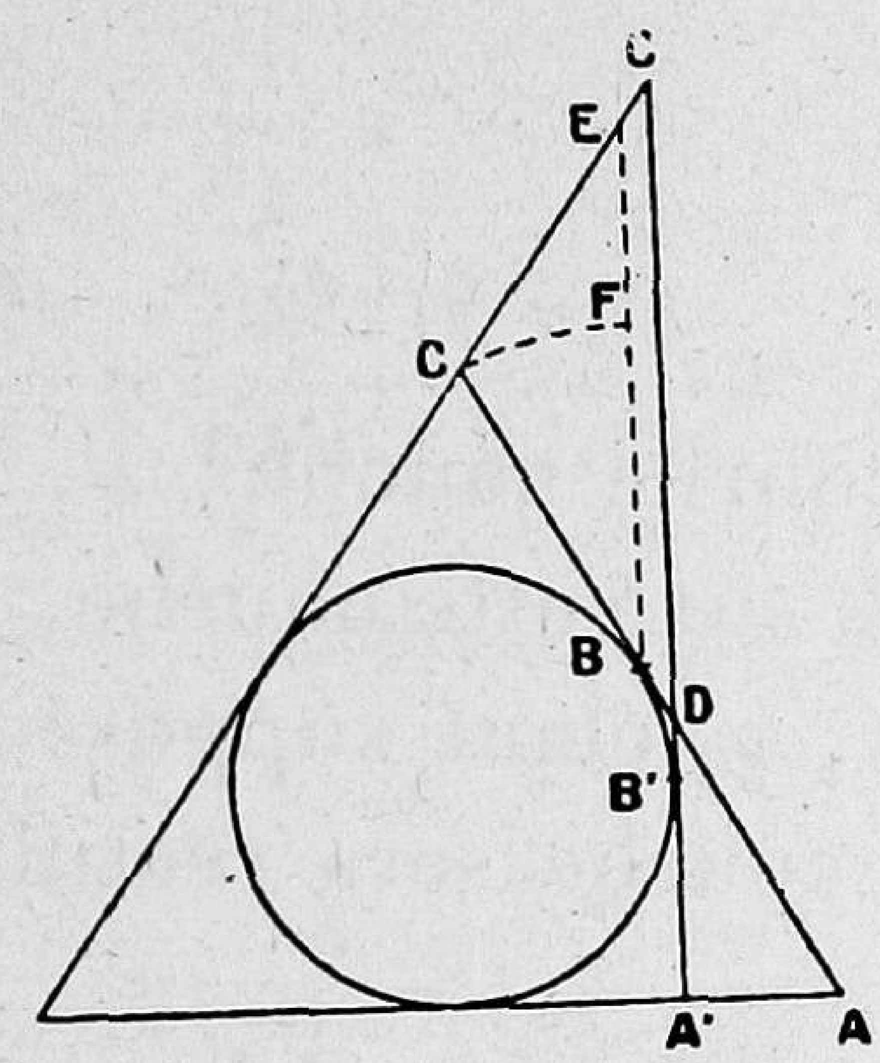
Au contraire, la distance de A à la tangente A_1B_1 et celle de C à B_1C_1 seront du second ordre. Si donc par A et C on menait des parallèles à A_1B_1 et à B_1C_1, leur point d'intersection β serait à une distance du second ordre de B_1 et, par suite, infiniment petit par rapport à BB_1. La direction limite de BB_1 sera donc la même que celle de $B\beta$. Mais $B\beta$ est une

corde infiniment petite du cercle lieu des points d'où l'on voit AC sous l'angle φ. La tangente à ce cercle donnera donc la direction cherchée.

467. Soit à circonscrire à une courbe donnée un triangle d'aire minimum.

Supposons le problème résolu. Soit ABC un des côtés du

Fig. 18.



triangle. Déplaçons-le d'un angle $d\varphi$ de manière qu'il vienne en A′B′C′ et soit encore tangent à la courbe donnée en B′.

L'aire S du triangle aura subi un accroissement

$$\Delta S = DCC' - DAA',$$

dont la partie principale dS doit être nulle pour qu'il y ait minimum.

Si $d\varphi$ est du premier ordre, il en sera de même de BB′. La distance de B à la tangente A′B′C′ sera du second.

Par le point B menons une parallèle BE à A′B′, et, du même point comme centre, décrivons un cercle CF de rayon BC. L'aire du secteur BCF sera $\frac{1}{2}\text{BC}\,d\varphi$. Celle de BDC′E et de CEF seront évidemment d'un ordre plus élevé. Donc la valeur principale de DCC′ sera $\frac{1}{2}\text{BC}\,d\varphi$.

On voit de même que celle de DAA′ sera $\frac{1}{2}\text{BA}\,d\varphi$.

Pour que dS soit nulle, il faudra donc qu'on ait

$$BC = BA.$$

Donc, pour qu'il y ait minimum, il faut que les points de contact du triangle avec la courbe soient situés au milieu de ses côtés.

VI. — Courbes gauches et surfaces développables.

468. Soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \varphi_1(t), \qquad z = \varphi_2(t)$$

les équations d'une courbe gauche ; x, y, z, t les coordonnées d'un point P pris sur cette courbe.

Les fonctions φ, φ_1, φ_2 étant supposées développables par la série de Taylor, la courbe sera rectifiable et son arc aura pour différentielle

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

469. *Tangente et plan normal.* — Les équations d'une droite

$$(1) \qquad Y - aX - \alpha = 0, \qquad Z - a_1 X - \alpha_1 = 0$$

contiennent quatre paramètres dont on pourra disposer pour établir un contact du premier ordre au point P entre la droite et la courbe.

Il faudra pour cela satisfaire aux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} y - ax - \alpha = 0, & z - a_1 x - \alpha_1 = 0, \\ y' - ax' = 0, & z' - a_1 x' = 0. \end{cases}$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$Y - y - a(X - x) = 0, \qquad Z - z - a_1(X - x) = 0,$$

et, en éliminant a, a_1, on aura les équations de la droite osculatrice ou *tangente*

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}.$$

Le plan perpendiculaire à la tangente, ou *plan normal,* aura pour équation

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0.$$

Si la courbe était donnée par deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$

il faudrait, pour appliquer ces formules, y remplacer x' par l'unité, y' et z' par leurs valeurs déduites des équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} z' = 0.$$

Par cette substitution, les équations de la tangente deviendront

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial z}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x}},$$

et celle du plan normal prendra la forme

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

470. *Plan osculateur.* — L'équation

$$AX + BY + CZ + D = 0 \tag{3}$$

contient trois paramètres (les rapports des coefficients A, B, C, D) dont on peut disposer pour établir entre le point et la courbe un contact du second ordre. Cette condition sera exprimée par les équations

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4}$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \tag{5}$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0. \tag{6}$$

Des équations (3) et (4) on déduit d'abord

$$(7)\qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Éliminant ensuite A, B, C entre (5), (6), (7), il viendra

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Les coefficients A, B, C auront donc, à un facteur commun près, qu'on peut supposer égal à l'unité, les valeurs suivantes :

$$A=y'z''-z'y'',\qquad B=z'x''-x'z'',\qquad C=x'y''-y'x''.$$

Ces coefficients satisfont identiquement aux équations (5) et (6), ainsi qu'à celle-ci :

$$(8)\qquad A'x'+B'y'+C'z'=0,$$

laquelle s'obtient en prenant la dérivée de (5) et supprimant les termes qui se détruisent en vertu de (6).

471. L'équation ci-dessus du plan osculateur contient le paramètre t, variable d'un point à l'autre de la courbe. Considérons la surface enveloppe de ce plan, lorsqu'on fait varier ce paramètre.

La caractéristique de cette surface sera donnée par l'équation

$$(9)\qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

jointe à sa dérivée par rapport à t

$$A'(X-x)+B'(Y-y)+C'(Z-z)-Ax'-By'-Cz'=0.$$

Cette dernière équation se réduit à

$$(10)\qquad A'(X-x)+B'(Y-y)+C'(Z-z)=0,$$

en vertu de l'équation (5).

Cette caractéristique n'est autre chose que la tangente

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$$

au point (x, y, z). En effet, si l'on donne à $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ des valeurs proportionnelles à x', y', z', les équations (9) et (10) seront identiquement satisfaites, leurs premiers membres contenant en facteur les quantités $Ax'+By'+Cz'$ et $A'x'+B'y'+C'z'$.

Le point où la caractéristique rencontre l'arête de rebroussement est défini par les équations (9) et (10), jointes à la dérivée de l'équation (10). Cette dérivée se réduit à

$$(11) \qquad A''(X-x)+B''(Y-y)+C''(Z-z)=0,$$

en tenant compte de l'équation (8).

Les équations (9), (10), (11), combinées entre elles, donneront évidemment

$$X=x, \qquad Y=y, \qquad Z=z.$$

Donc *la surface enveloppe des plans osculateurs a pour caractéristiques les tangentes à la courbe proposée et pour arête de rebroussement cette courbe elle-même.*

Réciproquement, soit donné un système quelconque de plans P dont l'équation contienne un paramètre t. En faisant varier ce paramètre, on obtiendra une surface enveloppe dont les caractéristiques seront des lignes droites, tangentes à l'arête de rebroussement, et le plan P, ayant un contact du second ordre avec cette arête de rebroussement, lui sera osculateur.

On donne le nom de *surfaces développables* aux surfaces engendrées par les tangentes à une courbe, ou enveloppes d'un plan variable dont l'équation ne contient qu'un paramètre. Ces deux définitions sont en général équivalentes, comme on vient de le voir.

Toutefois, la seconde a sur la première l'avantage d'embrasser les surfaces *coniques* et *cylindriques*.

On obtient les surfaces coniques en supposant que le plan variable soit assujetti à passer constamment par un point fixe, qui sera le sommet du cône. Ce point unique jouera le rôle dévolu en général à l'arête de rebroussement.

On obtiendra les cylindres en supposant que le plan variable reste constamment parallèle à une droite fixe. Les génératrices caractéristiques, étant parallèles à cette droite, ne se couperont pas. La surface pourra être considérée comme la limite d'un cône dont le sommet s'éloigne à l'infini dans une direction déterminée.

472. *Enveloppe des plans normaux.* — Le plan normal au point (x, y, z) a pour équation

$$N = x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0.$$

Cette équation contient le paramètre t. En le faisant varier, on obtiendra pour enveloppe une surface développable.

La caractéristique de cette surface est une droite qu'on nomme l'*axe du plan osculateur*. Elle a pour équations

$$N = 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = x''(X - x) + y''(Y - y) + z''(Z - z) - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0.$$

Elle est perpendiculaire au plan osculateur, car les équations

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0,$$

trouvées plus haut, montrent que chacun des deux plans $N = 0$, $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$ est perpendiculaire au plan osculateur.

Enfin l'arête de rebroussement de cette surface sera donnée par les équations

$$N = 0, \qquad \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = 0.$$

473. *Cercle osculateur.* — Les équations générales d'un

cercle sont

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2=R^2,$$
$$m(X-\alpha)+n(Y-\beta)+p(Z-\gamma)=0,$$

α, β, γ étant les coordonnées de son centre et R son rayon.

Nous avons ici six paramètres : α, β, γ, R, $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, qu'on pourra déterminer de manière à obtenir un contact du second ordre au point (x, y, z).

On aura, à cet effet, les six équations de condition

$$(12)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0,$$
$$(13)\qquad x'(x-\alpha)+y'(y-\beta)+z'(z-\gamma)=0,$$
$$(14)\qquad x''(x-\alpha)+y''(y-\beta)+z''(z-\gamma)+x'^2+y'^2+z'^2=0,$$
$$m(x-\alpha)+n(y-\beta)+p(z-\gamma)=0,$$
$$mx'+ny'+pz'=0,$$
$$mx''+ny''+pz''=0.$$

Des trois dernières on déduit, en éliminant m, n, p,

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0,$$

ou

$$(15)\qquad A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0.$$

Cette équation montre que le point (α, β, γ) est dans le plan osculateur.

La deuxième et la troisième montrent que ce point se trouve dans les deux plans $N=0$, $\frac{\partial N}{\partial t}=0$, dont l'intersection est l'axe du plan osculateur. *Le centre cherché se trouve donc à l'intersection de cet axe avec le plan osculateur.*

Pour calculer α, β, γ, R, nous résoudrons les équations (13), (14) et (15) par rapport à $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

de ces équations étant égal à $A^2+B^2+C^2$, on trouvera

$$x-\alpha=\frac{(Cy'-Bz')(x'^2+y'^2+z'^2)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$y-\beta=\frac{(Az'-Cx')(x'^2+y'^2+z'^2)}{A^2+B^2+C^2},$$

$$z-\gamma=\frac{(Bx'-Ay')(x'^2+y'^2+z'^2)}{A^2+B^2+C^2},$$

et, en substituant dans (12),

$$R^2=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}{(A^2+B^2+C^2)^2}\times[(Cy'-Bz')^2+(Az'-Cx')^2+(Bx'-Ay')^2].$$

Or la quantité entre parenthèses peut s'écrire

$$(A^2+B^2+C^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(Ax'+By'+Cz')^2,$$

et, comme

$$Ax'+By'+Cz'=0,$$

il viendra

$$R=\frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

474. *Sphère osculatrice.* — L'équation d'une sphère

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=\rho^2$$

contenant quatre paramètres, on pourra obtenir un contact du troisième ordre.

On devra, pour cela, satisfaire aux équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=\rho^2,$$

$$M=x'(x-a)+y'(y-b)+z'(z-c)=0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2}=0,$$

dont la première donnera ρ^2, après que les trois autres auront fourni a, b, c.

Le lieu des centres des sphères osculatrices n'est autre chose que l'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans normaux. Car ce lieu s'obtiendrait en éliminant t entre les équations $M = 0$, $\frac{\partial M}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = 0$, et l'arête de rebroussement en éliminant t entre les équations $N = 0$, $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = 0$. Or M ne diffère de N que par le signe et par la désignation des coordonnées courantes (a, b, c, au lieu de X, Y, Z).

Nous admettrons, pour simplifier le calcul de a, b, c, ρ, que nous ayons choisi pour variable indépendante l'arc s de la courbe, compté à partir d'un point fixe. On aura, dans cette hypothèse, $t = s$, d'où

$$dt = ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

et, par suite,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \tag{16}$$

Prenant la dérivée de cette équation, on aura la suivante :

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0.$$

Formons les dérivées de M en tenant compte de ces relations. Il viendra

$$\begin{aligned}
0 &= M = (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z', \\
0 &= \frac{\partial M}{\partial t} = (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' + 1, \\
0 &= \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = (x-a)x''' + (y-b)y''' + (z-c)z'''.
\end{aligned}$$

En désignant par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

on déduira de ces équations

$$x - a = \frac{y' z''' - z' y'''}{D} = \frac{A'}{D},$$

$$a = x - \frac{A'}{D}.$$

On aura de même

$$b = y - \frac{B'}{D},$$

$$c = z - \frac{C'}{D},$$

et enfin

$$\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = \frac{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}{D}.$$

On peut donner à cette valeur de ρ une autre expression. Le point (a, b, c) étant sur l'axe du plan osculateur, qui coupe ce plan au centre du cercle osculateur, ρ sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés R et la distance h du point (a, b, c) au plan osculateur.

Or, le plan osculateur ayant pour équation

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

on aura

$$h = \frac{A(a - x) + B(b - y) + C(c - z)}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{1}{D}\,\frac{AA' + BB' + CC'}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \pm\frac{A^2 + B^2 + C^2}{D}\left(\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)'.$$

Mais, en tenant compte de l'équation (16), on aura

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = R.$$

Désignons, d'autre part, par r la quantité $\frac{A^2 + B^2 + C^2}{D}$ (que nous retrouverons plus tard sous le nom de *rayon de*

torsion); il viendra

$$h = \pm r R',$$

d'où

$$\rho^2 = R^2 + h^2 = R^2 + r^2 R'^2.$$

475. Soient

p un point (x, y, z) de la courbe correspondant à une valeur t de la variable;
T la tangente;
P le plan osculateur.

Soit p_1 un point de la courbe infiniment voisin de p, correspondant à la valeur $t + dt$, et soient $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ les coordonnées de p_1; T_1, P_1 la tangente et le plan osculateur correspondant.

Les distances de p_1 à p, à T et à P, de T_1 à T, et les angles de T_1 avec T et P, de P_1 avec P sont autant d'infiniment petits, dont il est intéressant de déterminer les valeurs principales.

Distance de p_1 à p. — Elle est égale à $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, ou, en remplaçant Δx, Δy, Δz par leurs valeurs approchées $x'\,dt$, $y'\,dt$, $z'\,dt$, à

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = ds.$$

476. *Angle de* T_1 *avec* T. — On sait que l'angle φ de deux droites, dont les cosinus directeurs sont respectivement proportionnels à a, b, c et à a_1, b_1, c_1, est donné par la formule

$$\cos\varphi = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

On en déduit

$$\sin^2\varphi = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}$$

$$= \frac{(bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}.$$

Pour appliquer cette formule, il faudra y remplacer a, b, c, a_1, b_1, c_1 par leurs valeurs actuelles

$$x', \quad y', \quad z', \quad x'+\Delta x', \quad y'+\Delta y', \quad z'+\Delta z',$$

ce qui donnera

$$(17)\quad \sin^2\varphi = \frac{(y'\,\Delta z' - z'\,\Delta y')^2 + (z'\,\Delta x' - x'\,\Delta z')^2 + (x'\,\Delta y' - y'\,\Delta x')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)[(x'+\Delta x')^2+(y'+\Delta y')^2+(z'+\Delta z')^2]};$$

$\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, étant infiniment petits, peuvent être négligés au dénominateur, qui est fini. Au numérateur, on les remplacera par leurs valeurs approchées $x''\,dt, y''\,dt, z''\,dt$. Il viendra alors

$$\sin^2\varphi = \frac{A^2+B^2+C^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^2}\,dt^2.$$

Donc φ, qui est égal, au troisième ordre près, à $\sin\varphi$, aura pour valeur approchée

$$\varphi = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

Nous appellerons *courbure*, comme dans les courbes planes, la limite du rapport de l'angle de deux tangentes voisines à l'arc qui sépare les points de contact. Cette limite est évidemment égale au rapport des valeurs principales de ces deux quantités ; en la désignant par k, nous aurons donc

$$k = \frac{\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R},$$

R désignant le rayon du cercle osculateur.

Ce cercle, son rayon et son centre pourront s'appeler, comme pour les courbes planes, *cercle, rayon* et *centre de courbure*.

477. *Angle de* P *avec* P_1. — Cet angle ψ, égal à celui des normales à ces deux plans, sera donné par la formule sui-

vante, analogue à la formule (17),

$$\sin^2\psi = \frac{(B\,\Delta C - C\,\Delta B)^2 + (C\,\Delta A - A\,\Delta C)^2 + (A\,\Delta B - B\,\Delta A)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)[(A + \Delta A)^2 + (B + \Delta B)^2 + (C + \Delta C)^2]},$$

au dénominateur, on pourra négliger ΔA, ΔB, ΔC; au numérateur, on les remplacera par leurs valeurs approchées

$$dA = (y' z''' - z' y''')\,dt,$$
$$dB = (z' x''' - x' z''')\,dt,$$
$$dC = (x' y''' - y' z''')\,dt.$$

Posons, comme précédemment,

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix};$$

on trouvera

$$B\,\Delta C - C\,\Delta B = D x'\,dt,$$
$$C\,\Delta A - A\,\Delta C = D y'\,dt,$$
$$A\,\Delta B - B\,\Delta A = D z'\,dt,$$

d'où

$$\sin^2\psi = \frac{D^2(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dt^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} = \frac{D^2\,ds^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

et, en remplaçant le sinus par l'arc,

$$\psi = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}\,ds.$$

La quantité $\frac{\psi}{ds} = \frac{D}{A^2 + B^2 + C^2}$ se nomme la *torsion* de la courbe ; nous la désignerons par τ. Son inverse se nomme le *rayon de torsion*.

478. *Angle de* P *avec* T_1. — Cet angle θ est donné par la formule

$$\sin\theta = \frac{A(x' + \Delta x') + B(y' + \Delta y') + C(z' + \Delta z')}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{(x' + \Delta x')^2 + (y' + \Delta y')^2 + (z' + \Delta z')^2}}.$$

Au dénominateur, on peut négliger $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$. Au nu-

mérateur, on les remplacera par leurs valeurs approchées $x'' dt + \frac{1}{2}x''' dt^2$, $y'' dt + \frac{1}{2}y''' dt^2$, $z'' dt + \frac{1}{2}z''' dt^2$.

Remarquant que l'on a

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' &= D, \end{aligned}$$

et mettant θ au lieu de son sinus, il viendra

$$\theta = \frac{\frac{1}{2}D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} dt^2 = \frac{\tau k\, ds^2}{2}.$$

479. *Distance de p_1 à* T. — Nous avons trouvé (403), pour la distance du point $(\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$ à la droite

$$X = a + bt, \qquad Y = a_1 + b_1 t, \qquad Z = a_2 + b_2 t,$$

la formule

$$\delta = \sqrt{\frac{[(a_1 - \alpha_1)b_2 - (a_2 - \alpha_2)b_1]^2 + [(a_2 - \alpha_2)b - (a - \alpha)b_2]^2 + \ldots}{b^2 + b_1^2 + b_2^2}}.$$

Nous avons ici

$$\begin{aligned} a &= x, & a_1 &= y, & a_2 &= z, \\ \alpha &= x + \Delta x, & \alpha_1 &= y + \Delta y, & \alpha_2 &= z + \Delta z, \\ b &= x', & b_1 &= y', & b_2 &= z'. \end{aligned}$$

La formule deviendra

$$\delta = \sqrt{\frac{(y'\Delta z - z'\Delta y)^2 + (z'\Delta x - x'\Delta z)^2 + (x'\Delta y - y'\Delta x)^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

ou, en remplaçant Δx, Δy, Δz par leurs valeurs,

$$\Delta x = x' dt + x'' \frac{dt^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\Delta y = y' dt + y'' \frac{dt^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\Delta z = z' dt + z'' \frac{dt^2}{1.2} + \ldots,$$

$$\delta = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \frac{dt^2}{1.2} = \frac{1}{2} k\, ds^2.$$

480. *Distance de p_1 à P.* — Elle est donnée par la formule connue

$$\delta = \pm \frac{A(x+\Delta x - x) + B(y + \Delta y - y) + C(z + \Delta z - z)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ou, en remplaçant Δx, Δy, Δz par leurs valeurs approchées,

$$x'\,dt + \tfrac{1}{2} x''\,dt^2 + \tfrac{1}{6} x'''\,dt^3 + \ldots, \qquad \ldots,$$

$$\delta = \pm \frac{1}{6} \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} dt^3 = \pm \frac{\tau k\,ds^3}{6}.$$

481. *Distance de* T *à* T_1. — Appliquons la formule trouvée pour la distance de deux droites, en y posant, pour $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \beta_1, \beta_2$, leurs valeurs actuelles $x, y, z, x', y', z', x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z'$. Il viendra, pour la distance cherchée ε,

$$\varepsilon = \frac{\pm L}{\sqrt{(y'\Delta z' - z'\Delta y')^2 + (z'\Delta x' - x'\Delta z')^2 + (x'\Delta y' - y'\Delta x')^2}},$$

où

$$L = \begin{vmatrix} \Delta x & \Delta x' & -x' \\ \Delta y & \Delta y' & -y' \\ \Delta z & \Delta z' & -z' \end{vmatrix}.$$

Le dénominateur a pour valeur principale $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,dt$. On a, d'autre part,

$$L = \begin{vmatrix} x'\,dt + x''\dfrac{dt^2}{2} + x'''\dfrac{dt^3}{6} + \ldots & x''\,dt + x'''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots & -x' \\ y'\,dt + y''\dfrac{dt^2}{2} + y'''\dfrac{dt^3}{6} + \ldots & y''\,dt + y'''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots & -y' \\ z'\,dt + z''\dfrac{dt^2}{2} + z'''\dfrac{dt^3}{6} + \ldots & z''\,dt + z'''\dfrac{dt^2}{2} + \ldots & -z' \end{vmatrix}$$

ou, en ajoutant aux termes de la première colonne ceux de la deuxième et de la troisième, respectivement multipliés

par $-\frac{1}{2}dt$ et par dt (ce qui n'altérera pas le déterminant),

$$L = \begin{vmatrix} x''' dt^3(\frac{1}{6}-\frac{1}{4})+\dots & x'' dt + x''' \frac{dt^2}{2} + \dots & -x' \\ y''' dt^3(\frac{1}{6}-\frac{1}{4})+\dots & y'' dt + y''' \frac{dt^2}{2} + \dots & -y' \\ z''' dt^3(\frac{1}{6}-\frac{1}{4})+\dots & z'' dt + z''' \frac{dt^2}{2} + \dots & -z' \end{vmatrix}$$

ou, en réduisant chaque terme à sa valeur principale,

$$L = \frac{1}{12} dt^4 \begin{vmatrix} x''' & x'' & x' \\ y''' & y'' & y' \\ z''' & z'' & z' \end{vmatrix} = -\frac{D}{12} dt^4.$$

Donc

$$\varepsilon = \frac{\pm D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \frac{dt^3}{12} = \pm \frac{k\tau\, ds^3}{12}.$$

482. On nomme *plans osculateurs stationnaires* ceux qui correspondent aux points où $D = 0$. La torsion étant nulle en ces points, le plan osculateur P s'y confondra, au deuxième ordre près, avec le plan osculateur en un point p_1 infiniment voisin.

En outre, la distance de P à p_1 sera du quatrième ordre. Le plan P aura donc un contact du troisième ordre avec la courbe, et se confondra avec la sphère osculatrice.

On voit par là que les plans stationnaires sont analogues aux tangentes d'inflexion des courbes planes.

483. Proposons-nous encore de calculer la différence entre un arc infiniment petit et sa corde.

Nous simplifierons un peu les calculs en admettant qu'on ait pris pour variable indépendante l'arc s.

On aura, dans ce cas,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

et, en différentiant,

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

puis

$$x'x''' + y'y''' + z'z''' + x''^2 + y''^2 + z''^2 = 0.$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} Cy' - Bz' &= (x'y'' - y'x'')y' - (z'x'' - x'z'')z' \\ &= x'(y'y'' + z'z'') - x''(y'^2 + z'^2) \\ &= -x'.x'x'' - x''(1 - x'^2) = -x'', \end{aligned}$$

$$Az' - Cx' = -y'', \qquad Bx' - Ay' = -z'',$$

et la formule de la courbure devient

$$k^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 = -(x'x''' + y'y''' + z'z''').$$

Cela posé, soit ds un arc infiniment petit; sa corde sera $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Il s'agit d'évaluer la différence de ces deux expressions.

On a identiquement

$$ds - \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \frac{ds^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}{ds + \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}.$$

Le dénominateur de cette expression est sensiblement $2\,ds$. Pour avoir le numérateur, on remplacera Δx, Δy, Δz par leurs développements :

$$\Delta x = x'\,ds + x''\frac{ds^2}{2} + x'''\frac{ds^3}{6} + \ldots.$$

Développant et ordonnant suivant les puissances de ds, il viendra

$$(1 - x'^2 - y'^2 - z'^2)\,ds^2 - (x'x'' + y'y'' + z'z'')\,ds^3 \\ - \left(\frac{x''^2 + y''^2 + z''^2}{4} + \frac{x'x''' + y'y''' + z'z'''}{3}\right) ds^4 - \ldots.$$

Les coefficients des termes en ds^2 et ds^3 s'annulent. Celui du terme en ds^4 sera, d'après les équations précédentes,

$$(x''^2 + y''^2 + z''^2)(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3}) = \frac{k^2}{12}.$$

Donc la différence cherchée a pour valeur principale

$$\frac{\frac{k^2}{12}ds^4}{2\,ds} = \frac{k^2\,ds^3}{24}.$$

484. On nomme *normale principale* au point (x, y, z) la perpendiculaire à la tangente située dans le plan osculateur; *binormale* la perpendiculaire au plan osculateur. Ces deux droites forment avec la tangente un trièdre trirectangle.

Déterminons les cosinus directeurs de ces trois droites :

1° Les cosinus directeurs a, b, c de la tangente, étant proportionnels à x', y', z', seront respectivement égaux à

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{dy}{ds},$$
$$\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{dz}{ds}.$$

2° Ceux de la binormale α, β, γ étant proportionnels à A, B, C seront égaux à

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3° Enfin la normale principale étant perpendiculaire aux deux droites précédentes, ses cosinus directeurs λ, μ, ν satisferont aux équations

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0,$$
$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$

et seront proportionnels aux quantités

$$Cy' - Bz', \quad Az' - Cx', \quad Bx' - Ay'.$$

On aura donc

$$\lambda = \frac{Cy' - Bz'}{\sqrt{(Cy' - Bz')^2 + (Az' - Cx')^2 + (Bx' - Ay')^2}}$$
$$= \frac{Cy' - Bz'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(x'^2+y'^2+z'^2) - (Ax' + By' + Cz')^2}},$$

et, comme $Ax' + By' + Cz' = 0$,

$$\lambda = \frac{Cy' - Bz'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)}} = \gamma b - \beta c.$$

On aura de même

$$\mu = \alpha c - \gamma a,$$
$$\nu = \beta a - \alpha b.$$

485. Cherchons comment varient ces cosinus directeurs lorsque le point (x, y, z) se déplace infiniment peu sur la courbe.

On aura d'abord

$$\begin{aligned}
da &= d\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \\
&= \frac{x''\,dt}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \frac{x'(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}dt \\
&= \frac{x''(x'^2 + y'^2 + z'^2) - x'(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}dt \\
&= \frac{Bz' - Cy'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}dt = -\lambda\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = -\lambda k\,ds.
\end{aligned}$$

On aura de même

$$db = -\mu k\,ds, \qquad dc = -\nu k\,ds.$$

On aura, en second lieu,

$$\begin{aligned}
d\alpha &= d\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\
&= \frac{A'(A^2 + B^2 + C^2) - A(AA' + BB' + CC')}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}dt \\
&= \frac{B(BA' - AB') + C(CA' - AC')}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}dt \\
&= \frac{(Cy' - Bz')D}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{3}{2}}}dt = \lambda\tau\,ds,
\end{aligned}$$

et de même

$$d\beta = \mu\tau\, ds, \qquad d\gamma = \nu\tau\, ds.$$

Enfin

$$\begin{aligned} d\lambda &= d(\gamma b - \beta c) = \gamma\, db + b\, d\gamma - c\, d\beta - \beta\, dc \\ &= (-\gamma\mu k + b\nu\tau - c\mu\tau + \beta\nu k)\, ds \\ &= (\beta\nu - \gamma\mu) k\, ds + (b\nu - c\mu)\tau\, ds. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \beta\nu - \gamma\mu &= \beta(\beta a - \alpha b) - \gamma(\alpha c - \gamma a) \\ &= a(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma) \\ &= a, \\ b\nu - c\mu &= b(\beta a - \alpha b) - c(\alpha c - \gamma a) \\ &= -\alpha(a^2 + b^2 + c^2) + a(a\alpha + b\beta + c\gamma) \\ &= -\alpha. \end{aligned}$$

Donc

$$d\lambda = ak\, ds - \alpha\tau\, ds,$$

et de même

$$\begin{aligned} d\mu &= bk\, ds - \beta\tau\, ds, \\ d\nu &= ck\, ds - \gamma\tau\, ds. \end{aligned}$$

486. Il résulte de ces formules qu'une courbe est complètement définie lorsqu'on connaîtra :

1° La loi suivant laquelle la courbure et la torsion varient en fonction de l'arc s comme variable indépendante ;

2° Les valeurs de x, y, z, a, b, c, α, β, γ, λ, μ, ν correspondantes à une valeur particulière de s, à la valeur zéro, par exemple.

En effet, les formules précédentes donnent les dérivées, par rapport à s, des quantités

$$a = \frac{dx}{ds}, \qquad b = \frac{dy}{ds}, \qquad c = \frac{dz}{ds}, \qquad \alpha, \beta, \gamma, \quad \lambda, \mu, \nu,$$

en fonction de ces quantités elles-mêmes, de la courbure et de la torsion. En les différentiant, on obtiendra les dérivées secondes, et ainsi de suite. Mais, pour $s = 0$, on connaît les

valeurs des quantités a, b, c, α, β, γ, λ, μ, ν. On aura donc, pour $s=0$, la valeur de toutes leurs dérivées.

Connaissant ainsi, pour $s=0$, les valeurs de x, $a=\frac{dx}{ds}$, $\frac{da}{ds}=\frac{d^2x}{ds^2}$, ..., on pourra calculer x par la formule de Maclaurin

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{1.2} + \ldots.$$

De même, pour y et z.

487. Appliquons les formules précédentes à l'*hélice*. On donne ce nom à la courbe décrite par un point dont la projection sur le plan des x, y parcourt une ligne C donnée arbitrairement et dont la hauteur z au-dessus du plan des x, y varie proportionnellement à l'arc décrit par sa projection.

Prenons pour variable indépendante l'arc σ de la projection. Les équations de l'hélice seront

$$x = f(\sigma), \qquad y = \varphi(\sigma), \qquad z = a\sigma,$$

a étant une constante.

On aura, par suite

$$z' = a, \qquad z'' = 0,$$

d'où

$$A = -ay'', \qquad B = ax'', \qquad C = x'y'' - y'x'',$$

et de plus (454)

$$x'^2 + y'^2 = 1, \qquad x'x'' + y'y'' = 0,$$
$$x'y'' - y'x'' = \gamma,$$
$$x''^2 + y''^2 = -x'x''' - y'y''' = \gamma^2,$$
$$x''y''' - y''x''' = \gamma^3,$$

γ désignant la courbure de la projection.

Cela posé :

1° La différentielle de l'arc de l'hélice sera donnée par la formule

$$ds^2 = (x'^2 + y'^2 + a^2)\,d\sigma^2 = (1 + a^2)\,d\sigma^2.$$

Le rapport de ds à $d\sigma$ est donc constant.

2° L'angle θ de la tangente avec l'axe des z sera donné par la formule

$$\cos\theta = \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Il est donc constant.

3° L'équation du plan osculateur sera

$$-ay''(X-x)+ax''(Y-y)+\gamma(Z-z)=0.$$

Il contient la normale au cylindre projetant, laquelle a pour équations

$$Z-z=0, \qquad x'(X-x)+y'(Y-y)=0,$$

car en substituant dans l'équation du plan osculateur à $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ les quantités proportionnelles $-y'$, x', 0 on obtient comme résultat

$$a(x'x''+y'y''),$$

ce qui est nul.

4° La courbure k est égale à

$$\frac{\sqrt{a^2y''^2+a^2x''^2+(x'y''-y'x'')^2}}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{(a^2+1)\gamma^2}}{(1+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\gamma}{1+a^2}.$$

5° La torsion τ est égale à

$$\frac{-ay''x'''+ax''y'''}{a^2y''^2+a^2x''^2+(x'y''-y'x'')^2} = \frac{a\gamma^3}{(a^2+1)\gamma^2} = \frac{a\gamma}{a^2+1}.$$

VII. — Systèmes de droites.

488. Une droite D, passant par un point (a, a_1, a_2) et dont les cosinus directeurs sont proportionnels à b, b_1, b_2, a, comme on l'a vu, pour équations

$$(1) \qquad \frac{X-a}{b} = \frac{Y-a_1}{b_1} = \frac{Z-a_2}{b_2},$$

ou, en introduisant une variable auxiliaire t,

$$(2)\qquad X = a + bt,\qquad Y = a_1 + b_1 t,\qquad Z = a_2 + b_2 t,$$

$t\sqrt{b^2 + b_1^2 + b_2^2}$ étant la distance du point (X, Y, Z) au point (a, a_1, a_2).

Supposons que les coefficients $a, b, \ldots$ dépendent de certains paramètres $\alpha, \beta, \ldots$. En faisant varier ces paramètres, on obtiendra un système de droites.

S'il n'y a qu'un paramètre α, ces droites formeront une *surface réglée* dont on obtiendrait l'équation en éliminant α entre les deux équations (1).

S'il y a deux paramètres α, β, on aura une *congruence de droites*. Par chaque point (x, y, z) de l'espace passeront une ou plusieurs droites de la congruence, correspondant aux systèmes de valeurs de α, β, qui satisfont aux équations

$$(3)\qquad \frac{x-a}{b} = \frac{y-a_1}{b_1} = \frac{z-a_2}{b_2}.$$

S'il y a trois paramètres α, β, γ, on aura un *complexe de droites*. Par chaque point (x, y, z) passeront une infinité de droites du complexe, formant un cône, dont on obtiendra l'équation en éliminant α, β, γ entre les équations (1) et (3).

Enfin, s'il y avait plus de trois paramètres, le système contiendrait toutes les droites possibles, car on pourrait déterminer les paramètres de manière à faire passer la droite par deux points arbitraires (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), ce qui ne donnerait que quatre équations de condition.

489. Soient D une droite du système, ayant pour équations

$$X = a + bt,\qquad Y = a_1 + b_1 t,\qquad Z = a_2 + b_2 t,$$

et D_1 une droite infiniment voisine, laquelle aura pour équations

$$\begin{aligned} X &= a + da + (b + db)t, \\ Y &= a_1 + da_1 + (b_1 + db_1)t, \\ Z &= a_2 + da_2 + (b_2 + db_2)t, \end{aligned}$$

en bornant l'approximation au premier ordre et écrivant par suite da, db, ... à la place de Δa, Δb, ...

La position relative de ces deux droites dépend des éléments suivants :

1° Leur angle φ. On aura, d'après des formules précédemment trouvées,

$$\varphi = \frac{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}{b^2 + b_1^2 + b_2^2},$$

en posant, pour abréger,

$$A = b_1 db_2 - b_2 db_1,$$
$$A_1 = b_2 db - b\, db_2,$$
$$A_2 = b\, db_1 - b_1 db.$$

2° La direction de leur perpendiculaire commune E, laquelle a pour cosinus directeurs

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}, \qquad \lambda_1 = \frac{A_1}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}},$$
$$\lambda_2 = \frac{A_2}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}}.$$

3° La position du point de rencontre de D et de E. La valeur T de la variable t qui correspond à ce point sera (405)

$$T = \frac{N}{A^2 + A_1^2 + A_2^2},$$

N désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & b + db & -da \\ A_1 & b_1 + db_1 & -da_1 \\ A_2 & b_2 + db_2 & -da_2 \end{vmatrix},$$

ou plus simplement

$$\begin{vmatrix} A & da & b \\ A_1 & da_1 & b_1 \\ A_2 & da_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

en négligeant db, db_1, db_2 par rapport à b, b_1, b_2.

4° La plus courte distance δ des deux droites D, D_1. Elle est donnée (405) par la formule

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{A^2 + A_1^2 + A_2^2}},$$

L désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} da & db & b \\ da_1 & db_1 & b_1 \\ da_2 & db_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

On peut convenir de prendre le radical positivement dans toutes ces formules. Alors δ aura le signe de L ; et ce signe fixera le sens dans lequel la longueur δ doit être portée sur la droite E.

On peut d'ailleurs substituer comme élément de définition à la distance infiniment petite δ le rapport fini

$$p = \frac{\delta}{\varphi} = \frac{L(b^2 + b_1^2 + b_2^2)}{A^2 + A_1^2 + A_2^2},$$

qu'on nomme le *paramètre de distribution*.

Proposons-nous de déterminer les relations qui existent entre ces éléments T, λ, λ_1, λ_2, p. Nous aurons à distinguer trois cas distincts, suivant le nombre des paramètres variables.

490. Premier cas : *Surfaces réglées*. — On n'a qu'un seul paramètre α, et si, dans les expressions de T, λ, λ_1, λ_2, p, on remplace da, db, ... par leurs valeurs $a'\,d\alpha$, $b'\,d\alpha$, ..., la quantité $d\alpha$, se trouvant en facteur avec le même degré au numérateur et au dénominateur, disparaîtra de ces expressions.

La droite E, sur laquelle se mesure la plus courte distance des droites D et D_1, étant complètement déterminée par les valeurs de T, λ, λ_1, λ_2, on aura ce théorème :

Les génératrices d'une surface réglée infiniment voisines d'une même génératrice D *viennent toutes couper*

perpendiculairement une même droite E (*au second ordre près*).

Le point d'intersection de D avec E se nomme le *point central* de la génératrice D. Il aura pour coordonnées

$$x = a + b\mathrm{T}, \qquad y = a_1 + b_1\mathrm{T}, \qquad z = a_2 + b_2\mathrm{T}.$$

Le lieu des points centraux se nomme *ligne de striction*. On aura ses équations en éliminant α entre les trois équations ci-dessus.

491. Soit

$$x = a + bt, \qquad y = a_1 + b_1 t, \qquad z = a_2 + b_2 t$$

un point de la surface. Ses coordonnées sont exprimées, comme on le voit, en fonction des deux paramètres α et t. L'équation générale d'un plan

$$\mathcal{A}\mathrm{X} + \mathcal{B}\mathrm{Y} + \mathcal{C}\mathrm{Z} + \mathcal{D} = 0$$

contient trois paramètres, dont on pourra disposer pour établir un contact du premier ordre avec la surface. Il faudra pour cela satisfaire aux trois équations

$$0 = \Psi(t, \alpha) = \mathcal{A}(a + bt) + \mathcal{B}(a_1 + b_1 t) + \mathcal{C}(a_2 + b_2 t) + \mathcal{D},$$

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{A} b + \mathcal{B} b_1 + \mathcal{C} b_2,$$

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = \mathcal{A}(a' + b't) + \mathcal{B}(a'_1 + b'_1 t) + \mathcal{C}(a'_2 + b'_2 t).$$

On en déduira

$$0 = \mathcal{A}(\mathrm{X} - a - bt) + \mathcal{B}(\mathrm{Y} - a_1 - b_1 t) + \mathcal{C}(\mathrm{Z} - a_2 - b_2 t),$$

et, en éliminant $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, on aura l'équation du plan tangent sous la forme

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} - a - bt & \mathrm{Y} - a_1 - b_1 t & \mathrm{Z} - a_2 - b_2 t \\ b & b_1 & b_2 \\ a' + b't & a'_1 + b'_1 t & a'_2 + b'_2 t \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan contient la génératrice. En effet, un point quelconque de cette génératrice a ses coordonnées de la forme

$$a + bt_1, \qquad a_1 + b_1 t_1, \qquad a_2 + b_2 t_1.$$

Substituant ces valeurs des coordonnées dans l'équation du plan tangent, les deux premières lignes du déterminant deviennent identiques, sauf le facteur commun $t_1 - t$.

Mais la direction de ce plan tangent variera en général avec la position du point de contact (x, y, z) sur la génératrice. On voit, en effet, que l'équation du plan tangent dépend de t.

492. Pour déterminer simplement la loi de cette variation, nous admettrons que nous ayons choisi pour axe des z la génératrice considérée D, et pour axe des y la droite E qui lui correspond.

On aura, pour tous les points de D,

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

Donc, pour cette génératrice, a, b, a_1, b_1 seront égaux à zéro. D'ailleurs rien n'empêche de prendre pour variable indépendante, à la place de t, la fonction linéaire $a_2 + b_2 t$. On peut donc supposer qu'on a constamment

$$a_2 = 0, \qquad b_2 = 1, \qquad a'_2 = b'_2 = 0.$$

Cela posé, la génératrice D aura pour équations

$$z = t, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Une génératrice infiniment voisine aura pour équations

$$\begin{aligned} z &= t, \\ x &= da + t\,db = da + z\,db, \\ y &= da_1 + t\,db_1 = da_1 + z\,db_1. \end{aligned}$$

Mais, par définition, cette génératrice rencontre l'axe des y à une distance δ de l'origine; on aura donc

$$da = 0, \qquad da_1 = \delta.$$

De plus, elle est perpendiculaire à cet axe et fait un angle φ avec l'axe des z. On aura donc

$$db_1 = 0, \qquad db = \operatorname{tang}\varphi = \varphi,$$

en négligeant la différence entre la tangente et l'arc.

On aura, par suite,

$$a' = \frac{da}{d\alpha} = 0,$$

$$a'_1 = \frac{da_1}{d\alpha} = \frac{\delta}{d\alpha},$$

$$b' = \frac{db}{d\alpha} = \frac{\varphi}{d\alpha},$$

$$b'_1 = \frac{db_1}{d\alpha} = 0.$$

Substituons ces valeurs et celles de $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, a'_2, b'_2$, dans l'équation du plan tangent; elle deviendra

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z - t \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varphi}{d\alpha}t & \frac{\delta}{d\alpha} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$Y = \frac{\delta}{\varphi t} X = \frac{p}{z} X.$$

L'angle V que le plan tangent forme avec le plan des yz sera donné par la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{z}{p}.$$

Cet angle, en général variable avec z, sera constant dans les deux hypothèses suivantes :

$$p = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \delta = 0,$$
$$p = \infty, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = 0.$$

493. Il est intéressant de chercher quelle est la nature

particulière des surfaces réglées pour lesquelles une de ces deux conditions $\varphi = 0$ ou $\delta = 0$ est constamment satisfaite.

THÉORÈME. — *L'équation* $\delta = 0$ *exprime que la surface réglée est développable.*

Cherchons en effet à quelles conditions la surface sera développable. Soient x, y, z les coordonnées du point où la génératrice touche l'arête de rebroussement, θ la valeur correspondante de t. On aura

$$x = a + b\theta, \qquad y = a_1 + b_1\theta, \qquad z = a_1 + b_2\theta,$$

x, y, z et θ variant en général d'une génératrice à l'autre, et par suite étant des fonctions de α.

Ces équations, différentiées par rapport à α, donneront

$$\begin{aligned} dx &= da + \theta\, db + b\, d\theta, \\ dy &= da_1 + \theta\, db_1 + b_1 d\theta, \\ dz &= da_2 + \theta\, db_2 + b_2 d\theta. \end{aligned}$$

Mais, la génératrice étant tangente à l'arête de rebroussement, ses cosinus directeurs seront proportionnels à dx, dy, dz; ils le sont d'ailleurs à b, b_1, b_2; on aura donc, en désignant par μ un facteur convenable,

$$dx = \mu b, \qquad dy = \mu b_1, \qquad dz = \mu b_2.$$

Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, il viendra

$$\begin{aligned} 0 &= da + \theta\, db + b\,(d\theta - \mu), \\ 0 &= da_1 + \theta\, db_1 + b_1(d\theta - \mu), \\ 0 &= da_2 + \theta\, db_2 + b_2(d\theta - \mu). \end{aligned}$$

Ces trois équations entre les deux quantités θ et $d\theta - \mu$ ne seront pas compatibles en général, mais elles le deviendront si le déterminant

$$\begin{vmatrix} da & db & b \\ da_1 & db_1 & b_1 \\ da_2 & db_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

s'annule. Or ce déterminant est précisément L, numérateur de δ.

Donc δ sera nul, à moins qu'on n'ait $A = A_1 = A_2 = 0$, auquel cas le dénominateur s'annulerait également.

494. Les trois équations $A = A_1 = A_2 = 0$ équivalent à l'équation unique $\varphi = 0$. Si celle-ci est satisfaite, *la surface sera un cylindre*. Car, deux génératrices infiniment voisines ne formant qu'un angle du deuxième ordre, les cosinus directeurs de la génératrice, considérés comme fonctions de α, n'éprouveront qu'une variation du second ordre par rapport à l'accroissement de α. Donc leurs différentielles sont nulles; donc ils sont constants.

495. Deuxième cas : *Congruences.* — On a dans ce cas deux paramètres variables α, β et, par suite,

$$da = \frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta,$$

$$db = \frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta} d\beta,$$

....

Substituant ces valeurs dans les expressions de λ, λ_1, λ_2, T, p, on voit que, pour une génératrice donnée D, correspondant à un système déterminé de valeurs de α et de β, ces cinq quantités ne dépendent que du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$. Il doit donc exister entre elles quatre relations indépendantes du choix de la génératrice D_1.

Proposons-nous de trouver ces relations.

496. Nous remarquerons tout d'abord que la quantité $A^2 + A_1^2 + A_2^2$, qui figure au dénominateur des expressions λ, λ_1, λ_2, T, p, ne pourra, en général, s'annuler pour aucune valeur de $\frac{d\beta}{d\alpha}$. En effet, il faudrait pour cela qu'on eût simultanément

$$A = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0,$$

d'où

$$\frac{db}{b} = \frac{db_1}{b_1} = \frac{db_2}{b_2},$$

ou, en appelant μ la valeur commune de ces rapports,

$$\frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta} d\beta = b\mu,$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b_1}{\partial \beta} d\beta = b_1\mu,$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b_2}{\partial \beta} d\beta = b_2\mu,$$

équations qui ne peuvent subsister simultanément que si l'on a

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial b}{\partial \alpha} & \frac{\partial b}{\partial \beta} & b \\ \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_1}{\partial \beta} & b_1 \\ \frac{\partial b_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_2}{\partial \beta} & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est là une équation entre α et β, qui est nécessaire pour que $A^2 + A_1^2 + A_2^2$ puisse s'annuler.

Nous pourrons appeler *génératrices singulières* les génératrices de la congruence pour lesquelles l'équation (4) est satisfaite. Elles forment une surface réglée, dont on aura l'équation en éliminant α, β, t entre l'équation (4) et les équations

$$(5) \qquad x = a + bt, \qquad y = a_1 + b_1 t, \qquad z = a_2 + b_2 t.$$

497. Supposons que D soit une génératrice ordinaire. T étant exprimé par une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont homogènes et du second degré en $d\alpha$, $d\beta$, et dont le dénominateur ne peut s'annuler aura un maximum T_0 et un minimum T_1 toujours réels ; on pourra les obtenir ainsi que les valeurs correspondantes de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, par la

méthode exposée au n° **407**. Substituant ces valeurs à la place de t dans les équations (5), on aura les coordonnées des points correspondants de D, exprimées en fonctions de α, β. Ces points se nomment *points principaux*. On nomme *plans principaux* ceux qui passent par les lignes de plus courte distance correspondantes à ces points et par la droite D.

Éliminant α et β entre les équations qui donnent les coordonnées d'un point principal, on obtiendra le lieu de ce point. On obtiendra de même le lieu du second point principal. Les deux *surfaces principales* ainsi obtenues pourront constituer, soit deux surfaces distinctes, soit plus habituellement deux nappes d'une seule et même surface.

498. Passons à l'examen de l'expression qui donne le paramètre de distribution p. Le déterminant L qui figure au numérateur, étant du second degré en $\frac{d\beta}{d\alpha}$, s'annulera pour deux valeurs réelles ou imaginaires de ce rapport. A chacune de ces deux valeurs correspondent une valeur de T et, par suite, un point de D.

Les deux points ainsi obtenus se nomment *foyers*. Ils pourront être réels ou imaginaires. Les lieux de ces points (*surfaces focales*) se détermineront comme les surfaces principales.

499. Soient

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = M, \tag{6}$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = M_1 \tag{7}$$

les deux valeurs de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ tirées de l'équation $L = 0$; M et M_1 seront des fonctions connues de α, β.

Nous verrons dans le Calcul intégral qu'on peut trouver pour β une expression $\beta = \varphi(\alpha)$ qui satisfasse identiquement

à l'équation différentielle (6) et qui, de plus, se réduise à β_0 pour $\alpha = \alpha_0$, les constantes α_0 et β_0 pouvant être choisies à volonté.

Cela posé, substituons $\beta = \varphi(\alpha)$ dans les équations

$$x = a + bt, \qquad y = a_1 + b_1 t, \qquad z = a_2 + b_2 t$$

des génératrices de la congruence. Ces équations, ne contenant plus qu'un seul paramètre α, représenteront une surface réglée, dont les génératrices font partie de la congruence; cette surface est développable, car, l'équation (6) étant une conséquence de l'équation $\beta = \varphi(\alpha)$, on aura $p = 0$ pour deux génératrices voisines prises sur cette surface. Enfin, cette surface contient la génératrice correspondante aux valeurs $\beta = \beta_0$, $\alpha = \alpha_0$ des paramètres variables.

La considération de l'équation différentielle (7) donnerait une seconde surface développable jouissant des mêmes propriétés que la première.

On aura donc ce théorème :

Une droite quelconque D *de la congruence fait partie de deux surfaces développables, formées de droites de la congruence.*

On doit remarquer toutefois que ces surfaces n'auront d'existence réelle que si les valeurs de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ déduites de l'équation $L = 0$ sont réelles.

La droite D est tangente à l'arête de rebroussement de chacune des développables dont elle fait partie. Mais ces arêtes de rebroussement sont évidemment situées sur les surfaces focales; on a donc cette proposition :

Toutes les droites de la congruence sont tangentes à chacune des surfaces focales.

On nomme *plans focaux* les plans menés par D et respectivement perpendiculaires aux lignes E de plus courte

distance correspondantes à ses deux foyers. Ces plans sont tangents aux deux développables qui se croisent suivant la droite D.

On a vu, en effet, que, dans une surface réglée quelconque, le plan tangent en un point situé sur une génératrice D à une distance z du point central fait, avec la perpendiculaire E, un angle V donné par la formule

$$\operatorname{tang} V = \frac{z}{p};$$

dans une développable, où $p = 0$, tang V sera infini et V sera droit.

500. Pour nous rendre un compte plus exact de la distribution autour de D des droites de la congruence qui en sont infiniment voisines, prenons cette droite pour axe des z, en nous réservant de disposer ultérieurement de la position de l'origine, ainsi que de l'orientation du plan des xz.

Supposons, en outre, qu'on prenne z pour variable indépendante, on aura constamment $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, d'où $da_2 = db_2 = 0$. En outre, D ayant pour équations $x = 0$, $y = 0$, $z = t$, on aura, pour cette droite,

$$a = a_1 = b = b_1 = 0.$$

Portons ces diverses valeurs dans les formules générales; il viendra

$$A = -db_1, \qquad A_1 = db, \qquad A_2 = 0,$$

$$\lambda = -\frac{db_1}{\sqrt{db^2 + db_1^2}}, \qquad \lambda_1 = \frac{db}{\sqrt{db^2 + db_1^2}}, \qquad \lambda_2 = 0,$$

$$N = -(da\,db + da_1\,db_1), \qquad L = da\,db_1 - da_1\,db$$

et, par suite,

$$(8) \qquad T = -\frac{da\,db + da_1\,db_1}{db^2 + db_1^2}, \qquad p = \frac{da\,db_1 - da_1\,db}{db^2 + db_1^2}.$$

Enfin, le déterminant (4) se réduira à

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial b}{\partial \alpha} & \frac{\partial b}{\partial \beta} & 0 \\ \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_1}{\partial \beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial b}{\partial \alpha} & \frac{\partial b}{\partial \beta} \\ \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_1}{\partial \beta} \end{vmatrix};$$

D étant supposée une génératrice ordinaire, ce déterminant ne sera pas nul. On pourra donc des équations

$$db = \frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta} d\beta,$$

$$db_1 = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b_1}{\partial \beta} d\beta$$

déduire l'expression de $d\alpha$ et $d\beta$ en fonction linéaire de db et db_1.

Les quantités da, da_1, étant des fonctions linéaires de $d\alpha$, $d\beta$, deviendront des fonctions linéaires de db, db_1, telles que

$$da = \mathrm{P}\, db + \mathrm{Q}\, db_1,$$

$$da_1 = \mathrm{P}_1\, db + \mathrm{Q}_1\, db_1.$$

On aura, par suite,

$$\mathrm{T} = -\frac{\mathrm{P}\, db^2 + (\mathrm{P}_1 + \mathrm{Q})\, db\, db_1 + \mathrm{Q}_1\, db_1^2}{db^2 + db_1^2},$$

$$p = \frac{-\mathrm{P}_1\, db^2 + (\mathrm{P} - \mathrm{Q}_1)\, db\, db_1 + \mathrm{Q}\, db_1^2}{db^2 + db_1^2}.$$

Soit d'ailleurs ψ l'angle que la plus courte distance forme avec l'axe des y. On aura

$$\lambda = -\sin\psi, \qquad \lambda_1 = \cos\psi, \qquad \lambda_2 = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\psi = -\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{db_1}{db}.$$

Les valeurs de z correspondant aux points principaux s'obtiendront en cherchant le maximum et le minimum de T. On

sait qu'il faut pour cela poser les équations

$$(9) \qquad 2P\,db + (P_1 + Q)\,db_1 + 2\mu\,db = 0,$$

$$(10) \qquad (P_1 + Q)\,db + 2Q_1\,db_1 + 2\mu\,db_1 = 0,$$

d'où

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} 2P + 2\mu & P_1 + Q \\ P_1 + Q & 2Q_1 + 2\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Cette dernière équation donnera le maximum et le minimum cherchés. Les précédentes donneront la valeur correspondante de $\frac{db_1}{db} = \operatorname{tang}\psi$.

Supposons maintenant que nous ayons pris pour plan des zy l'un des plans principaux, et choisi à l'origine à égale distance des points principaux. On devra avoir un maximum ou un minimum pour $\psi = 0$, d'où $\frac{db_1}{db} = 0$, ce qui réduira l'équation (10) à

$$P_1 + Q = 0.$$

L'équation (11) se réduira à

$$(2P + 2\mu)(2Q_1 + 2\mu) = 0,$$

et, ses racines devant être égales et opposées, on aura

$$Q_1 = -P.$$

Faisant donc $P_1 = -Q$, $Q_1 = -P$, $\frac{db_1}{db} = \operatorname{tang}\psi$ dans les formules, il viendra

$$(12) \qquad T = -P\,\frac{1 - \operatorname{tang}^2\psi}{1 + \operatorname{tang}^2\psi} = -P\cos 2\psi,$$

$$(13) \qquad p = \frac{2P\operatorname{tang}\psi + Q(1 + \operatorname{tang}^2\psi)}{1 + \operatorname{tang}^2\psi} = P\sin 2\psi + Q.$$

501. On déduit de ces formules des conséquences importantes :

1° T est maximum ou minimum pour $\psi = 0$ et $\psi = 90°$; d'où cette conséquence :

Les deux plans principaux sont rectangulaires.

2° p s'annule pour $\sin 2\psi = -\frac{Q}{P}$, d'où

$$T = \pm P\sqrt{1 - \frac{Q^2}{P^2}} = \pm\sqrt{P^2 - Q^2}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signe contraire, et moindres que P, on aura ce résultat :

Les foyers sont situés entre les points principaux, à égale distance du milieu de la droite qui les joint.

Les foyers seront d'ailleurs réels ou imaginaires, suivant que P sera $>$ Q ou $<$ Q en valeur absolue.

3° L'équation $\sin 2\psi = -\frac{Q}{P}$ a deux racines : ψ_0 et $\frac{\pi}{2} - \psi_0$.

Les plans focaux auront pour azimut $\frac{\pi}{2} + \psi_0$ et $\pi - \psi_0$. On voit donc qu'*ils font des angles égaux avec les plans principaux*.

4° Si $Q = 0$, les foyers et les plans focaux seront réels et se confondront avec les points et les plans principaux. Les plans focaux seront donc rectangulaires.

Réciproquement, si ces plans sont rectangulaires, on aura

$$\pi - \psi_0 = \frac{\pi}{2} + \psi_0 + \frac{\pi}{2},$$

d'où $\psi_0 = 0$ et, par suite, $Q = 0$, et les autres propriétés ci-dessus auront lieu.

502. Les plans focaux ont pour équation

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\psi = \frac{\sin 2\psi}{1 + \cos 2\psi},$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{Q}{P \pm \sqrt{P^2 - Q^2}}; \tag{14}$$

ils seront distingués l'un de l'autre par le signe du radical.

Soit, enfin, D_1 une droite de la congruence infiniment

voisine de D; elle aura pour équations

$$\begin{aligned} z &= t, \\ x &= da + db\,t = da + db\,z = (z+\mathrm{P})\,db + \mathrm{Q}\,db_1, \\ y &= da_1 + db_1 t = da_1 + db_1 z = -\mathrm{Q}\,db + (z-\mathrm{P})\,db_1. \end{aligned}$$

Elle rencontrera le plan focal (14) en un point dont le z est déterminé par l'équation

$$\frac{-\mathrm{Q}\,db + (z-\mathrm{P})\,db_1}{(z+\mathrm{P})\,db + \mathrm{Q}\,db_1} = -\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P} \pm \sqrt{\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2}}.$$

Or, cette équation est satisfaite, quel que soit le rapport $\frac{db_1}{db}$, en posant $z = \pm\sqrt{\mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2}$.

Cette équation, jointe à l'équation (14), représente une perpendiculaire à D menée dans le plan focal et passant par le foyer. Cette perpendiculaire a reçu le nom de *droite focale*.

On peut donc énoncer cette proposition :

Les intersections d'une génératrice quelconque D_1, *infiniment voisine de* D, *avec les plans focaux, sont situées sur les droites focales* (aux infiniment petits du second ordre près).

503. Il nous reste à étudier la distribution autour de D des droites infiniment voisines, lorsque D est une génératrice singulière.

Dans ce cas, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial b}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial b}{\partial \beta} \\[2ex] \dfrac{\partial b_1}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial b_1}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

étant nul, le rapport des quantités

$$\begin{aligned} db &= \frac{\partial b}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta}\,d\beta, \\ db_1 &= \frac{\partial b_1}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial b_1}{\partial \beta}\,d\beta \end{aligned}$$

ne dépendra pas du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$. On aura donc

$$\tang\psi = \frac{db_1}{db} = \text{const.},$$

d'où

$$\psi = \text{const.}$$

On pourra orienter les axes coordonnés de telle sorte que l'on ait $\psi = 0$, d'où $db_1 = 0$.

Les formules (8) deviendront alors

$$\mathrm{T} = -\frac{da}{db}, \qquad p = -\frac{da_1}{db}.$$

Si le déterminant

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial a_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial b}{\partial \alpha} & \frac{\partial b}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, on pourra déduire des équations

$$da_1 = \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a_1}{\partial \beta} d\beta,$$

$$db = \frac{\partial b}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta} d\beta$$

les valeurs de $d\alpha$, $d\beta$ en da_1 et en db. Substituant dans la valeur de $da = \frac{\partial a}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta} d\beta$, on trouvera une équation de la forme

$$da = \mathrm{P}\, da_1 + \mathrm{Q}\, db$$

et, par suite,

$$\mathrm{T} = -\frac{\mathrm{P}\, da_1 + \mathrm{Q}\, db}{db} = \mathrm{P}p - \mathrm{Q}.$$

On peut d'ailleurs, en déplaçant l'origine de la quantité Q, faire disparaître le second terme de cette expression. On aura donc les deux relations

$$\psi = 0, \qquad \mathrm{T} = \mathrm{P}p.$$

Les génératrices infiniment voisines de D auront pour équations

$$x = da + db\,z = \mathrm{P}\,da_1 + db\,z,$$
$$y = da_1 + db_1 z = da_1.$$

Ces génératrices sont donc parallèles au plan des xz. Celles pour lesquelles $da_1 = 0$ sont dans ce plan lui-même et rencontrent la droite D à l'origine des coordonnées. Celles pour lesquelles $db = 0$ sont parallèles à D. Ce cas diffère donc de celui des génératrices ordinaires en ce que l'un des foyers est rejeté à l'infini, l'autre étant à l'origine des coordonnées.

Enfin, si le déterminant (15) est nul, $\frac{da_1}{db}$ ne dépendant plus du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$, on aura les deux relations

$$\psi = 0, \qquad p = \text{const.}$$

Désignons par P le rapport constant $\frac{da_1}{db}$. Les génératrices infiniment voisines de D auront pour équations

$$x = da + db\,z,$$
$$y = \mathrm{P}\,db,$$

et aucune d'elles ne coupe plus D à distance finie, mais celles pour lesquelles $db = 0$ lui sont parallèles.

504. Troisième cas : *Complexes*. — On a, dans ce cas, trois paramètres : α, β, γ.

Soit D une droite du complexe. En la choisissant pour axe des z et prenant z pour variable indépendante, on pourra réduire ses équations à la forme

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = t,$$

et celles d'une droite D_1, infiniment voisine, à la forme

$$z = t, \qquad x = da + db\,z, \qquad y = da_1 + db_1 z,$$

da, db, ... étant linéaire en $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$.

Supposons d'abord que D soit une droite *ordinaire*, c'est-à-dire telle que l'on n'ait pas simultanément

$$\frac{\frac{\partial b_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial b}{\partial \alpha}} = \frac{\frac{\partial b_1}{\partial \beta}}{\frac{\partial b}{\partial \beta}} = \frac{\frac{\partial b_1}{\partial \gamma}}{\frac{\partial b}{\partial \gamma}}.$$

Les deux équations

$$db = \frac{\partial b}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial b}{\partial \beta}\,d\beta + \frac{\partial b}{d\gamma}\,d\gamma,$$

$$db_1 = \frac{\partial b_1}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial b_1}{\partial \beta}\,d\beta + \frac{\partial b_1}{\partial \gamma}\,d\gamma$$

permettront d'exprimer deux des quantités $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, par exemple $d\alpha$ et $d\beta$, en fonction linéaire de db, db_1, $d\gamma$. Par suite, da, da_1 deviendront des fonctions linéaires de db db_1, $d\gamma$, telles que

$$da = \mathrm{P}\,db + \mathrm{Q}\,db_1 + \mathrm{R}\,d\gamma,$$
$$da_1 = \mathrm{P}_1\,db + \mathrm{Q}_1\,db_1 + \mathrm{R}_1\,d\gamma.$$

Si l'on pose, en particulier, $db = db_1 = 0$, ces équations se réduiront à $da = \mathrm{R}\,d\gamma$, $da_1 = \mathrm{R}_1\,d\gamma$, et D_1, ayant pour équations

$$x = \mathrm{R}\,d\gamma, \qquad y = \mathrm{R}_1\,d\gamma,$$

sera parallèle à D.

Supposons le plan des zy orienté de manière à contenir une des droites parallèles à D ; on devra avoir $\mathrm{R} = 0$.

Cela posé, entre les formules

$$\mathrm{T} = -\frac{da\,db + da_1\,db_1}{db^2 + db_1^2}, \qquad p = \frac{da\,db_1 - da_1\,db}{db^2 + db_1^2},$$

éliminons da_1; il viendra

$$\mathrm{T}\,db - p\,db_1 = -da = -\mathrm{P}\,db - \mathrm{Q}\,db_1$$

ou

$$\mathrm{T} + \mathrm{P} + (\mathrm{Q} - p)\operatorname{tang}\psi = 0,$$

ou enfin, en déplaçant l'origine sur l'axe des z de la quantité P, ce qui changera T en T — P,

$$T + (Q - p)\operatorname{tang}\psi = 0.$$

505. Si D était une droite singulière, le rapport $\frac{db_1}{db}$ étant indépendant de $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, on aurait la relation plus simple

$$\operatorname{tang}\psi = \text{const.}$$

VIII. — Surfaces.

506. Considérons une surface définie par trois équations de la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Un plan

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

sera osculateur si l'on a

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0, \\ a\frac{\partial x}{\partial u} + b\frac{\partial y}{\partial u} + c\frac{\partial z}{\partial u} &= 0, \\ a\frac{\partial x}{\partial v} + b\frac{\partial y}{\partial v} + c\frac{\partial z}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant a, b, c, d, on a l'équation du *plan tangent*

$$(1) \qquad 0 = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z),$$

où

$$(2)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v} - \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v}, \\[2ex] B = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\[2ex] C = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Remarquons les identités

$$(3)\qquad \begin{cases} A\dfrac{\partial x}{\partial u} + B\dfrac{\partial y}{\partial u} + C\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0, \\[2ex] A\dfrac{\partial x}{\partial v} + B\dfrac{\partial y}{\partial v} + C\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

qui se résument dans la suivante :

$$(4)\qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0.$$

La *normale* aura pour équations

$$(5)\qquad \frac{X-x}{A} = \frac{Y-y}{B} = \frac{Z-z}{C}.$$

507. Le carré de la distance du point (u, v) au point infiniment voisin $(u + du, v + dv)$ sera $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

Sa valeur principale sera

$$(6)\qquad \begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)^2 + \ldots \\ &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \end{aligned}$$

en posant

$$(7)\qquad \begin{cases} E = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\[2ex] F = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\[2ex] G = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Remarquons l'identité

$$(8)\qquad EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

508. La distance δ du point $(u+du, v+dv)$ au plan tangent en (u, v) est

$$\frac{A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Pour déterminer sa valeur principale, remplaçons Δx, Δy, Δz par leurs développements

$$\Delta x = dx + \frac{1}{2} d^2 x + \ldots, \qquad \ldots .$$

Les termes du premier ordre se détruisent et il vient

$$2\delta = \frac{A\,d^2 x + B\,d^2 y + C\,d^2 z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

D'ailleurs

$$d^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2,$$

. . . .

Donc

$$(9) \qquad 2\delta = R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2,$$

en posant pour abréger

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} R &= \frac{A\dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ S &= \frac{A\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ T &= \frac{A\dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} + B\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + C\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}\right.$$

509. Supposons que u et v au lieu d'être indépendants soient liés par une relation donnée, ou, ce qui revient au même, soient des fonctions données d'un troisième paramètre t; x, y, z deviendront des fonctions de t, et, lorsque

ce paramètre varie, le point (x, y, z) décrit une ligne L, située sur la surface proposée.

Pour déterminer la tangente à cette ligne, son plan osculateur, etc., il faudra connaître les dérivées x', x'', ...; y', y'', ...; z', z'', ... qui figurent dans les formules de la théorie des courbes gauches. Mais ces dérivées s'obtiennent immédiatement; soient en effet u', u'', ...; v', v'', ... les dérivées successives de u et de v; nous aurons

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u} u' + \frac{\partial x}{\partial v} v',$$

$$x'' = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} u'^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} u' v' + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial x}{\partial u} u'' + \frac{\partial x}{\partial v} v'',$$

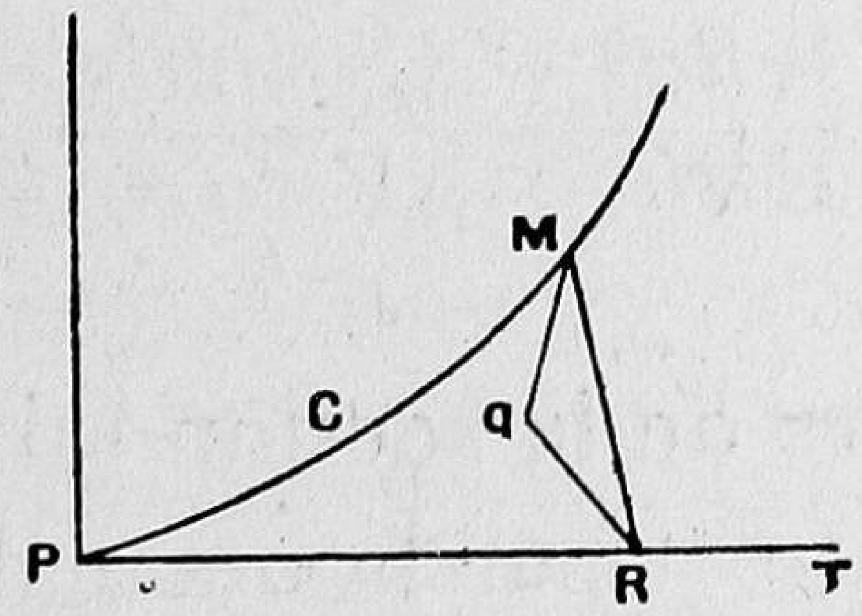
. . . .

Les quantités x', y', z' ainsi déterminées sont les paramètres directeurs de la tangente à L. Substituées dans l'équation du plan tangent, elles y satisfont identiquement. Donc *le plan tangent au point* (u, v) *est le lieu des tangentes aux courbes tracées sur la surface et passant par ce point.*

Les rapports mutuels de x', y', z' dépendent du rapport $\frac{v'}{u'} = \frac{dv}{du}$. A chaque valeur de ce rapport répond une tangente déterminée.

510. Cherchons les lois qui régissent la courbure des diverses lignes qui peuvent être tracées sur la surface à partir du point P de coordonnées u, v.

Fig. 19.



Soient C l'une de ces courbes, PT sa tangente; M un point de C infiniment voisin de P; Q, R ses projections sur le plan tangent et sur la tangente PT; ds l'arc PM.

On aura

$$\mathrm{MR} = \frac{\mathrm{MQ}}{\cos \mathrm{QMR}}.$$

Soit k la courbure cherchée. La valeur principale de MR est connue; elle est égale à

$$\frac{1}{2} k\, ds^2.$$

On aura donc

$$k = \lim \frac{2\,\mathrm{MR}}{ds^2} = \lim \frac{1}{\cos \mathrm{QMR}} \frac{2\,\mathrm{MQ}}{ds^2}.$$

Or, à la limite le plan PRM devient le plan osculateur à C; soit θ l'angle que ce plan forme avec la normale en P; cos QMR tendra vers $\cos\theta$. D'autre part 2 MQ a pour valeur principale

$$\mathrm{R}\, du^2 + 2\mathrm{S}\, du\, dv + \mathrm{T}\, du^2.$$

Enfin

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2.$$

On a donc la formule

$$(11) \qquad k = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\mathrm{R}\, du^2 + 2\mathrm{S}\, du\, dv + \mathrm{T}\, dv^2}{\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2}.$$

Donc C a la même courbure que la section plane faite dans la surface par son plan osculateur.

Cette courbure est égale à $\dfrac{\mathrm{K}}{\cos\theta}$,

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{R}\, du^2 + 2\mathrm{S}\, du\, dv + \mathrm{T}\, dv^2}{\mathrm{E}\, du^2 + 2\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2}$$

désignant la courbure de la section faite par un plan passant par la même tangente et par la normale.

511. Reste à discuter la manière dont K varie avec la direction de la tangente $\left(\text{caractérisée par le rapport } \dfrac{dv}{du}\right)$:

1° Si

$$\frac{R}{E} = \frac{S}{F} = \frac{T}{G}, \tag{12}$$

K est indépendant de cette direction. On dira dans ce cas que le point P est un *ombilic*.

2° Supposons au contraire que K varie avec $\frac{dv}{du}$. Il s'annulera pour les deux *directions asymptotiques* définies par l'équation

$$R\,du^2 + 2S\,du\,dv + T\,dv^2 = 0. \tag{13}$$

Elles seront réelles ou imaginaires suivant le signe de $RT - S^2$. Si

$$RT - S^2 = 0, \tag{14}$$

elles coïncident et le point P sera dit *parabolique*.

512. Cherchons encore les maxima et minima de K.

Cette expression, étant un quotient de deux formes quadratiques $\frac{f}{\varphi}$ en du et dv dont celle qui figure en dénominateur est toujours positive, admet toujours un maximum et un minimum réels. Pour déterminer ces *courbures principales* et les directions correspondantes (*directions principales*) nous aurons (**407**) à égaler à zéro les dérivées de $f - \lambda\varphi$, d'où les deux équations

$$(R - \lambda E)\,du + (S - \lambda F)\,dv = 0,$$
$$(S - \lambda F)\,du + (T - \lambda G)\,dv = 0.$$

Éliminant $\frac{dv}{du}$, il vient pour déterminer les courbures principales l'équation du second degré

$$(R - \lambda E)(T - \lambda G) - (S - \lambda F)^2 = 0. \tag{15}$$

Éliminons au contraire λ; nous obtiendrons pour définir les directions principales l'équation

$$\frac{R\,du + S\,dv}{S\,du + T\,dv} = \frac{E\,du + F\,dv}{F\,du + G\,dv},$$

qui peut s'écrire ainsi:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} E & F & G \\ R & S & T \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux directions qu'elle détermine sont toujours réelles. Elles sont en outre rectangulaires. Soient en effet v'_1, v'_2 les deux valeurs que donne cette équation pour $\frac{dv}{du}$. Les directions correspondantes auront pour paramètres directeurs

$$\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'_1,\quad \frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'_1,\quad \frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}v'_1$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'_2,\quad \frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}v'_2,\quad \frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}v'_2.$$

Nous aurons donc à vérifier la relation

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'_1\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial v}v'_2\right)+\ldots \\ &= E + F(v'_1+v'_2) + G v'_1 v'_2. \end{aligned}$$

Or, en substituant les valeurs de $v'_1+v'_2$, $v'_1 v'_2$ tirées de l'équation (16) et chassant les dénominateurs, cette relation se réduit à l'identité

$$E(SG-TF)+F(ET-RG)+G(RF-ES)=0.$$

513. On nomme *ligne de courbure* une ligne tracée sur la surface et telle qu'en chacun de ses points la direction de sa tangente coïncide avec une direction principale.

Pour obtenir une semblable ligne il faut donc trouver une fonction v de u telle que $\frac{dv}{du}$ soit égale à l'une des racines v'_1, v'_2 de l'équation (16).

Or l'équation différentielle

$$\frac{dv}{du} = v'_1$$

admet une famille de solutions

$$v = f(u, c)$$

dépendant d'une constante arbitraire c, laquelle peut être choisie de telle sorte que, pour une valeur initiale donnée $u = u_0$, v prenne une valeur v_0 choisie à volonté.

L'équation

$$\frac{dv}{du} = v'_2$$

donne un résultat semblable.

Il existe donc deux séries de lignes de courbure. Par chaque point (u_0, v_0) passe une ligne de chaque série; ces deux lignes se croisent à angle droit.

514. Les *lignes asymptotiques* sont celles où la direction de la tangente en chaque point coïncide avec une des directions asymptotiques. Il y en a également deux séries, mais elles peuvent être imaginaires.

515. Appliquons les formules précédentes à la surface de la *vis à filet carré*, représentée par les équations

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v. \qquad z = av.$$

Les dérivées partielles des coordonnées sont données par le Tableau suivant :

	$\frac{\partial}{\partial u}$.	$\frac{\partial}{\partial v}$.	$\frac{\partial^2}{\partial u^2}$.	$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}$.	$\frac{\partial^2}{\partial v^2}$.
x.	$\cos v$	$-u \sin v$	0	$-\sin v$	$-u \cos v$
y.	$\sin v$	$u \cos v$	0	$\cos v$	$-u \sin v$
z.	0	a	0	0	0

On en déduit successivement

$$A = a \sin v, \qquad B = -a \cos v, \qquad C = u,$$
$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = u^2 + a^2,$$
$$A^2 + B^2 + C^2 = u^2 + a^2,$$
$$R = 0, \qquad S = \frac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}}, \qquad T = 0.$$

L'équation des lignes asymptotiques se réduit à

$$\frac{-2a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\, du\, dv = 0.$$

On y satisfait en posant soit $u =$ const., soit $v =$ const. La première supposition donne une série d'hélices, la seconde une série de droites horizontales.

L'équation des lignes de courbure sera

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & \dfrac{-a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \\ dv^2 & -du\, dv & du^2 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\frac{dv}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}},$$
$$\pm v = \log\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + \text{const.},$$
$$u + \sqrt{u^2 + a^2} = C e^{\pm v},$$
$$u - \sqrt{u^2 + a^2} = \frac{-a^2}{u + \sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{a^2}{C} e^{\mp v},$$

et enfin

$$u = \frac{1}{2}\left[C e^{\pm v} - \frac{a^2}{C} e^{\mp v}\right],$$

le double signe correspondant aux deux séries de lignes de courbure.

516. On prend souvent x et y comme variables indépendantes. Il faut alors poser, dans les formules précédentes,

$x = u$, $y = v$ et par suite

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = 0.$$

Restent les dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

qu'on représente généralement par

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t.$$

On aura par ces substitutions

$$A = -p, \qquad B = -q, \qquad C = 1,$$
$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2,$$
$$R = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad S = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad T = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Les ombilics seront définis par les équations

$$(17) \qquad \frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2};$$

la ligne des points paraboliques par celle-ci,

$$(18) \qquad rt - s^2 = 0;$$

les directions asymptotiques par celle-ci,

$$(19) \qquad r\, dx^2 + 2s\, dx\, dy + t\, dy^2 = 0;$$

les directions principales par celle-ci,

$$(20) \qquad [(1 + p^2)s - pqr]\, dx^2 + [(1 + p^2)t - (1 + q^2)r]\, dx\, dy + [pqt - (1 + p^2)s]\, dy^2 = 0.$$

Enfin les courbures principales seront données par l'équa-

tion

$$\left[\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-(1+p^2)\lambda\right]\left[\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-(1+q^2)\lambda\right]$$
$$-\left(\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-pq\lambda\right)^2=0,$$

ou, en développant et posant pour abréger $\lambda\sqrt{1+p^2+q^2}=\mu$,

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}&(1+p^2+q^2)\mu^2-[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t]\mu\\&\qquad+rt-s^2=0.\end{aligned}\right.$$

517. Pour mieux étudier la manière dont une surface se comporte aux environs d'un de ses points, nous choisirons ce point pour origine des coordonnées et la normale à la surface pour axe des z. On devra avoir en ce point

$$x=y=z=p=q=0.$$

Le développement de z par la série de Taylor sera donc de la forme

$$z=\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{2}+\ldots.$$

On peut d'ailleurs choisir la direction des axes Ox, Oy de telle sorte que b soit nul. Soit donc

$$2z=ax^2+cy^2+\ldots.$$

On donne le nom d'*indicatrice* à la conique

$$1=ax^2+cy^2.$$

Si l'on coupe la surface par un plan horizontal $z=\varepsilon$ voisin de l'origine, l'équation de la section sera sensiblement (dans le voisinage de l'origine)

$$2\varepsilon=ax^2+cy^2.$$

C'est une courbe semblable à l'indicatrice.

Si a et c sont de même signe, la section sera une petite ellipse, réelle si ε a le signe de a et de c, imaginaire dans le

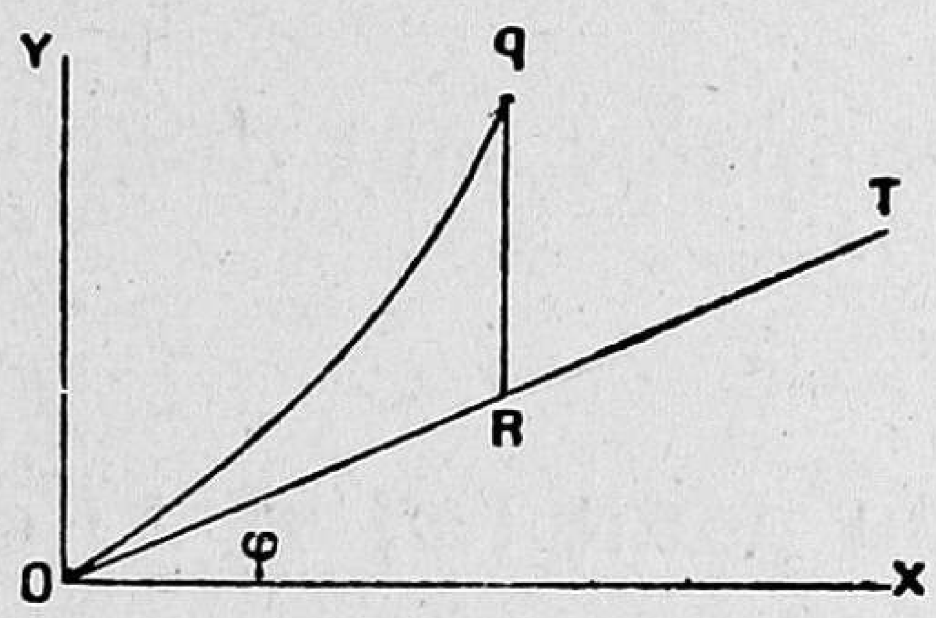
cas contraire. La surface est donc tout entière d'un même côté du plan tangent.

Si a et c sont de signes contraires, les sections sont des hyperboles, toujours réelles. La surface traverse donc son plan tangent. Celui-ci la coupe suivant une ligne ayant un point double à l'origine, puisque aux environs de ce point la section peut être assimilée à un couple de droites.

Enfin, si a ou c est nul, l'indicatrice est formée de deux droites parallèles (cas particulier du genre parabole). Pour savoir dans ce cas si la surface traverse ou non son plan tangent, il faudrait discuter les termes du troisième degré en x, y, ceux du deuxième pouvant cesser d'être prépondérants si x et y ne sont pas du même ordre de grandeur.

518. Cherchons l'expression de la courbure K d'une section normale, dont la tangente OT fait l'angle φ avec l'axe des x.

Fig. 20.



Prenons sur cette ligne un arc infiniment petit OQ; soient ds sa longueur; x, y, z les coordonnées du point Q; R sa projection sur OT. La courbure cherchée sera la limite du rapport

$$\frac{2\overline{QR}}{ds^2}.$$

Or on a

$$x = \overline{OR}\cos\varphi, \qquad y = \overline{OR}\sin\varphi,$$

$$2\overline{QR} = 2z = ax^2 + cy^2 + \ldots = \overline{OR}^2(a\cos^2\varphi + c\sin^2\varphi) + \ldots.$$

D'autre part ds a la même valeur principale que sa corde OQ, qu'on peut elle-même remplacer par OR puisque QR est d'ordre supérieur à OQ. On trouve donc pour la limite

cherchée

$$K = a\cos^2\varphi + c\sin^2\varphi. \tag{22}$$

Si a et c sont de même signe, K conserve donc un signe constant. S'ils sont de signe contraire, K peut changer de signe. Il s'annule pour les deux directions $\operatorname{tang}\varphi = \pm\sqrt{\frac{-a}{c}}$ qui donnent les asymptotes de l'indicatrice.

Si a ou c est nul, ces deux directions se confondent en une seule; K ne change pas de signe, mais il y a une direction où il s'annule; le point O est parabolique.

Si $a = c$, K a la valeur constante a; le point O est un ombilic.

Si a et c sont inégaux, soit par exemple $a > c$. On peut écrire

$$K = a - (a - c)\sin^2\varphi.$$

Il a son maximum a pour $\varphi = 0$ et son minimum c pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Les directions principales sont donc celles des axes de l'indicatrice.

519. La normale au point (x, y, z) de la surface a pour équations

$$\frac{X - x}{-p} = \frac{Y - y}{-q} = Z - z.$$

D'ailleurs z, p, q sont fonctions des deux variables indépendantes x, y. Les normales à la surface formeront donc une congruence. Mais cette congruence présente un caractère particulier.

Pour le reconnaître, cherchons comment se distribuent autour de la normale OZ les normales infiniment voisines.

On a

$$z = \frac{ax^2 + cy^2}{2} + \ldots,$$

$$p = ax + \ldots,$$

$$q = cy + \ldots.$$

Si donc on suppose x et y infiniment petits on aura au second ordre près

$$z = 0, \qquad p = ax, \qquad q = cy,$$

ce qui donnera, pour équations des normales dont il s'agit,

$$\frac{X-x}{-ax} = \frac{Y-y}{-cy} = Z - z$$

ou

$$X = x(1 - aZ), \qquad Y = y(1 - cZ).$$

La droite ainsi définie rencontrera OZ si l'on peut satisfaire aux deux équations

$$x(1 - aZ) = 0, \qquad y(1 - cZ) = 0.$$

Si O n'est ni un ombilic, ni un point parabolique, cela pourra se faire de deux manières :

1° En posant

$$x = 0, \qquad Z = \frac{1}{c};$$

2° En posant

$$y = 0, \qquad Z = \frac{1}{a}.$$

Les deux foyers de la congruence situés sur OZ auront pour ordonnées $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{a}$. Ils se confondront donc avec les centres de courbure des sections principales. Ces points portent le nom de *centres de courbure principaux*.

Les normales infiniment voisines de OZ qui la rencontrent au foyer $Z = \frac{1}{c}$ correspondant à $x = 0$ ont pour équations

$$X = 0, \qquad Y = y(1 - cZ),$$

et sont dans le plan des YZ. Ce plan est donc le plan focal.

De même, au foyer $Z = \frac{1}{a}$ correspondra comme plan focal le plan des XZ ; d'où ce résultat :

Les plans focaux sont rectangulaires et se confondent avec ceux des sections principales.

Les plans principaux de la congruence se confondront avec les plans focaux, et ses points principaux avec les foyers (501).

520. Examinons maintenant le cas où O serait un ombilic ou un point parabolique.

1° Si O est un ombilic, on aura $a = c$. Les deux foyers coïncident ; et les normales voisines de OZ, ayant pour équations

$$X = x(1 - aZ), \qquad Y = y(1 - aZ),$$

viennent toutes la rencontrer au même point $Z = \frac{1}{a}$.

2° Si O est un point parabolique, pour lequel on ait $c = 0$ par exemple, le foyer correspondant sera à l'infini. Les normales voisines de OZ auront pour équations

$$X = x(1 - aZ), \qquad Y = y.$$

Celles pour lesquelles $x = 0$ seront parallèles à OZ ; donc OZ sera une droite singulière dans la congruence des normales.

521. On voit par là qu'un système de droites

$$x = a + bt, \qquad y = a_1 + b_1 t, \qquad z = a_2 + b_2 t,$$

dépendant de deux paramètres α, β, n'est pas formé en général de normales à une même surface. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que sur chaque génératrice les foyers et les points principaux se confondent.

Proposons-nous de trouver directement l'expression de la condition pour que les droites de la congruence ci-dessus soient normales à une même surface S.

Posons pour plus de simplicité

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + b_1^2 + b_2^2}} = c, \qquad \frac{b_1}{\sqrt{b^2 + b_1^2 + b_2^2}} = c_1,$$

$$\frac{b_2}{\sqrt{b^2 + b_1^2 + b_2^2}} = c_2,$$

$$t = \sqrt{b^2 + b_1^2 + b_2^2}\, u,$$

Les équations du système deviendront

$$x = a + cu, \quad y = a_1 + c_1 u, \quad z = a_2 + c_2 u,$$

et l'on aura identiquement

$$c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1,$$

et en différentiant

$$c\,dc + c_1 dc_1 + c_2 dc_2 = 0.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point où l'une des droites de la congruence rencontre la surface S ; θ la valeur correspondante de u ; on aura

$$\xi = a + c\theta, \quad \eta = a_1 + c_1\theta, \quad \zeta = a_2 + c_2\theta,$$

ξ, η, ζ, θ étant des fonctions des paramètres α, β.

Différentiant, on aura

$$\begin{aligned} d\xi &= da + \theta\,dc + c\,d\theta, \\ d\eta &= da_1 + \theta\,dc_1 + c_1 d\theta, \\ d\zeta &= da_2 + \theta\,dc_2 + c_2 d\theta. \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations multipliées respectivement par c, c_1, c_2 : il viendra

$$0 = c\,da + c_1 da_1 + c_2 da_2 + d\theta,$$

car c, c_1, c_2 étant les coefficients directeurs de la normale à S, et $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, ceux d'une tangente à cette surface, $c d\xi + c_1 d\eta + c_2 d\zeta$ sera nul.

L'équation que nous venons d'obtenir se décompose dans les deux suivantes :

$$c\frac{\partial a}{\partial \alpha} + c_1 \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} + c_2 \frac{\partial a_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = 0,$$

$$c\frac{\partial a}{\partial \beta} + c_1 \frac{\partial a_1}{\partial \beta} + c_2 \frac{\partial a_2}{\partial \beta} + \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = 0.$$

Dérivons la première par rapport à β, la seconde par rapport

à α et retranchons ; θ sera éliminé et il restera l'équation de condition

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\sum c\frac{\partial a}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\sum c\frac{\partial a}{\partial\beta} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs et supprimant les termes qui se détruisent,

$$\sum\left(\frac{\partial c}{\partial\beta}\frac{\partial a}{\partial\alpha} - \frac{\partial c}{\partial\alpha}\frac{\partial a}{\partial\beta}\right) = 0. \tag{23}$$

522. La considération de la congruence des normales fournit un nouveau moyen pour déterminer les directions principales et les centres de courbure principaux en un point (x, y, z) d'une surface.

Supposons x, y, z exprimés au moyen de deux paramètres u, v.

La normale au point (x, y, z) a pour équations

$$X = x + At, \qquad Y = y + Bt, \qquad Z = z + Ct,$$

et la normale en un point voisin aura pour équations

$$\begin{aligned} X &= x + dx + (A + dA)t_1, \\ Y &= y + dy + (B + dB)t_1, \\ Z &= z + dz + (C + dC)t_1. \end{aligned}$$

Elles se rencontreront si l'on peut déterminer t et t_1 de manière à satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} x + At &= x + dx + (A + dA)t_1, \\ y + Bt &= y + dy + (B + dB)t_1, \\ z + Ct &= z + dz + (C + dC)t_1 \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$\left\{\begin{aligned} dx + dA\,t_1 + A(t_1 - t) &= 0, \\ dy + dB\,t_1 + B(t_1 - t) &= 0, \\ dz + dC\,t_1 + C(t_1 - t) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Pour que ces équations soient compatibles il faut qu'on

ait

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} dx & dA & A \\ dy & dB & B \\ dz & dC & C \end{vmatrix} = 0.$$

En substituant dans ce déterminant les valeurs

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad dA = \frac{\partial A}{\partial u}du + \frac{\partial A}{\partial v}dv, \qquad \ldots$$

on obtiendra l'équation entre du et dv qui définit les directions principales.

Reste à déterminer le rayon de courbure principal

$$\rho = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2} = t\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

Pour cela nous calculerons la valeur de t [ou plutôt celle de t_1 qui en diffère infiniment peu], d'après les équations (24).

Pour cela remplaçons dx, dA, ... par leurs valeurs. Ces équations deviennent

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u}t_1\right)du + \left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial v}t_1\right)dv + A(t_1 - t) = 0,$$

....

Éliminant du, dv, $t_1 - t$, il vient

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial u}t_1 & \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial v}t_1 & A \\ \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}t_1 & \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial v}t_1 & B \\ \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial u}t_1 & \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial v}t_1 & C \end{vmatrix} = 0,$$

équation du second degré en t_1 dont les racines divisées par $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ donneront les rayons de courbure principaux

523. *Lignes géodésiques.* — Ce sont des lignes telles que si l'on prend, sur l'une d'elles, deux points P, Q (suffisamment voisins) l'arc PQ soit le plus court chemin qu'on puisse tracer sur la surface entre P et Q.

Le plan osculateur à une ligne géodésique contient la normale à la surface.

Supposons en effet qu'au point P il fît avec la normale un angle θ. Menons la tangente PT à la ligne géodésique. Soit K la courbure de la section normale faite par cette tangente. La géodésique aura pour courbure $\frac{K}{\cos\theta}$.

Soit Q un point de la géodésique infiniment voisin de P. Par ce point et par la normale en P faisons passer un plan. La section faite par ce plan dans la surface a au point P une tangente PT′ infiniment voisine de PT. La courbure K′ de cette section normale sera donc infiniment voisine de K et par suite plus petite que $\frac{K}{\cos\theta}$.

Or l'excès de longueur d'un arc ds de courbure k sur sa corde PQ est égal (483) à $\frac{1}{2}k^2 ds^3$ ou sensiblement à $\frac{1}{2}k^2\overline{PQ}^2$. Cet excès serait donc moindre pour l'arc de la section normale que pour l'arc géodésique ; celui-ci ne serait donc pas minimum comme l'exige sa définition.

524. On déduit aisément de cette propriété l'équation différentielle des lignes géodésiques.

Considérons en effet, le long d'une de ces lignes, x, y, z, v comme fonctions de la variable indépendante u. Soient $x', x'', \ldots; \ldots; v', v'', \ldots$ leurs dérivées. Le plan osculateur aura pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Pour qu'il contienne la normale on doit avoir

$$(27) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Mais on a

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} v',$$

$$x'' = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} v' + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} v'^2 + \frac{\partial x}{\partial v} v'',$$

. . . .

Substituant dans la relation précédente, on obtient une équation entre u, v, v', v''.

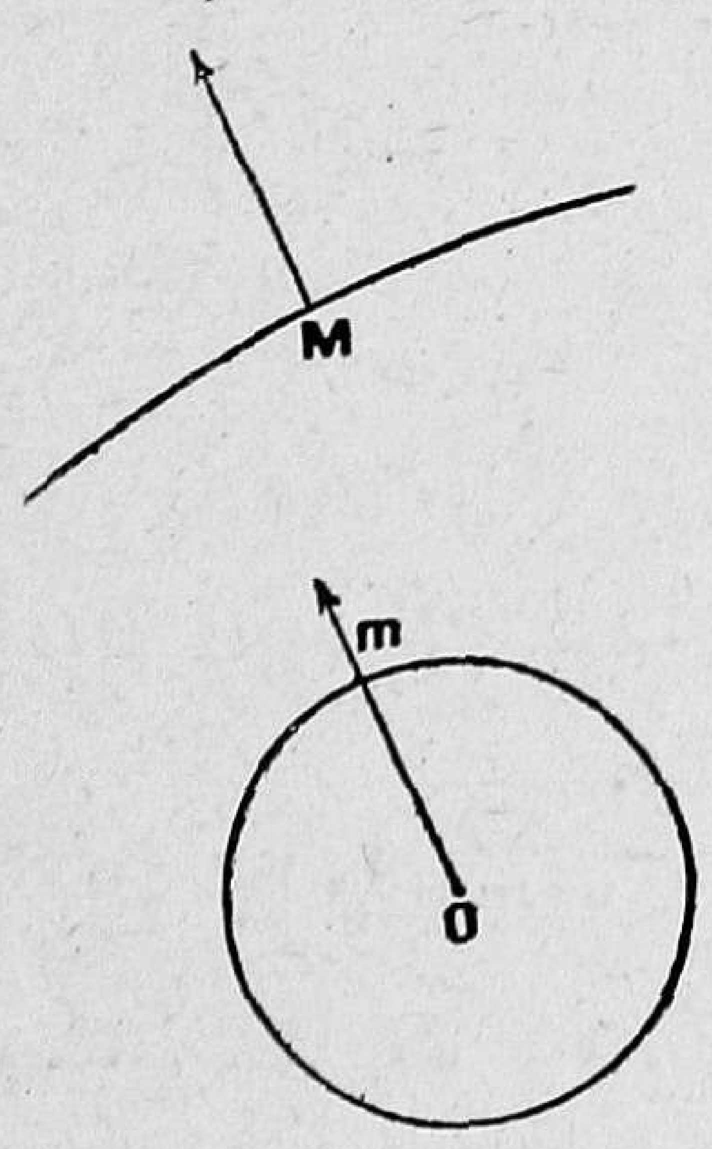
Cette équation différentielle du second ordre a pour solution générale une expression de la forme

$$v = f(u, c_1, c_2)$$

contenant deux constantes arbitraires c_1, c_2. On peut en disposer pour faire passer la ligne géodésique par deux points donnés, ou par un point donné avec une tangente donnée.

525. *Courbure de Gauss.* — Considérons une portion d'une surface S. On peut y distinguer deux faces. Choisissons arbitrairement l'une d'elles pour lui élever une normale. Cette droite sera définie en chaque point M non seulement en direction, mais en sens.

Fig. 21.



Par un point arbitraire O menons une parallèle à cette demi-droite. Le point m où elle rencontre une sphère de rayon *un*, décrite autour du centre O, se nomme l'*image sphérique* du point M.

Si M décrit sur la surface un contour fermé C, p décrira sur la sphère un contour fermé c. L'aire de la région r intérieure au contour c sera par définition la *courbure totale* de la région R de la surface intérieure au contour C.

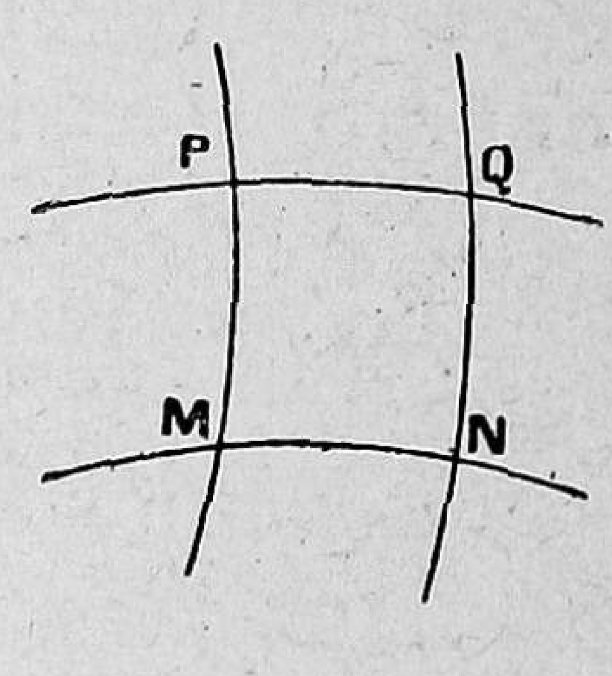
On lui donnera le signe + si les contours C et c respectivement décrits autour des régions R et r sont parcourus dans le même sens; le signe — s'ils sont parcourus en sens contraire.

Le rapport des aires r et R sera la *courbure moyenne* de la région R.

Enfin, on appellera *courbure de la surface* S *au point* M la limite de la courbure moyenne d'un élément infiniment petit de cette surface contenant le point M.

526. Pour déterminer cette courbure, supposons d'abord que l'élément considéré soit limité par deux lignes de courbure MN, MP qui se croisent au point M et par deux autres lignes de courbure infiniment voisines PQ, NQ. Ces lignes

Fig. 22.



se croisant à angle droit, l'élément MNQP peut être assimilé à un petit rectangle plan et son aire R sera sensiblement représentée par MN.PQ.

D'autre part, la normale en N sera contenue (aux infiniment petits près du second ordre) dans le plan mené par la normale en M et par la tangente à MN; car elle passe par le centre de courbure principale et par le point N, qui tous deux sont dans ce plan. De même, la normale en P sera dans le plan mené par la normale en M et la tangente à MP. Ce plan est perpendiculaire au premier.

Donc les images sphériques des arcs MN et MP seront des arcs de grands cercles mn, mp qui se coupent à angle droit. Donc, l'élément r sera un rectangle et aura pour aire le produit de ses côtés mn, mp, qui ne sont autres que les angles formés par la normale en M avec les normales en N et P.

Or, on a évidemment

$$mn = k_1 \mathrm{MN}, \qquad mp = k_2 \mathrm{MP},$$

k_1 et k_2 étant les courbures principales au point M.

Nous obtenons donc ce théorème :

La courbure C *d'une surface en un de ses points est égale au produit des courbures des sections principales.*

527. Pour établir complètement cette proposition, il reste toutefois à montrer que le résultat subsiste si l'on considère sur la surface S un élément quarrable R de forme quelconque, au lieu de l'élément particulier délimité par des lignes de courbure, que nous venons de choisir.

Pour le faire voir, traçons sur la surface, aux environs du point M, un réseau de lignes de courbure infiniment voisines les unes des autres. Ces lignes partageront l'intérieur de R en éléments infiniment petits. Ceux qui rencontrent sa frontière peuvent être négligés à la limite, car la somme de leurs aires est infiniment petite, et il en est évidemment de même de la somme de leurs courbures totales.

Quant aux éléments intérieurs, limités par des lignes de courbure, on peut leur appliquer le théorème précédent. Soit donc de l'un d'eux; l'élément sphérique de' correspondant aura pour valeur principale de son aire l'expression $k_1 k_2 de$, k_1, k_2 désignant les courbures principales au point (x, y, z) origine du rectangle de.

L'aire $r = \Sigma\, de'$ sera donc donnée par l'intégrale définie

$$\int k_1 k_2 de,$$

prise dans l'intérieur de R.

Or k_1, k_2 sont les racines de l'équation (15).

Leur produit est donc égal à

$$\frac{\mathrm{RT}-\mathrm{S}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}.$$

C'est le quotient de deux fonctions continues de u et de v; d'ailleurs, le dénominateur étant égal à $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2$ n'est jamais nul. Donc $k_1 k_2$ est une fonction continue, et l'on pourra poser

$$k_1 k_2 = c + \rho,$$

c désignant la valeur de $k_1 k_2$ au point M, et ρ un reste moindre en valeur absolue que ε, si les dimensions de l'élément R sont assez petites.

On aura donc

$$\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{\int k_1 k_2\, de}{\int de} = \frac{c\int de + \int \rho\, de}{\int de} = c + \frac{\int \rho\, de}{\int de}.$$

Mais le second terme de cette expression tend vers zéro avec les dimensions de l'élément R, car son module est moindre que

$$\frac{\varepsilon\int de}{\int de} = \varepsilon.$$

On a donc bien

$$\lim \frac{r}{\mathrm{R}} = c = \frac{\mathrm{RT}-\mathrm{S}^2}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2},$$

quelle que soit la forme de l'élément considéré.

528. Gauss a établi l'identité suivante, qu'on peut vérifier aisément par des calculs un peu laborieux, mais qui n'offrent

aucune difficulté :

$$
\begin{aligned}
&4(EG-F^2)(RT-S^2)\\
&= E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]\\
&\quad +G\left[\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial u}-2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]\\
&\quad +F\left(\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}-2\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial v}-2\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial u}+4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}\right)\\
&\quad -2(EG-F^2)\left(\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right).
\end{aligned}
$$

Cette formule importante montre que $RT-S^2$, et par suite la courbure c, peut s'exprimer au moyen des seules quantités E, F, G et de leurs dérivées partielles.

529. *Surfaces applicables.* — Soient S, S_1 deux surfaces, sur lesquelles le ds^2 soit respectivement

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,\\
ds_1^2 &= E_1\,du_1^2+2F_1\,du_1\,dv_1+G_1\,dv_1^2.
\end{aligned}
$$

Établissons entre ces deux surfaces une correspondance point par point, en supposant leurs paramètres u, v et u_1, v_1 liés par deux relations

$$u_1=\varphi(u,v),\qquad v_1=\psi(u,v).$$

On en déduit

$$du_1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv,\qquad dv_1=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv.$$

Par la substitution de ces valeurs, ds_1^2 sera transformé en une expression de la forme

$$ds_1^2=\mathcal{E}\,du^2+2\mathcal{F}\,du\,dv+\mathcal{G}\,dv^2.$$

On dira que S_1 est *applicable* sur S si, en choisissant convenablement les deux fonctions φ, ψ, on peut satisfaire

aux trois relations

$$\mathcal{E} = \mathrm{E}, \qquad \mathcal{F} = \mathrm{F}, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{G}.$$

Ce ne sera pas possible en général.

530. Si deux surfaces S, S_1 sont applicables l'une sur l'autre :

1° Les deux surfaces S, S_1 auront la même courbure aux points correspondants;

2° Les arcs de lignes correspondantes auront même longueur;

3° Deux régions correspondantes des deux surfaces auront même aire;

4° Deux lignes quelconques tracées sur S se coupent sous le même angle que leurs correspondantes.

1° En effet, en prenant les mêmes variables indépendantes u et v pour les deux surfaces, la courbure en un point donné ne dépendra (528) que des fonctions E, F, G et de leurs dérivées, qui sont par hypothèse les mêmes pour les deux surfaces.

2° Pour définir une ligne L tracée sur S, on doit établir entre les paramètres u, v une relation

$$v = fu.$$

L'élément $d\sigma$ de son arc sera

$$\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}f' + \mathrm{G}f'^2}\,du,$$

et, si u_0, u_1 sont les valeurs de u aux extrémités de cet arc, sa longueur sera

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}f' + \mathrm{G}f'^2}\,du.$$

Pour obtenir la ligne correspondante L_1 il faudra établir entre u et v la même relation; E, F, G n'étant pas changés

par hypothèse, le $d\sigma$ restera le même et devra être intégré entre les mêmes limites u_0 et u_1.

3° L'élément de l'aire dans les deux surfaces a aussi la même expression

$$\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

et devra être intégré dans le même domaine s'il s'agit de régions correspondantes. Les aires obtenues seront donc égales.

4° Enfin, une courbe définie sur la surface S par l'équation $v = fu$ a pour coefficients directeurs de sa tangente

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} f', \quad \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} f', \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} f'.$$

Une seconde courbe, définie par l'équation $v = f_1 u$, aura de même les coefficients directeurs

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} f'_1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} f'_1, \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} f'_1.$$

L'angle V de ces deux droites sera donné par la formule

$$\cos V = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} f'\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} f'_1\right) + \ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} f'\right)^2 + \ldots}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} f'_1\right)^2 + \ldots}}$$

$$= \frac{E + F(f' + f'_1) + Gf'f'_1}{\sqrt{E + 2Ff' + Gf'^2}\sqrt{E + 2Ff'_1 + Gf'^2_1}},$$

expression qui ne dépend que des rapports mutuels de E, F, G.

531. Cherchons quelles sont les surfaces applicables sur un plan.

Leur courbure doit être nulle, comme celle du plan lui-même. Or, si l'on prend x, y comme variables indépendantes, l'expression générale trouvée plus haut pour cette

courbure

$$\frac{RT - S^2}{EG - F^2}$$

se réduit à

$$\frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Donc, z doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

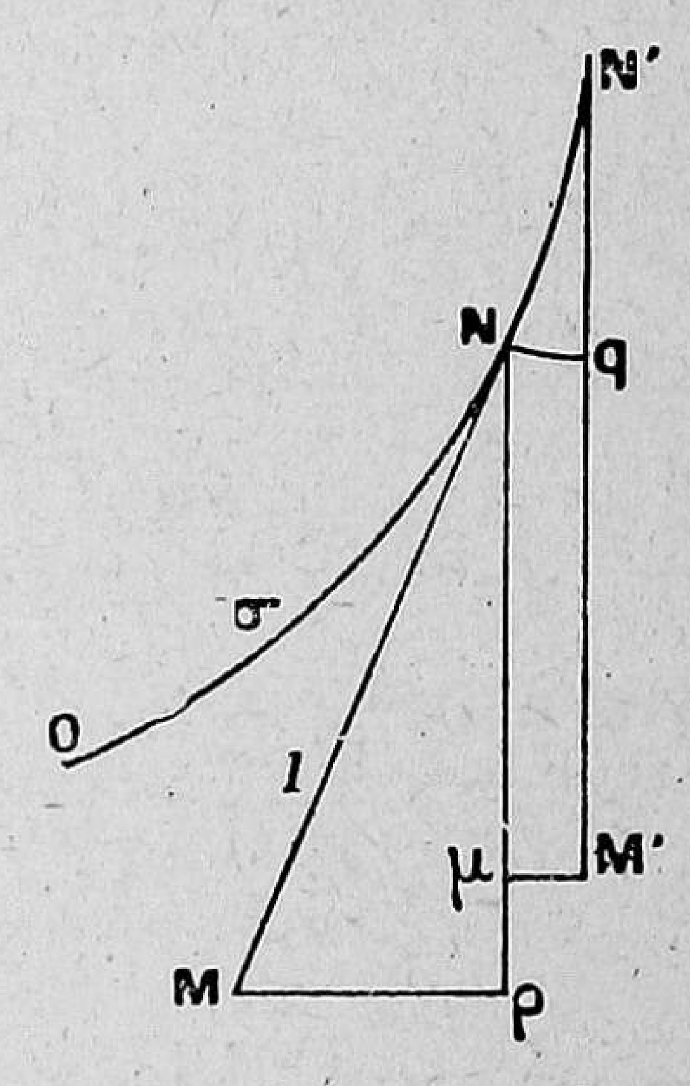
$$rt - s^2 = 0.$$

Nous avons intégré cette équation (184) et montré qu'elle caractérise les surfaces développables.

532. Réciproquement, *toute surface développable est applicable sur un plan.* Pour le démontrer, nous exprimerons les coordonnées de ses points en fonction de deux paramètres particuliers.

Soient C l'arête de rebroussement, M un point quelconque de la surface, MN la génératrice qui y passe, N son point de contact avec C.

Fig. 23.



Le point M sera défini si l'on donne l'arc $ON = \sigma$ compté sur C à partir de l'origine des arcs, et la longueur $NM = l$ du segment à porter sur la génératrice.

Calculons la distance ds du point M au point voisin M' de coordonnées $\sigma + d\sigma$, $l + dl$.

Par N menons la parallèle $N\mu$ à N'M' et menons les droites NQ, $M'\mu$, MP perpendiculaires à cette droite.

On sait que l'angle MNP a pour valeur principale $k\,d\sigma$, k désignant la courbure de C au point N. Ce sera une certaine fonction de l'arc, telle que $\varphi(\sigma)$.

D'autre part, $M'\mu$ est du second ordre par rapport à $d\sigma$. Donc MM' a la même valeur principale que $M\mu$.

Or,

$$\overline{M\mu} = \overline{MP}^2 + \overline{P\mu}^2\,;$$

$\overline{MP} = \overline{MN}\sin MNP$ a pour valeur principale $l\varphi(\sigma)\,d\sigma$. D'autre part,

$$\begin{aligned} P\mu = PN - N\mu &= l\cos MNP - N'M' + N'Q \\ &= l(\cos MNP - 1) - dl + N'Q. \end{aligned}$$

Mais on a au second ordre près

$$\cos MNP = 1, \qquad N'Q = d\sigma.$$

Donc

$$P\mu = d\sigma - dl,$$

et finalement

$$ds^2 = l^2\varphi^2(\sigma)\,d\sigma^2 + (d\sigma - dl)^2.$$

Or, on peut construire dans un plan une courbe dont l'équation intrinsèque soit $k = \varphi(\sigma)$. Sur une tangente à cette courbe menée par le point σ prenons une longueur l. Nous obtiendrons un point M_1 correspondant à M.

Au point M' correspondra de même un point M'_1 infiniment voisin de M_1. Et la distance $M_1M'_1 = ds_1$ sera donnée évidemment par la même formule que nous venons de trouver pour ds. Les deux surfaces sont donc applicables l'une sur l'autre.

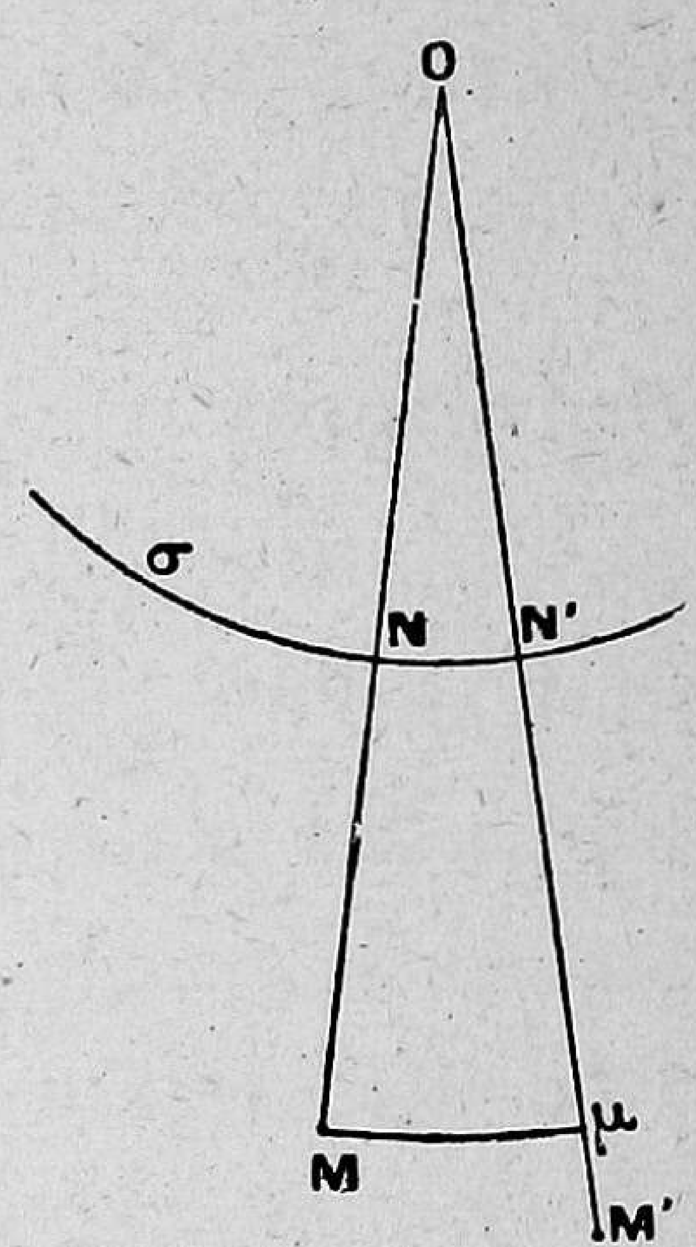
533. Cette démonstration demande une légère modification lorsque, l'arête de rebroussement se réduisant à un seul point, la développable dégénère en un cône. Dans ce cas, coupons le cône par une sphère de rayon *un* ayant pour centre le sommet O du cône. Soit C la courbe d'intersection. Un point M du cône sera déterminé si l'on donne : 1° la longueur l de la génératrice OM; 2° l'arc σ de la courbe C, com-

pris entre l'origine des arcs et le point N où C est rencontrée par OM. Et l'on verra aisément que la distance ds du point M de coordonnées l, σ au point voisin M' de coordonnées $l+dl$, $\sigma+d\sigma$ est donnée par la formule

$$ds^2 = \overline{M\mu}^2 + \overline{\mu M'}^2 = l^2 d\sigma^2 + dl^2,$$

expression identique à celle du ds^2 d'un plan rapporté à des coordonnées polaires.

Fig. 24.



Enfin, si le cône dégénérait en un cylindre, on remplacerait la sphère précédente par un plan perpendiculaire aux génératrices. En prenant pour variables l'arc σ de cette section droite et la longueur l à porter sur la génératrice, on aurait

$$ds^2 = d\sigma^2 + dl^2,$$

expression du ds^2 d'un plan rapporté à des coordonnées cartésiennes.

534. Soit une courbe plane située dans le plan des xz et ayant pour équation

$$z = fu,$$

u désignant l'abscisse et z l'ordonnée d'un de ses points.

Si cette courbe tourne autour de l'arc des z et s'élève en même temps d'une quantité proportionnelle à l'angle v de

rotation, elle engendrera une surface dite *hélicoïde* dont les équations seront

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = fu + av.$$

Son ds^2 sera

$$ds^2 = (1 + f'^2)\,du^2 + 2af'\,du\,dv + (u^2 + a^2)\,dv^2.$$

Les surfaces de révolution sont un cas particulier des précédentes; elles correspondent à l'hypothèse $a = 0$.

Tout hélicoïde est applicable sur une surface de révolution convenablement choisie.

Pour établir cette proposition il nous faut montrer qu'on peut remplacer u, v par de nouvelles variables u_1, v_1 qui réduisent le ds^2 donné à la forme

$$[1 + \varphi'^2(u_1)]\,du_1^2 + u_1^2\,dv_1^2.$$

Or, en complétant le carré formé par les deux derniers termes de ds^2, nous le mettrons sous la forme

$$(u^2 + a^2)\left(dv + \frac{af'\,du}{u^2 + a^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{u^2 f'^2(u)}{u^2 + a^2}\right)du^2.$$

Posons

$$v + \int \frac{af'\,du}{a^2 + u^2} = v_1, \qquad u^2 + a^2 = u_1^2.$$

Cette expression devient

$$u_1^2\,dv_1^2 + \psi\,du_1^2,$$

$$\psi = f'^2\left(\sqrt{u_1^2 - a^2}\right) + \frac{u_1^2}{u_1^2 - a^2}$$

étant une fonction de u_1. Elle aura la forme requise si l'on détermine la fonction φ par la condition

$$1 + \varphi'^2 = \psi,$$

d'où

$$\varphi = \int \sqrt{\psi - 1}\,du_1.$$

535. *Représentations conformes.* — Lorsque les deux surfaces S, S_1 considérées au n° 529 ne sont pas applicables l'une sur l'autre, on ne peut satisfaire à la fois aux trois équations

$$\mathcal{E} = E, \qquad \mathcal{F} = F, \qquad \mathcal{G} = G.$$

Mais on peut déterminer les fonctions φ et ψ qui établissent la correspondance de telle sorte qu'on ait

$$\frac{\mathcal{E}}{E} = \frac{\mathcal{F}}{F} = \frac{\mathcal{G}}{G}.$$

Si ces conditions sont satisfaites, la représentation ainsi obtenue des points de S_1 par des points de S sera dite *conforme*.

Une semblable représentation n'altère pas les angles, car l'expression donnée pour $\cos V$ (530) ne dépend que des rapports des coefficients E, F, G.

La recherche des représentations conformes d'une surface sur un plan constitue le problème *des cartes géographiques*.

Connaissant une solution de ce problème, on en déduira une infinité en la combinant avec les représentations conformes d'un plan sur lui-même.

536. La recherche de celles-ci revient à déterminer de toutes les manières possibles des fonctions X, Y, K des coordonnées x, y satisfaisant à la relation

$$dX^2 + dY^2 = K(dx^2 + dy^2).$$

Cette équation peut s'écrire ainsi

$$(dX + i\,dY)(dX - i\,dY) = K(dx + i\,dy)(dx - i\,dy).$$

On y satisfait en posant

$$dX + i\,dY = (M + Ni)(dx + i\,dy),$$
$$dX - i\,dY = (M - Ni)(dx - i\,dy),$$
$$K = M^2 + N^2.$$

On a une autre solution en changeant le signe de Y.

On devra donc prendre pour $X + iY$ (ou pour $X - iY$) une fonction (arbitraire) de la variable complexe $x + iy$ et pour $M + Ni$ sa dérivée.

537. Posons par exemple

$$X - iY = \frac{k^2}{x + iy} = \frac{k^2(x - iy)}{x^2 + y^2}.$$

On aura la solution

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \qquad Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

d'où

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}, \qquad X^2 + Y^2 = \frac{k^4}{x^2 + y^2}.$$

C'est la *transformation par rayons vecteurs réciproques*.

538. Cherchons des représentations conformes d'une sphère de rayon r sur un plan.

Prenant pour variables sur la sphère la longitude φ et la colatitude θ, nous aurons

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

On en déduit aisément

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) = r^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\theta^2}{\sin^2\theta} + d\varphi^2 \right).$$

Cette expression deviendra égale à $K(dx^2 + dy^2)$ si l'on pose

$$dx = \frac{d\theta}{\sin\theta}, \qquad dy = d\varphi,$$

d'où

$$x = \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta, \qquad y = \varphi,$$

avec

$$K = r^2 \sin^2\theta.$$

C'est la *projection de Mercator*. Elle fait correspondre

aux méridiens et aux parallèles de la sphère des droites parallèles aux axes coordonnés.

539. On aura une nouvelle solution en posant, par exemple,

$$X + iY = e^{x+iy},$$

d'où

$$X = e^x \cos y = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \cos\varphi,$$
$$Y = e^x \sin y = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta \sin\varphi.$$

C'est la *projection stéréographique.*

IX. — Coordonnées curvilignes.

540. Soient, comme au n° **153**, x, y, z et t, u, v deux systèmes de variables, liées par les relations

$$(1) \quad x = \varphi_1(t, u, v), \qquad y = \varphi_2(t, u, v), \qquad z = \varphi_3(t, u, v).$$

Supposons que, dans l'intérieur d'un certain domaine E : 1° les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 admettent des dérivées partielles continues; 2° leur jacobien J n'est pas nul; 3° à deux points (t, u, v) différents correspondent deux points (x, y, z) différents.

Lorsque (t, u, v) décrit le domaine E, (x, y, z) décrira un domaine correspondant E′, dans l'intérieur duquel t, u, v seront réciproquement des fonctions de x, y, z, telles que

$$(2) \quad t = \Phi_1(x, y, z), \qquad u = \Phi_2(x, y, z), \qquad v = \Phi_3(x, y, z).$$

Au lieu de déterminer la position d'un point de E′ par ses coordonnées cartésiennes x, y, z, on peut le faire au moyen des nouvelles variables t, u, v; car, les valeurs de celles-ci étant connues, on peut en déduire celles de x, y, z, et réciproquement. On donne à ces nouvelles coordonnées le nom de *coordonnées curvilignes.*

Les points pour lesquels t a une valeur constante t_0 représentent une surface $\Phi_1(x, y, z) = t_0$, que nous appellerons,

pour abréger, la surface t_0. En faisant varier cette constante, on obtiendra une famille de surfaces. Les équations

$$u = \Phi_2(x, y, z) = \text{const.}, \qquad v = \Phi_3(x, y, z) = \text{const.}$$

représenteront deux autres familles de surfaces.

La valeur principale ds de la distance de deux points infiniment voisins (t, u, v) et $(t + dt, u + du, v + dv)$ est donnée (153) par la formule

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 = \mathrm{M}_1\, dt^2 + \mathrm{M}_2\, du^2 + \mathrm{M}_3\, dv^2 + 2\mathrm{N}_1\, du\, dv \\ + 2\mathrm{N}_2\, dv\, dt + 2\mathrm{N}_3\, dt\, du, \end{aligned} \right.$$

où

$$\mathrm{M}_1 = \sum \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right)^2, \qquad \mathrm{N}_1 = \sum \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}, \qquad \cdots$$

La valeur principale $d\mathrm{V}$ de l'élément de volume compris entre les surfaces t, $t + dt$; u, $u + du$; v, $v + dv$ est donnée d'autre part (153) par la formule

$$(4) \qquad d\mathrm{V} = |\,\mathrm{J}\,|\, dt\, du\, dv.$$

541. En chaque point x, y, z passent une surface t, une surface u et une surface v. Les plans tangents à ces surfaces ont respectivement pour équations

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(\mathrm{X} - x) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(\mathrm{Y} - y) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(\mathrm{Z} - z) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(\mathrm{X} - x) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(\mathrm{Y} - y) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(\mathrm{Z} - z) = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(\mathrm{X} - x) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}(\mathrm{Y} - y) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}(\mathrm{Z} - z) = 0.$$

Ils se couperont à angle droit si l'on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}\frac{\partial \Phi_3}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0. \end{aligned} \right.$$

Si ces équations sont identiquement satisfaites, quels que soient x, y, z, les surfaces des trois familles se couperont partout à angle droit, et formeront ce qu'on nomme un *système orthogonal*.

Dans ce cas, les expressions de ds^2 et de dV, données ci-dessus, se simplifieront.

Considérons, en effet, l'élément de volume compris entre les six surfaces t, $t+dt$; u, $u+du$; v, $v+dv$. Il se réduit sensiblement à un parallélépipède rectangle. Le carré ds^2 de sa diagonale sera donné par la formule (3). Ceux de ses arêtes seront respectivement $M_1\,dt^2$, $M_2\,du^2$, $M_3\,dv^2$. Mais le carré de la diagonale doit être égal à la somme des carrés des trois arêtes. Donc on aura

$$ds^2 = M_1\,dt^2 + M_2\,du^2 + M_3\,dv^2$$

et N_1, N_2, N_3 seront nuls.

D'autre part, le volume du parallélépipède sera le produit de ses arêtes; d'où

$$dV = \sqrt{M_1 M_2 M_3}\,dt\,du\,dv.$$

Nous allons passer rapidement en revue les systèmes de coordonnées les plus usités.

542. *Coordonnées polaires.* — Posons

$$x = r\sin\lambda\cos\mu,$$
$$y = r\sin\lambda\sin\mu,$$
$$z = r\cos\lambda.$$

Les variables r, λ, μ se nomment les coordonnées polaires du point (x, y, z).

Ajoutant les carrés de ces équations, il vient

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Les surfaces $r = \text{const.}$ sont donc des sphères ayant l'origine pour centre.

On a, d'autre part,

$$\frac{x^2+y^2}{z^2} = \operatorname{tang}^2\lambda.$$

Les surfaces $\lambda =$ const. sont donc des cônes de révolution autour de l'axe des z.

Enfin

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\mu.$$

Les surfaces $\mu =$ const. sont donc des plans passant par l'axe des z.

Ces trois systèmes de surfaces se coupent évidemment à angle droit.

En faisant varier r de o à ∞, λ de o à π, et μ de o à 2π, on obtiendra tous les points de l'espace, chacun une seule fois. (On doit excepter les points de l'axe des z pour lesquels μ est indéterminé. A l'origine, λ est également indéterminé.)

On a

$$\begin{aligned} M_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 \\ &= \sin^2\lambda\cos^2\mu + \cos^2\lambda\cos^2\mu + \sin^2\mu = 1, \\ M_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2 \\ &= r^2\cos^2\lambda\cos^2\mu + r^2\cos^2\lambda\sin^2\mu + r^2\sin^2\lambda = r^2, \\ M_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2 \\ &= r^2\sin^2\lambda\sin^2\mu + r^2\sin^2\lambda\cos^2\mu = r^2\sin^2\lambda \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2\,d\lambda^2 + r^2\sin^2\lambda\,d\mu^2, \\ dV &= r^2\sin\lambda\,dr\,d\lambda\,d\mu. \end{aligned}$$

L'emploi des coordonnées polaires est surtout avantageux dans les questions relatives à la sphère ou aux surfaces de révolution.

543. *Coordonnées semi-polaires.* — Pour les cylindres droits, on emploie de préférence les coordonnées *semi-polaires*

$$x = r\cos\mu,$$
$$y = r\sin\mu,$$
$$z = z.$$

Les surfaces $z = \text{const.}$ représentent ici des plans parallèles au plan des xy; les surfaces $r = \text{const.}$ des cylindres $x^2 + y^2 = r^2$, de révolution autour de l'axe des z; les surfaces $\mu = \text{const.}$, des plans $\frac{x}{y} = \text{tang}\,\mu$ qui passent par cet axe. Ces surfaces se coupent à angle droit, et l'on obtiendra tous les points de l'espace, une fois chacun, en faisant varier r de o à ∞, μ de o à 2π, z de $-\infty$ à $+\infty$ (sauf pour l'axe des z, où μ est indéterminé).

On a ici

$$M_1 = \cos^2\mu + \sin^2\mu = 1,$$
$$M_2 = r^2\sin^2\mu + r^2\cos^2\mu = r^2,$$
$$M_3 = 1,$$

et, par suite,

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\mu^2 + dz^2,$$
$$dV = r\,dr\,d\mu\,dz.$$

544. *Coordonnées elliptiques.* — Les surfaces

$$\frac{X^2}{A+\lambda} + \frac{Y^2}{B+\lambda} + \frac{Z^2}{C+\lambda} - 1 = 0,$$

où λ est un paramètre variable, forment un *système de surfaces homofocales du second degré.*

Par chaque point x, y, z de l'espace passent trois surfaces du système, dont les paramètres seront les racines de l'équation

$$(6) \qquad \frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} - 1 = 0,$$

du troisième degré en λ.

545. *Cette équation a ses trois racines réelles, et respectivement comprises entre* $-$ A *et* $-$ B, *entre* $-$ B *et* $-$ C, *entre* $-$ C *et* $+\infty$ (en supposant, pour fixer les idées, qu'on ait $A > B > C$).

En effet, posons $\lambda = -A + \varepsilon$, ε étant une quantité positive infiniment petite; le premier membre de l'équation deviendra

$$\frac{x^2}{\varepsilon} + \frac{y^2}{B - A + \varepsilon} + \frac{z^2}{C - A + \varepsilon} - 1.$$

Le premier terme $\frac{x^2}{\varepsilon}$ est positif et infiniment grand. Il l'emportera sur les autres, qui sont finis. Le résultat de la substitution sera donc positif.

Si l'on posait $\lambda = -B - \varepsilon$, le premier membre de l'équation deviendrait

$$\frac{x^2}{A - B - \varepsilon} + \frac{y^2}{-\varepsilon} + \frac{z^2}{C - B - \varepsilon} - 1,$$

et serait négatif, le second terme $\frac{y^2}{-\varepsilon}$, qui est négatif et infini, l'emportant sur tous les autres.

Donc, le premier membre de l'équation change de signe entre $\lambda = -A + \varepsilon$ et $\lambda = -B - \varepsilon$. Or, il est évidemment continu dans cet intervalle. Donc, il s'annulera entre ces limites.

On voit, de même, que $\lambda = -B + \varepsilon$ donnera un résultat positif; $\lambda = -C - \varepsilon$ un résultat négatif. Donc, il y a une seconde racine réelle dans cet intervalle.

Enfin, $\lambda = -C + \varepsilon$ donne un résultat positif; $\lambda = +\infty$ un résultat négatif. Donc, il y a une troisième racine réelle, supérieure à $-$ C.

Lorsque λ est $< -A$, $A + \lambda$, $B + \lambda$, $C + \lambda$ étant négatifs, la surface représentée par l'équation (16) sera imaginaire.

Si $\lambda > -A$ et $< -B$, $A + \lambda$ étant positif et $B + \lambda$, $C + \lambda$ négatifs, la surface sera un hyperboloïde à deux nappes.

Si $\lambda > -B < -C$, ce sera un hyperboloïde à une nappe.

Enfin, si $\lambda > -C$, ce sera un ellipsoïde.

Donc, *en chaque point de l'espace se croisent trois surfaces du système, à savoir : un hyperboloïde à une nappe, un hyperboloïde à deux nappes et un ellipsoïde.*

546. *Ces surfaces se coupent à angle droit.* — Soient, en effet,

$$\frac{X^2}{A+\lambda_1}+\frac{Y^2}{B+\lambda_1}+\frac{Z^2}{C+\lambda_1}=1,$$

$$\frac{X^2}{A+\lambda_2}+\frac{Y^2}{B+\lambda_2}+\frac{Z^2}{C+\lambda_2}=1$$

deux de ces surfaces qui se coupent au point (x, y, z). Leurs plans tangents ayant respectivement pour coefficients

$$\frac{x}{A+\lambda_1},\quad \frac{y}{B+\lambda_1},\quad \frac{z}{C+\lambda_1},$$

$$\frac{x}{A+\lambda_2},\quad \frac{y}{B+\lambda_2},\quad \frac{z}{C+\lambda_2},$$

la condition de l'orthogonalité sera

$$(7)\qquad \frac{x^2}{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)}+\frac{y^2}{(B+\lambda_1)(B+\lambda_2)}+\frac{z^2}{(C+\lambda_1)(C+\lambda_2)}=0.$$

Or cette équation s'obtient immédiatement en retranchant l'une de l'autre les deux équations

$$\frac{x^2}{A+\lambda_1}+\frac{y^2}{B+\lambda_1}+\frac{z^2}{C+\lambda_1}=1,$$

$$\frac{x^2}{A+\lambda_2}+\frac{y^2}{B+\lambda_2}+\frac{z^2}{C+\lambda_2}=1$$

et supprimant le facteur commun $\lambda_2-\lambda_1$.

547. Prenons maintenant pour nouvelles coordonnées d'un point (x, y, z) les trois racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de l'équa-

tion (6). Elles seront liées à x, y, z par les relations

$$\frac{x^2}{A+\lambda_1}+\frac{y^2}{B+\lambda_1}+\frac{z^2}{C+\lambda_1}=1,$$

$$\frac{x^2}{A+\lambda_2}+\frac{y^2}{B+\lambda_2}+\frac{z^2}{C+\lambda_2}=1,$$

$$\frac{x^2}{A+\lambda_3}+\frac{y^2}{B+\lambda_3}+\frac{z^2}{C+\lambda_3}=1.$$

Des deux premières, on déduit, par l'élimination de z^2,

$$\left(\frac{C+\lambda_2}{A+\lambda_2}-\frac{C+\lambda_1}{A+\lambda_1}\right)x^2+\left(\frac{C+\lambda_2}{B+\lambda_2}-\frac{C+\lambda_1}{B+\lambda_1}\right)y^2=\lambda_2-\lambda_1$$

ou, en réduisant et snpprimant le facteur commun $\lambda_2-\lambda_1$,

$$\frac{A-C}{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)}x^2+\frac{B-C}{(B+\lambda_1)(B+\lambda_2)}y^2=1.$$

On trouvera, de même,

$$\frac{A-C}{(A+\lambda_1)(A+\lambda_3)}x^2+\frac{B-C}{(B+\lambda_1)(B+\lambda_3)}y^2=1.$$

Éliminons y^2, il viendra

$$\frac{A-C}{A+\lambda_1}\left(\frac{B+\lambda_3}{A+\lambda_3}-\frac{B+\lambda_2}{A+\lambda_2}\right)x^2=\lambda_3-\lambda_2$$

ou, en réduisant et supprimant le facteur $\lambda_3-\lambda_2$,

$$\frac{(A-C)(A-B)}{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)(A+\lambda_3)}x^2=1,$$

$$x^2=\frac{(A+\lambda_1)(A+\lambda_2)(A+\lambda_3)}{(A-B)(A-C)}.$$

On trouvera, de même,

$$y^2=\frac{(B+\lambda_1)(B+\lambda_2)(B+\lambda_3)}{(B-A)(B-C)},$$

$$z^2=\frac{(C+\lambda_1)(C+\lambda_2)(C+\lambda_3)}{(C-A)(C-B)}.$$

Les coordonnées x, y, z n'étant déterminées que par leurs carrés, à chaque système de valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ correspondront huit points, dont un seul situé dans le trièdre des coordonnées positives.

548. Pour calculer l'élément de l'arc ds en fonction de λ_1, λ_2, λ_3, prenons les dérivées logarithmiques des deux membres des équations précédentes. Il viendra

$$2\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda_1}{A+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{A+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{A+\lambda_3},$$
$$2\frac{dy}{y} = \frac{d\lambda_1}{B+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{B+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{B+\lambda_3},$$
$$2\frac{dz}{z} = \frac{d\lambda_1}{C+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{C+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{C+\lambda_3},$$

d'où

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \tfrac{1}{4}x^2\left(\frac{d\lambda_1}{A+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{A+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{A+\lambda_3}\right)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{4}y^2\left(\frac{d\lambda_1}{B+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{B+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{B+\lambda_3}\right)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{4}z^2\left(\frac{d\lambda_1}{C+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{C+\lambda_2} + \frac{d\lambda_3}{C+\lambda_3}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}d\lambda_1^2\left[\frac{x^2}{(A+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(B+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(C+\lambda_1)^2}\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{4}d\lambda_2^2\left[\frac{x^2}{(A+\lambda_2)^2} + \frac{y^2}{(B+\lambda_2)^2} + \frac{z^2}{(C+\lambda_2)^2}\right] \\ &\quad + \tfrac{1}{4}d\lambda_3^2\left[\frac{x^2}{(A+\lambda_3)^2} + \frac{y^2}{(B+\lambda_3)^2} + \frac{z^2}{(C+\lambda_3)^2}\right]. \end{aligned}$$

Les autres termes se détruiront en vertu de l'équation (7) et de ses analogues.

549. Reste à calculer la somme

$$\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{(A+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(B+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(C+\lambda_1)^2}\right]$$

et ses analogues.

Substituant les valeurs de x^2, y^2, z^2, cette somme devient

$$\frac{1}{4}\left[\frac{(A+\lambda_2)(A+\lambda_3)}{(A-B)(A-C)(A+\lambda_1)}+\frac{(B+\lambda_2)(B+\lambda_3)}{(B-A)(B-C)(B+\lambda_1)}+\frac{(C+\lambda_2)(C+\lambda_3)}{(C-A)(C-B)(C+\lambda_1)}\right];$$

elle est égale à

$$\frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(A+\lambda_1)(B+\lambda_1)(C+\lambda_1)}.$$

On peut le vérifier immédiatement en appliquant à cette dernière expression, considérée comme fraction rationnelle en λ_1, la règle connue pour la décomposition en fractions simples.

Donc, en désignant par M_1 cette fraction et par M_2, M_3 deux fractions analogues qu'on obtiendrait en permutant circulairement λ_1, λ_2, λ_3, on aura

$$(8)\qquad ds^2 = M_1\,d\lambda_1^2 + M_2\,d\lambda_2^2 + M_3\,d\lambda_3^2,$$
$$dV = \sqrt{M_1 M_2 M_3}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3.$$

550. Théorème de Dupin. — *Si trois systèmes de surfaces*

$$F(x,y,z)=\text{const.},\quad \Phi(x,y,z)=\text{const.},\quad \Psi(x,y,z)=\text{const.}$$

forment un système orthogonal, elles se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.

Soient $F(x,y,z)-c=0$, $\Phi(x,y,z)-c_1=0$ deux surfaces quelconques prises dans les deux premiers systèmes. Prenons pour origine des coordonnées un point quelconque de leur intersection; pour plans coordonnés les plans tangents à ces surfaces et à la surface $\Psi(x,y,z)-c_2=0$ du troisième système qui les croise en ce point.

Le plan des xy étant tangent à la surface $F-c$, on aura, pour $x=0$, $y=0$, $z=0$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=0.$$

On aura, d'ailleurs, $\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0$, sinon l'origine serait un point singulier sur la surface $F = c$, hypothèse que nous excluons.

Le plan des yz étant tangent à la surface $\Phi = c_1$, on aura, de même, pour $x = y = z = 0$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

mais

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \gtrless 0.$$

Enfin le plan des zx étant tangent à la surface $\Psi = c_2$, on aura, toujours pour $x = y = z = 0$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} \gtrless 0.$$

Cela posé, les trois systèmes étant orthogonaux, on aura identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Prenons la dérivée de la première équation par rapport à y; il viendra

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial y} = 0.$$

A l'origine des coordonnées, où $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ s'annulent, cette équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial y} = 0.$$

Prenant de même la dérivée de la deuxième équation par rapport à z, celle de la troisième par rapport à x, et faisant ensuite $x = y = z = 0$, on trouvera les deux équations analogues

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\, \partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z\, \partial x} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x} = 0.$$

Ces trois équations, linéaires et homogènes en $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\, \partial z}$, $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z\, \partial x}$, montrent que ces quantités s'annulent, car le déterminant de ces équations, étant égal à $2 \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, est $\gtrless 0$.

On aura donc, à l'origine des coordonnées, non seulement $F - c = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, mais encore $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = 0$.

Cela posé, soient, pour abréger, A, B, C, ... les valeurs de $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, ... pour l'origine. La série de Maclaurin donnera

$$0 = F - c = Az + Bx^2 + Cy^2 + \ldots,$$

d'où

$$z = -\frac{B}{A} x^2 - \frac{C}{A} y^2 + \ldots.$$

Ce développement ne contenant pas de terme en xy, les plans coordonnés seront les sections principales de la surface $F - c$. Donc, l'axe des y, qui est tangent à l'intersection des deux surfaces $F - c$, $\Phi - c_1$, sera en même temps tangent à l'une des sections principales.

Mais l'origine est un point quelconque de l'intersection des deux surfaces $F - c$ et $\Phi - c_1$; cette courbe sera donc tangente en chaque point à l'une des sections principales, ce qui est l'une des propriétés caractéristiques de la ligne de courbure.

551. Corollaire. — *Les lignes de courbure d'une quadrique sont ses intersections avec les quadriques homofocales.*

Car les ellipsoïdes et les hyperboloïdes homofocaux à la quadrique considérée forment un système orthogonal.

CHAPITRE V.

COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

I. — Coordonnées homogènes.

552. Considérons un plan dont les points soient caractérisés par deux coordonnées cartésiennes X, Y. Si nous supposons que l'une des deux coordonnées X, Y, ou toutes deux à la fois, croissent indéfiniment, de telle sorte que l'un au moins des deux rapports $\frac{Y}{X}$, $\frac{X}{Y}$ tende vers une limite finie et déterminée, nous conviendrons de dire que le point (X, Y) tend vers un point déterminé, défini par cette limite, lequel point est situé à l'infini, et sera regardé comme appartenant au plan.

Posons

$$X = \frac{x}{z}, \qquad Y = \frac{y}{z}, \tag{1}$$

x, y, z étant trois nouvelles variables, assujetties à la condition de rester finies et de ne pas s'annuler à la fois. A chaque point du plan (complété par l'adjonction des points à l'infini) correspond un système de valeurs déterminé pour les rapports mutuels de x, y, z, et réciproquement.

Soit $F(X, Y) = 0$ l'équation d'une courbe d'ordre n. Remplaçant X, Y par leurs valeurs (1) et chassant les dénominateurs, il viendra

$$0 = z^n F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = f(x, y, z),$$

f étant un polynome homogène de degré n.

En particulier, une ligne droite sera représentée par l'équation générale du premier degré

$$ux + vy + wz = 0.$$

Les points à l'infini sont donnés par l'équation

$$z = 0,$$

qui est un cas particulier de celle-là. Le lieu de ces points peut donc être assimilé à une droite.

553. Posons

$$(2)\quad \begin{cases} x = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \\ y = \lambda'\xi + \mu'\eta + \nu'\zeta, \\ z = \lambda''\xi + \mu''\eta + \nu''\zeta, \\ \Xi = \dfrac{\xi}{\zeta}, \qquad \mathrm{H} = \dfrac{\eta}{\zeta}, \end{cases}$$

ξ, η, ζ, Ξ, H étant de nouvelles variables, et λ, μ, ν, ... des constantes dont le déterminant D ne soit pas nul. Soient L, M, N, ... les mineurs de D ; ces équations, résolues par rapport à ξ, η, ζ, donneront

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\mathrm{L}x + \mathrm{L}'y + \mathrm{L}''z}{\mathrm{D}}, \\ \eta = \dfrac{\mathrm{M}x + \mathrm{M}'y + \mathrm{M}''z}{\mathrm{D}}, \\ \zeta = \dfrac{\mathrm{N}x + \mathrm{N}'y + \mathrm{N}''z}{\mathrm{D}}, \end{cases}$$

et X, Y seront liés à Ξ, H par les relations

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{\lambda\Xi + \mu\mathrm{H} + \nu}{\lambda''\Xi + \mu''\mathrm{H} + \nu''}, & \mathrm{Y} = \dfrac{\lambda'\Xi + \mu'\mathrm{H} + \nu'}{\lambda''\Xi + \mu''\mathrm{H} + \nu''}, \\ \Xi = \dfrac{\mathrm{LX} + \mathrm{L'Y} + \mathrm{L}''}{\mathrm{NX} + \mathrm{N'Y} + \mathrm{N}''}, & \mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{MX} + \mathrm{M'Y} + \mathrm{M}''}{\mathrm{NX} + \mathrm{N'Y} + \mathrm{N}''}. \end{cases}$$

Ces équations, qui définissent sans ambiguïté les rapports

mutuels de ξ, η, ζ, en fonction de ceux de x, y, z et réciproquement, peuvent être interprétées de deux manières :

1° On peut considérer x, y, z et ξ, η, ζ comme deux systèmes de coordonnées différents représentant un même point. Dans ce cas, ξ représente, à un facteur constant près, la distance de ce point à la droite

$$0 = \xi = Lx + L'y + L''z = z(LX + L'Y + L''),$$

et de même pour η et ζ. Le point est ainsi caractérisé par les rapports de ses distances aux trois droites $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Ces droites forment un triangle qu'on nomme *triangle de référence* ; ξ, η, ζ seront des *coordonnées trilinéaires*.

La courbe $f = 0$, rapportée à ces nouvelles coordonnées, aura pour équation

$$f(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \ldots, \ldots) = 0,$$

dont le premier membre est encore homogène et de degré n.

2° Considérons au contraire ξ, η, ζ comme des coordonnées de même nature que x, y, z. A chaque point (x, y, z), les équations (2) feront correspondre un autre point (ξ, η, ζ) généralement différent, et qu'on nomme son *transformé homographique*. La courbe $f(x, y, z) = 0$ aura pour transformée la courbe

$$f(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \ldots, \ldots) = 0.$$

En particulier, la droite à l'infini $z = 0$ aura pour transformée la droite

$$\lambda''\xi + \mu''\eta + \nu''\zeta = 0,$$

et la droite

$$Nx + N'y + N''z = 0$$

aura pour transformée la droite à l'infini $\zeta = 0$.

554. Soit (X, Y) un point du plan, situé à distance finie, ainsi que son transformé homographique (Ξ, H) ; on aura, d'après cette hypothèse,

$$\lambda''\Xi + \mu''H + \nu'' \gtrless 0, \qquad NX + N'Y + N'' \gtrless 0.$$

Soient (X_1, Y_1) et $(X_1 + \Delta X_1, Y_1 + \Delta Y_1)$ deux points quelconques infiniment voisins de (X, Y); (Ξ_1, H_1) et $(\Xi_1 + \Delta\Xi_1, H_1 + \Delta H_1)$ leurs transformés; l'écart $|\Delta X_1| + |\Delta Y_1|$ des deux premiers points sera du même ordre de grandeur que l'écart $|\Delta\Xi_1| + |\Delta H_1|$ de leurs transformés.

On a, en effet,

$$\Delta X_1 = \frac{\lambda(\Xi_1 + \Delta\Xi_1) + \mu(H_1 + \Delta H_1) + \nu}{\lambda''(\Xi_1 + \Delta\Xi_1) + \mu''(H_1 + \Delta H_1) + \nu''} - \frac{\lambda\Xi_1 + \mu H_1 + \nu}{\lambda''\Xi_1 + \mu'' H_1 + \nu''}$$
$$= P\,\Delta\Xi_1 + Q\,\Delta H_1,$$

P et Q tendant vers des limites finies lorsque $\Delta\Xi_1$ et ΔH_1 tendent vers zéro. On aura donc

$$|\Delta X_1| \overline{\overline{<}} |P|\,|\Delta\Xi_1| + |Q|\,|\Delta H_1| \overline{\overline{<}} R[|\Delta\Xi_1| + |\Delta H_1|],$$

R étant une quantité finie.

On trouvera, pour $|\Delta Y_1|$, une limite analogue. Donc le rapport de $|\Delta X_1| + |\Delta Y_1|$ à $|\Delta\Xi_1| + |\Delta H_1|$ ne peut surpasser un nombre fixe. Et comme on peut faire le même raisonnement sur son inverse, on voit que les deux écarts considérés sont du même ordre de grandeur.

Il résulte évidemment de là que, *si deux courbes* $F = 0$, $F_1 = 0$ *ont un contact d'ordre m au point* (X, Y), *leurs transformées* $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$ *auront le même contact au point* (Ξ, H).

Nous avons admis, dans la démonstration, que (X, Y) et (Ξ, H) étaient tous deux à distance finie. Mais le contact de deux courbes en un point à l'infini n'a été, jusqu'à présent, l'objet d'aucune définition. Nous dirons donc que deux courbes ont un contact d'ordre m en un semblable point lorsque, ce point étant ramené à distance finie par une transformation homographique, les courbes transformées ont un contact de cet ordre. Cette convention permettra d'énoncer le théorème sans restriction.

555. *Covariants.* — Soit

$$f(x, y, z) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma, \qquad \alpha + \beta + \gamma = n$$

un polynome homogène de degré n, dont les coefficients soient des constantes indéterminées. Par la transformation homographique (2), nous obtiendrons un nouveau polynome

$$f(\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta, \ldots, \ldots)=\varphi(\xi, \eta, \zeta)=\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\xi^\alpha\eta^\beta\zeta^\gamma$$

de même degré, et dont les coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$ seront des fonctions linéaires des $a_{\alpha\beta\gamma}$.

Cela posé, soit $P(x, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots)$ un polynome entier et homogène en x, y, z d'une part, et par rapport aux coefficients $a_{\alpha\beta\gamma}$ d'autre part. Si, en substituant pour ξ, η, ζ leurs valeurs (3) en x, y, z et pour $A_{\alpha\beta\gamma}, \ldots$ leurs valeurs en $a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots$, on a identiquement

$$(5)\quad P(\xi, \eta, \zeta, \ldots, A_{\alpha\beta\gamma}, \ldots)=MP(x, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots),$$

M désignant un facteur convenable, on dira que P est un *covariant* de f. Ce sera un *invariant* si x, y, z n'y figurent pas.

Il est aisé de déterminer la nature du facteur M. En effet, le premier membre de l'équation (5) est du même degré que $P(x, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots)$, tant par rapport aux variables x, y, z que par rapport aux coefficients $a_{\alpha\beta\gamma}$. Le quotient M sera donc une fonction de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ seulement, laquelle sera d'ailleurs rationnelle et de la forme $\frac{Q}{D^\rho}$, Q désignant un polynome entier.

En appliquant, d'autre part, aux fonctions $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ et $P(\xi, \eta, \zeta, \ldots, A_{\alpha\beta\gamma}, \ldots)$ la transformation homographique (3) inverse de la précédente, on reviendrait évidemment à la fonction primitive $f(x, y, z)$ et la condition d'invariance donnerait

$$(6)\quad P(x, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots)=M_1 P(\xi, \eta, \zeta, \ldots, A_{\alpha\beta\gamma}, \ldots),$$

le facteur $M_1=\frac{Q_1}{D_1^\rho}$ se déduisant de M par le changement de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ en $\frac{L}{D}, \frac{L'}{D}, \frac{L''}{D}, \ldots$.

La comparaison des équations (5) et (6) donne

$$1 = MM_1 = \frac{QQ_1}{D^\rho D_1^\rho} = QQ_1,$$

car les déterminants D, D_1 sont réciproques. D'ailleurs, L, L', L'', ..., D sont des fonctions entières de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$; donc Q_1, qui est entier en $\frac{L}{D}, \frac{L'}{D}, \ldots$, sera de la forme $\frac{R}{D^\sigma}$, R étant un polynome entier en $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Donc, pour que l'on ait $QQ_1 = 1$, il faudra que Q divise D^σ et, par suite, se réduise à une puissance de D. Donc, enfin, M sera une puissance de D, positive ou négative, telle que D^k.

Pour déterminer l'exposant k, considérons la transformation particulière

$$(7) \qquad x = \lambda\xi, \qquad y = \lambda\eta, \qquad z = \lambda\zeta,$$

pour laquelle $D = \lambda^3$.

La fonction f étant de degré n, cette substitution multipliera tous les coefficients par λ^n. On aura donc, si P est de degré m par rapport aux variables et de degré p par rapport aux coefficients,

$$\begin{aligned} P(\xi, \eta, \zeta, \ldots, A_{\alpha\beta\gamma}, \ldots) &= P\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}, \frac{z}{\lambda}, \ldots, \lambda^n a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots\right) \\ &= \lambda^{-m+np} P(x, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$k = \frac{-m+np}{3}.$$

Ce nombre doit être entier ; s'il ne l'était pas, il faudrait en conclure l'impossibilité de l'existence d'un covariant P de l'espèce supposée.

556. Les covariants satisfont à un système d'équations différentielles qu'il est aisé de former.

Faisons, en effet, la transformation particulière de déterminant 1

$$(8) \qquad x = \xi + \varepsilon\eta, \qquad y = \eta, \qquad z = \zeta,$$

d'où

$$\xi = x - \varepsilon y, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = z;$$

on aura

$$f(\xi + \varepsilon\eta, \eta, \zeta) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma}(\xi + \varepsilon\eta)^{\alpha}\eta^{\beta}\zeta^{\gamma}$$

ou, en développant et négligeant le carré de l'infiniment petit ε,

$$f(\xi + \varepsilon\eta, \eta, \zeta) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma}\xi^{\alpha}\eta^{\beta}\zeta^{\gamma} + \Sigma\varepsilon\alpha a_{\alpha\beta\gamma}\xi^{\alpha-1}\eta^{\beta+1}\zeta^{\gamma}.$$

Changeons, dans la seconde somme, α en $\alpha + 1$ et β en $\beta - 1$ et réunissons-la à la première : il viendra

$$f(\xi + \varepsilon\eta, \eta, \zeta) = \Sigma[a_{\alpha\beta\gamma} + \varepsilon(\alpha + 1)a_{\alpha+1,\beta-1,\gamma}]\xi^{\alpha}\eta^{\beta}\zeta^{\gamma}$$

et, par suite,

$$A_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\beta\gamma} + \varepsilon(\alpha + 1)a_{\alpha+1,\beta-1,\gamma}$$

(le second terme n'existant pas si $\beta = 0$).

Cela posé, l'équation (5) se réduira, dans ce cas particulier, à

$$\begin{aligned} &P(x - \varepsilon y, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma} + \varepsilon(\alpha + 1)a_{\alpha+1,\beta-1,\gamma}, \ldots) \\ &\quad = P(x, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots) \end{aligned}$$

ou, en développant suivant les puissances de ε, négligeant encore son carré et supprimant le facteur ε,

$$-y\frac{\partial P}{\partial x} + \Sigma(\alpha + 1)a_{\alpha+1,\beta-1,\gamma}\frac{\partial P}{\partial a_{\alpha\beta\gamma}} = 0,$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs des indices pour lesquelles $\alpha + \beta + \gamma = n$ et $\beta > 0$.

En permutant les variables x, y, z et en même temps les indices α, β, γ, on obtiendra cinq autres équations analogues, exprimant que la condition de covariance est satisfaite pour chacune des substitutions particulières

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{lll} x = \xi + \varepsilon\zeta, & y = \eta, & z = \zeta, \\ x = \xi, & y = \eta + \varepsilon\xi, & z = \zeta, \\ x = \xi, & y = \eta + \varepsilon\zeta, & z = \zeta, \\ x = \xi, & y = \eta, & z = \zeta + \varepsilon\xi, \\ x = \xi, & y = \eta, & z = \zeta + \varepsilon\eta. \end{array}\right.$$

Réciproquement, tout polynome homogène qui satisfait à ce système d'équations différentielles est un covariant. En effet, en vertu de l'homogénéité, il satisfait à la condition de covariance pour la substitution (7), et l'on peut s'assurer aisément que toute substitution homographique s'obtient par la combinaison de substitutions successives des espèces (7), (8), (9).

557. Pour mettre en lumière l'importance de la notion des covariants, nous remarquerons qu'une propriété particulière de la courbe

$$0 = f(x, y, z) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

est généralement caractérisée par une ou plusieurs relations entre ses coefficients.

Admettons qu'une certaine propriété soit représentée par un système d'équations.

$$c_1 = c_2 = \ldots = 0,$$

les c étant les coefficients d'un covariant P. Cette propriété sera commune à toutes les transformées homographiques de f.

Soit, en effet,

$$f(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \ldots, \ldots) = \sum A_{\alpha\beta\gamma} \xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma$$

l'une de ces transformées ; on a identiquement, par hypothèse,

$$0 = P(x, y, z, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots) = P(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \ldots, a_{\alpha\beta\gamma}, \ldots);$$

et, en vertu de l'équation (6), on aura de même identiquement

$$P(\xi, \eta, \zeta, \ldots, A_{\alpha\beta\gamma}, \ldots) = 0.$$

Ces propriétés communes à une courbe et à ses transformées se nomment *propriétés projectives*. On appelle *propriétés métriques* celles qui sont au contraire altérées par une transformation homographique.

Nous allons passer en revue quelques-uns des covariants les plus simples.

558. *Discriminant.* — Il est généralement impossible de déterminer les rapports de x, y, z de manière à satisfaire simultanément aux trois équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

L'élimination de ces rapports donnera, en effet, une équation de condition

$$\Delta = 0.$$

Le polynome Δ se nomme le *discriminant* de f. C'est un invariant. Soit, en effet,

$$f(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \ldots, \ldots) = \varphi(\xi, \eta, \zeta) \tag{10}$$

une transformée homographique de f, et soit Δ_1 son discriminant. La condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse annuler simultanément les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ sera $\Delta_1 = 0$.

Mais, si nous prenons les dérivées partielles de l'équation (10) par rapport à ξ, η, ζ, il viendra

$$\left\{\begin{aligned} \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda'' \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \\ \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \mu' \frac{\partial f}{\partial y} + \mu'' \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \\ \nu \frac{\partial f}{\partial x} + \nu' \frac{\partial f}{\partial y} + \nu'' \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Si donc on peut annuler à la fois $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, on pourra annuler à la fois $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$, et réciproquement. Donc les deux équations $\Delta = 0$ et $\Delta_1 = 0$ sont équivalentes, et Δ, Δ_1

ne peuvent différer que par un facteur indépendant des coefficients de f.

559. *Hessien*. — On appelle *hessien* de f le déterminant

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Ce n'est autre chose que le jacobien des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$; et $H = 0$ exprime, comme on sait, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une relation linéaire entre $d\frac{\partial f}{\partial x}$, $d\frac{\partial f}{\partial y}$, $d\frac{\partial f}{\partial z}$.

Soit H_1 le hessien de φ; $H_1 = 0$ sera la condition pour qu'il existe une relation linéaire entre les différentielles de $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$. Mais les équations (11) différentiées permettent d'exprimer linéairement ces différentielles par celles de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, et réciproquement. Si donc il y a une relation entre ces dernières différentielles, il y en aura une entre les premières, et réciproquement. Les équations $H = 0$, $H_1 = 0$ sont donc équivalentes et ne peuvent différer que par un facteur indépendant des coefficients.

Le hessien est donc un covariant.

560. *Polaires*. — Soient x, y, z et x', y', z' deux séries de variables, assujetties à une même substitution homographique

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, & \ldots, \\ x' = \lambda\xi' + \mu\eta' + \nu\xi', & \ldots. \end{cases}$$

On aura évidemment

$$x + x' = \lambda(\xi + \xi') + \mu(\eta + \eta') + \nu(\zeta + \zeta'), \quad \ldots.$$

Cela posé, soit $f(x, y, z)$ un polynome qui, par la substitution ci-dessus, se change en

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta);$$

$f(x+x', y+y', z+z')$ se changera évidemment en

$$\varphi(\xi + \xi', \eta + \eta', \zeta + \zeta').$$

Développant les deux membres de l'égalité

$$f(x + x', y + y', z + z') = \varphi(\xi + \xi', \eta + \eta', \zeta + \zeta')$$

suivant la série de Taylor, il viendra

$$f + \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z}\right) f + \frac{\left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z}\right)^2}{1.2} f + \ldots$$

$$= \varphi + \left(\xi' \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta' \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) \varphi + \frac{\left(\xi' \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta' \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^2}{1.2} \varphi + \ldots,$$

égalité qui deviendra identique si l'on y remplace x, y, z, x', y', z' par leurs valeurs (12). En égalant séparément les termes d'un même degré m par rapport à ξ', η', ζ', il viendra

$$\left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z}\right)^m f = \left(\xi' \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta' \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta' \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)^m \varphi.$$

Donc l'expression

$$\left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + z' \frac{\partial}{\partial z}\right)^m f$$

est un covariant de f, pourvu que x', y', z' y soient soumis à la même transformation homographique que x, y, z.

Ce covariant se nomme la $m^{\text{ième}}$ *polaire* de f par rapport au point (x', y', z').

561. *Points simples et points multiples.* — Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation en coordonnées trilinéaires d'une courbe d'ordre n ; et soit (x, y, z) un de ses points. Cherchons son ordre de multiplicité.

Une droite menée par ce point et par un autre point arbitraire (a, b, c) est évidemment représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} x' & x & a \\ y' & y & b \\ z' & z & c \end{vmatrix} = 0$$

ou par le système équivalent

$$(13) \qquad \begin{cases} x' = xt + as, \\ y' = yt + bs, \\ z' = zt + cs, \end{cases}$$

x', y', z' étant les coordonnées courantes et t, s deux paramètres, dont le rapport caractérise les points de la droite.

Les valeurs de ce rapport $\frac{s}{t}$, pour les points d'intersection de la droite avec la courbe, seront données par l'équation

$$(14) \qquad \begin{cases} 0 = f(xt + as, yt + bs, zt + cs) \\ \quad = t^n f(x, y, z) + t^{n-1} s\left(a \dfrac{\partial f}{\partial x} + b \dfrac{\partial f}{\partial y} + c \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) + \dots \\ \qquad + \dfrac{t^{n-m} s^m}{1.2\dots m}\left(a \dfrac{\partial}{\partial x} + b \dfrac{\partial}{\partial y} + c \dfrac{\partial}{\partial z}\right)^m f + \dots \end{cases}$$

Si $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ne sont pas nuls à la fois, on n'aura, en général, qu'une racine nulle ; le point sera simple.

La racine nulle sera double si a, b, c sont déterminés de telle sorte qu'on ait

$$t^{n-1} s\left(a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} + c \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

Substituons, dans cette équation, les valeurs de as, bs, cs tirées des formules (13) et remarquons que l'on a, d'après une propriété connue des fonctions homogènes,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf=0;$$

il viendra, pour l'équation de la tangente,

$$x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+z'\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Supposons, au contraire, que f et toutes ses dérivées successives, jusqu'à l'ordre $m-1$ inclusivement, s'annulent. L'équation (14) aura m racines nulles et le point (x, y, z) sera multiple d'ordre m.

On aura plus de m racines nulles si a, b, c sont choisis de telle sorte qu'on ait

$$s^m\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f=0.$$

Cette équation, jointe aux équations (13), caractérise les tangentes au point multiple. Il est aisé d'éliminer les quantités auxiliaires a, b, c. Nous venons de voir en effet que, f étant homogène et s'annulant au point (x, y, z), on a

$$s\left(a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+c\frac{\partial f}{\partial z}\right)=x'\frac{\partial f}{\partial x}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+z'\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Cette nouvelle fonction étant elle-même homogène en x, y, z et s'annulant au point x, y, z, on aura, par la répétition de la même opération,

$$s^2\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f,$$

et enfin

$$s^m\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f.$$

Le faisceau des tangentes cherchées aura donc pour équation

$$(15)\qquad \left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f=0.$$

Le premier membre de cette équation est un covariant. Pour vérifier qu'il se décompose en un produit de facteurs linéaires, nous pourrons supposer qu'on ait pris le point (x, y, z) pour l'un des sommets du triangle de référence ; on aura, dans ce cas particulier, $x=0$, $y=0$, et l'équation (15) se réduira à

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=0,$$

car toutes celles des dérivées d'ordre m où figure une dérivation par rapport à z sont nulles. Soit, en effet, $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}$ l'une d'elles; c'est la dérivée par rapport à z de la dérivée d'ordre $m-1$

$$I=\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^{\gamma-1}},$$

laquelle est homogène de degré $n-m+1$ et s'annule pour $x=y=0$. On aura donc l'identité

$$x\frac{\partial I}{\partial x}+y\frac{\partial I}{\partial y}+z\frac{\partial I}{\partial z}=(n-m+1)I,$$

qui se réduira à $\dfrac{\partial I}{\partial z}=0$ au point $x=0, y=0$.

562. *Points d'inflexion.* — Ce sont, par définition, les points simples où la tangente a avec la courbe un contact d'ordre supérieur au premier. Si donc (x, y, z) est un de ces points et qu'on choisisse le point (a, b, c) d'une manière quelconque sur la tangente, l'équation (14) devra admettre trois racines nulles ; on aura donc non seulement

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+c\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

mais encore

$$\frac{1}{2}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=0.$$

Cette dernière équation devant être une conséquence de la précédente, son premier membre, qui est un polynome du second degré en a, b, c, se décomposera en un produit de deux facteurs, dont l'un sera précisément

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+c\frac{\partial f}{\partial z}.$$

La condition pour qu'une décomposition en deux facteurs soit possible est, comme on sait, que le déterminant de cette forme quadratique

$$\mathrm{H}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro.

Réciproquement, si $\mathrm{H}=0$, on aura affaire à un point d'inflexion. On pourra, en effet, déterminer trois nombres a, b, c de telle sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}&=0,\\ a\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}+b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}&=0,\\ a\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}+b\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}&=0. \end{aligned}$$

Ajoutant ces équations respectivement multipliées par $\frac{x}{n-1}$, $\frac{y}{n-1}$, $\frac{z}{n-1}$ et tenant compte de l'homogénéité de

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$, il viendra

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Le point (a, b, c) est donc sur la tangente.

D'autre part, les mêmes équations, multipliées par a, b, c, et ajoutées ensemble, donnent

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = 0.$$

La tangente a donc un contact du second ordre avec la courbe.

Les points d'inflexion seront donc les points d'intersection de la courbe $f = 0$ avec sa hessienne $H = 0$. Cette dernière courbe étant d'ordre $3(n-2)$, on aura, en général, $3n(n-2)$ points d'inflexion.

Ce nombre s'abaisse dans le cas particulier où la courbe $f = 0$ a des points multiples. En effet, on a, en chacun de ces points,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ou, à cause de l'homogénéité,

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} &= 0,\\
x\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} &= 0,\\
x\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 0,
\end{aligned}$$

et, comme x, y, z ne sont pas nuls à la fois, le déterminant H de ces équations doit être nul.

Les points multiples de f figurent donc, chacun avec un certain ordre de multiplicité, parmi les intersections de f et de H. Mais ce ne sont pas des points d'inflexion, d'après la définition de ceux-ci, qui doivent être des points simples de f.

563. *Classe.* — On nomme *classe* d'une courbe f le nombre ν des tangentes qu'on peut lui mener par un point arbitraire (x', y', z').

Soit (x, y, z) le point de contact d'une de ces tangentes; on aura

$$f(x, y, z) = 0; \tag{16}$$

et la tangente en ce point passant par (x', y', z')

$$x'\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + z'\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Les deux courbes (16) et (17), de degrés n et $n - 1$, se coupent en $n(n - 1)$ points. On a donc, en général,

$$\nu = n(n - 1).$$

Toutefois, si la courbe f a des points multiples, leurs coordonnées satisferont identiquement aux deux équations ci-dessus, quels que soient x', y', z'. La droite qui joint un de ces points multiples au point arbitraire (x', y', z'), bien que coupant la courbe en deux points coïncidents, n'est pourtant pas une tangente au sens propre de ce mot. On devra donc, dans l'évaluation de la classe, supprimer ces solutions étrangères.

564. *Coordonnées tangentielles.* — L'équation générale d'une droite est de la forme

$$ux + vy + wz = 0.$$

Les coefficients u, v, w (ou plutôt leurs rapports) se nomment les *coordonnées tangentielles* de la droite.

Les diverses droites qui passent par un point (a, b, c) satisfont à l'équation

$$ua + vb + wc = 0,$$

qu'on peut considérer comme représentant ce point.

Plus généralement, les droites qui satisfont à une équa-

tion homogène et de degré ν en u, v, w

$$F(u, v, w) = 0$$

enveloppent une courbe, dont nous dirons que l'équation précédente est l'*équation tangentielle*.

Cette courbe sera de classe ν, car, si l'on veut déterminer celles de ses tangentes qui passent par un point arbitraire (a, b, c), il faudra associer les deux équations

$$F(u, v, w) = 0, \qquad ua + vb + wc = 0.$$

Tirant de la seconde équation la valeur de l'une des inconnues u, v, w, pour la substituer dans la première, on aura une équation de degré ν pour déterminer le rapport des deux autres.

Deux courbes $F = 0$, $\Phi = 0$, des classes μ et ν, auront $\mu\nu$ tangentes communes dont les coordonnées seront définies par les équations $F = 0$, $\Phi = 0$.

565. On peut distinguer des tangentes simples ou multiples, par des considérations calquées sur celles qui nous ont servi à l'étude des points multiples.

Soient, en effet, $F(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle d'une courbe de classe ν; (u, v, w) l'une de ses tangentes. Son intersection avec une autre droite arbitraire (a, b, c) sera représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} u' & u & a \\ v' & v & b \\ w' & w & c \end{vmatrix} = 0$$

ou par le système équivalent

$$u' = ut + as, \qquad v' = vt + bs, \qquad w' = wt + cs.$$

Les valeurs de $\frac{s}{t}$ pour les tangentes menées de ce point à

la courbe sont données par l'équation

$$\begin{aligned} o &= F(ut + as,\ vt + bs,\ wt + cs) \\ &= t^n F(u, v, w) + t^{n-1} s\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v} + c\frac{\partial F}{\partial w}\right) + \ldots. \end{aligned}$$

Si $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial w}$ ne sont pas nuls à la fois, on n'aura, en général, qu'une racine nulle ; une seule des tangentes menées par le point considéré coïncidera donc avec (u, v, w). Toutefois, si la droite (a, b, c) passe par le point de contact $\left(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial w}\right)$ de la tangente (u, v, w), deux tangentes au moins coïncideront avec (u, v, w).

Si $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial F}{\partial w}$ et, en général, toutes les dérivées de F d'ordre $< m$ s'annulent, on aura toujours m racines nulles, et nous dirons que (u, v, w) est une tangente multiple d'ordre m. Le nombre des racines nulles s'élèvera d'ailleurs au-dessus de m si a, b, c satisfont à l'équation

$$\left(a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v} + c\frac{\partial}{\partial w}\right)^m F = o,$$

laquelle se décomposera en un produit de m facteurs linéaires, dont chacun représente un point de contact.

566. Il est aisé de passer de l'équation d'une courbe en coordonnées ponctuelles à son équation en coordonnées tangentielles, et réciproquement.

Soient, en effet, (u, v, w) les coefficients de la tangente en un point (x, y, z) de la courbe $f(x, y, z) = o$. Cette droite passant par les deux points (x, y, z) et $(x+dx, y+dy, z+dz)$, on aura

$$ux + vy + wz = o, \qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz = o,$$

d'où

$$u : v : w :: y\,dz - z\,dy : z\,dx - x\,dz : x\,dy - y\,dx.$$

Mais on a d'autre part

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}::y\,dz-z\,dy:z\,dx-x\,dz:x\,dy-y\,dx.$$

Donc

$$u:v:w::\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Éliminant x, y, z entre ces équations et l'équation $f=0$, on aura l'équation tangentielle cherchée

$$F(u,v,w)=0.$$

Réciproquement, soient (x, y, z) les coordonnées du point de contact de la tangente (u, v, w) avec son enveloppe $F=0$. On aura

$$ux+vy+wz=0,\qquad x\,du+y\,dv+z\,dw=0,$$

d'où

$$x:y:z::v\,dw-w\,dv:w\,du-u\,dw:u\,dv-v\,du.$$

Mais, d'autre part,

$$u\frac{\partial F}{\partial u}+v\frac{\partial F}{\partial v}+w\frac{\partial F}{\partial w}=\nu F=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=0,$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial u}:\frac{\partial F}{\partial v}:\frac{\partial F}{\partial w}::v\,dw-w\,dv:w\,du-u\,dw:u\,dv-v\,du.$$

Donc

$$x:y:z::\frac{\partial F}{\partial u}:\frac{\partial F}{\partial v}:\frac{\partial F}{\partial w}.$$

Éliminant u, v, w entre ces équations et $F = 0$, on retombera sur l'équation ponctuelle $f(x, y, z) = 0$.

567. Un polynome homogène et de degré n

$$f(x, y, z) = \Sigma a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

contient un terme en x^n, deux termes en x^{n-1}, ..., $n+1$ termes indépendants de x, soit, en tout,

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ termes.}$$

On peut donc assujettir ses coefficients à satisfaire à $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ relations linéaires et homogènes, qui détermineront leurs rapports. Le polynome sera ainsi déterminé à un facteur constant près. Toutefois, si le déterminant des équations de condition est nul, il restera plusieurs coefficients indéterminés.

On obtient une relation de l'espèce considérée en assujettissant la courbe $f = 0$ à passer par un point donné (x_1, y_1, z_1). Pour exprimer que le point est multiple d'ordre m, on devrait écrire $\frac{m(m+1)}{2}$ conditions de même nature, exprimant que les dérivées partielles d'ordre $m-1$ de f s'annulent toutes en ce point.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, car f et ses dérivées partielles d'ordre moindre s'annuleront aussi. Soit, en effet, I l'une quelconque des dérivées d'ordre $m-2$; on aura, d'après le théorème des fonctions homogènes,

$$(n - m + 2)\mathrm{I} = x_1 \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial z_1} = 0,$$

puisque les dérivées d'ordre $m-1$ qui figurent dans le second membre sont toutes nulles, par hypothèse.

Les dérivées d'ordre $m-2$ étant toutes nulles, celles d'ordre $m-3$ le seront aussi, et ainsi de suite, jusqu'à f.

Nous obtenons donc la proposition suivante :

On peut toujours déterminer, et en général d'une seule manière, une courbe d'ordre n passant par $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ *points donnés.*

Cet énoncé subsistera, si l'on remplace la condition de passer par $\frac{m(m+1)}{2}$ *points donnés par celle d'avoir un point multiple d'ordre m donné de position.*

Si le nombre des points donnés était $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2$ seulement, les coefficients seraient déterminés en fonction linéaire de deux d'entre eux, c, c_1, qui resteraient arbitraires, et l'équation de la courbe cherchée serait de la forme

$$cM + c_1 M_1 = 0,$$

M, M_1 étant des polynomes déterminés, d'ordre n. En faisant varier le rapport $\frac{c_1}{c}$ on obtiendra un faisceau de courbes, passant toutes par les points donnés ; mais elles passeront aussi par les autres points d'intersection de M avec M_1.

On voit ainsi qu'*à chaque système de* $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2$ *points arbitrairement pris dans le plan, est associé un autre système de* $n^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2$ *points tels que toute courbe d'ordre n qui passe par les premiers points passe aussi par les autres.*

568. Les considérations qui précèdent permettent d'obtenir aisément une limite supérieure du nombre des points multiples que peut présenter une courbe donnée d'ordre n, $f = 0$.

Supposons d'abord que le polynome f ne soit pas décomposable en un produit de facteurs rationnels. Soient $p_1, p_2, \cdots$

les points multiples, μ_1, μ_2, ... leurs ordres de multiplicité : chacun des nombres $\frac{\mu_i(\mu_i-1)}{2}$ sera au moins égal à 1.

La somme $\sum\frac{\mu(\mu-1)}{2}$, *étendue à tous les points multiples, ne pourra surpasser* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Supposons, en effet, qu'elle surpasse ce nombre.

Parmi les points multiples, choisissons-en un certain nombre $p_1, \ldots, p_k$ en nombre strictement nécessaire pour que la somme

$$S_k = \sum_1^k \frac{\mu_i(\mu_i-1)}{2}$$

soit plus grande que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Deux cas seront à distinguer ici :

1° Si $S_k \overline{\gtrless} \frac{n(n+1)}{2} - 1$, on pourra déterminer une courbe φ d'ordre $n-1$ admettant les points $p_1, \ldots, p_k$ comme points multiples d'ordre $\mu_1 - 1, \ldots, \mu_k - 1$, et passant en outre par $\frac{n(n+1)}{2} - 1 - S_k$ points choisis arbitrairement sur f; car cet ensemble de conditions donne bien les $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ relations linéaires et homogènes auxquelles on peut assujettir les coefficients de φ.

Cherchons le nombre N des points d'intersection de f et de φ.

Ainsi que nous le démontrerons plus tard, un point commun à deux courbes, et dont les degrés de multiplicité sur ces deux courbes sont respectivement μ et ν, compte en général pour $\mu\nu$ intersections. Le nombre des intersections correspondantes aux points multiples sera donc

$$\sum_1^k \mu_i(\mu_i-1) = 2S_k.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} N &\geqq 2S_k + \frac{n(n+1)}{2} - 1 - S_k \\ &\geqq S_k + \frac{n(n+1)}{2} - 1 \\ &> \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - 1 > n(n-1). \end{aligned}$$

Ce résultat est absurde, car deux courbes de degré n et $n-1$ ne peuvent avoir plus de $n(n-1)$ points communs si elles n'ont pas de partie commune, ce qui n'est pas le cas, la courbe f étant indécomposable, par hypothèse.

2° Supposons, au contraire, $S_k > \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Soit ρ le plus grand entier tel que l'on ait encore

$$\sum_1^{k-1} \frac{\mu_i(\mu_i - 1)}{2} + \frac{\rho(\rho-1)}{2} \leqq \frac{n(n+1)}{2} - 1.$$

On pourra déterminer une courbe φ de degré $n-1$ admettant les points $p_1, \ldots, p_{k-1}, p_k$ avec des ordres de multiplicité $\mu_1 - 1, \ldots, \mu_{k-1} - 1, \rho$. Le nombre N de ses points d'intersection avec f sera au moins égal à

$$\sum_1^{k-1} \mu_i(\mu_i - 1) + \rho\mu_k,$$

et, comme $\mu_k \geqq \rho + 1$ et que, d'autre part,

$$\sum_1^{k-1} \frac{\mu_i(\mu_i - 1)}{2} + \frac{(\rho+1)\rho}{2}$$

est par hypothèse $> \frac{n(n+1)}{2} - 1$, on aura

$$N > 2\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] > n(n-1).$$

La conséquence sera la même que dans le premier cas.

Enfin, si f est un produit de facteurs $f_1, f_2, \ldots$, les points multiples de f seront évidemment : 1° ceux des courbes f_1, $f_2, \ldots$ considérées isolément ; 2° leurs points d'intersection deux à deux. Les uns et les autres sont en nombre limité (si nous excluons le cas où f admettrait un facteur multiple).

II. — Cycles.

569. Un cycle ayant pour origine le point (X_0, Y_0) est généralement défini par deux équations de la forme

$$(1) \quad X = X_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots, \qquad Y = Y_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots,$$

ou, en coordonnées homogènes, par les proportions

$$x : y : z :: X_0 + \alpha_1 t + \ldots : Y_0 + \beta_1 t + \ldots : 1,$$

ou enfin, en multipliant les seconds termes des proportions par un même facteur de la forme $z_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$, où z_0 n'est pas nul, par des relations de la forme

$$(2) \qquad x : y : z :: T_1 : T_2 : T_3,$$

où

$$T_1 = x_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$
$$T_2 = y_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots,$$
$$T_3 = z_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots,$$

z_0 n'étant pas nul.

Un cycle dont l'origine serait à l'infini serait représenté par des relations analogues, où z_0 serait nul, mais x_0 ou y_0 différent de zéro.

Réciproquement, un système de relations tel que (2) définit un cycle, car, en supposant, pour fixer les idées, $z_0 \gtrless 0$, $X = \frac{T_1}{T_3}$ et $Y = \frac{T_2}{T_3}$ seront développables suivant les puissances entières et positives de t.

570. Nous supposerons que le paramètre t correspond uniformément aux points du cycle. S'il en est ainsi, et si la

tangente au cycle est une droite

$$Y - Y_0 = a(X - X_0),$$

non parallèle à l'axe des Y, on pourra, en posant

$$t = \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots,$$

déterminer les coefficients λ de telle sorte que les équations du cycle prennent la forme canonique :

$$(3) \qquad X = X_0 + u^r, \qquad Y = Y_0 + a u^r + a_0 u^{r_0} + \ldots,$$

$r, r_0, \ldots$ étant une suite d'entiers croissants sans autre diviseur commun que l'unité.

Dans le cas exceptionnel où $X - X_0 = 0$ serait tangente, on aurait une forme canonique analogue :

$$X = X_0 + a_0 u^{r_0} + \ldots, \qquad Y = Y_0 + u^r.$$

Pour une valeur donnée de $X - X_0$, les équations (3) fourniront r valeurs $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{r-1}$ de Y, données par les formules suivantes, où $(X - X_0)^{\frac{1}{r}}$ désigne l'une quelconque des racines $r^{\text{ièmes}}$ de $X - X_0$, et θ l'exponentielle $e^{\frac{2\pi i}{r}}$:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_0 = Y_0 + a(X - X_0) + a_0 (X - X_0)^{\frac{r_0}{r}} + a_1 (X - X_0)^{\frac{r_1}{r}} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_m = Y_0 + a(X - X_0) + a_0 \theta^{r_0 m} (X - X_0)^{\frac{r_0}{r}} + a_1 \theta^{r_1 m} (X - X_0)^{\frac{r_1}{r}} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Le cycle pourra d'ailleurs être exprimé, sans l'intervention d'un paramètre, par l'équation

$$(5) \qquad P(X, Y) = (Y - \eta_0) \ldots (Y - \eta_{r-1}) = 0,$$

dont le premier membre est un polynome en Y, ayant pour coefficients des séries de puissances entières et positives de $X - X_0$.

571. Revenons à la forme générale (2) des équations du

cycle. Les paramètres des points d'intersection d'une droite

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$$

avec le cycle sont donnés par l'équation

$$(6) \qquad \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0.$$

Si la droite passe par le point (x_0, y_0, z_0) origine du cycle, on aura

$$\lambda_1 x_0 + \lambda_2 y_0 + \lambda_3 z_0 = 0,$$

et, si a_r, b_r, c_r est la première colonne de coefficients qui ne soient pas proportionnels à x_0, y_0, z_0, le premier membre de (6) sera de la forme

$$(\lambda_1 a_r + \lambda_2 b_r + \lambda_3 c_r) t^r + \ldots.$$

L'équation aura donc r racines nulles, qui se changeraient d'ailleurs en racines infiniment petites pour une autre droite, infiniment voisine de la précédente, mais ne passant pas par l'origine du cycle. La droite et le cycle doivent donc être considérés comme ayant r points d'intersection concentrés à l'origine.

Ce nombre sera accru si l'on a encore

$$\lambda_1 a_r + \lambda_2 b_r + \lambda_3 c_r = 0,$$

auquel cas l'équation de la droite sera

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a_r \\ y & y_0 & b_r \\ z & z_0 & c_r \end{vmatrix} = 0.$$

Cette droite sera donc la tangente au cycle, et l'on aura

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = (\lambda_1 a_{r+\rho} + \lambda_2 b_{r+\rho} + \lambda_3 c_{r+\rho}) t^{r+\rho} + \ldots,$$

$a_{r+\rho}, b_{r+\rho}, c_{r+\rho}$ étant la première colonne de coefficients telle que l'on ait

$$\begin{vmatrix} x_0 & a_r & a_{r+\rho} \\ y_0 & b_r & b_{r+\rho} \\ z_0 & c_r & c_{r+\rho} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Le nombre des intersections de la tangente avec le cycle au point (x_0, y_0, z_0) sera donc $r + \rho$.

Les nombres r et ρ se nomment l'*ordre* et la *classe* du cycle.

Un cycle dont les équations ont été mises sous la forme canonique (3) a évidemment pour ordre r, pour classe $r_0 - r$, et pour tangente la droite $Y - Y_0 = a(X - X_0)$.

572. Soient c et C deux cycles ayant même origine. Proposons-nous de déterminer le nombre de leurs intersections confondues avec l'origine.

Comme il est évident qu'une transformation homographique change un cycle en un autre cycle, il est permis d'admettre que le triangle de référence ait été choisi de telle sorte que l'origine commune des cycles ne soit pas sur la droite $z = 0$, et que le point $x = z = 0$ ne soit pas sur les tangentes aux cycles. La droite $X = X_0$ (ou $x = X_0 z$) ne sera donc pas tangente aux cycles, et l'on pourra donner aux équations de c la forme canonique (3). Ses branches $\eta_0, \ldots, \eta_{r-1}$ seront fournies par les formules (4), et le cycle sera représenté, après l'élimination du paramètre, par l'équation (5). Quant au cycle C, on pourra mettre ses équations sous une forme analogue

$$X = X_0 + t^R, \qquad Y = Y_0 + A t^R + A_0 t^{R_0} + \ldots,$$

et il aura R branches $H_0, H_1, \ldots$.

Les valeurs de t correspondantes aux points d'intersection des deux cycles seront données par l'équation

$$P(X_0 + t^R, Y_0 + A t^R + A_0 t^{R_0} + \ldots) = 0.$$

Le nombre des racines nulles [lesquelles se changeraient en racines infiniment petites pour un autre cycle

$$P(X, Y) + \varepsilon P_1(X, Y) = 0$$

infiniment voisin de c et ne passant plus par l'origine X_0, Y_0]

sera égal à l'ordre O du premier membre par rapport à l'infiniment petit t.

Or, si l'on remplace, dans cette expression, t par

$$e^{\frac{2m\pi i}{R}}(X - X_0)^{\frac{1}{R}},$$

auquel cas elle se réduira à

$$P(X, H_m),$$

il est clair que son ordre en $X - X_0$ sera devenu $\frac{O}{R}$. Donc O est égal à R fois l'ordre par rapport à $X - X_0$ de la quantité

$$P(X, H_m) = (H_m - \eta_0)\ldots(H_m - \eta_{r-1})$$

ou à l'ordre du produit

$$\prod_{m=0}^{m=R-1} P(X, H_m) = \prod_{m,n}(H_m - \eta_n).$$

Si les cycles c et C n'ont pas même tangente, a et A seront différents, et chacune des différences $H_m - \eta_n$ étant de la forme $(A - a)(X - X_0) + \ldots$, l'ordre O du produit sera égal au nombre Rr des facteurs qui le composent.

Mais cet ordre s'élèvera si les cycles ont même tangente, car l'ordre de chacun des facteurs sera > 1. Pour l'obtenir, dans ce cas, il suffira d'évaluer l'ordre du produit

$$(H_0 - \eta_0)\ldots(H_0 - \eta_{r-1})$$

et de le multiplier par R.

573. Soit, pour fixer les idées,

$$\eta_0 = Y_0 + a(X - X_0) + a_0(X - X_0)^{\frac{r_0}{r}} + \ldots$$

celui des développements $\eta_0, \eta_1, \ldots$ qui a, au début, le plus grand nombre de termes communs avec H_0. Supposons que la coïncidence se maintienne jusqu'au terme

$$(7) \qquad a_\mu(X - X_0)^{\frac{r_\mu}{r}} = A_\mu(X - X_0)^{\frac{R_\mu}{R}},$$

les deux termes suivants différant soit par l'exposant, soit au moins par le coefficient. La différence $H_0 - \eta_0$ sera de l'ordre l, l désignant le plus petit des deux nombres $\frac{r_{\mu+1}}{r}$, $\frac{R_{\mu+1}}{R}$.

Ceux des développements η_m qui coïncident avec η_0 jusqu'au terme (7) inclusivement donnent également des différences $H_0 - \eta_m$ d'ordre l. Il est aisé d'en trouver le nombre. En effet, m doit être tel que l'on ait

$$\theta^{mr_0} = 1, \qquad \theta^{mr_1} = 1, \qquad \ldots, \qquad \theta^{mr_\mu} = 1,$$

d'où

$$mr_0 \equiv 0, \qquad mr_1 \equiv 0, \qquad \ldots, \qquad mr_\mu \equiv 0 \mod r$$

ou

$$md \equiv 0 \mod r,$$

d désignant le plus grand commun diviseur de $r_0, \ldots, r_\mu$. Cette congruence admet δ_μ solutions, δ_μ étant le plus grand commun diviseur de r et de d, ou, ce qui revient au même, de $r, r_0, \ldots, r_\mu$.

Considérons, en second lieu, les développements η_m qui coïncident avec η_0 jusqu'au terme $a_{\lambda-1}(X - X_0)^{\frac{r_{\lambda-1}}{r}}$ inclusivement, mais s'en séparent au terme suivant, λ étant l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, \mu$.

Il existe, d'après ce qu'on vient de voir, $\delta_{\lambda-1}$ développements η_m, où la coïncidence a lieu jusqu'à ce terme ; mais on doit en exclure δ_λ pour lesquels la coïncidence subsisterait pour le terme suivant ; il en reste donc $\delta_{\lambda-1} - \delta_\lambda$, pour chacun desquels $H_0 - \eta_m$ est d'ordre $\frac{r_\lambda}{r}$.

Enfin il existera $r - \delta_0$ développements pour lesquels la séparation a lieu immédiatement après le premier terme $a(X - X_0)$, et pour chacun d'eux $H_0 - \eta_m$ sera d'ordre $\frac{r_0}{r}$.

Nous obtenons ainsi la formule suivante :

$$O = R\left[(r-\delta_0)\frac{r_0}{r} + \sum_1^{\mu}(\delta_{\lambda-1}-\delta_\lambda)\frac{r_\lambda}{r} + \delta_\mu l\right].$$

574. Les mêmes considérations donnent la solution du problème suivant :

Trouver l'ordre Q *par rapport à* $X - X_0$ *du produit*

$$\Pi(\eta_m - \eta_n),$$

étendu aux diverses branches $\eta_0, \ldots, \eta_{r-1}$ *d'un même cycle c.*

Les deux différences $\eta_m - \eta_n$ et $\eta_{m+k} - \eta_{n+k}$, ne différant que par le changement de $X - X_0$ en $\theta^k(X - X_0)$, seront du même ordre ; Q sera donc égal à r fois l'ordre du produit

$$(\eta_0 - \eta_1)(\eta_0 - \eta_2)\ldots(\eta_0 - \eta_{r-1}).$$

Or, parmi les différences ci-dessus, il en existe, comme on l'a vu, $r - \delta_0$ qui sont d'ordre $\frac{r_0}{r}$, et généralement $\delta_{\lambda-1} - \delta_\lambda$ qui sont d'ordre $\frac{r_\lambda}{r}$. On aura donc

$$Q = (r-\delta_0)r_0 + \sum_1^{\infty}(\delta_{\lambda-1}-\delta_\lambda)r_\lambda.$$

Cette suite s'arrêtera d'ailleurs d'elle-même au bout d'un certain nombre de termes, car, les entiers $r, r_0, r_1, r_2, \ldots$ ayant pour plus grand commun diviseur l'unité, les entiers δ finiront par devenir tous égaux à l'unité.

On peut d'ailleurs remarquer que les seuls parmi les exposants $r_0, r_1, \ldots$ qui figurent effectivement dans cette somme sont ceux qui ne sont pas divisibles par le plus grand commun diviseur des précédents et de r (car, pour les autres, $\delta_{\lambda-1} = \delta_\lambda$). On leur donne le nom d'*exposants caractéristiques*.

575. Soit encore C un cycle ayant pour équations

$$x : y : z :: T_1 : T_2 : T_3$$

et pour origine le point (x_0, y_0, z_0). Soit, d'autre part, $f(x, y, z) = 0$ une courbe algébrique. Les intersections de la courbe et du cycle seront données par l'équation

$$f(T_1, T_2, T_3) = 0,$$

et le nombre de celles qui sont concentrées au point (x_0, y_0, z_0) sera égal au nombre des racines nulles de cette équation, c'est-à-dire à l'ordre de $f(T_1, T_2, T_3)$ par rapport à l'infiniment petit t. Ce nombre N se nomme l'*ordre* de $f(x, y, z)$ par rapport à C; il sera nul, si la courbe ne passe pas par le point (x_0, y_0, z_0). Dans le cas contraire, cherchons à le déterminer.

Soient $c_1, c_2, \ldots$ ceux des cycles de f qui ont leur origine en (x_0, y_0, z_0). Nous pouvons évidemment admettre que ce point n'est pas sur la droite $z = 0$, et que le point $x = z = 0$ n'est pas sur les tangentes aux cycles $c_1, c_2, \ldots$ et C. Les cycles $c_1, c_2, \ldots$ pourront être représentés par des équations de la forme

$$P_1(X, Y) = 0, \qquad P_2(X, Y) = 0, \qquad \ldots,$$

et l'on aura

$$f(x, y, z) = z^n f(X, Y, 1) = z^n M P_1(X, Y) P_2(X, Y) \ldots,$$

M étant une série de puissances de X et de Y qui ne s'annule plus à l'origine du cycle.

L'ordre de z et celui de M par rapport à C étant évidemment nuls, l'ordre de f sera égal à la somme Ω des ordres O_1, $O_2, \ldots$ des cycles $c_1, c_2, \ldots$ par rapport à C. Nous avons indiqué le moyen de les calculer (572-573). En particulier, si aucun de ces cycles n'a même tangente que C, ces nombres seront égaux à $Rr_1, Rr_2, \ldots$, $R, r_1, r_2, \ldots$ étant les ordres respectifs des cycles $C, c_1, c_2, \ldots$. Leur somme sera $R(r_1 + r_2 + \ldots) = Rm$, m étant l'ordre de multiplicité du point (x_0, y_0, z_0) sur la courbe f.

576. Soient enfin deux courbes algébriques $f(x, y, z) = 0$ et $F(x, y, z) = 0$ se coupant en un point (x_0, y_0, z_0). Soient $c_1, c_2, \ldots$ ceux des cycles de f, et $C_1, C_2, \ldots$ ceux des cycles de F qui ont ce point pour origine. Le nombre des intersections de f avec F en ce point est évidemment la somme des nombres $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ de ses intersections avec les cycles $C_1, C_2, \ldots$, c'est-à-dire la somme des ordres de f par rapport à ces cycles. Celle-ci, décomposée en éléments plus simples, sera égale à $\Sigma_{\alpha,\beta} O_{\alpha\beta}$, $O_{\alpha\beta}$ désignant le nombre des intersections du cycle C_α avec le cycle c_β. Si ces cycles n'ont pas de tangente commune, $O_{\alpha\beta}$ sera égal au produit de leurs ordres R_α, r_β. Le nombre total des intersections sera donc, dans ce cas,

$$\Sigma R_\alpha r_\beta = \Sigma R_\alpha \Sigma r_\beta = M m,$$

M et m étant les ordres de multiplicité respectifs du point (x_0, y_0, z_0) sur les deux courbes.

577. Appliquons les principes qui précèdent à la recherche de l'abaissement produit dans la classe d'une courbe f par la présence d'un point multiple A. Nous aurons à évaluer l'ordre de multiplicité de A comme intersection de f et de la polaire

$$\varphi = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

où α, β, γ sont des arbitraires.

Supposons encore : 1° que A ne soit pas sur la droite $z = 0$; 2° que les tangentes à f en A ne passent pas par le sommet $x = z = 0$. Les coordonnées (X_0, Y_0) du point A auront des valeurs finies, et, les cycles $c_1, c_2, \ldots$ de f qui ont leur origine en ce point, n'ayant pas $X - X_0$ pour tangente, leurs diverses branches auront des développements de la forme

$$(8) \qquad \eta = Y_0 + a(X - X_0) + a_0 (X - X_0)^{\frac{r_0}{r}} + \ldots.$$

Posons maintenant

$$\frac{x}{z} = X, \qquad \frac{y}{z} = Y, \qquad f(X, Y, 1) = F(X, Y).$$

On aura

$$f(x, y, z) = z^n F(X, Y)$$

et, en dérivant,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z^{n-1} \frac{\partial F}{\partial X}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = z^{n-1} \frac{\partial F}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = n z^{n-1} F - z^{n-2}\left(x \frac{\partial F}{\partial X} + y \frac{\partial F}{\partial Y}\right).$$

Substituant dans φ et mettant z^{n-1} en facteur commun, il viendra

$$\varphi(x, y, z) = z^{n-1} \Phi(X, Y),$$

où

$$\Phi(X, Y) = (\alpha - \gamma X) \frac{\partial F}{\partial X} + (\beta - \gamma Y) \frac{\partial F}{\partial Y} + \gamma n F.$$

Il faut trouver la somme des ordres de φ par rapport aux cycles $c_1, c_2, \ldots$. Or ces ordres sont nuls pour le facteur z^{n-1}, la droite $z = 0$ ne passant pas par l'origine du cycle. Quant au second facteur, cette somme sera égale, ainsi que nous l'avons vu, à l'ordre en $X - X_0$ du produit

$$\Phi(X, \eta_0) \Phi(X, \eta_1) \ldots,$$

où $\eta_0, \eta_1, \ldots$ sont les diverses branches des cycles $c_1, c_2, \ldots$.

On a d'ailleurs

$$F(X, Y) = M(Y - \eta_0)(Y - \eta_1) \ldots,$$

M étant un facteur qui ne s'annule plus pour $X = X_0$, $Y = Y_0$. On en déduit, pour $Y = \eta_0$, par exemple,

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial X} = - M_0(\eta_0 - \eta_1)(\eta_0 - \eta_2) \ldots \frac{d\eta_0}{dX},$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = M_0(\eta_0 - \eta_1)(\eta_0 - \eta_2) \ldots,$$

M_0 ne s'annulant pas pour $X = X_0$. En substituant ces valeurs dans l'expression de Φ, il viendra

$$\Phi(X, \eta_0) = \left[(\gamma X - \alpha)\frac{d\eta_0}{dX} + \beta - \gamma\eta_0\right] M_0(\eta_0 - \eta_1)(\eta_0 - \eta_2)\ldots.$$

Or le facteur entre parenthèses est de degré zéro, car, d'après la forme (8) du développement de η_0, ni cette expression, ni sa dérivée ne contiennent de puissances négatives de $X - X_0$, et le coefficient du terme de degré zéro, contenant l'arbitraire β, ne s'annule pas en général; M_0 est aussi de degré zéro. L'ordre de $\Phi(X, \eta_0)$ est donc celui du produit $(\eta_0 - \eta_1)(\eta_0 - \eta_2)\ldots$. Raisonnant de même sur chacun des autres facteurs $\Phi(X, \eta_1)$, ..., on trouve que l'ordre de multiplicité cherché est celui du produit des différences $\eta_i - \eta_k$.

Considérons celles de ces différences où η_i appartient à un cycle c_α et η_k à un autre cycle c_β. L'ordre $O_{\alpha\beta}$ de leur produit a été déterminé plus haut. Celles où η_i appartient à c_β et η_k à c_α donneront encore un produit d'ordre $O_{\alpha\beta}$. Enfin celles de ces différences où η_i et η_k appartiennent à un même cycle c_α ont un produit dont l'ordre Q_α a été également déterminé.

Le degré de multiplicité cherché sera donc

$$2\,\Sigma_{\alpha,\beta} O_{\alpha\beta} + \Sigma_\alpha Q_\alpha.$$

Dans le cas particulier où tous les cycles sont d'ordre 1, et où leurs tangentes sont distinctes, les Q_α seront nuls et les $O_{\alpha\beta}$ égaux à l'unité. L'expression ci-dessus deviendra donc $m(m-1)$, m désignant le nombre des cycles ou le degré de multiplicité du point considéré.

578. La somme des ordres d'un polynome homogène $\varphi(x, y, z)$ de degré m par rapport à tous les cycles d'une courbe de degré n est évidemment égale à mn, nombre total des intersections des courbes f et φ.

L'ordre du quotient de deux polynomes étant la différence

de leurs ordres, le théorème s'étend immédiatement au cas où φ est une fraction rationnelle homogène.

En particulier, une fonction φ rationnelle en X, Y étant rationnelle et homogène de degré zéro en x, y, z, la somme de ses ordres sera nulle.

Enfin ce résultat s'étend encore au cas où φ contiendrait, outre X, Y, les dérivées $\frac{dY}{dX}$, $\frac{d^2Y}{dX^2}$, ...; car, en dérivant l'équation $f(X, Y, 1) = 0$, on obtient pour $\frac{dY}{dX}$, ... des expressions rationnelles en X, Y.

579. Ce résultat, appliqué à la dérivée $\frac{d^2Y}{dX^2}$, va nous conduire à la détermination précise du nombre des inflexions d'une courbe donnée f.

Les coordonnées x, y, z, dans les équations d'un cycle, étant exprimées au moyen d'une variable auxiliaire t, nous devons tout d'abord exprimer $\frac{d^2Y}{dX^2}$ en fonction des dérivées x', y', z', x'', y'', z'' prises par rapport à t.

On a tout d'abord

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{X'Y'' - Y'X''}{X'^3},$$

puis

$$X = \frac{x}{z}, \quad X' = \frac{zx' - xz'}{z^2}, \quad X'' = \frac{zx'' - xz''}{z^2} - 2z'\frac{zx' - xz'}{z^3},$$

$$Y = \frac{y}{z}, \quad Y' = \frac{zy' - yz'}{z^2}, \quad Y'' = \frac{zy'' - yz''}{z^2} - 2z'\frac{zy' - yz'}{z^3}$$

et, en substituant,

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{z^3 D}{(zx' - xz')^3},$$

D désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

Calculons la somme des ordres de cette expression.

Pour le facteur z^3, cette somme est $3n$, n désignant le degré de f.

Soit, d'autre part, c un cycle de f d'ordre r et de classe ρ. On pourra, à cause de la symétrie de D par rapport aux coordonnées, admettre que ses équations sont réductibles à la forme canonique

$$(9) \qquad x : y : z :: X_0 + t^r : Y_0 + at^r + a_0 t^{r+\rho} + \ldots : 1.$$

Les seconds membres, substitués dans D, donneront un résultat de la forme

$$a_0 r\rho(r+\rho) t^{2r+\rho-3} + \ldots;$$

l'ordre de D par rapport à c sera donc $2r+\rho-3$.

580. Cherchons enfin l'ordre de $(zx'-xz')^3$. On a, pour le cycle c,

$$yz' - zy' = -art^{r-1} + \ldots,$$
$$zx' - xz' = rt^{r-1},$$
$$xy' - yx' = (aX_0 - Y_0)rt^{r-1} + \ldots.$$

La plus haute puissance de t qui entre en facteur commun dans ces trois quantités sera t^{r-1}. La symétrie du système de ces expressions par rapport aux coordonnées montre que ce résultat subsiste pour tout cycle de f. Car ceux qui ne sont pas réductibles à la forme canonique (9) le seraient à une forme analogue où les variables seraient seulement permutées. On a donc, quel que soit le cycle considéré,

$$yz' - zy' = t^{r-1}\Theta_1, \quad zx' - xz' = t^{r-1}\Theta_2, \quad xy' - yx' = t^{r-1}\Theta_3,$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 étant des séries de puissances de t, dont l'une au moins n'est pas privée de terme constant; et l'ordre de $zx'-xz'$ sera égal à $r-1+\omega_2$, ω_2 désignant l'ordre de Θ_2.

L'ordre de $\dfrac{D}{(zx'-xz')^3}$ par rapport à c sera donc

$$2r+\rho-3-3(r-1+\omega_2) = \rho - r - 3\omega_2.$$

La somme des ordres de $\frac{d^2Y}{dX^2}$ par rapport à tous les cycles de f étant nulle, on aura

$$(10) \qquad 0 = 3n + \Sigma(\rho - r) - 3\Sigma\omega_2,$$

les sommations étant étendues à tous ces cycles.

581. Il reste à déterminer la somme $\Sigma\omega_2$. Pour cela, considérons la courbe φ, *polaire réciproque* de f, dont chaque point (u, v, w) est lié au point (x, y, z) par les relations

$$u : v : w :: \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Sur chaque cycle c de la courbe f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ seront proportionnels à $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ et, par suite, à Θ_1, Θ_2, Θ_3. Au cycle c correspondra donc sur φ le cycle γ défini par les équations

$$u : v : w :: \Theta_1 : \Theta_2 : \Theta_3$$

et ω_2 représente le nombre des intersections de ce cycle avec la droite $v = 0$. La somme $\Sigma\omega_2$ est donc égale au nombre total des intersections de v et de φ, soit au degré de cette dernière courbe ou enfin à la classe ν de f.

Nous aurons donc, en remplaçant $\Sigma\omega_2$ par sa valeur dans l'équation (10),

$$0 = 3n + \Sigma(\rho - r) - 3\nu$$

ou, en décomposant la somme $\Sigma(\rho - r)$ en deux autres, l'une Σ' relative aux cycles des points multiples, l'autre Σ'' relative à ceux des points simples, et remarquant que pour ces derniers $r = 1$,

$$(11) \qquad \Sigma''(\rho - 1) = 3(\nu - n) - \Sigma'(\rho - r).$$

Or, pour un point simple, ρ représente évidemment l'ordre de contact de la courbe avec sa tangente; les points d'inflexion sont ceux où cet ordre est > 1. Si donc nous convenons de considérer ceux où ce contact est d'ordre $\mu + 1$ comme re-

présentant μ inflexions confondues, la somme $\Sigma''(\rho - 1)$ ne sera autre chose que le nombre des inflexions, et ce nombre sera donné par la formule (11).

III. — Transformations birationnelles du plan.

582. Les transformations homographiques sont un cas particulier de transformations plus générales, étudiées par M. Cremona, et dont nous allons dire quelques mots.

Considérons les courbes d'ordre n assujetties à avoir α_1 points simples, α_2 points doubles, ..., enfin α_m points multiples d'ordre m, donnés de position, et dits *points fondamentaux*, les entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ satisfaisant aux deux équations de condition

$$\sum_1^m \frac{k(k+1)}{2}\alpha_k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3,$$

$$\sum_1^m k^2\alpha_k = n^2 - 1.$$

La sujétion d'avoir un point donné de multiplicité k s'exprimant par $\frac{k(k+1)}{2}$ équations linéaires et homogènes par rapport aux coefficients, les courbes cherchées contiendront encore $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \sum \frac{k(k+1)}{2}\alpha_k = 3$ coefficients arbitraires, dont elles dépendent linéairement. Leur équation sera donc de la forme

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0,$$

f_1, f_2, f_3 étant trois courbes particulières du réseau. Nous admettrons que les polynomes f_1, f_2, f_3 n'aient pas de facteur commun.

Posons

$$\frac{f_1}{x'} = \frac{f_2}{y'} = \frac{f_3}{z'},$$

x', y', z' désignant des indéterminées.

Les polynomes f_1, f_2, f_3 étant d'ordre n, les deux courbes

$$\frac{f_1}{x'} = \frac{f_2}{y'}, \qquad \frac{f_1}{x'} = \frac{f_3}{z'}$$

se couperont en n^2 points; mais un seul de ces points variera avec x', y', z'. En effet, soit p l'un des α_k points fondamentaux d'ordre k. Étant multiple d'ordre k sur chacune des deux courbes, il représente k^2 intersections. Le nombre des intersections fixes de position sera donc $\sum k^2 \alpha_k$ ou $n^2 - 1$.

Soit (x, y, z) le dernier point d'intersection, variable avec x', y', z'; ses coordonnées $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ s'exprimeront rationnellement en $\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}$ par des fractions qu'on peut réduire au même dénominateur; on aura, par suite,

$$x : y : z :: \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant des polynomes homogènes en x', y', z' et de même degré.

Nous obtenons ainsi une liaison *birationnelle*

$$x' : y' : z' :: f_1 : f_2 : f_3,$$
$$x : y : z :: \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

qui, à chaque point (x, y, z), fait correspondre un autre point (x', y', z'), et réciproquement.

583. Il y a une exception pour les points fondamentaux; car, f_1, f_2, f_3 s'y annulant, les rapports de x', y', z' ne sont pas déterminés. A l'un de ces points correspond une courbe, dite *fondamentale*, de la manière suivante :

Considérons un point

$$x = a + h, \qquad y = b + k, \qquad z = c,$$

infiniment voisin du point fondamental (a, b, c). Soit i l'ordre de multiplicité de celui-ci : f_1, f_2, f_3 et leurs dérivées par-

tielles, jusqu'à l'ordre $i-1$ inclusivement, s'y annuleront; on aura donc

$$f_1(x, y, z) = \frac{1}{1.2\ldots i}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^i f_1 + \ldots,$$

et de même pour f_2, f_3. Si donc h, k tendent vers zéro, de telle sorte que leur rapport tende vers un nombre fixe $\frac{\lambda}{\mu}$, les quantités x', y', z', proportionnelles à f_1, f_2, f_3, le deviendront à la limite à

$$\left(\lambda\frac{\partial}{\partial a} + \mu\frac{\partial}{\partial b}\right)^i f_1, \quad \left(\lambda\frac{\partial}{\partial a} + \mu\frac{\partial}{\partial b}\right)^i f_2, \quad \left(\lambda\frac{\partial}{\partial a} + \mu\frac{\partial}{\partial b}\right)^i f_3.$$

Le point (x', y', z') ainsi obtenu dépendra du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. En faisant varier celui-ci, il décrira la courbe fondamentale. Cette courbe est d'ordre i, car elle coupe une droite $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0$ en i points, dont les paramètres $\frac{\lambda}{\mu}$ sont définis par l'équation de degré i

$$\alpha\left(\lambda\frac{\partial}{\partial a} + \mu\frac{\partial}{\partial b}\right)^i f_1 + \ldots = 0.$$

Chaque point de la courbe fondamentale correspond, comme on le voit, au point (a, b, c) et à une direction particulière issue de ce point.

Aux points (x', y', z'), communs aux trois courbes $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$, correspondront de même une infinité de points (x, y, z) formant une courbe.

584. Un cycle C, défini par les équations

$$x : y : z :: x_0 + a_1 t + \ldots : y_0 + b_1 t + \ldots : z_0 + c_1 t + \ldots,$$

aura pour transformé un cycle C' de la forme

$$x' : y' : z' :: T_1 : T_2 : T_3,$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &= f_1(x_0 + a_1 t + \ldots, y_0 + b_1 t + \ldots, z_0 + c_1 t + \ldots) \\ &= f_1(x_0, y_0, z_0) + A_1 t + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Le cycle C′ aura pour origine le point transformé de (x_0, y_0, z_0), à moins que ce dernier point ne soit fondamental.

Dans ce cas, f_1, f_2, f_3 s'annulant en ce point, les fonctions T_1, T_2, T_3 contiendront, en facteur commun, une puissance de t, qu'on devra supprimer pour avoir les véritables équations du cycle C′.

585. Nous allons faire quelques applications de cette théorie.

Supposons d'abord que f_1, f_2, f_3 soient des fonctions du premier degré : il n'y aura pas de point fondamental, et la transformation

$$x' : y' : z' :: \alpha x + \beta y + \gamma z : \alpha' x + \beta' y + \gamma' z : \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

sera homographique.

Un cycle C, ayant pour équations

$$x : y : z :: X_0 + t^r : Y_0 + a t^r + a_0 t^{r_0} + \ldots : 1,$$

aura pour transformé le cycle C′, défini par les équations

$$x' : y' : z' :: T_1 : T_2 : T_3,$$

où

$$\begin{aligned}
T_1 &= \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma + (\alpha + \beta a) t^r + \beta a_0 t^{r_0} + \ldots,\\
T_2 &= \alpha' X_0 + \beta' Y_0 + \gamma' + (\alpha' + \beta' a) t^r + \beta' a_0 t^{r_0} + \ldots,\\
T_3 &= \alpha'' X_0 + \beta'' Y_0 + \gamma'' + (\alpha'' + \beta'' a) t^r + \beta'' a_0 t^{r_0} + \ldots.
\end{aligned}$$

Ce cycle sera d'ordre r, comme C, et sa tangente

$$\begin{vmatrix}
x' & \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma & \alpha + \beta a\\
y' & \alpha' X_0 + \beta' Y_0 + \gamma' & \alpha' + \beta' a\\
z' & \alpha'' X_0 + \beta'' Y_0 + \gamma'' & \alpha'' + \beta'' a
\end{vmatrix} = 0$$

sera la transformée de la tangente à C.

Substituons, en effet, à x', y', z' les quantités proportionnelles $\alpha x + \beta y + \gamma z$, $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z$, $\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$.

Le déterminant ainsi obtenu sera le produit du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

qui n'est pas nul, par le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & X_0 & 1 \\ y & Y_0 & a \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

qui n'est autre que le premier membre de l'équation de la tangente à C.

Il résulte de là qu'à tout point p d'une courbe d'où partent un certain nombre de cycles C, C_1, ... d'ordres r, r_1, ... correspond, dans la transformée, un point p' d'où partent autant de cycles, également d'ordres r, r_1, ... De plus, si les tangentes à quelques-uns des premiers cycles coïncident, il en sera de même pour les cycles transformés.

La classe de C' est aussi égale à $r_0 - r$, comme celle de C; car le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma & \alpha + \beta a & \beta a_0 \\ \alpha' X_0 + \beta' Y_0 + \gamma' & \alpha' + \beta' a & \beta' a_0 \\ \alpha'' X_0 + \beta'' Y_0 + \gamma'' & \alpha'' + \beta'' a & \beta'' a_0 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

586. Nous allons enfin établir que C' a les mêmes exposants caractéristiques que C.

Soient, en effet, $s = r_\mu$ l'un de ces derniers; δ le plus grand commun diviseur de r, r_0, ..., $r_{\mu-1}$. Si nous mettons à part dans la suite $at^r + a_0 t^{r_0} + \ldots$ les termes dont l'exposant est divisible par δ, on pourra la mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & at^r + a_0 t^{r} + \ldots + a_\mu t^{r_\mu} + \ldots \\ & \quad = A t^r + A_1 t^{r+\delta} + A_2 t^{r+2\delta} + \ldots + \mathcal{A} t^s + \ldots, \end{aligned}$$

A, $\mathcal{A}$ étant égaux à a, a_μ et les autres coefficients A_1, A_2, ... pouvant être nuls, en tout ou en partie.

Le cycle C′, transformé de C, a pour équations

$$x' : y' : z' :: T_1 : T_2 : T_3,$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &= x'_0 + B t^r + B_1 t^{r+\delta} + \ldots + \mathcal{B} t^s + \ldots, \\ T_2 &= y'_0 + C t^r + C_1 t^{r+\delta} + \ldots + \mathcal{C} t^s + \ldots, \\ T_3 &= z'_0 + D t^r + D_1 t^{r+\delta} + \ldots + \mathcal{D} t^s + \ldots, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} x'_0 &= \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma, \\ y'_0 &= \alpha' X_0 + \beta' Y_0 + \gamma', \\ z'_0 &= \alpha'' X_0 + \beta'' Y_0 + \gamma'', \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} B = \alpha + \beta A, & C = \alpha' + \beta' A, & D = \alpha'' + \beta'' A, \\ B_1 = \beta A_1, & C_1 = \beta' A_1, & D_1 = \beta'' A_1, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \mathcal{B} = \beta \mathcal{A}, & \mathcal{C} = \beta' \mathcal{A}, & \mathcal{D} = \beta'' \mathcal{A}, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x'_0 & B & \mathcal{B} \\ y'_0 & C & \mathcal{C} \\ z'_0 & D & \mathcal{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha X_0 + \beta Y_0 + \gamma & \alpha + \beta A & \beta \mathcal{A} \\ \alpha' X_0 + \beta' Y_0 + \gamma' & \alpha' + \beta' A & \beta' \mathcal{A} \\ \alpha'' X_0 + \beta'' Y_0 + \gamma'' & \alpha'' + \beta'' A & \beta'' \mathcal{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

sera d'ailleurs $\gtrless 0$, car $\mathcal{A} = a_\mu$ n'est pas nul.

En outre, l'un au moins des nombres x'_0, y'_0, z'_0 n'est pas nul. Soit, par exemple, $z'_0 \gtrless 0$. Posons

$$\frac{x'}{z'} = X', \qquad \frac{y'}{z'} = Y', \qquad \frac{x'_0}{z'_0} = X'_0, \qquad \frac{y'_0}{z'_0} = Y'_0,$$

et cherchons à développer les expressions $X' - X'_0$, $Y' - Y'_0$ suivant les puissances croissantes de t.

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned} x'_0 + B t^r + B_1 t^{r+\delta} + \ldots &= M, \\ \mathcal{B} t^s + \ldots &= M', \\ z'_0 + D t^r + D_1 t^{r+\delta} + \ldots &= N, \\ \mathcal{D} t^s + \ldots &= N'. \end{aligned}$$

On aura

$$X' - X'_0 = \frac{M + M'}{N + N'} - \frac{x'_0}{z'_0} = \frac{M}{N} - \frac{x'_0}{z'_0} + \frac{M'N - MN'}{N(N + N')}.$$

Le développement de $\frac{M}{N} - \frac{x'_0}{z_0} = \frac{Mz'_0 - Nx'_0}{Nz'_0}$ est de la forme

$$E t^r + E_1 t^{r+\delta} + \ldots,$$

où le premier coefficient E est égal à

$$\frac{Bz'_0 - Dx'_0}{z'^2_0}.$$

Celui de $\frac{M'N - MN'}{N(N + N')}$ est de la forme

$$\mathcal{E} t^s + \ldots,$$

où

$$\mathcal{E} = \frac{\mathfrak{B} z'_0 - \mathfrak{D} x'_0}{z'^2_0}.$$

On a donc

$$X' - X'_0 = E t^r + E_1 t^{r+\delta} + \ldots + \mathcal{E} t^s + \ldots.$$

On trouvera de même

$$Y' - Y'_0 = F t^r + F_1 t^{r+\delta} + \ldots + \mathfrak{F} t^s + \ldots,$$

où

$$F = \frac{Cz'_0 - Dy'_0}{z'^2_0}, \qquad \mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{C} z'_0 - \mathfrak{D} y'_0}{z'^2_0}.$$

Le déterminant

$$E\mathfrak{F} - \mathcal{E}F = \frac{1}{z'^3_0} \begin{vmatrix} x'_0 & B & \mathfrak{B} \\ y'_0 & C & \mathfrak{C} \\ z'_0 & D & \mathfrak{D} \end{vmatrix}$$

est d'ailleurs $\gtrless 0$.

Ainsi, dans les développements de $X' - X'_0$ et de $Y' - Y'_0$, s est le plus petit exposant non divisible par δ, et le déterminant $E\mathfrak{F} - \mathcal{E}F$ n'est pas nul.

Nous allons voir que ces conditions sont suffisantes pour que s soit un exposant caractéristique pour le cycle C'.

En effet, l'un au moins des coefficients E, F, par exemple E, n'est pas nul. Posons, pour ramener les équations du cycle à la forme canonique,

$$\mathrm{E}t^r + \ldots + \mathcal{E}t^s + \ldots = t'^r,$$

t' étant un nouveau paramètre; et faisons

$$t = \mathrm{E}^{-\frac{1}{r}} t'\theta.$$

L'équation précédente deviendra après division par t'^r

$$\left.\begin{array}{l} \theta^r + \mathrm{E}_1 \mathrm{E}^{-\frac{r+\delta}{r}} t'^\delta \theta^{r+\delta} + \ldots \\ + \quad \mathcal{E}\mathrm{E}^{-\frac{s}{r}} t'^{s-r} \theta^s + \ldots \end{array}\right\} = 1.$$

Dans le développement de θ tiré de cette équation, mettons en évidence les termes dont l'exposant est divisible par δ; on pourra écrire

$$\theta = 1 + \mathrm{G}_1 t'^\delta + \mathrm{G}_2 t'^{2\delta} + \ldots + \mathcal{G} t'^\sigma + \ldots$$

et, m étant un entier quelconque, on en déduira un développement de la forme

$$\theta^m = 1 + \mathrm{H}_1 t'^\delta + \mathrm{H}_2 t'^{2\delta} + \ldots + m\mathcal{G} t'^\sigma + \ldots.$$

Substituons ces valeurs de θ et de ses puissances dans l'équation précédente; nous en déduirons les valeurs de σ et de $\mathcal{G}$.

En effet, le premier terme du développement de

$$\theta^r + \mathrm{E}_1 \mathrm{E}^{-\frac{r+\delta}{r}} t'^\delta \theta^{r+\delta} + \ldots$$

dont l'exposant ne soit pas divisible par δ sera $r\mathcal{G} t'^\sigma$. Dans celui de

$$+ \mathcal{E}\mathrm{E}^{-\frac{s}{r}} t'^{s-r} \theta^s + \ldots,$$

le premier terme de ce genre sera $\mathcal{E}\mathrm{E}^{-\frac{s}{r}} t'^{s-r}$. Ces deux termes devant se détruire, on aura

$$\sigma = s - r, \qquad r\mathcal{G} = -\mathcal{E}\mathrm{E}^{-\frac{s}{r}}.$$

On aura donc, pour t, une expression de la forme

$$t = E^{-\frac{1}{r}} t'[1 + G_1 t'^{\delta} + \ldots + \mathcal{G} t'^{s-r} + \ldots],$$

où $\mathcal{G}$ est défini comme ci-dessus.

Substituons cette valeur dans l'expression de $Y' - Y'_0$. Le premier terme d'exposant non divisible par δ dans le développement de

$$F t^r + F_1 t^{r+\delta} + \ldots$$

sera

$$FE^{-1} t'^r r \mathcal{G} t'^{s-r} = - F\mathcal{E} E^{-1-\frac{s}{r}} t'^s.$$

Dans celui de $\mathcal{F} t^s + \ldots$, ce sera $\mathcal{F} E^{-\frac{s}{r}} t'^s$.

Ces deux termes réunis donneront un terme en t'^s, dont le coefficient

$$E^{-1-\frac{s}{r}} (\mathcal{F} E - F\mathcal{E}) = \mathfrak{J}$$

sera différent de zéro.

On aura donc avec le paramètre t', pour $X' - X'_0$ et $Y' - Y'_0$, des expressions de la forme

$$X' - X'_0 = t'^r,$$
$$Y' - Y'_0 = I t'^r + I_1 t'^{r+\delta} + \ldots + \mathfrak{J} t'^s + \ldots.$$

Donc s sera un exposant caractéristique pour le cycle C'.

Comme on peut d'ailleurs revenir de C' à C par une substitution homographique, on voit que, réciproquement, tout exposant caractéristique de C' le sera aussi pour C.

587. Passons à l'examen des transformations dites *quadratiques*, où f_1, f_2, f_3 sont des courbes du second degré. On aura trois points fondamentaux. Soient $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ les équations des droites qui les joignent deux à deux ; f_1, f_2, f_3 seront des fonctions linéaires des produits AB, BC, CA.

Soit

$$f_1 = \alpha_1 BC + \beta_1 CA + \gamma_1 AB,$$
$$f_2 = \alpha_2 BC + \beta_2 CA + \gamma_2 AB,$$
$$f_3 = \alpha_3 BC + \beta_3 CA + \gamma_3 AB.$$

La transformation considérée

$$x' : y' : z' :: f_1 : f_2 : f_3$$

résulte évidemment de la composition des trois transformations suivantes :

$$\xi : \eta : \zeta :: A : B : C,$$
$$\xi' : \eta' : \zeta' :: \eta\zeta : \zeta\xi : \xi\eta,$$
$$x' : y' : z' :: \alpha_1\xi' + \beta_1\eta' + \gamma_1\zeta' : \alpha_2\xi' + \beta_2\eta' + \gamma_2\zeta' : \alpha_3\xi' + \beta_3\eta' + \gamma_3\zeta',$$

dont la première et la dernière sont homographiques; quant à la seconde, c'est une transformation quadratique particulière, que nous allons étudier.

588. Remplaçons, pour revenir aux notations habituelles, ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' par x, y, z, x', y' z'; nous aurons

$$x' : y' : z' :: yz : zx : xy.$$

On en déduit sans peine

$$x : y : z :: y'z' : z'x' : x'y'.$$

La relation entre les deux séries de variables est donc réciproque.

Les points fondamentaux sont les sommets du triangle de référence. A chacun d'eux correspond, comme ligne fondamentale, le côté opposé du triangle. Supposons, en effet, que y et z tendent vers zéro, leur rapport tendant vers $\frac{\lambda}{\mu}$; $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ tendront respectivement vers o et $\frac{\mu}{\lambda}$. Le lieu des points limites pour les diverses valeurs de $\frac{\lambda}{\mu}$ sera donc la droite $x' = 0$.

Un cycle C ayant pour équations

$$x : y : z :: X_0 + t^r : Y_0 + at^r + a_0 t^{r_0} + \ldots : 1$$

aura pour transformé le cycle C′ défini par les équations

$$x' : y' : z' :: T_1 : T_2 : T_3,$$

où

$$\begin{aligned} T_1 &= Y_0 + at^r + a_0 t^{r_0} + \ldots, \\ T_2 &= X_0 + t^r, \\ T_3 &= (X_0 + t^r)(Y_0 + at^r + \ldots) \\ &= X_0 Y_0 + (Y_0 + aX_0)t^r + at^{2r} + \ldots + a_0 X_0 t^{r_0} + \ldots. \end{aligned}$$

Réciproquement C sera le transformé de C′.

589. Pour la discussion que nous allons faire, nous distinguerons cinq sortes de cycles :

1° *Cycles* C *dont l'origine n'est pas sur le triangle de référence.* — On a, dans ce cas, $X_0 \gtrless 0$, $Y_0 \gtrless 0$. Le cycle transformé C′, ayant son origine au point $(Y_0, X_0, X_0 Y_0)$, qui n'est pas sur le triangle, sera de la même sorte. Il est aussi d'ordre r, et a pour tangente la droite

$$0 = \begin{vmatrix} x' & Y_0 & a \\ y' & X_0 & 1 \\ z' & X_0 Y_0 & Y_0 + aX_0 \end{vmatrix} = aX_0^2 x' - Y_0^2 y' + (Y_0 - aX_0) z'.$$

2° *Cycles* C *dont l'origine est sur un côté du triangle* ($x = 0$ par exemple), *mais n'ont pas ce côté pour tangente.* — On a dans ce cas

$$X_0 = 0, \qquad Y_0 \gtrless 0,$$

et le transformé C′ aura pour équations canoniques

$$\begin{aligned} \frac{z'}{x'} &= \frac{T_3}{T_1} = t^r, \\ \frac{y'}{x'} &= \frac{T_2}{T_1} = t^r [Y_0 + at^r + a_0 t^{r_0} + \ldots]^{-1} \\ &= \frac{1}{Y_0} t^r - \frac{a}{Y_0^2} t^{2r} - \frac{a_0}{Y_0^2} t^{r_0 + r} + \ldots. \end{aligned}$$

Il a pour origine le point $y' = z' = 0$, et pour tangente la droite $z' = Y_0 y'$, qui n'est pas un côté du triangle. Son ordre est r; sa classe est également r, si $a \gtrless 0$, r_0, si $a = 0$; mais, en aucun cas, elle ne sera moindre que r.

Enfin, si r_μ est un exposant caractéristique de C, c'est-à-dire tel qu'il ne soit pas divisible par le plus grand commun diviseur δ de $r, r_0, r_1, \ldots, r_{\mu-1}$, le premier terme du développement de $\frac{y'}{x'}$ dont l'exposant n'est pas divisible par δ sera $-\frac{a_\mu}{Y_0^2} t^{r_\mu + r}$; *a fortiori*, $r_\mu + r$ ne sera pas divisible par le plus grand commun diviseur des exposants précédents; ce sera donc un exposant caractéristique pour C'.

3° *Cycles* C *dont l'origine est sur un côté du triangle* ($y = 0$ par exemple) *qui leur est tangent.* — On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} &Y_0 = a = 0, \qquad X_0 \gtrless 0,\\ &T_1 = a_0 t^{r_0} + \ldots,\\ &T_2 = X_0 + t^r,\\ &T_3 = (X_0 + t^r)(a_0 t^{r_0} + \ldots). \end{aligned}$$

L'origine de C' est au sommet $x' = z' = 0$. Une droite $z' - \lambda x' = 0$ passant par ce sommet coupera le cycle aux points définis par l'équation

$$(X_0 + t^r - \lambda)(a_0 t^{r_0} + \ldots) = 0,$$

laquelle a r_0 racines nulles et en acquiert $r_0 + r$ si $\lambda = X_0$. L'ordre du cycle est donc r_0, sa classe r est moindre que son ordre, et il a pour tangente la droite $z' - X_0 x' = 0$, qui n'est pas un côté du triangle.

4° *Cycles* C *dont l'origine est à un sommet* ($x = y = 0$) *du triangle, les côtés n'étant pas tangents.* — C'est le cas où $X_0 = Y_0 = 0$, $a \gtrless 0$. Les polynomes T_1, T_2, T_3 deviennent, après suppression du facteur commun t^r,

$$\begin{aligned} &T_1 = a + a_0 t^{r_0 - r} + \ldots,\\ &T_2 = 1,\\ &T_3 = a t^r + a_0 t^{r_0} + \ldots, \end{aligned}$$

L'origine du cycle C' sera au point $(a, 1, 0)$ sur le côté $z'=0$ du triangle, et deux cas seront à distinguer suivant que la classe $r_0 - r$ du cycle C sera au moins égale à son ordre r, ou moindre que r.

Dans le premier cas, C' sera d'ordre r et aura pour tangente la droite

$$0 = \begin{vmatrix} x' & a & a_0 \\ y' & 1 & 0 \\ z' & 0 & a \end{vmatrix} = ax' - a^2 y' - a_0 z', \qquad \text{si} \qquad r_0 - r = r,$$

ou la droite

$$0 = \begin{vmatrix} x' & a & 0 \\ y' & 1 & 0 \\ z' & 0 & a \end{vmatrix} = ax' - a^2 y', \qquad \text{si} \qquad r_0 - r > r.$$

Ces droites ne sont pas des côtés du triangle : C' sera donc de l'espèce 2.

Remarquons encore que, si r_μ est un exposant caractéristique de C, $r_\mu - r$ sera un exposant caractéristique de C'. Car, $r, r_0, \ldots, r_{\mu-1}$ ayant un plus grand commun diviseur δ qui ne divise pas r_μ, le premier exposant non divisible par δ, dans les développements de $T_1 - a$ et T_3, sera $r_\mu - r$.

En outre, les coefficients de $t^{r_\mu - r}$ dans ces développements seront respectivement a_μ, 0 et ne sont pas proportionnels à ceux des termes de moindre degré en t, qui sont

$$a_0, \quad a, \qquad \text{si} \qquad r_0 - r = r,$$
$$0, \quad a, \qquad \text{si} \qquad r_0 - r > r.$$

Donc $r_\mu - r$ sera un exposant caractéristique.

Passons au second cas, où $r_0 - r < r$. L'ordre de C' sera $r_0 - r$, moindre que l'ordre de C, et la tangente sera le côté $z'=0$ du triangle : C' sera donc de l'espèce 3.

5° *Cycles C dont l'origine est en un sommet* $(x = y = 0)$

et ayant un côté ($y = 0$) *pour tangente.* — C'est le cas où $X_0 = Y_0 = a = 0$. Le cycle C′ aura son origine au sommet $x' = z' = 0$; son ordre sera $r_0 - r$ et $z' = 0$ sa tangente. Il sera donc, lui aussi, de l'espèce 5.

590. De ce qui précède résulte la possibilité de changer une courbe quelconque k, par une suite de transformations quadratiques, en une autre courbe n'ayant que des cycles du premier ordre, et dont les tangentes aux points multiples soient toutes distinctes.

Soit, en effet, p un point de la courbe, qui soit l'origine de cycles d'ordre supérieur à 1. Considérons un triangle $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, dont le sommet ($\xi = 0$, $\eta = 0$) soit en p, les autres sommets n'étant pas sur k, et dont les côtés ne passent par aucun autre point multiple de k et ne soient pas tangents à cette courbe. On peut, par une substitution homographique, transformer respectivement les droites $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ en $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Les cycles de la courbe k_1, transformée de k, auront respectivement les mêmes ordres et les mêmes coïncidences d'origine et de tangente que ceux dont ils sont transformés, et k_1 aura avec les côtés $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ les mêmes relations que k avec $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$.

Effectuons maintenant sur k_1 la transformation quadratique particulière que nous venons d'étudier. Un point q de k_1 non situé sur les côtés du triangle sera transformé en un autre point où passent le même nombre de cycles, du même ordre, et avec les mêmes coïncidences entre leurs tangentes. Il n'y a donc rien de changé de ce côté.

Considérons en second lieu les cycles dont l'origine est sur un des côtés du triangle, sur $x = 0$ par exemple. Ils sont par hypothèse du premier ordre et, leurs origines étant différentes, les quantités $Y_0, \ldots$ correspondant à ces divers cycles sont distinctes. Enfin, ils ne sont pas tangents à $x = 0$; leur ordre ne sera donc pas altéré par la transformation; leurs transformés seront du premier ordre; ils ont tous leur origine

en $y=0$, $z=0$, mais leurs tangentes

$$-Y_0 y' + z' = 0, \quad \dots$$

sont distinctes.

On introduit ainsi un nouveau point multiple, mais à cycles d'ordre 1 et à tangentes séparées.

Passons enfin aux cycles C dont l'origine est au sommet $x=y=0$; chacun d'eux est transformé en un cycle ayant son origine sur $z=0$; ceux dont les tangentes sont distinctes auront d'ailleurs des transformés d'origines distinctes. Si la classe r_0-r du cycle C est moindre que son ordre r, celui-ci sera abaissé par la transformation. Dans le cas contraire, l'ordre se maintiendra; mais une autre simplification se produit : les exposants caractéristiques du cycle sont tous diminués de r par la transformation, ainsi que nous l'avons vu.

591. En soumettant la courbe k', transformée de k_1, à des opérations analogues, on pourra donc, sans accroître l'ordre d'aucun des cycles, ni introduire aucune nouvelle coïncidence simultanée d'origine et de tangente, abaisser progressivement les exposants caractéristiques du cycle choisi, jusqu'au moment où, ceux-ci ne pouvant décroître indéfiniment, l'abaissement portera sur l'ordre du cycle. Poursuivant encore, on finira par rendre celui-ci égal à l'unité.

On choisira ensuite un des cycles restants, pour le réduire de même, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on n'ait plus que des cycles d'ordre 1.

592. A ce moment, on pourra encore avoir des cycles ayant à la fois même origine et même tangente; mais la continuation des opérations fera disparaître ces coïncidences.

Soit, en effet, C un cycle d'ordre 1, dont l'origine soit en $x=y=0$ et qui ne soit pas tangent à $x=0$ ni à $y=0$.

Ses équations seront

$$X = t, \qquad Y = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots$$

ou

$$Y = c_1 X + c_2 X^2 + \dots.$$

Un autre cycle D d'ordre 1 et de même origine aura pour équation

$$Y = d_1 X + d_2 X^2 + \ldots.$$

Ils auront même tangente si $d_1 = c_1$, et, en général, un contact d'ordre m, si

$$(1) \qquad d_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad d_m = c_m, \qquad d_{m+1} \gtrless c_{m+1}.$$

Si C et D ont un contact d'ordre m, les transformés par la substitution quadratique que nous considérons auront encore même origine, mais un contact d'ordre $m - 1$ seulement.

On a, en effet, pour le transformé de C,

$$x' : y' : z' :: T_1 : T_2 : T_3,$$

$$T_1 = c_1 + c_2 t + \ldots, \qquad T_2 = 1, \qquad T_3 = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots,$$

d'où, en posant $\frac{x'}{y'} = X'$, $\frac{z'}{y'} = Z'$,

$$X' = c_1 + c_2 t + \ldots, \qquad Z' = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.$$

Résolvons la dernière équation par rapport à t; il viendra

$$t = \lambda_1 Z' + \lambda_2 Z'^2 + \ldots$$

et l'on déterminera les coefficients λ en substituant cette valeur dans l'équation

$$Z' = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$$

et identifiant les deux membres. Les μ premières équations, qui déterminent $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$, ne contiennent que les μ coefficients $c_1, \ldots, c_\mu$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ en dépendront donc exclusivement.

Substituant la valeur de t dans l'expression de X′, il viendra

$$X' = c_1 + A_1 Z' + \ldots + A_{m-1} Z'^{m-1} + (A_m + c_{m+1} \lambda_1^m) Z'^m + \ldots,$$

les coefficients $A_1, \ldots, A_m$ ne dépendant que de $c_1, \ldots, c_m$.

Si l'on opérait de même sur le transformé de D, on obtiendrait pour X′ un développement analogue coïncidant avec le

précédent en vertu des relations (1) jusqu'aux termes d'ordre $m-1$, mais différant par le terme d'ordre m.

On pourra donc abaisser progressivement l'ordre des contacts entre les cycles jusqu'à les faire disparaître totalement.

593. Démontrons encore le théorème suivant :

Toute transformation de Cremona résulte de la composition de transformations quadratiques.

Soit S une semblable transformation, définie par les relations

$$x' : y' : z' :: f_1 : f_2 : f_3,$$

où f_1, f_2, f_3 sont des fonctions d'ordre n en x, y, z.

Considérons trois points quelconques $p = (\alpha, \alpha', \alpha'')$, $p' = (\beta, \beta', \beta'')$, $p'' = (\gamma, \gamma', \gamma'')$ non en ligne droite, et composons la transformation S avec la transformation homographique

$$(2) \quad x : y : z :: \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta : \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta : \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta.$$

La transformation résultante sera

$$x' : y' : z' :: \varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3,$$

où $\varphi_1 = f_1(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \ldots, \ldots), \ldots$ sont de degré n en ξ, η, ζ.

Composons cette nouvelle transformation avec la suivante :

$$(3) \qquad \xi : \eta : \zeta :: \eta'\zeta' : \zeta'\xi' : \xi'\eta'.$$

La résultante S_1 sera

$$x' : y' : z' :: \psi_1 : \psi_2 : \psi_3,$$

$\psi_1 = \varphi_1(\eta'\zeta', \zeta'\xi', \xi'\eta'), \ldots$ étant de degré $2n$ en ξ', η', ζ'.

Le degré de cette transformation s'abaissera toutefois si l'un des points p, p', p'' est un point fondamental de la transformation S.

Supposons, par exemple, que p soit un point de multiplicité i, commun aux courbes f_1, f_2, f_3 ; son correspondant $\eta = \zeta = 0$ sera multiple d'ordre i sur les courbes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Donc tous les termes de φ_1, φ_2, φ_3 seront de degré au moins égal à i par rapport à η, ζ. Donc tous les termes de ψ_1, ψ_2, ψ_3 seront divisibles par ξ'^i. Ils seront de même divisibles par $\eta'^{i'}$, $\zeta'^{i''}$ si p', p'' sont fondamentaux et de multiplicité i', i''. Après suppression de ces facteurs communs, le degré de ces fonctions ne sera plus que $2n - i - i' - i''$.

On déduit de la relation (2)

$$\xi : \eta : \zeta :: A : B : C,$$

A, B, C étant linéaires en x, y, z, puis de la relation (3)

$$(4) \qquad \xi' : \eta' : \zeta' :: \eta\zeta : \zeta\xi : \xi\eta :: BC : CA : AB.$$

La transformation S résulte donc de la composition de S_1 avec la transformation quadratique (4).

Le théorème sera donc établi si nous montrons qu'il existe, dans toute transformation S, trois points fondamentaux non en ligne droite et dont les ordres de multiplicité i, i', i'' aient une somme $> n$. Car la démonstration du théorème pour S sera ramenée à sa démonstration pour S_1 qui est une transformation de degré moindre.

594. Or, soit α_k le nombre des points fondamentaux de multiplicité k; on a, comme nous l'avons vu, les relations

$$(5) \qquad \sum \frac{k(k+1)}{2}\alpha_k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3,$$

$$(6) \qquad \sum k^2 \alpha_k = n^2 - 1,$$

dont la combinaison donne la suivante :

$$(7) \qquad \Sigma k\alpha_k = 3n - 3.$$

D'ailleurs, la somme des multiplicités de deux points fondamentaux quelconques ne peut surpasser n; autrement, les courbes f_1, f_2, f_3 coupant en plus de n points la droite $\Delta = 0$ qui les joint, f_1, f_2, f_3 contiendraient Δ en facteur commun, contrairement à notre hypothèse. Mais, si $n > 1$,

on a $n < 3n - 3$. Donc il y a au moins trois points fondamentaux.

Soient p, p', p'' les trois points fondamentaux dont les ordres de multiplicité sont les plus élevés; soient i, i', i'' ces ordres et supposons $i \geqq i' \geqq i''$. Les équations (6) et (7) pourront s'écrire, en mettant ces termes en évidence,

$$\Sigma k^2 \alpha_k = n^2 - 1 - i^2 - i'^2 - i''^2,$$
$$\Sigma k \alpha_k = 3n - 3 - i - i' - i'',$$

les nouvelles sommes étant restreintes aux autres points fondamentaux.

On déduit de ces relations

$$n^2 - 1 - i^2 - i'^2 - i''^2 - i''(3n - 3 - i - i' - i'')$$
$$= \Sigma k(k - i'')\alpha_k \leqq 0,$$

car $k - i''$ est toujours $\leqq 0$.

Donc n ne peut surpasser la plus grande racine de l'équation

$$x^2 - 1 - i^2 - i'^2 - i''^2 - i''(3x - 3 - i - i' - i''),$$

laquelle est égale à

$$\frac{3i''}{2} + \sqrt{\frac{9i''^2}{4} + i^2 + i'^2 + 1 - 3i'' - ii'' - i'i''}.$$

La quantité sous le radical peut s'écrire

$$\left(i + i' - \frac{i''}{2}\right)^2 + 2i''^2 - 2ii' - 3i'' + 1.$$

Mais $i \geqq i' \geqq i'' \geqq 1$. Elle est donc moindre que $\left(i + i' - \frac{i''}{2}\right)^2$ et l'on a

$$n < \frac{3i''}{2} + i + i' - \frac{i''}{2} < i + i' + i''.$$

Enfin les trois points p, p', p'' ne sont pas en ligne droite; car, s'ils étaient sur une même droite $\Delta = 0$, celle-ci, coupant les courbes f_1, f_2, f_3 en plus de n points, f_1, f_2, f_3 auraient le facteur commun Δ.

IV. — Transformations birationnelles d'une courbe.

595. Posons, comme nous l'avons déjà fait,

$$x' : y' : z' :: f_1 : f_2 : f_3, \tag{1}$$

f_1, f_2, f_3 étant des polynomes homogènes d'un même degré l en x, y, z et sans facteur commun.

Supposons x, y, z assujettis à la relation

$$F(x, y, z) = 0. \tag{2}$$

L'élimination de x, y, z entre les équations précédentes donnera une équation

$$F'(x', y', z') = 0, \tag{3}$$

exprimant la relation qui doit avoir lieu entre les rapports $x' : y' : z'$ pour qu'il existe un système de valeurs des rapports $x : y : z$ pour lequel les équations (1) et (2) soient satisfaites simultanément.

Le plus habituellement, cette solution commune sera unique (sauf, peut-être, pour certaines valeurs particulières des rapports $x' : y' : z'$). On sait, dans ce cas, qu'elle sera donnée par des équations de la forme

$$\frac{x}{z} = R\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right), \qquad \frac{y}{z} = R_1\left(\frac{x'}{z'}, \frac{y'}{z'}\right),$$

R, R_1 étant des fractions rationnelles qu'on peut supposer réduites au même dénominateur.

Chassant les dénominateurs, ces équations pourront se mettre sous la forme

$$x : y : z :: f'_1 : f'_2 : f'_3, \tag{4}$$

f'_1, f'_2, f'_3 étant des polynomes homogènes et d'un même degré l' en x', y', z'.

A chaque point x, y, z de la courbe F correspond donc un point x', y', z' de la courbe F' et réciproquement, les

points correspondants étant liés par les deux systèmes de relations (1) et (4).

Ces deux systèmes ne seraient pas équivalents pour des valeurs quelconques de x, y, z, x', y', z' [à moins que la transformation (1) ne fût une transformation de Cremona]; mais ils le sont, et cela nous suffit, pour celles de ces valeurs qui satisfont aux équations (2) et (3).

Nous dirons que les équations (1) et (4) établissent une *correspondance uniforme*, ou *birationnelle*, entre les courbes F et F'.

596. A un cycle C de F

$$x : y : z :: T_1 : T_2 : T_3$$

correspondra un cycle C' de F'

$$x' : y' : z' :: T'_1 : T'_2 : T'_3,$$

T'_1, T'_2, T'_3 représentant les fonctions

$$f_1(T_1, T_2, T_3), \quad f_2(T_1, T_2, T_3), \quad f_3(T_1, T_2, T_3),$$

débarrassées toutefois, s'il y a lieu, de la puissance de t qu'elles pourraient contenir toutes trois en facteur commun. Les points de C', correspondant uniformément à ceux de C, correspondront uniformément, comme ceux-ci, aux valeurs du paramètre t.

Si C est d'ordre r et a pour origine le point (x_0, y_0, z_0), on aura

$$T_1 = x_0 + at^r + \ldots, \quad T_2 = y_0 + bt^r + \ldots, \quad T_3 = z_0 + ct^r + \ldots$$

et, par suite,

$$f_1(T_1, T_2, T_3) = f_1(x_0, y_0, z_0) + \left(a\frac{\partial f_1}{\partial x_0} + b\frac{\partial f_1}{\partial y_0} + c\frac{\partial f_1}{\partial z_0}\right)t^r + \ldots,$$

. . . .

Le cycle C' aura donc, en général, pour origine le point correspondant à (x_0, y_0, z_0), et son ordre sera r.

Toutefois, cet ordre s'élèvera si

$$f_1(x_0, y_0, z_0), \quad f_2(x_0, y_0, z_0), \quad f_3(x_0, y_0, z_0),$$

sans être nuls simultanément, sont proportionnels à

$$a\frac{\partial f_1}{\partial x_0}+b\frac{\partial f_1}{\partial y_0}+c\frac{\partial f_1}{\partial z_3}\cdots.$$

Si ces trois quantités s'annulent à la fois, auquel cas les équations (1) cessent de définir les rapports $x':y':z'$, on aura à supprimer la puissance de t qui figure en facteur commun dans $f_1(T_1, T_2, T_3)$, ... Le cycle C′ aura pour origine un point (x'_0, y'_0, z'_0), que nous considérons comme le correspondant de (x_0, y_0, z_0).

Enfin, si le point (x_0, y_0, z_0), où f_1, f_2, f_3 s'annulent, est l'origine de plusieurs cycles C, C_1, ... de F, ils auront pour correspondants des cycles C′, C'_1, ..., ayant pour origines des points (x'_0, y'_0, z'_0), $(x'_{01}, y'_{01}, z'_{01})$, ...; et le point (x_0, y_0, z_0) correspondra à l'un ou à l'autre de ces points, suivant qu'on le considère comme limite de points situés sur C, ou sur C_1, ...

Il peut donc exister sur F des points ayant plusieurs correspondants sur F′. Mais ces points devront être multiples sur F, et situés sur f_1, f_2, f_3; leur nombre est donc limité.

Réciproquement, un point multiple de F′, situé sur f'_1, f'_2, f'_3, aurait plusieurs correspondants sur F.

597. L'existence d'un élément invariant par toute transformation birationnelle peut s'établir comme il suit :

Les deux courbes F et F′ étant supposées liées par la relation (1), posons

$$X=\frac{x}{z},\qquad Y=\frac{y}{z},\qquad X'=\frac{x'}{z'}=\frac{f_1(x,y,z)}{f_3(x,y,z)}=\frac{f_1(X,Y,1)}{f_3(X,Y,1)}.$$

Cela posé,

$$\frac{dX'}{dX}=\frac{\partial X'}{\partial X}+\frac{\partial X'}{\partial Y}\frac{dY}{dX}$$

étant une fonction de X, Y et $\frac{dY}{dX}$, la somme de ses ordres par rapport à t, pour tous les cycles de F, est nulle.

La somme des ordres de la fonction $\frac{dX}{dt}$, *pour la courbe* F, *est donc égale à la somme correspondante* $\frac{dX'}{dt}$, *pour la courbe* F'.

L'existence de cet invariant étant établie, son expression est aisée à trouver. On a, en effet,

$$\frac{dX}{dt} = \frac{z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}}{z^2}.$$

Or nous avons vu (**580-581**) que la somme des ordres du numérateur est égale à $\Sigma(r - 1 + \omega_2) = \nu + \Sigma(r - 1)$; celle des ordres du dénominateur sera $2n$. L'invariant cherché sera donc

$$\nu + \Sigma(r - 1) - 2n.$$

Posons

$$\nu + \Sigma(r - 1) - 2n = 2p - 2.$$

Le nouvel invariant p ainsi défini se nomme le *genre* de la courbe F. C'est un nombre entier, qui ne peut être négatif si F est indécomposable.

En effet, toute courbe F pouvant être changée, par des transformations quadratiques qui n'altèrent pas le genre, en une courbe F' n'ayant que des cycles simples à tangentes séparées, il suffit d'établir la proposition pour cette dernière. Dans ce cas, $\Sigma(r - 1)$ est nul et, α_k désignant le nombre des points de multiplicité k, on a

$$\nu = n(n - 1) - \Sigma\alpha_k k(k - 1)$$

et, par suite,

$$p = \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - \sum \alpha_k \frac{k(k - 1)}{2},$$

nombre évidemment entier et qui n'est pas négatif (**568**).

598. Soit F une courbe indécomposable, d'ordre n, n'ayant que des cycles simples à tangentes séparées. Si l'on suppose le triangle de référence choisi de telle sorte que le som-

met $x = z = 0$ ne soit pas sur la courbe, celle-ci aura une équation de la forme

$$F = AY^n + A_1 Y^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

A étant une constante différente de zéro, et $A_1, \ldots, A_n$ des polynomes en X, de degrés $1, \ldots, n$ respectivement.

Si nous posons, pour abréger,

$$\sum \alpha_k \frac{k(k-1)}{2} = d,$$

le genre de p de F sera donné (numéro précédent) par la formule

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d.$$

Soit

$$f = \beta Y^m + \beta_1 Y^{m-1} + \ldots = 0$$

une autre courbe d'ordre m. Proposons-nous de déterminer ses coefficients de telle sorte que, parmi ses mn points d'intersection avec F, il y en ait le plus grand nombre possible qui occupent des positions choisies d'avance. Voyons d'abord de combien d'indéterminées nous pouvons disposer pour cela.

Effectuons la division de f par F; il viendra

$$f = QF + R,$$

Q et R étant des polynomes entiers, dont le dernier est de degré m en X, Y, mais de degré $n-1$ seulement en Y. Or il est clair que les points d'intersection de f avec F sont les mêmes que ceux de R avec F. Nous pouvons donc nous borner à considérer parmi les courbes d'ordre m celles dont l'équation ne contient Y qu'au degré $n-1$.

Supposons d'abord $m > n-3$. L'équation de la courbe f contiendra $\frac{(n-1)n}{2}$ termes de degré $\leqq n-2$, plus n termes de chacun des degrés $n-1, n, \ldots, m$. Le nombre total de

ces termes sera donc

$$(m-n+2)n+\frac{(n-1)n}{2}=mn-p-d+1,$$

et l'on pourra déterminer les rapports des coefficients de manière à faire passer f par $mn-p-d$ points fixés d'avance; il restera donc $p+d$ points d'intersection dont on ne pourra disposer.

Si $m \overline{\gtrless} n-3$, le nombre des termes de f sera

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

et celui des points d'intersection dont on ne pourra disposer sera

$$mn-\frac{(m+1)(m+2)}{2}+1.$$

En particulier, pour $m=n-3$, ce nombre se réduira à

$$n(n-3)-\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1=p+d-1.$$

599. Les nombres précédents peuvent être diminués si l'on fait passer f par les points multiples de F.

Supposons, en effet, qu'on remplace pour f l'obligation de passer par $\frac{i(i+1)}{2}$ points fixes de F par celle d'avoir un point de multiplicité i à un endroit où F a elle-même un point de multiplicité k. Le nombre de conditions sera le même; mais le nombre des points d'intersection dont la position est fixée par là ne sera plus $\frac{i(i+1)}{2}$, mais ik. Le résultat le plus avantageux s'obtiendra donc en donnant à i la valeur $k-1$, qui donne à $ik-\frac{i(i+1)}{2}$ sa valeur maximum $\frac{k(k-1)}{2}$.

Si donc m est assez grand pour que le nombre des coefficients dont on dispose permette de donner à f un point mul-

tiple d'ordre $k-1$ partout où F a un point multiple d'ordre k (auquel cas nous dirons que f est une *courbe adjointe* de F), le nombre des points d'intersection dont on ne peut disposer sera diminué de la quantité $\sum \alpha_k \frac{k(k-1)}{2} = d$. Il se réduira donc :

1°	à p	si	$m > n-3$;
2°	à $p-1$	si	$m = n-3$.

600. La condition d'être adjointe donnant d relations linéaires et homogènes entre les coefficients de f, il existera toujours des adjointes si $m > n-3$. Il en existera également pour $m = n-3$, si $p > 0$ (d'où $n > 2$). Le nombre μ des coefficients qui restent arbitraires dans l'adjointe la plus générale de degré m (ou, ce qui revient au même, le nombre des adjointes linéairement distinctes de degré m) sera donné par les formules suivantes :

1° Si $m > n-3$,

$$\mu = (m-n+2)n + \frac{(n-1)n}{2} - d$$
$$= (m-n+2)n + p + n - 1.$$

2° Si $m = n-3$,

$$\mu = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d = p.$$

Le nombre μ ainsi calculé devrait être augmenté si les d équations linéaires auxquelles doivent satisfaire les adjointes n'étaient pas distinctes. Il nous faut donc démontrer que ce cas ne peut se présenter.

601. Nous nous appuierons, à cet effet, sur le lemme suivant, cas particulier d'un théorème célèbre d'Abel, que nous démontrerons dans le Calcul intégral.

Soit $\varphi(X, Y, c_1, c_2, \ldots) = 0$ une courbe algébrique quelconque contenant dans son équation des paramètres c_1, c_2, ... et coupant la courbe $F(X, Y) = 0$ aux points

$(X_1, Y_1), \ldots, (X_i, Y_i), \ldots$ Si nous changeons $c_1, c_2, \ldots$ en $c_1 + dc_1$, $c_2 + dc_2$, $\ldots$, nous obtiendrons une autre courbe infiniment voisine, coupant F aux points

$$(X_1 + dX_1, Y_1 + dY_1), \quad \ldots,$$

dX_i, dY_i, ... étant donnés par les formules

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial F}{\partial Y_i} dY_i = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_i} dX_i + \frac{\partial \varphi}{\partial Y_i} dY_i + \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} dc_1 + \ldots = 0.$$

Cela posé, soit $f(X, Y)$ une quelconque des adjointes de degré $n - 3$ de la courbe F; on aura

$$\sum_i \frac{f(X_i, Y_i)}{\dfrac{\partial F(X_i, Y_i)}{\partial Y_i}} dX_i = 0.$$

602. Cette proposition étant admise, supposons que pour un certain degré $m \overline{\gtrless} n - 3$ le nombre des coefficients indéterminés qui restent dans l'adjointe soit $> \mu$. En assujettissant l'adjointe à passer par $\mu - 1$ points $a_1 = (X_1, Y_1), \ldots, a_{\mu-1} = (X_{\mu-1}, Y_{\mu-1})$ choisis à volonté sur F, elle contiendra encore plus d'un coefficient indéterminé; on aura donc tout un faisceau d'adjointes passant par ces points. Soit C l'une d'elles; elle coupera encore F en ν autres points

$$a_\mu = (X_\mu, Y_\mu), \quad \ldots, \quad a_{\mu+\nu-1},$$

le nombre ν étant $< \mu$; car nous avons vu qu'il est égal à p, si $m > n - 3$, à $p - 1$ si $m = n - 3$.

Cela posé, par les $\mu - 1$ points $a_{\nu+1}, \ldots, a_{\mu+\nu-1}$, on peut faire passer un faisceau d'adjointes, ayant pour équation générale

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots = 0,$$

et C sera l'une des courbes de ce faisceau. On aura donc pour des valeurs convenables assignées aux paramètres c_1, c_2, ...

$$C = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \ldots.$$

Changeons $c_1, c_2, \ldots$ en $c_1 + dc_1$, $c_2 + dc_2, \ldots$; on aura une autre courbe C′, coupant F, comme C, aux points multiples et aux points fixes $a_{\nu+1}, \ldots, a_{\mu+\nu-1}$ et, en outre, en des points

$$a'_1 = (X_1 + dX_1, Y_1 + dY_1), \quad \ldots, \quad a'_\nu = (X_\nu + dX_\nu, Y_\nu + dY_\nu),$$

Or on sait qu'il existe au moins p adjointes linéairement distinctes $f_1, \ldots, f_p$, de degré $n - 3$. Appliquant à ν d'entre elles le théorème d'Abel, on aura ν équations

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \frac{f_k(X_i, Y_i)}{\frac{\partial F(X_i, Y_i)}{\partial Y_i}} dX_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ces équations, en nombre égal à celui des quantités dX_i, ne pourraient être satisfaites qu'en supposant que les dX_i sont tous nuls ou que le déterminant des coefficients est nul.

603. La première hypothèse doit être écartée. En effet, les courbes C et C′ coupant F aux mêmes points, il en serait de même de la courbe

$$(5) \qquad C'' = dc_1 \varphi_1 + dc_2 \varphi_2 + \ldots = 0,$$

quels que soient les rapports de $dc_1, dc_2, \ldots$. En les déterminant convenablement, on pourrait faire passer cette courbe par un nouveau point de F. Les courbes C″ et F auraient ainsi plus de points communs que n'en comporte leur degré, et devraient avoir une partie commune ; et comme F est indécomposable, on devrait avoir

$$C'' = F\psi,$$

ψ étant un polynome entier. Ce résultat est absurde, C″ étant de degré moindre que F par rapport à la variable Y.

604. La seconde hypothèse ne peut être vérifiée en général, mais seulement pour certaines positions particulières des

points $a_1, \ldots, a_\nu$, qu'on sera libre d'éviter, puisqu'ils font partie de la suite des points $a_1, \ldots, a_{\mu-1}$, qu'on peut choisir arbitrairement sur F. Tout d'abord, si ces points sont pris à distance finie, $\frac{\partial F}{\partial Y}$ y restera fini. Le déterminant qui doit s'annuler deviendra, après la suppression des dénominateurs $\frac{\partial F(X_1, Y_1)}{\partial Y_1}, \cdots$ qui figurent en facteur commun,

$$\begin{vmatrix} f_1(X_1, Y_1) & \ldots & f_1(X_\nu, Y_\nu) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_\nu(X_1, Y_1) & \ldots & f_\nu(X_\nu, Y_\nu) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette expression développée peut se mettre sous la forme

$$M_1 f_1(X_1, Y_1) + M_2 f_2(X_1, Y_1) + \ldots = 0,$$

$M_1, M_2, \ldots$ étant indépendants de X_1, Y_1. Pour que cette équation ait lieu pour une position arbitraire du point (X_1, Y_1) sur F, il faudra que son premier membre soit divisible par $F(X_1, Y_1)$; et, comme il est de degré moindre que F, il devra être identiquement nul. D'ailleurs les fonctions $f_1, f_2, \ldots$ sont linéairement distinctes; donc il faut que les mineurs $M_1, M_2, \ldots$ soient tous nuls.

D'ailleurs, l'un quelconque de ces mineurs, tel que M_1, peut être mis sous la forme

$$N_2 f_2(X_2, Y_2) + \ldots + N_\nu f_\nu(X_2, Y_2),$$

et ne pourra s'annuler, pour toute position du point (X_2, Y_2) sur F, que si les mineurs du second ordre $N_2, \ldots, N_\nu$ sont nuls. Continuant ainsi, on voit que le déterminant ne peut s'annuler pour toutes les positions possibles de $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{\nu-1}, Y_{\nu-1})$ que si le point (X_ν, Y_ν) est commun à F et à toutes les adjointes $f_1, \ldots, f_\nu$.

605. Nous aurons en particulier, pour $m = n - 2$, $p + n - 1$ adjointes linéairement distinctes, rencontrant chacune F en $2p + n - 2$ points, outre les points multiples.

Celles de ces adjointes qui passent par $p+n-3$ points fixes $a_1 = (X_1, Y_1), \ldots, a_{p+n-3}$ formeront, en général, un faisceau à deux coefficients.

Chacune des courbes de ce faisceau coupera F aux points $a_1, \ldots, a_{p+n-3}$ et en $p+1$ autres points. Si $n > 3$, ces derniers points seront toujours différents pour deux courbes différentes du faisceau si les points fixes $a_1, \ldots, a_{p+n-3}$ (dont le nombre est au moins égal à $p+1$) n'ont pas des positions particulières.

Supposons, en effet, que l'un des $p+1$ derniers points d'intersection fût nécessairement le même pour deux des courbes du faisceau et, par suite, pour toutes les autres. Soient C une courbe particulière du faisceau; $a_1, \ldots, a_{2p+n-2}$ ses points de rencontre avec F. La courbe C appartient au faisceau des adjointes d'ordre $n-2$ qui passent par les $p+n-3$ points fixes $a_{p+2}, \ldots, a_{2p+n-2}$. Si ce dernier faisceau n'a que deux coefficients, toutes ses courbes devront, d'après notre hypothèse, avoir encore sur F un point commun, qui sera nécessairement l'un des points $a_1, \ldots, a_{p+1}$, par exemple a_{p+1}. Si, au contraire, le faisceau a plus de deux coefficients, on peut déterminer l'un d'eux en fonction des autres de telle sorte que la courbe correspondante passe par a_{p+1}. Il restera encore au moins deux coefficients indéterminés. Nous obtenons donc, dans tous les cas, un faisceau de courbes adjointes passant toutes par les points $a_{p+1}, \ldots, a_{2p+n-2}$ et dont la courbe C fera partie.

Appliquons à ce faisceau le théorème d'Abel : en prenant successivement les p adjointes $f_1, \ldots, f_p$ d'ordre $n-3$, on aura les p équations

$$\sum_{i=1}^{i=p} \frac{f_k(X_i, Y_i)}{\frac{\partial F(X_i, Y_i)}{\partial Y_i}} dX_i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

qui ne peuvent subsister que si les dX_i sont tous nuls, ou si le déterminant de leurs coefficients est nul. Mais on a vu que la première hypothèse est inadmissible, et que la seconde

ne peut être vérifiée que pour des positions particulières des points $a_1, \ldots, a_p$.

606. Cela posé, considérons les adjointes d'ordre $n-2$, qui passent par $p+n-4$ points fixes $a_1 \ldots, a_{p+n-4}$ pris arbitrairement sur F. Elles forment un faisceau à trois coefficients

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3 = 0.$$

Soit $\alpha = (\xi, \eta)$ un autre point pris arbitrairement sur F, et posons

$$\xi' = \frac{\varphi_1(\xi, \eta)}{\varphi_3(\xi, \eta)}, \qquad \eta' = \frac{\varphi_2(\xi, \eta)}{\varphi_3(\xi, \eta)}. \tag{6}$$

Éliminant ξ, η entre cette équation et

$$F(\xi, \eta) = 0, \tag{7}$$

nous obtiendrons entre ξ', η' une équation

$$F'(\xi', \eta') = 0, \tag{8}$$

liée à F par la transformation (6). Cette transformation sera, en général, birationnelle. En effet, si à un point (ξ', η') de F′ correspondaient, en vertu des équations (6) et (7), deux points de F, $\alpha = (\xi, \eta)$ et $\alpha_1 = (\xi_1, \eta_1)$, on aurait

$$\xi' = \frac{\varphi_1(\xi, \eta)}{\varphi_3(\xi, \eta)} = \frac{\varphi_1(\xi_1, \eta_1)}{\varphi_3(\xi_1, \eta_1)},$$

$$\eta' = \frac{\varphi_2(\xi, \eta)}{\varphi_3(\xi, \eta)} = \frac{\varphi_2(\xi_1, \eta_1)}{\varphi_3(\xi_1, \eta_1)},$$

de sorte que les deux adjointes d'ordre $n-2$,

$$\varphi_1 - \frac{\varphi_1(\xi, \eta)}{\varphi_3(\xi, \eta)}\varphi_3 = 0, \qquad \varphi_2 - \frac{\varphi_2(\xi, \eta)}{\varphi_3(\xi, \eta)}\varphi_3 = 0,$$

qui passent par les $p+n-3$ points $a_1, \ldots, a_{p+n-3}, \alpha$, passeraient encore par un autre point α_1 de F, ce qui, comme nous l'avons vu, ne peut avoir lieu pour des positions arbitraires des points $a_1, \ldots, \alpha$.

607. La courbe transformée sera donc du même genre que F. Cherchons à déterminer son degré n'.

Posons, pour rétablir l'homogénéité,

$$\xi = \frac{x}{z}, \qquad \eta = \frac{y}{z}, \qquad \xi' = \frac{x'}{z'}, \qquad \eta' = \frac{y'}{z'},$$

$$z^n \mathrm{F}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \Phi(x, y, z), \quad z^{n-2}\varphi_1\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \psi_1(x, y, z), \quad \ldots.$$

La courbe F aura pour équation $\Phi = 0$, et la transformation (6) pourra s'écrire

$$x' : y' : z' :: \psi_1 : \psi_2 : \psi_3,$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 étant des polynomes d'ordre $n-2$; enfin la transformée aura une équation de la forme

$$\Phi'(x', y', z') = 0.$$

Le degré cherché est le nombre d'intersections de la courbe Φ' avec la droite arbitraire

$$\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' = 0.$$

A chacun de ces points correspond sur F un point (x, y, z) satisfaisant aux deux relations

$$(9) \qquad \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \lambda_3\psi_3 = 0, \qquad \Phi = 0.$$

Ces deux équations simultanées, de degrés $n-2$ et n respectivement, définissent $n(n-2)$ points, dont chacun correspondra réciproquement à un point commun à

$$\lambda_1 x' + \lambda_2 y' + \lambda_3 z' = 0, \qquad \Phi' = 0,$$

pourvu que ψ_1, ψ_2, ψ_3 ne s'annulent pas à la fois.

On voit donc que n' est égal au nombre des intersections des deux courbes (9) qui sont variables avec λ_1, λ_2, λ_3. Ce nombre est $p+2$. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Toute courbe de genre $p > 0$ peut être changée par une transformation birationnelle en une courbe de même genre, et de degré $p+2$.

608. Il nous reste à étudier les courbes de genre zéro, dites *courbes unicursales*.

Soient $F = 0$ une semblable courbe; φ_1, φ_2 deux de ses adjointes, d'un même degré m et coupant F, la première aux points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}, \alpha$, la seconde aux points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}, \beta$. Elles n'auront pas d'autres points de rencontre avec F, puisque p est nul.

Considérons les adjointes du faisceau

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = 0.$$

Chacune d'elles coupera F aux points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}$, et en un autre point (ξ, η) variable avec le rapport $\frac{c_1}{c_2} = t$. Pour obtenir ξ, on éliminera η entre les équations $F = 0$, $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = 0$, et l'on supprimera, dans l'équation finale, les facteurs correspondants aux racines fixes; il restera une équation du premier degré, d'où l'on déduira $\xi = R(t)$, R désignant une fraction rationnelle. On trouvera de même $\eta = R_1(t)$, R_1 étant également rationnel.

L'équation $F = 0$ sera donc équivalente au système des deux suivantes :

$$\xi = R(t), \qquad \eta = R_1(t).$$

A chaque point (ξ, η) de F correspondra, en général, une valeur unique de t. Car si deux adjointes différentes $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$, $c'_1\varphi_1 + c'_2\varphi_2$ passent par le point (ξ, η), φ_1 et φ_2 y passeront aussi; (ξ, η) sera donc un des points communs à φ_1, φ_2, F, c'est-à-dire un point multiple, ou l'un des points $a_1, \ldots, a_{\mu-2}$.

Pour obtenir la valeur de t correspondante à l'un de ces points particuliers A, on supposera que le point (ξ, η), d'abord différent de ce point, s'en rapproche indéfiniment, et l'on cherchera la valeur limite vers laquelle tend t. Ce sera celle que nous ferons correspondre au point A.

Si ce point est multiple d'ordre k, on pourra supposer successivement le point (ξ, η) placé sur chacune des k bran-

ches de F qui se croisent en A; on obtiendra ainsi k valeurs de t correspondantes à ce point.

609. Considérons réciproquement une courbe F définie par les équations

$$\xi = R(t), \qquad \eta = R_1(t),$$

R et R_1 désignant des fractions rationnelles. Réduisant ces fractions au même dénominateur, on pourra les mettre sous la forme

$$R(t) = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \qquad R_1(t) = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)},$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant trois polynomes sans facteur commun.

Cherchons combien de valeurs du paramètre t correspondent, en général, à un même point de la courbe. Soit t_1 l'une d'elles; les valeurs cherchées seront les solutions communes aux deux équations

$$(10) \qquad R(\theta) = R(t_1), \qquad R_1(\theta) = R_1(t_1),$$

ou

$$(11) \qquad \begin{cases} P(\theta, t_1) = \varphi_1(\theta)\varphi_3(t_1) - \varphi_3(\theta)\varphi_1(t_1) = 0, \\ P_1(\theta, t_1) = \varphi_2(\theta)\varphi_3(t_1) - \varphi_3(\theta)\varphi_2(t_1) = 0. \end{cases}$$

Les deux polynomes P et P_1 sont divisibles par $\theta - t_1$; mais ils peuvent avoir d'autres diviseurs communs. Soit en général $D(\theta, t_1)$ leur plus grand commun diviseur; on aura

$$P(\theta, t_1) = D(\theta, t_1)\, Q(\theta, t_1),$$
$$P_1(\theta, t_1) = D(\theta, t_1)\, Q_1(\theta, t_1).$$

Les deux équations $Q = 0$, $Q_1 = 0$ ne pourront avoir de racine commune que pour des valeurs particulières de t_1. Les solutions communes aux deux équations (11) se réduiront donc (lorsque t_1 reste indéterminé) aux racines de l'équation

$$D(\theta, t_1) = 0.$$

Ces racines sont généralement distinctes, car une racine

double devrait satisfaire non seulement aux équations (10), mais à leurs dérivées

$$R'(\theta) = 0, \qquad R'_1(\theta) = 0,$$

équations algébriques qui n'admettent qu'un nombre limité de valeurs de θ; et les valeurs correspondantes de t_1, déduites des équations (10), seraient également en nombre limité.

Soit donc

$$D(\theta, t_1) = A(t_1)\theta^m + A_1(t_1)\theta^{m-1} + \ldots + A_m(t_1);$$

les équations (10) admettront, en général, m racines communes distinctes $t_1, \ldots, t_m$, solutions de l'équation

$$D(\theta, t_1) = 0.$$

Si l'on permute les deux variables θ et t_1, les deux polynomes P et P_1 changent simplement de signe; leur plus grand commun diviseur D doit donc se reproduire à une constante près; il est donc du degré m en t_1. L'un au moins des polynomes $A, A_1, \ldots$, par exemple A_μ, sera de degré m, les autres étant de degré $\overline{\leq} m$. En particulier, A sera de degré inférieur à m; car, s'il en était autrement, D ne pourrait s'annuler identiquement pour $\theta = t_1$, ainsi que cela doit être; car $D(t_1, t_1)$ contiendrait un terme en t_1^{2m}, qui ne pourrait se réduire avec les autres.

D'autre part, t_i désignant l'une quelconque des racines $t_1, \ldots, t_m$, on aura

$$R(t_i) = R(t_1), \qquad R_1(t_i) = R_1(t_1).$$

Les équations

$$R(\theta) = R(t_i), \qquad R_1(\theta) = R_1(t_i)$$

seront donc équivalentes aux équations (10). L'équation $D(\theta, t_i)$, qui fournit les racines communes à ces équations, sera donc équivalente à $D(\theta, t_1) = 0$. On aura, par suite,

$$\frac{A_\mu(t_i)}{A(t_i)} = \frac{A_\mu(t_1)}{A(t_1)}.$$

Si donc nous posons

$$u = \frac{A_\mu(t)}{A(t)},$$

à chaque valeur de ce nouveau paramètre u correspondront m valeurs de t et précisément celles qui correspondent elles-mêmes à un même point (ξ, η) de la courbe F; et ξ, η étant des fonctions algébriques de u, qui n'ont qu'une seule valeur pour chaque valeur de u, seront rationnels en u.

On voit ainsi que, si les coordonnées d'un point d'une courbe sont exprimables en fonction rationnelle d'un paramètre, on pourra toujours, en changeant au besoin le paramètre, faire en sorte qu'à chaque point de la courbe corresponde une seule valeur du paramètre.

610. Supposons cette condition réalisée, avec le paramètre t, pour une courbe définie par les équations

$$\xi = R(t), \qquad \eta = R_1(t);$$

nous allons établir que cette courbe est unicursale.

Les fonctions $R(t)$, $R_1(t)$ peuvent être supposées réduites au même dénominateur. Passant aux coordonnées homogènes, en posant $\xi = \frac{x}{z}$, $\eta = \frac{y}{z}$, les équations de la courbe pourront s'écrire

$$x : y : z :: T_1 : T_2 : T_3,$$

T_1, T_2, T_3 étant des polynomes en t.

Par une transformation birationnelle

$$x' : y' : z' :: f_1(x, y, z) : f_2(x, y, z) : f_3(x, y, z),$$

nous pouvons changer la courbe F en une autre F′ de même genre p, n'ayant que des cycles d'ordre 1. Les équations de cette nouvelle courbe seront de la forme

$$x' : y' : z' :: \Theta_1 : \Theta_2 : \Theta_3,$$

Θ_1, Θ_2, Θ_3 étant de nouveaux polynomes en t.

A chaque point (x', y', z') correspondra d'ailleurs, en général, un seul point (x, y, z), et par suite une seule valeur de t.

Soit s le plus grand des degrés des polynomes $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$; on pourra écrire

$$\Theta_1 = at^s + a_1 t^{s-1} + \ldots,$$
$$\Theta_2 = bt^s + b_1 t^{s-1} + \ldots,$$
$$\Theta_3 = ct^s + c_1 t^{s-1} + \ldots,$$

l'un au moins des trois coefficients a, b, c étant $\gtrless 0$. D'ailleurs, si t croît indéfiniment, on aura, en posant $t = \frac{1}{t'}$,

$$x' : y' : z' :: a + a_1 t' + \ldots : b + b_1 t' + \ldots : c + c_1 t' + \ldots.$$

Ces équations définissent un cycle de F', qui doit être d'ordre 1, par hypothèse; donc l'un au moins des trois déterminants $ab_1 - a_1 b$, $bc_1 - b_1 c$, $ca_1 - c_1 a$ sera $\gtrless 0$.

Le degré n de la courbe F' est le nombre de ses intersections avec une droite arbitraire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Les t correspondants sont les racines de l'équation de degré s

$$\alpha \Theta_1 + \beta \Theta_2 + \gamma \Theta_3 = 0,$$

et à chacune d'elles correspond un point distinct de F'. Donc $n = s$.

Cherchons d'autre part la classe ν de F'.

Une droite

$$ux + vy + wz = 0$$

sera tangente à F' au point t si l'on a

$$u\Theta_1 + v\Theta_2 + w\Theta_3 = 0,$$
$$u\Theta'_1 + v\Theta'_2 + w\Theta'_3 = 0.$$

Elle passera, en outre, par un point donné arbitrairement α, β, γ, si l'on a

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Éliminant u, v, w entre ces trois équations, on aura, pour déterminer les points de F′ dont la tangente passe par α, β, γ, l'équation

$$\alpha(\Theta_2\Theta_3' - \Theta_3\Theta_2') + \beta(\Theta_3\Theta_1' - \Theta_1\Theta_3') + \gamma(\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_1') = 0.$$

Or

$$\Theta_2\Theta_3' - \Theta_3\Theta_2' = -(bc_1 - b_1c)\,t^{2s-2} + \ldots,$$
$$\Theta_3\Theta_1' - \Theta_1\Theta_3' = -(ca_1 - c_1a)\,t^{2s-2} + \ldots,$$
$$\Theta_1\Theta_2' - \Theta_2\Theta_1' = -(ab_1 - a_1b)\,t^{2s-2} + \ldots.$$

L'équation en t est donc de degré $2s - 2$, et $\nu = 2s - 2$.

Cela posé, F′ n'ayant que des cycles d'ordre 1, son genre p sera défini par la relation

$$2p - 2 = \nu - 2n = 2s - 2 - 2s = -2.$$

Donc $p = 0$, et les courbes F′, F seront unicursales.

FIN DU TOME PREMIER.

41460 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

53062 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

COURS

D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.

TOME DEUXIÈME

CALCUL INTÉGRAL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

COURS

D'ANALYSE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COURS
D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.

TOME DEUXIÈME

CALCUL INTÉGRAL.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

PRÉFACE.

La principale différence entre cette édition et la précédente consiste dans l'addition d'un Chapitre consacré aux propriétés des champs de vecteurs et dans un plus grand développement donné à l'étude des potentiels newtoniens. Un Mémoire récent de M. Schmidt a donné à cette dernière théorie un caractère de précision et de simplicité dont nous avons été heureux de profiter. Nous y avons ajouté un léger aperçu de quelques-unes de ses applications à la Physique mathématique.

C. Jordan.

COURS
D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SECONDE PARTIE.
CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.
INTÉGRALES INDÉFINIES.

I. — Intégration des fonctions rationnelles.

1. Soit $f(x)$ une fonction de la variable indépendante x, laquelle reste continue dans un certain intervalle AB si x est une variable réelle (ou synectique dans un certain domaine E si x est une variable complexe).

Nous avons vu (t. I, n°s 82 et 202) qu'il existe dans cet intervalle (ou dans ce domaine) une infinité de fonctions admettant pour dérivée $f(x)$ ou, ce qui revient au même, pour différentielle $f(x)\,dx$. Ces fonctions diffèrent les unes des autres d'une quantité constante, qui peut être choisie arbitrairement. Nous les avons appelées les *intégrales indéfinies* de $f(x)\,dx$ et nous sommes convenu de les représenter par la notation $\int f(x)\,dx$.

L'objet du présent Chapitre est l'étude du problème suivant :

Une fonction $f(x)$ étant donnée, trouver ses intégrales.

2. Nous avons déterminé dans le Calcul différentiel les dérivées d'un certain nombre de fonctions simples. Nous sommes par là en mesure d'écrire immédiatement les intégrales de celles-ci ; on aura, par exemple,

$$\int (x-a)^m\,dx = \frac{(x-a)^{m+1}}{m+1} + \text{const.} \quad \text{si} \quad m \gtrless -1,$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \log(x-a) + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\,x + \text{const.},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\,x + \text{const.},$$

$$\int e^{mx}\,dx = \frac{e^{mx}}{m} + \text{const.},$$

$$\int \sin mx\,dx = -\frac{\cos mx}{m} + \text{const.},$$

$$\int \cos mx\,dx = \frac{\sin mx}{m} + \text{const.},$$

....

3. Pour intégrer les différentielles plus compliquées, on peut employer trois artifices principaux :

1° *Décomposition en éléments simples.* — On met la fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots,$$

où $c_1, c_2, \ldots$ soient des constantes, et $f_1, f_2, \ldots$ des fonctions qu'on sache intégrer. On aura alors

$$\int f(x)\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots.$$

2° *Intégration par parties.* — Elle est fondée sur la formule

$$\int \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = \varphi(x)\,\psi(x) - \int \varphi'(x)\,\psi(x)\,dx,$$

qui ramène le calcul de l'intégrale de $\varphi(x)\,\psi'(x)$ à celui de l'intégrale de $\varphi'(x)\,\psi(x)$, laquelle est parfois plus aisée à obtenir.

Considérons plus généralement l'intégrale

$$\int \varphi\,\psi^{(m)}\,dx.$$

L'application répétée de la formule précédente donnera successivement

$$\begin{aligned}\int \varphi\,\psi^{(m)}\,dx &= \varphi\,\psi^{(m-1)} - \int \varphi'\,\psi^{(m-1)}\,dx\\ &= \varphi\,\psi^{(m-1)} - \varphi'\,\psi^{(m-2)} + \int \varphi''\,\psi^{(m-2)}\,dx\\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \varphi\,\psi^{(m-1)} - \varphi'\,\psi^{(m-2)} + \ldots + (-1)^{m-1}\,\varphi^{(m-1)}\,\psi\\ &\quad + (-1)^m \int \varphi^{(m)}\,\psi\,dx.\end{aligned}$$

En particulier, si φ est un polynome de degré inférieur à m, $\varphi^{(m)}$ sera nul, et l'intégrale qui figure au second membre se réduira à une constante.

3° *Changement de variable.* — Si l'on pose

$$x = \varphi(t), \tag{1}$$

il viendra

$$f(x) = f[\varphi(t)], \qquad dx = \varphi'(t)\,dt,$$

et la différentielle $f(x)\,dx$ se changera en $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$. Si l'on peut trouver l'intégrale $F(t)$ de cette dernière, il suffira d'y substituer pour t sa valeur tirée de l'équation (1) pour obtenir l'intégrale de $f(x)\,dx$.

4. *Intégration des fonctions rationnelles.* — Soit à intégrer l'expression

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx,$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont des polynomes entiers de degré m et n respectivement.

Soient a, b, ... les racines de l'équation $F(x)=0$; α, β, ... leurs ordres de multiplicité respectifs; on pourra (t. I, nº 215) mettre la fraction donnée sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = {} & Mx^{m-n} + M_1x^{m-n-1} + \ldots + M_{m-n}\\ & + \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}\\ & + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

la partie entière $Mx^{m-n} + \ldots$ se réduisant d'ailleurs à zéro si $m < n$.

Chacun des termes de l'expression ainsi décomposée est immédiatement intégrable; et l'on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = {} & \frac{Mx^{m-n+1}}{m-n+1} + \frac{M_1x^{m-n}}{m-n} + \ldots + M_{m-n}x + \text{const.}\\ & + A_1\log(x-a) - \frac{A_2}{x-a} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}\\ & + B_1\log(x-b) - \frac{B_2}{x-b} + \ldots + \frac{B_\beta}{(1-\beta)(x-a)^{\beta-1}}\\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right.$$

5. Si les racines a, b, ... ne sont pas toutes réelles, l'expression précédente de l'intégrale sera compliquée d'imaginaires; mais il est aisé de les faire disparaître si les coefficients de $f(x)$ et $F(x)$ sont réels.

En effet, soit par exemple $a = \mu + \nu i$ une des racines imaginaires. L'équation $F(x) = 0$ admettra la racine conjuguée $\mu - \nu i$ avec le même ordre de multiplicité. Soit b cette

racine; on aura $\beta = \alpha$. Les coefficients A_1, A_2, ... seront des quantités complexes telles que $p_1 + q_1 i$, $p_2 + q_2 i$, ...; et les coefficients B_1, B_2, ... seront les quantités conjuguées $p_1 - q_1 i$, $p_2 - q_2 i$, ... Cela posé, on aura

$$A_1 \log(x-a) = (p_1 + q_1 i)\log(x - \mu - \nu i)$$

et, comme $x - \mu - \nu i$ a pour module $\sqrt{(x-\mu)^2 + \nu^2}$ et pour argument

$$\text{arc tang}\frac{-\nu}{x-\mu} = \text{arc tang}\frac{x-\mu}{\nu} - \frac{\pi}{2},$$

il viendra

$$A_1 \log(x-a)$$
$$= (p_1 + q_1 i)\left[\log\sqrt{(x-\mu)^2+\nu^2} + i\,\text{arc tang}\frac{x-\mu}{\nu} - i\frac{\pi}{2}\right].$$

Effectuons les multiplications et ajoutons la quantité conjuguée $B_1 \log(x-b)$; les termes en i disparaîtront et les termes réels seront doublés : il viendra donc

$$A_1 \log(x-a) + B_1 \log(x-b)$$
$$= p_1 \log[(x-\mu)^2 + \nu^2] - 2q_1\,\text{arc tang}\frac{x-\mu}{\nu} + q_1 \pi.$$

La partie transcendante de l'intégrale peut donc se mettre sous forme réelle par l'addition des termes conjugués. On arrivera évidemment au même résultat pour la partie rationnelle en ajoutant chaque fraction à sa conjuguée.

6. Ajoutons ensemble les fractions simples rationnelles qui figurent dans l'expression (2); nous obtiendrons, en désignant par r le nombre des racines distinctes a, b, ..., un résultat de la forme $\frac{M}{P}$, où le dénominateur

$$P = (x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\ldots$$

est de degré $\alpha - 1 + \beta - 1 + \ldots = n - r$, et le numérateur M de degré $n - r - 1$ au plus.

D'autre part, la somme des termes logarithmiques

$$A_1 \log(x-a) + B_1 \log(x-b) + \ldots,$$

a pour dérivée

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots = \frac{N}{Q},$$

Q désignant le polynome de degré r

$$Q = (x-a)(x-b)\ldots$$

et N un polynome de degré $r-1$ au plus.

Si donc nous prenons la dérivée de l'équation (2), il viendra

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Pi + \frac{N}{Q} + \left(\frac{M}{P}\right)',$$

Π désignant un polynome de degré $m-n$, qui existera seulement dans le cas où $m \overline{\gtrless} n$.

7. *Hermite* a fait cette remarque intéressante que, pour effectuer le calcul des polynomes Π, M, N, P, Q, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation $F(x) = 0$.

En effet, Π est le quotient de la division de $f(x)$ par $F(x)$. D'autre part, on sait, par la théorie des racines égales, que P est le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et de sa dérivée (divisé, s'il y a lieu, par le coefficient de son premier terme); il s'obtiendra donc par de simples divisions. Enfin, si λ est le coefficient du premier terme de $F(x)$, on aura

$$F(x) = \lambda(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots = \lambda PQ,$$

d'où

$$Q = \frac{F(x)}{\lambda P}.$$

Q s'obtient donc également par une division.

Reste à déterminer M et N de manière à satisfaire à l'équation

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \Pi + \frac{N}{Q} + \left(\frac{M}{P}\right)' = \Pi + \frac{N}{Q} + \frac{M'P - MP'}{P^2}.$$

Multipliant les deux membres par $F(x) = \lambda PQ$, il viendra

$$f(x) - \Pi F(x) = \lambda PN + \lambda QM' - \lambda M\frac{QP'}{P}.$$

Or $f(x) - \Pi F(x)$, reste de la division de $f(x)$ par $F(x)$, est un polynome de degré $n-1$; il en est de même de chacun des termes du second membre; car le dernier terme, bien que se présentant sous une apparence fractionnaire, est entier; en effet, P' étant divisible par

$$(x-a)^{\alpha-2}(x-b)^{\beta-2}\ldots,$$

QP' est divisible par P.

En identifiant les deux membres de l'équation précédente, on obtiendra un système de n équations linéaires pour déterminer les coefficients des polynomes M, N; ceux-ci sont aussi au nombre de n; car M et N sont respectivement de degrés $n-r-1$ et $r-1$.

Nous pouvons ainsi, par des opérations toutes rationnelles, décomposer la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ en deux parties, l'une $\Pi + \left(\frac{M}{P}\right)'$ immédiatement intégrable, l'autre $\frac{N}{Q}$ dans laquelle le dénominateur n'a plus que des racines simples.

Si N est identiquement nul, cette seconde partie disparaît, et l'intégration est terminée. Dans le cas contraire, la fraction $\frac{N}{Q}$ ne peut être intégrée qu'en la décomposant en fractions simples, ce qui nécessite la résolution de l'équation $Q = 0$.

8. L'intégration des fractions rationnelles peut encore être présentée de la manière suivante.

Nous avons vu (t. I, n° **214**) que toute fraction dont le dénominateur est un produit de facteurs premiers entre eux peut être décomposée en une somme de fractions partielles, ayant respectivement ces divers facteurs pour dénominateurs.

Cela posé, soit $\frac{f}{F}$ la fraction considérée, et soient $P_1, P_2, \ldots$

les produits des facteurs binomes $x-a$, $x-b$, ... qui correspondent aux racines simples, aux racines doubles, etc. de F, de telle sorte qu'on ait

$$F = P_1 P_2^2 P_3^3 \ldots.$$

On sait (t. I, n° 212) que les facteurs P_1, P_2, ... peuvent être obtenus par des opérations rationnelles. D'ailleurs chacun d'eux n'a que des racines simples; enfin ils sont premiers entre eux; on pourra donc mettre $\frac{f}{F}$ sous la forme d'une somme de fractions

$$\frac{M_1}{P_1} + \frac{M_2}{P_2^2} + \ldots,$$

qu'on aura à traiter isolément. Nous avons donc ramené la question de l'intégration au cas d'une fraction

$$\frac{M}{P^\mu},$$

où le dénominateur est une puissance d'un polynome P n'ayant que des racines simples.

L'intégration par parties va nous permettre de ramener ce problème au cas où $\mu = 1$. Supposons en effet $\mu > 1$.

Le polynome P étant premier à sa dérivée, on pourra déterminer deux polynomes A, B tels qu'on ait $AP + BP' = 1$. On aura donc

$$\frac{M}{P^\mu} = \frac{M(AP + BP')}{P^\mu} = \frac{AM}{P^{\mu-1}} + \frac{BMP'}{P^\mu}.$$

Or $\frac{P'}{P^\mu}$ est la dérivée de $\frac{1}{1-\mu}\frac{1}{P^{\mu-1}}$; on aura donc, d'après la formule de l'intégration par parties,

$$BM\frac{P'}{P^\mu} = \left[\frac{BM}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' - \frac{(BM)'}{(1-\mu)P^{\mu-1}},$$

et, par suite, en posant pour abréger

$$AM - \frac{(BM)'}{1-\mu} = M_1,$$

$$\frac{M}{P^\mu} = \left[\frac{BM}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' + \frac{M_1}{P^{\mu-1}},$$

et en intégrant

$$\int \frac{M}{P^\mu} dx = \frac{BM}{(1-\mu)P^{\mu-1}} + \int \frac{M_1}{P^{\mu-1}} dx.$$

On a ainsi ramené le calcul de l'intégrale cherchée à celui d'une intégrale analogue où l'exposant de P est réduit d'une unité. En changeant μ en $\mu - 1$ et M en M_1 dans cette formule, on trouvera de même, en posant

$$AM_1 - \frac{(BM_1)'}{2-\mu} = M_2,$$

$$\int \frac{M}{P^{\mu-1}} dx = \frac{BM_1}{(2-\mu)P^{\mu-2}} + \int \frac{M_2}{P^{\mu-2}} dx,$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'exposant de P soit réduit à l'unité, auquel cas on devra recourir à la décomposition en éléments simples, qui donnera la partie logarithmique de l'intégrale.

9. Proposons-nous, comme exemple, d'intégrer l'expression

$$\frac{f(x)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu}.$$

Il sera utile de commencer par un changement de variables, en posant

$$x = \alpha + \beta t, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \beta\,dt.$$

On en déduit

$$\int \frac{f(x)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^\mu} = \int \frac{\beta^{1-2\mu} f(\alpha+\beta t)}{(1+t^2)^\mu} dt.$$

Séparant dans le numérateur les termes de degré pair de

ceux de degré impair, on pourra le mettre sous la forme

$$\varphi(t^2) + \varphi_1(t^2)t.$$

L'intégrale cherchée sera donc la somme des deux suivantes :

$$\int \frac{\varphi(t^2)}{(1+t^2)^\mu}\,dt, \qquad \int \frac{\varphi_1(t^2)\,t\,dt}{(1+t^2)^\mu}.$$

Pour intégrer cette dernière, posons

$$1 + t^2 = u, \qquad \text{d'où} \qquad 2t\,dt = du,$$

elle deviendra

$$\int \frac{\frac{1}{2}\varphi_1(u-1)\,du}{u^\mu}.$$

Cette expression se décompose en une somme de termes dont chacun, étant le produit d'une constante par une puissance de u, est immédiatement intégrable.

Passons à l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(t^2)\,dt}{(1+t^2)^\mu}.$$

Posant $1 + t^2 = h$, il viendra

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t^2)}{(1+t^2)^\mu} &= \frac{\varphi(-1+h)}{h^\mu} = \frac{a}{h^\mu} + \frac{a_1}{h^{\mu-1}} + \ldots + \Pi \\ &= \frac{a}{(1+t^2)^\mu} + \frac{a_1}{(1+t^2)^{\mu-1}} + \ldots + \Pi, \end{aligned}$$

Π étant un polynome en t, qui s'intègre immédiatement.

L'intégrale des autres termes sera

$$a\mathrm{I}_\mu + a_1\mathrm{I}_{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1}\mathrm{I}_1,$$

si l'on pose pour abréger

$$\mathrm{I}_\mu = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\mu}.$$

Appliquons à cette intégrale la formule de réduction du

numéro précédent. On a ici

$$M = 1, \qquad P = 1 + t^2.$$

Ce dernier polynome est lié à sa dérivée $P' = 2t$ par la relation $P - \frac{1}{2} t P' = 1$.

On aura donc

$$A = 1, \qquad B = -\frac{1}{2} t,$$

et, par suite,

$$M_1 = AM - \frac{(BM)'}{1-\mu} = 1 + \frac{1}{2(1-\mu)} = \frac{2\mu - 3}{2\mu - 2},$$

d'où

$$I_\mu = \frac{t}{(2\mu - 2)(1+t^2)^{\mu-1}} + \frac{2\mu - 3}{2\mu - 2} I_{\mu-1}.$$

Par cette formule de réduction, on ramènera successivement le calcul de toutes ces intégrales à celui de la première

$$I_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang}\, t.$$

10. On peut souvent simplifier notablement l'intégration des fractions rationnelles par un changement de variable.

Supposons, par exemple, que la fonction $\frac{f(x)}{F(x)}$ à intégrer puisse se mettre sous la forme

$$\varphi(x^m) x^{m-1},$$

m étant un entier quelconque.

Si nous posons $x^m = t$, d'où $m x^{m-1} dx = dt$, on aura

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int \varphi(x^m) x^{m-1} dx = \frac{1}{m} \int \varphi(t)\, dt.$$

L'intégrale cherchée se trouve donc ramenée à l'intégrale plus simple $\int \varphi(t)\, dt$.

Exemple. — Soit à intégrer l'expression $\frac{1}{a + bx^m} \frac{dx}{x}$.

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{x^m(a+bx^m)}x^{m-1}\,dx = \frac{1}{m}\,\frac{1}{t(a+bt)}\,dt.$$

Son intégrale sera

$$\frac{1}{am}[\log t - \log(a+bt)] + \text{const.}$$
$$= \frac{1}{am}[\log x^m - \log(a+bx^m)] + \text{const.}$$

Le cas qui se présente le plus souvent est celui où la fonction $\psi(x)$ à intégrer est une fonction impaire.

Lorsque cela aura lieu, il est clair que $\frac{\psi(x)}{x}$ sera une fonction paire, laquelle ne dépendra, par conséquent, que de x^2. On aura donc

$$\psi(x) = \varphi(x^2)\,x,$$

et l'on pourra appliquer la simplification précédente (m étant ici égal à 2).

11. Signalons encore le cas, assez fréquent dans les applications, où le numérateur $f(x)$ de la fonction à intégrer ne diffère de la dérivée du dénominateur que par un facteur constant a. On aura immédiatement

$$\int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{a\,F'(x)}{F(x)}\,dx = a \log F(x) + \text{const.}$$

II. — Intégration des différentielles algébriques.

12. Considérons l'*intégrale abélienne*

$$\int f(x, y)\,dx,$$

où f désigne une fraction rationnelle de x et de y; cette dernière quantité étant elle-même une fonction algébrique,

définie par une équation

$$F(x, y) = 0.$$

Si la courbe caractérisée par cette équation est unicursale, on pourra exprimer x et y rationnellement au moyen d'une nouvelle variable t. Soit

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

d'où

$$dx = \varphi'(t)\, dt.$$

Prenant t pour nouvelle variable, l'intégrale deviendra

$$\int f[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t)\, dt,$$

et se déterminera sans difficulté, la fonction sous le signe $\int$ étant devenue rationnelle.

13. *Exemples.* — I. Supposons que y soit défini par l'équation

$$\begin{aligned} &A y^m + B x y^{m-1} + \ldots + L x^m \\ &\quad + a y^{m-1} + b x y^{m-2} + \ldots + k x^{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Posons $y = tx$; l'équation, débarrassée du facteur commun x^{m-1}, donnera

$$x = -\frac{a t^{m-1} + b t^{m-2} + \ldots + k}{A t^m + B t^{m-1} + \ldots + L},$$

d'où

$$y = -\frac{a t^m + b t^{m-1} + \ldots + k t}{A t^m + B t^{m-1} + \ldots + L}.$$

On pourra donc intégrer toute expression de la forme

$$\int f(x, y)\, dx.$$

14. II. Considérons l'intégrale

$$\int f\left[\left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^a, \left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^b, \left(\frac{mx+n}{m'x+n'}\right)^c, \ldots, x\right] dx,$$

où m, n, m', n' sont des constantes, a, b, c, ... des nombres commensurables, et f une fonction rationnelle. Soit μ le plus petit multiple des dénominateurs de a, b, c, ... On posera

$$\frac{mx+n}{m'x+n'} = t^{\mu},$$

d'où

$$x = -\frac{n't^{\mu}-n}{m't^{\mu}-m}, \qquad dx = \frac{mn'-nm'}{(m't^{\mu}-m)^2}\mu t^{\mu-1}\,dt.$$

Substituant, l'intégrale devient

$$\int f\left(t^{\mu a}, t^{\mu b}, t^{\mu c}, \ldots, -\frac{n't^{\mu}-n}{m't^{\mu}-m}\right)\frac{mn'-nm'}{(m't^{\mu}-m)^2}\mu t^{\mu-1}\,dt,$$

où tout est rationnel, μ, μa, μb, μc, ... étant des entiers.

15. III. *Différentielle binome.* — On donne ce nom à l'expression

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

où m, n, p sont des nombres commensurables et a, b des constantes différentes de zéro.

Posons

$$bx^n = -at,$$

d'où

$$x = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

Substituant ces expressions, et posant pour abréger

$$\frac{m+1}{n} - 1 = q,$$

la différentielle sera transformée, à un facteur constant près, dans la suivante

$$t^q(1-t)^p\,dt,$$

qui ne dépend plus que des deux paramètres p et q.

Cette nouvelle différentielle peut être rendue rationnelle, d'après le numéro précédent, dans les trois cas suivants :

1° Si p est entier;

2° Si q est entier;
3° Si $p+q$ est entier.

En effet, dans ces diverses hypothèses, $t^q(1-t)^p$ sera respectivement le produit d'une fonction rationnelle de t par une puissance fractionnaire de l'une des trois quantités t, $1-t$, $\frac{1-t}{t}$, toutes comprises dans la forme générale

$$\frac{mt+n}{m't+n'}.$$

En dehors de ces trois cas d'intégrabilité, la différentielle binome ne peut être rendue rationnelle, et son intégrale

$$I_{pq}=\int t^q(1-t)^p\,dt$$

représentera une transcendante nouvelle.

16. La décomposition en éléments simples et l'intégration par parties fournissent aisément des relations entre ces intégrales.

En effet, on a tout d'abord

$$(1)\qquad I_{pq}=\int(t^q-t^{q+1})(1-t)^{p-1}\,dt=I_{p-1,q}-I_{p-1,q+1}.$$

Intégrant, d'autre part, l'identité

$$[t^{q+1}(1-t)^p]'=(q+1)t^q(1-t)^p-pt^{q+1}(1-t)^{p-1},$$

il vient

$$(2)\qquad (q+1)I_{pq}-pI_{p-1,q+1}=t^{q+1}(1-t)^p.$$

Éliminons $I_{p-1,q+1}$ entre les équations (1) et (2), il vient

$$(3)\qquad (p+q+1)I_{pq}-pI_{p-1,q}=t^{q+1}(1-t)^p$$

et, en changeant p en $p+1$,

$$(4)\qquad (p+q+2)I_{p+1,q}-(p+1)I_{pq}=t^{q+1}(1-t)^{p+1}.$$

Éliminons, au contraire, I_{pq} et changeons p en $p+1$; il

viendra

$$(5)\qquad (p+q+2)\mathrm{I}_{p,q+1}-(q+1)\mathrm{I}_{p,q}=-t^{q+1}(1-t)^{p+1}$$

et, en changeant q en $q-1$,

$$(6)\qquad (p+q+1)\mathrm{I}_{pq}-q\mathrm{I}_{p,q-1}=-t^{q}(1-t)^{p+1}.$$

Ces formules permettent de ramener la recherche de l'intégrale I_{pq} à celle d'une intégrale de même forme $\mathrm{I}_{p'q'}$, où p', q' soient $\overline{\overline{<}}\,0$, mais $\overline{\overline{>}}-1$.

En effet, si $p<-1$, la formule (4) ramènera le calcul de I_{pq} à celui de $\mathrm{I}_{p+1,q}$; répétant cette réduction, on finira par arriver à une intégrale où le premier indice est $\overline{\overline{>}}-1$.

Si $q<-1$, la formule (5) ramènera de même $\mathrm{I}_{p,q}$ à $\mathrm{I}_{p,q+1}$; réitérant cette réduction, on arrivera à une intégrale où le second indice est $\overline{\overline{>}}-1$.

On est ainsi ramené aux intégrales I_{pq}, où $p\overline{\overline{>}}-1$, $q\overline{\overline{>}}-1$. Dans cette hypothèse, si l'un des indices p ou q est positif, $p+q+1$ ne sera pas nul, et l'on pourra, au moyen de la formule (3) ou de la formule (6), l'abaisser d'une unité, et répéter cette opération jusqu'à ce qu'il devienne nul ou négatif, mais >-1.

Supposons donc que p et q soient tous deux $\overline{\overline{<}}\,0$, mais $\overline{\overline{>}}-1$. Si $p=0$, mais $q>-1$, la formule (3), qui se réduit à

$$(q+1)\mathrm{I}_{0q}=t^{q+1},$$

donnera l'intégrale cherchée. De même, si $p>-1$, $q=0$, l'intégrale sera donnée par la formule (6), qui se réduit à

$$(p+1)\mathrm{I}_{p0}=-(1-t)^{p+1}.$$

Enfin, si l'un des indices p et q, ou tous les deux, sont égaux à -1, on se trouvera dans un cas d'intégrabilité, mais les formules de réduction seront impuissantes et, pour calculer l'intégrale, il faudra recourir à un changement de variable qui rende la différentielle rationnelle. La réduction opérée n'en aura pas moins été fort utile, en simplifiant l'expression de la différentielle sur laquelle on doit opérer.

17. IV. *Coniques.* — Soit proposée l'intégrale

$$\int f(x, y)\, dx,$$

où f est une fonction rationnelle, et où x, y sont liés par une équation du second degré

$$F(x, y) = 0.$$

Soient μ, ν deux constantes quelconques liées par l'équation

$$F(\mu, \nu) = 0.$$

Si dans l'équation $F = 0$ nous remplaçons x, y par $\mu + (x - \mu)$, $\nu + (y - \nu)$, elle prendra la forme

$$\begin{aligned} &a(x-\mu) + b(y-\nu) \\ &\quad + c(x-\mu)^2 + d(x-\mu)(y-\nu) + e(y-\nu)^2 = 0. \end{aligned}$$

Posons

$$y - \nu = t(x - \mu).$$

Substituant et supprimant le facteur commun $x - \mu$, il vient

$$a + bt + (c + dt + et^2)(x - \mu) = 0,$$

d'où

$$x - \mu = -\frac{a + bt}{c + dt + et^2}, \qquad y - \nu = -t\frac{a + bt}{c + dt + et^2}.$$

La relation $F = 0$ est donc unicursale.

L'interprétation géométrique est aisée. L'équation $F = 0$ représente une conique; (μ, ν) un point arbitraire de cette courbe; $y - \mu = t(x - \mu)$ une sécante menée par ce point; t son coefficient angulaire; x, y les coordonnées de son second point d'intersection avec la courbe.

18. Considérons le cas limite où le point (μ, ν) est pris à l'infini; soit

$$0 = F(x, y) = (y + \lambda x)(y + \lambda_1 x) + \alpha y + \beta x + \gamma$$

l'équation de la conique. La sécante sera parallèle à une asymptote, et aura pour équation

$$y + \lambda x = t.$$

Substituant dans $F = 0$, il viendra

$$t(y + \lambda_1 x) + \alpha y + \beta x + \gamma = 0.$$

Ces deux équations linéaires donneront x et y en fonction rationnelle de t.

19. Soit par exemple à calculer l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

Posons

$$y^2 = Ax^2 + 2Bx + C.$$

L'intégrale devient

$$\int \frac{dx}{y}.$$

Coupons la conique par une droite

$$y + x\sqrt{A} = t$$

parallèle à une des asymptotes; il viendra

$$(t - x\sqrt{A})^2 = Ax^2 + 2Bx + C,$$

et en différentiant

$$(t - x\sqrt{A})\,dt = (t\sqrt{A} + B)\,dx,$$

$$y\,dt = (t\sqrt{A} + B)\,dx,$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dt}{t\sqrt{A} + B},$$

$$\int \frac{dx}{y} = \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[t\sqrt{A} + B\right] + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}} \log\left[y\sqrt{A} + Ax + B\right] + \text{const.}$$

20. Si A est négatif, cette formule contient des imaginaires. Cet inconvénient est inévitable si $B^2 - AC < 0$, car le radical à intégrer est imaginaire quel que soit x.

Mais si $B^2 - AC > 0$, on obtiendra l'intégrale sous forme réelle en opérant comme il suit :

On a

$$Ax^2 + 2Bx + C = \frac{B^2 - AC - (Ax + B)^2}{-A}.$$

Posons

$$Ax + B = t\sqrt{B^2 - AC},$$

d'où

$$dx = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}\,dt.$$

L'intégrale devient

$$\int \frac{\sqrt{B^2 - AC}\,dt}{A\sqrt{\dfrac{(B^2 - AC)(1 - t^2)}{-A}}} = \frac{1}{\sqrt{-A}}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}}\,\text{arc sin}\, t + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-A}}\,\text{arc sin}\, \frac{Ax + B}{\sqrt{B^2 - AC}} + \text{const.}$$

21. Soit encore à intégrer l'expression

$$\int \frac{dx}{(x - \mu)\sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}}.$$

Posons

$$\nu = \sqrt{A\mu^2 + 2B\mu + C}.$$

Le point (μ, ν) étant un point de la conique

$$y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C},$$

on rendra rationnelle la fonction à intégrer en posant

$$y - \nu = t(x - \mu),$$

d'où

$$(7) \qquad t^2(x - \mu) + 2\nu t = A(x + \mu) + 2B.$$

Cette équation, différentiée, donnera

$$[2t(x-\mu)+2\nu]\,dt+(t^2-A)\,dx=0,$$

d'où

$$-\frac{2\,dt}{t^2-A}=\frac{dx}{t(x-\mu)+\nu}=\frac{dx}{y}$$

et

$$\frac{dx}{(x-\mu)y}=-\frac{2\,dt}{(t^2-A)(x-\mu)}.$$

Mais l'équation (7) peut s'écrire ainsi :

$$(t^2-A)(x-\mu)=2A\mu+2B-2\nu t.$$

L'intégrale cherchée $\int\frac{dx}{(x-\mu)y}$ sera donc égale à

$$\int\frac{-dt}{A\mu+B-\nu t}=\frac{1}{\nu}\log(\nu t-A\mu-B)+\text{const.}$$

22. *Remarque.* — L'intégrale

$$\int f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})\,dx,$$

où f est une fonction rationnelle, se ramène à celles que nous venons de traiter.

Posons, en effet,

$$\sqrt{ax+b}=t,$$

d'où

$$x=\frac{t^2-b}{a}, \qquad dx=\frac{2t\,dt}{a}.$$

L'intégrale deviendra

$$\int f\left[\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{\frac{c(t^2-b)}{a}+d}\right]\frac{2t\,dt}{a},$$

expression qui ne contient plus qu'un seul radical.

23. V. *Cubiques unicursales.* — Elles ont un point

double (μ, ν). Leur équation générale sera

$$P_2(x-\mu, y-\nu) + P_3(x-\mu, y-\nu) = 0,$$

P_2, P_3 désignant des polynomes homogènes de degrés respectifs 2 et 3.

Posons

$$y-\nu = t(x-\mu).$$

Substituons et supprimons le facteur commun $(x-\mu)^2$; il vient

$$P_2(1, t) + P_3(1, t)(x-\mu) = 0,$$

d'où les valeurs rationnelles en t

$$x-\mu = -\frac{P_2(1, t)}{P_3(1, t)}, \qquad y-\nu = -t\frac{P_2(1, t)}{P_3(1, t)}.$$

24. VI. *Quartiques unicursales*. — Elles ont trois points doubles, et leur équation générale est

$$F(AB, BC, CA) = 0,$$

A, B, C étant des expressions linéaires

$$\begin{aligned} A &= a\,x + b\,y + c, \\ B &= a'x + b'y + c', \\ C &= a''x + b''y + c'' \end{aligned}$$

(dont le déterminant ne soit pas nul) et F une fonction homogène du second degré.

En effet, l'équation ci-dessus représente une quartique ayant pour points doubles les trois sommets du triangle formé par les droites A, B, C. Ces trois points sont arbitraires comme les droites elles-mêmes. Il y en aura deux rejetés à l'infini si l'une des fonctions linéaires se réduit à une constante.

D'ailleurs, c'est l'équation générale des quartiques qui admettent ces trois points doubles; car leur présence assujettit les 15 coefficients de la quartique générale à neuf

conditions; restent 6 arbitraires; c'est le nombre des coefficients de F.

Pour obtenir la représentation paramétrique de la courbe ci-dessus, divisons son équation par A^2B^2. Nous obtiendrons une équation du second degré, non homogène, entre $\frac{C}{A}$ et $\frac{C}{B}$.

Cette relation est unicursale (17). On peut donc la remplacer par un système de deux équations

$$\frac{C}{A}=\frac{\varphi_1(t)}{\varphi(t)}, \qquad \frac{C}{B}=\frac{\varphi_2(t)}{\varphi(t)}.$$

De ces équations, linéaires en x, y, on déduira leur expression en fonction rationnelle de t.

Nous avons implicitement supposé que les trois points doubles étaient réels. Si deux d'entre eux sont imaginaires conjugués, il en est de même des côtés opposés du triangle. Soit donc

$$A=M+Ni, \qquad B=M-Ni, \qquad C \text{ réel};$$

F sera quadratique et homogène en M^2+N^2, MC, NC. Il existera donc entre $\frac{MC}{M^2+N^2}$, $\frac{NC}{M^2+N^2}$ une relation quadratique, qu'on peut remplacer par deux équations

$$\frac{MC}{M^2+N^2}=\frac{\varphi_1(t)}{\varphi(t)}, \qquad \frac{NC}{M^2+N^2}=\frac{\varphi_2(t)}{\varphi(t)}.$$

On déduit de celles-ci les deux relations

$$M\varphi_1+N\varphi_2=C\varphi, \qquad M\varphi_2=N\varphi_1$$

linéaires en x, y, qu'elles détermineront en fonction rationnelle de t.

25. VI. *Lemniscate.* — Elle a pour équation

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \tag{8}$$

et rentre dans le type précédent en posant

$$A=x+iy, \qquad B=x-iy, \qquad C=1.$$

Les points doubles sont l'origine et les points circulaires à l'infini.

Pour exprimer x, y en fonction rationnelle d'un paramètre, on pourrait employer le procédé ci-dessus. Mais nous appliquerons de préférence la méthode générale indiquée au Tome I, n° 608.

Nous aurons à couper la courbe donnée, d'ordre $n = 4$, par un faisceau de courbes d'ordre $4 - 2$ (coniques) passant par les points doubles (cercles passant par l'origine) et par un dernier point fixe pris sur la lemniscate. (Nous choisirons le point $x = a$, $y = 0$.)

L'équation de nos cercles sera

$$x^2 + y^2 - ax + ty = 0. \tag{9}$$

Chacun d'eux coupera la lemniscate en 8 points, dont un seul dépend de t. Cherchons ses coordonnées.

De (8) et (9) on déduit

$$(-ax + ty)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

ou en développant et supprimant le facteur y

$$-2atx + t^2y = -a^2y,$$

$$y = \frac{2atx}{t^2 + a^2}.$$

Substituant dans (9) et supprimant le facteur x, il vient

$$x\left[1 + \frac{4a^2t^2}{(t^2 + a^2)^2}\right] - a + \frac{2at^2}{t^2 + a^2} = 0.$$

On a ainsi deux équations linéaires pour déterminer x et y.

26. *Intégrales elliptiques et hyperelliptiques.* — Les intégrales

$$\int f(x, \sqrt{X})\, dx,$$

où f est une fonction rationnelle et X un polynome en x de

degré supérieur à 2, ne sont pas en général réductibles comme les précédentes aux fonctions élémentaires. Ce sont des transcendantes nouvelles auxquelles on donne le nom d'*intégrales elliptiques* si $n = 3$ ou 4, d'*intégrales hyperelliptiques* si $n > 4$.

Proposons-nous d'étudier ces transcendantes.

27. Lemme. — *Toute fonction rationnelle de* x *et* $\sqrt{X}$ *peut se mettre sous la forme* $\frac{R}{\sqrt{X}} + S$, *où* R *et* S *sont des fonctions rationnelles de* x.

En effet, $\sqrt{X}$ ayant pour carré X, qui est rationnel en x, toute fonction entière de x et $\sqrt{X}$ sera évidemment de la forme

$$P + Q\sqrt{X},$$

où P et Q sont entiers en x.

Une fonction rationnelle, étant le quotient de deux fonctions entières, sera de la forme

$$\frac{P + Q\sqrt{X}}{P_1 + Q_1\sqrt{X}},$$

ou, en multipliant au numérateur et au dénominateur par $P_1 - Q_1\sqrt{X}$,

$$\frac{(P_1 Q - P Q_1)\sqrt{X} + P P_1 - Q Q_1 X}{P_1^2 - Q_1^2 X} = M\sqrt{X} + S,$$

M et S étant rationnels en x.

D'ailleurs,

$$M\sqrt{X} = \frac{MX}{\sqrt{X}} = \frac{R}{\sqrt{X}},$$

R étant rationnel en x. Le théorème est donc démontré.

Cette fonction aura pour intégrale

$$\int \frac{R}{\sqrt{X}}\,dx + \int S\,dx.$$

L'intégrale $\int S\,dx$ s'obtenant par les méthodes précédemment exposées, il ne reste à étudier que la première intégrale $\int \frac{R}{\sqrt{X}}\,dx$.

28. On peut évidemment supposer que X n'a que des racines simples; car, s'il contenait un facteur double, on pourrait le faire sortir du radical.

Cela posé, on sait que la fraction rationnelle R peut être décomposée : 1° en un polynome entier Π; 2° en une somme de fractions de la forme $\frac{M}{P^\mu}$, où P est un polynome entier n'ayant que des racines simples.

Soit D le plus grand commun diviseur de P et de X, et soit $P = DP_1$; P_1 sera premier à D et à X. La fraction

$$\frac{M}{P^\mu} = \frac{M}{D^\mu P_1^\mu}$$

pourra donc être décomposée en deux autres ayant respectivement pour dénominateur P_1^μ et D^μ.

Nous aurons donc à considérer trois sortes d'intégrales :

1° Des intégrales

$$\int \frac{M\,dx}{P^\mu \sqrt{X}},$$

où P est premier à X;

2° Des intégrales de même forme où P divise X

3° Des intégrales

$$\int \frac{\Pi\,dx}{\sqrt{X}},$$

où Π est un polynome entier.

29. Considérons les intégrales de la première sorte : P étant premier à P′ et à X, on pourra trouver deux polynomes A, B tels qu'on ait

$$AP + BP'X = 1,$$

et, par suite,

$$\frac{M}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{M(AP + BP'X)}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{AM}{P^{\mu-1}\sqrt{X}} + BM\sqrt{X}\frac{P'}{P^\mu}.$$

Or, si $\mu > 1$, $\frac{P'}{P^\mu}$ est la dérivée de $\frac{1}{(1-\mu)P^{\mu-1}}$. On a donc

$$BM\sqrt{X}\frac{P'}{P^\mu} = \left[\frac{BM\sqrt{X}}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' - \frac{(BM\sqrt{X})'}{(1-\mu)P^{\mu-1}}.$$

D'ailleurs

$$(BM\sqrt{X})' = (BM)'\sqrt{X} + \frac{BMX'}{2\sqrt{X}} = \frac{(BM)'X + \frac{1}{2}BMX'}{\sqrt{X}}.$$

Si donc on pose, pour abréger,

$$AM - \frac{(BM)'X + \frac{1}{2}BMX'}{1-\mu} = M_1,$$

il viendra

$$\frac{M}{P^\mu\sqrt{X}} = \left[\frac{BM\sqrt{X}}{(1-\mu)P^{\mu-1}}\right]' + \frac{M_1}{P^{\mu-1}\sqrt{X}}.$$

Intégrant cette équation, nous aurons la formule de réduction

$$\int\frac{M\,dx}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{BM\sqrt{X}}{(1-\mu)P^{\mu-1}} + \int\frac{M_1\,dx}{P^{\mu-1}\sqrt{X}}.$$

Par l'application répétée de cette formule, nous aurons finalement

$$\int\frac{M\,dx}{P^\mu\sqrt{X}} = \frac{L\sqrt{X}}{P^{\mu-1}} + \int\frac{N\,dx}{P\sqrt{X}},$$

L et N étant des polynomes entiers.

La division de N par P donne d'ailleurs

$$\frac{N}{P} = \Pi_1 + \frac{\rho}{P},$$

Π_1 étant un polynome entier et ρ un reste de degré moindre

que P; on aura donc

$$\int \frac{M\,dx}{P^{\mu}\sqrt{X}} = \frac{L\sqrt{X}}{P^{\mu-1}} + \int \frac{\Pi_1\,dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{\rho\,dx}{P\sqrt{X}}.$$

30. Passons à la considération des intégrales de la seconde sorte

$$\int \frac{M\,dx}{P^{\mu}\sqrt{X}},$$

où P divise X. Soit $X = PX_1$; P étant premier à P' et à X_1, on pourra déterminer deux polynomes A, B tels qu'on ait

$$AP + BP'X_1 = 1,$$

et par suite

$$\frac{M}{P^{\mu}\sqrt{X}} = \frac{M}{P^{\mu+\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}}(AP + BP'X_1)$$
$$= \frac{AM}{P^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}} + BM\sqrt{X_1}\,\frac{P'}{P^{\mu+\frac{1}{2}}}.$$

Or on a, pour toute valeur positive de μ, et même pour $\mu = 1$,

$$\frac{P'}{P^{\mu+\frac{1}{2}}} = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)P^{\mu-\frac{1}{2}}}\right]',$$

et par suite

$$BM\sqrt{X_1}\,\frac{P'}{P^{\mu+\frac{1}{2}}} = \left[\frac{BM\sqrt{X_1}}{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)P^{\mu-\frac{1}{2}}}\right]' - \frac{(BM\sqrt{X_1})'}{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)P^{\mu-\frac{1}{2}}}$$
$$= \left[\frac{BM\sqrt{X}}{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)P^{\mu}}\right]' - \frac{(BM)'X_1 + \frac{1}{2}BMX_1'}{\left(\frac{1}{2}-\mu\right)P^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1}}.$$

Mais

$$P^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{X_1} = P^{\mu-1}\sqrt{X}.$$

Si donc l'on pose, pour abréger,

$$AM - \frac{(BM)'X_1 + \frac{1}{2}BMX'_1}{\frac{1}{2} - \mu} = M_1,$$

il viendra

$$\frac{M}{P^\mu \sqrt{X}} = \left[\frac{BM\sqrt{X}}{\left(\frac{1}{2} - \mu\right)P^\mu}\right]' + \frac{M_1}{P^{\mu-1}\sqrt{X}},$$

et, en intégrant, on aura la formule de réduction

$$\int \frac{M\,dx}{P^\mu \sqrt{X}} = \frac{BM\sqrt{X}}{\left(\frac{1}{2} - \mu\right)P^\mu} + \int \frac{M_1\,dx}{P^{\mu-1}\sqrt{X}}.$$

En répétant cette réduction jusqu'à ce que l'exposant de P s'annule, on trouvera un résultat de la forme

$$\int \frac{M}{P^\mu \sqrt{X}} = \frac{L\sqrt{X}}{P^\mu} + \int \frac{\Pi_2\,dx}{\sqrt{X}},$$

L et Π_2 étant des polynomes entiers.

31. Il nous reste à étudier l'intégrale $\int \frac{\Pi\,dx}{\sqrt{X}}$, à laquelle on peut réunir les termes de même forme $\int \frac{\Pi_1\,dx}{\sqrt{X}}, \dots$ provenant de la réduction des intégrales déjà traitées.

Soit $\Pi = \alpha x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots$; on aura

$$\int \frac{\Pi\,dx}{\sqrt{X}} = \alpha I_m + \alpha_1 I_{m-1} + \dots$$

en posant

$$I_k = \int \frac{x^k\,dx}{\sqrt{X}}.$$

Il est aisé de trouver une formule de réduction pour les intégrales I_k. Soit, en effet,

$$X = ax^n + a_1 x^{n-1} + \dots.$$

On aura, λ désignant un entier quelconque $\gtreqless 0$,

$$(x^\lambda\sqrt{X})' = \frac{\lambda x^{\lambda-1}X + \frac{1}{2}x^\lambda X'}{\sqrt{X}}$$

$$= \frac{a\left(\lambda + \frac{1}{2}n\right)x^{\lambda+n-1} + bx^{\lambda+n-2} + \ldots}{\sqrt{X}}$$

et en intégrant

$$x^\lambda\sqrt{X} = a\left(\lambda + \frac{1}{2}n\right)I_{\lambda+n-1} + bI_{\lambda+n-2} + \ldots,$$

formule qui ramènera l'intégrale $I_{\lambda+n-1}$ aux intégrales I d'indice moindre.

Par l'application répétée de cette formule, il viendra

$$\int \frac{\Pi\,dx}{\sqrt{X}} = c_0 I_0 + \ldots + c_{n-2} I_{n-2} + \Psi\sqrt{X},$$

où Ψ est un polynome entier.

On voit donc que l'intégrale $\int \frac{R\,dx}{\sqrt{X}}$, où R est une fraction rationnelle quelconque, se réduit : 1° à des termes algébriques; 2° à une combinaison linéaire des intégrales $I_0, \ldots, I_{n-2}$; 3° à des intégrales de la forme

$$\int \frac{\rho\,dx}{P\sqrt{X}},$$

où ρ est de degré moindre que P, ce dernier polynome étant d'ailleurs premier à X, et n'ayant que des racines simples.

32. Jusqu'ici nous n'avons employé pour la réduction que des opérations purement rationnelles; mais si, maintenant, nous résolvons l'équation algébrique $P = 0$, nous pourrons décomposer $\frac{\rho}{P}$ en une somme de fractions simples

$$\frac{\rho}{P} = \frac{\alpha}{x-\mu} + \frac{\alpha_1}{x-\mu_1} + \ldots.$$

Si donc nous désignons par $J(\mu)$ l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x-\mu)\sqrt{X}},$$

nous aurons

$$\int \frac{\rho\, dx}{P\sqrt{X}} = \alpha\, J(\mu) + \alpha_1 J(\mu_1) + \ldots.$$

Les seules transcendantes nouvelles obtenues par l'intégration des fonctions rationnelles de x et de $\sqrt{X}$ sont donc les $n-1$ intégrales $I_0, I_1, \ldots, I_{n-2}$ et l'intégrale $J(\mu)$.

33. La méthode de réduction que nous venons d'exposer peut être appliquée avec avantage au cas où X est un polynome du second degré $Ax^2 + 2Bx + C$. Elle ramène le problème de l'intégration à la recherche des deux intégrales particulières

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+2Bx+C}} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(x-\mu)\sqrt{Ax^2+2Bx+C}}$$

que nous avons obtenues.

34. Si le degré de X est un nombre impair $2p+1$, les intégrales I sont en nombre $2p$. On les partage en deux classes : 1° les *intégrales de première espèce*

$$I_0, \quad I_1, \quad \ldots, \quad I_{p-1}$$

et les *intégrales de seconde espèce*

$$I_p, \quad I_{p+1}, \quad \ldots, \quad I_{2p-1}.$$

Les premières s'annulent et les autres deviennent infinies pour $x = \infty$.

Soit, en effet,

$$X = x^{2p+1} + a x^{2p} + a_1 x^{2p-1} + \ldots.$$

On aura

$$\frac{x^k}{\sqrt{X}} = x^{k-p-\frac{1}{2}} + \lambda x^{k-p-\frac{3}{2}} + \ldots$$

et, en intégrant,

$$I_k = \frac{x^{k-p+\frac{1}{2}}}{k-p+\frac{1}{2}} + \lambda \frac{x^{k-p-\frac{1}{2}}}{k-p-\frac{1}{2}} + \ldots,$$

développement qui montre que, pour $x = \infty$, I_k est de l'ordre $k - p + \frac{1}{2}$. Il sera donc nul si $k < p$, infini si $k \overline{\gtrless} p$.

Les intégrales $J(\mu)$ se nomment *intégrales de troisième espèce*.

35. Le cas où X est un polynome de degré pair peut se ramener au précédent, comme nous allons le faire voir.

Soit

$$X = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

un polynome de degré $2p$. Posons

$$\frac{x-\alpha}{x-\beta} = t,$$

d'où

$$x = \frac{\alpha - \beta t}{1-t}, \qquad dx = \frac{(\alpha-\beta)\,dt}{(1-t)^2}, \qquad x - \alpha = t\frac{\alpha-\beta}{1-t},$$

$$x - \beta = \frac{\alpha-\beta}{1-t}, \qquad x - \gamma = \frac{\alpha - \gamma + (\gamma - \beta)t}{1-t}, \qquad \ldots.$$

On aura

$$\sqrt{X} = \frac{\alpha - \beta}{(1-t)^p}\sqrt{A\,t[\alpha - \gamma + (\gamma-\beta)t]\ldots},$$

$$R\,dx = T\,dt,$$

T étant une fonction rationnelle de t. On voit que la substitution a réduit d'une unité le degré du polynome sous le radical.

36. Dans le cas particulier des intégrales elliptiques, le polynome sous le radical pourrait ainsi être abaissé au troisième degré; mais on préfère, parfois, employer une transformation un peu différente, par laquelle ce polynome sera

le produit de deux facteurs réels du second degré, ne contenant que des puissances paires de la variable.

Supposons d'abord que X soit du troisième degré. Soit α l'une des racines de l'équation $X = 0$, on aura

$$\sqrt{X} = \sqrt{A(x - \alpha)(x^2 + px + q)}.$$

Posons $x = \alpha + t^2$, il viendra

$$\sqrt{X} = t\sqrt{A[(\alpha + t^2)^2 + p(\alpha + t^2) + q]}.$$

On se trouve donc ramené au cas où le polynome sous le radical est du quatrième degré, cas que nous allons traiter.

Si X a ses coefficients réels, l'équation $X = 0$ aura au moins une racine réelle. En la prenant pour α, la transformation qui vient d'être indiquée sera réelle.

37. Supposons maintenant X du quatrième degré. On pourra écrire

$$\sqrt{X} = \sqrt{A(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')},$$

p, q, p', q' étant réels, si X a ses coefficients réels.

Si $p = p'$, on fera disparaître les puissances impaires de la variable en posant $x = t - \frac{1}{2}p$.

On obtiendra le même résultat, si $p \gtrless p'$, par une substitution de la forme

$$x = \frac{\lambda + \mu t}{1 + t}.$$

Cette substitution donnera, en effet,

$$\sqrt{X} = \frac{1}{(1+t)^2}\sqrt{\begin{aligned} &A[(\lambda + \mu t)^2 + p(\lambda + \mu t)(1 + t) + q(1 + t)^2] \\ &\times [(\lambda + \mu t)^2 + p'(\lambda + \mu t)(1 + t) + \ldots]. \end{aligned}}$$

Les termes du premier degré en t disparaîtront dans chacun des facteurs sous le radical, si l'on pose

$$2\lambda\mu + p(\lambda + \mu) + 2q = 0,$$
$$2\lambda\mu + p'(\lambda + \mu) + 2q' = 0.$$

On déduit de ces équations

$$\lambda + \mu = -2\frac{q-q'}{p-p'},$$

$$\lambda\mu = \frac{qp'-pq'}{p-p'}.$$

Donc λ et μ seront les racines de l'équation

$$\lambda^2 + 2\frac{q-q'}{p-p'}\lambda + \frac{qp'-pq'}{p-p'} = 0.$$

Ces racines seront réelles si l'on a

$$(q-q')^2 - (qp'-pq')(p-p') > 0.$$

Or, si l'on appelle α, β les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

γ, δ celles de l'équation

$$x^2 + p'x + q' = 0,$$

on aura

$$p = -(\alpha+\beta), \qquad q = \alpha\beta,$$
$$p' = -(\gamma+\delta), \qquad q' = \gamma\delta.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de condition précédente, elle devient

$$(\alpha\beta-\gamma\delta)^2 + [(\alpha+\beta)\gamma\delta - (\gamma+\delta)\alpha\beta](\alpha+\beta-\gamma-\delta) > 0,$$

ou

$$[\alpha^2 - (\gamma+\delta)\alpha + \gamma\delta][\beta^2 - (\gamma+\delta)\beta + \gamma\delta] > 0,$$

ou enfin

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) > 0.$$

Cette condition sera nécessairement satisfaite si les quatre quantités α, β, γ, δ, ou seulement deux d'entre elles, α et β par exemple, sont imaginaires; car les quatre facteurs du produit seront conjugués deux à deux, et le produit de deux imaginaires conjuguées est une somme de deux carrés.

Si α, β, γ, δ sont tous réels, on pourra supposer la décomposition de X en deux facteurs, effectuée de telle sorte que les racines α, β du premier facteur soient plus grandes que les deux autres γ et δ. Chacun des facteurs $\alpha-\gamma$, $\alpha-\delta$, $\beta-\gamma$, $\beta-\delta$ étant positif dans cette hypothèse, la condition sera satisfaite.

38. Les intégrales elliptiques peuvent donc dans tous les cas se ramener, par un changement de variables qui sera réel si X est lui-même réel, à la forme

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{X}},$$

où $F(x)$ est une fonction rationnelle, et X un polynome de la forme $(ax^2+b)(a'x^2+b')$.

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\int \frac{F(x)+F(-x)}{\sqrt{X}}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{F(x)-F(-x)}{\sqrt{X}}\,dx.$$

Mais $F(x)-F(-x)$, étant une fonction impaire, sera de la forme $\varphi(x^2)x$. Si donc on pose dans la seconde intégrale $x^2=t$, d'où $2x\,dx=dt$, elle deviendra

$$\frac{1}{4}\int \frac{\varphi(t)\,dt}{\sqrt{(at+b)(a't+b')}},$$

expression qui peut s'intégrer par les méthodes de la section précédente.

Il ne restera donc à étudier que la première intégrale, où le numérateur est une fonction paire,

$$\frac{1}{2}[F(x)+F(-x)] = \psi(x^2).$$

39. Nous aurons divers cas à distinguer dans cette étude, suivant les signes de a, b, a', b'.

Supposons d'abord que a et b soient de signes contraires.

On pourra supposer $b > 0$, $a < 0$; car on ne change pas X en changeant simultanément les signes de a, b, a', b'.

Ce cas se subdivisera, d'après le signe des quantités a', b', en quatre autres :

1er cas.....	$a < 0$	$b > 0$	$a' < 0$	$b' > 0$
2e cas.....	$a < 0$	$b > 0$	$a' < 0$	$b' < 0$
3e cas.....	$a < 0$	$b > 0$	$a' > 0$	$b' > 0$
4e cas.....	$a < 0$	$b > 0$	$a' > 0$	$b' < 0$

Si a et b sont de même signe, on devra supposer également que a' et b' sont de même signe ; sinon, en échangeant a et b avec a' et b', on retomberait sur les cas précédents. Comme on peut d'ailleurs supposer b positif, on n'aura que deux cas à distinguer :

5e cas.....	$a > 0$	$b > 0$	$a' > 0$	$b' > 0$
6e cas.....	$a > 0$	$b > 0$	$a' < 0$	$b' < 0$

Ce dernier cas, où le radical $\sqrt{X}$ sera imaginaire quel que soit x, se ramène immédiatement au cinquième en faisant sortir du radical le facteur $\sqrt{-1}$.

40. Reste à examiner les cas 1, 2, 3, 4, 5. Il est aisé de les ramener les uns aux autres.

Posons, en effet,

$$ax^2 + b = t^2,$$

d'où

$$x^2 = \frac{t^2 - b}{a}, \qquad dx = \frac{t\,dt}{ax} = \frac{t\,dt}{\sqrt{a}\sqrt{t^2 - b}},$$

$$\sqrt{X} = t\sqrt{a'\frac{t^2 - b}{a} + b'} = \frac{t}{\sqrt{a}}\sqrt{a't^2 + ab' - ba'},$$

et, par suite,

$$\frac{\psi(x^2)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\psi\left(\frac{t^2 - b}{a}\right)dt}{\sqrt{(-t^2 + b)(-a't^2 - ab' + ba')}}.$$

Si l'intégrale primitive rentrait dans l'un des cas 3, 4, 5, sa

transformée rentrerait dans le premier ou le deuxième cas, les coefficients des termes en t^2 sous le nouveau radical étant tous deux négatifs.

En particulier, si l'intégrale primitive rentrait dans le troisième cas, la transformée rentrerait dans le premier; car on aurait

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad a' > 0, \qquad b' > 0,$$

et, par suite,

$$-ab' + ba' > 0.$$

Le deuxième cas se réduit d'ailleurs au troisième en posant

$$x = \frac{1}{t},$$

d'où

$$dx = -\frac{dt}{t^2},$$

$$\sqrt{X} = \frac{1}{t^2}\sqrt{(a + bt^2)(a' + b't^2)} = \frac{1}{t^2}\sqrt{(-bt^2 - a)(-b't^2 - a')}$$

et

$$\frac{\psi(x^2)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{-\psi\left(\frac{1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{(-bt^2 - a)(-b't^2 - a')}},$$

car, ayant

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad a' < 0, \qquad b' < 0,$$

on aura

$$-b < 0, \qquad -a > 0, \qquad -b' > 0, \qquad -a' > 0.$$

Le troisième cas pouvant à son tour se réduire au premier, ainsi qu'on l'a vu plus haut, les cinq cas se ramènent en dernière analyse à celui-ci.

41. Mettant en évidence les signes négatifs de a et a', nous aurons donc à considérer les intégrales de la forme

$$\int \frac{\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{(b - at^2)(b' - a't^2)}} = \frac{1}{\sqrt{bb'}}\int \frac{\psi(t^2)\,dt}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{b}t^2\right)\left(1 - \frac{a'}{b'}t^2\right)}}.$$

Si $\frac{a}{b}$ était égal à $\frac{a'}{b'}$, on pourrait extraire la racine carrée, et l'on n'aurait plus à intégrer qu'une fonction rationnelle. S'ils sont inégaux, supposons, pour fixer les idées, $\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$ et soit $\frac{a'}{b'} = k^2 \frac{a}{b}$.

Posons

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\, t = x,$$

x désignant une nouvelle variable ; l'intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{ab'}} \int \frac{\psi\left(\frac{bx^2}{a}\right) dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{\varphi(x^2)\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

φ désignant une fonction rationnelle.

42. On voit donc qu'on peut, par une substitution réelle, transformer l'intégrale primitive en une autre intégrale analogue, mais où le polynome X ait la forme *canonique*

$$(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

k étant une constante comprise entre 0 et 1.

Nous avons admis implicitement dans toute cette réduction que le polynome existant sous le radical primitif avait ses coefficients réels. S'ils étaient imaginaires, on pourrait encore réduire ce polynome à la forme

$$\left(1 - \frac{a}{b} t^2\right)\left(1 - \frac{a'}{b'} t^2\right),$$

avec d'autant plus de facilité que nous n'aurions plus à nous préoccuper, comme tout à l'heure, de conserver aux coefficients leur réalité.

Cela posé, admettons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$\left|\frac{a}{b}\right| \geqq \left|\frac{a'}{b'}\right|;$$

on aura

$$\frac{a'}{b'} = k^2 \frac{a}{b},$$

k étant une constante réelle ou imaginaire, dont le module est au plus égal à 1 ; et si l'on pose

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\, t = x,$$

l'intégrale prendra encore la forme

$$\int \frac{\varphi(x^2)\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

43. Appliquons à l'intégrale ainsi transformée les procédés de réduction exposés plus haut (n°s 28 à 32). On pourra l'exprimer au moyen des quatre intégrales suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Mais si l'on pose $x^2 = t$, on aura

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1-k^2t)}},$$

intégrale exprimable par logarithmes, le radical ne portant plus que sur un polynome du second degré.

On a d'autre part

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}(1-k^2x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\, dx$$

$$= \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{1}{k^2}\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Enfin

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$=\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$+\int \frac{a\,dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

La première de ces deux intégrales devient encore exprimable par logarithmes si l'on pose $x^2 = t$.

La seconde peut s'écrire

$$-\frac{1}{a}\int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

en posant $m = -\frac{1}{a^2}$.

Les intégrales elliptiques se ramèneront donc en fin de compte aux trois transcendantes

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$
$$\int \frac{dx}{(1+mx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

auxquelles Legendre a donné le nom d'*intégrales elliptiques* de *première*, *deuxième* et *troisième espèce*.

La constante k, qui figure dans ces intégrales, se nomme le *module* des intégrales elliptiques considérées.

Si l'on change de variable en posant $x = \sin\varphi$, ces intégrales prendront les formes suivantes :

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$
$$\int \frac{d\varphi}{(1+m\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

III. — Intégration des fonctions transcendantes.

44. I. Soit à intégrer

$$\int f(e^{ax})\,dx,$$

f désignant une fonction rationnelle.

On rendra rationnelle la différentielle, en posant $e^{ax} = t$, d'où

$$x = \frac{1}{a}\log t, \qquad dx = \frac{dt}{at}.$$

45. II. Soit à intégrer

$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

f étant une fonction rationnelle.

Cette expression est un cas particulier de la précédente, car $\sin x$ et $\cos x$ sont des fonctions rationnelles de e^{ix}.

Mais on peut rendre la différentielle rationnelle, sans introduire d'imaginaires, en posant

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}x = t,$$

d'où

$$x = 2\operatorname{arc\,tang} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2}x = \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Exemple. — Soit à intégrer

$$\int\frac{dx}{a\sin x + b\cos x}.$$

Posons

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi.$$

L'intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)},$$

ou, en posant $x+\varphi=y$,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dy}{\sin y}.$$

Posons maintenant, comme il a été expliqué,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}y = t;$$

elle deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log t + \text{const.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+\varphi) + \text{const.}$$

46. On peut encore opérer comme il suit pour calculer l'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$.

Soit

$$f = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)},$$

P et Q étant des polynomes. Multipliant au numérateur et au dénominateur par les polynomes $Q(-\sin x, \cos x)$, $Q(\sin x, -\cos x)$, $Q(-\sin x, -\cos x)$, nous obtiendrons une nouvelle fraction, dont le dénominateur D sera un polynome en $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ et dont le numérateur sera de la forme

$$N + N_1\sin x + N_2\cos x,$$

N désignant l'ensemble des termes dont le degré total en

$\sin x$ et $\cos x$ est pair; quant à N_1, N_2, ce seront des polynomes en $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$, comme le dénominateur.

Pour intégrer le premier terme

$$\int \frac{N}{D} dx,$$

posons

$$\tang x = t, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

N et D ne contenant que des termes de degré pair en $\sin x$ et $\cos x$, la différentielle sera rationnelle, et son intégrale se composera : 1° d'une partie rationnelle en

$$t = \tang x;$$

2° de termes logarithmiques, tels que

$$A \log(t - a) = A \log(\tang x - a).$$

Dans la seconde intégrale

$$\int \frac{N}{D} \sin x \, dx,$$

posons

$$\cos x = t, \qquad \text{d'où} \qquad \sin x \, dx = - dt;$$

$\frac{N_1}{D}$ deviendra une fonction de t^2, qui pourra être décomposée : 1° en un polynome Π entier en t^2; 2° en une somme de fractions de la forme $\frac{A}{(t^2 - a)^m}$.

L'intégration de Π donne un polynome impair en t. Quant à la fraction $\frac{A}{(t^2 - a)^m}$, si $a = 0$, son intégrale sera

$$\frac{A}{(1 - 2m) t^{2m-1}}.$$

Si $a \gtrless 0$ et $m > 1$, on aura en appliquant le procédé connu de

réduction

$$I_m = \int \frac{A\,dt}{(t^2-a)^m} = \int \frac{-\frac{A}{a}(t^2-a-t^2)}{t^2-a)^m}dt$$

$$= -\frac{1}{a}I_{m-1} + \int \frac{A}{a}\frac{1}{2}t\frac{2t}{(t^2-a)^m}dt,$$

puis, en intégrant par parties le dernier facteur,

$$I_m = -\frac{1}{a}I_{m-1} + \frac{\frac{A}{a}\frac{1}{2}t}{1-m}\frac{1}{(t^2-a)^{m-1}} - \frac{1}{2a(1-m)}I_{m-1}.$$

L'intégrale I_m se réduira donc de proche en proche : 1° à une fraction impaire en t ; 2° à un terme transcendant

$$\int \frac{B\,dt}{t^2-a} = \frac{B}{2\sqrt{a}}\log\frac{t-\sqrt{a}}{t+\sqrt{a}}.$$

L'intégrale $\int \frac{N_1}{D}dx$ se réduit donc : 1° à une fonction rationnelle et impaire en $\cos x$; 2° à des termes de la forme

$$\frac{B}{2\sqrt{a}}\log\frac{\cos x-\sqrt{a}}{\cos x+\sqrt{a}}.$$

Enfin, dans l'intégrale

$$\int \frac{N_2}{D}\cos x\,dx,$$

nous poserons $\sin x = t$; nous aurons encore à intégrer une fonction rationnelle en t^2 ; et l'intégrale se composera : 1° d'une fonction rationnelle et impaire en $\sin x$; 2° de termes de la forme

$$\frac{C}{2\sqrt{a}}\log\frac{\sin x-\sqrt{a}}{\sin x+\sqrt{a}}.$$

47. Si l'on voulait appliquer la substitution $\tang x = t$ à une fonction quelconque f rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, la nouvelle différentielle ne serait plus en général rationnelle en

t, mais elle le serait en t et $\sqrt{1+t^2}$. La substitution $\sin x = t$ ou $\cos x = t$ donnerait de même une différentielle rationnelle en t et $\sqrt{1-t^2}$. On pourrait appliquer à ces expressions les méthodes de réduction ou d'intégration qui ont été exposées précédemment.

Réciproquement, toute différentielle rationnelle en t et $\sqrt{1+t^2}$ (ou en t et $\sqrt{1-t^2}$) se transformera en une différentielle rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$ par la substitution $t = \tang x$ (ou $t = \sin x$).

48. Considérons l'intégrale $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, m et n étant rationnels.

Posons

$$\sin^2 x = t,$$

d'où

$$2 \sin x \cos x = dt, \qquad \cos^2 x = 1 - t.$$

L'intégrale devient

$$\frac{1}{2}\int t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}\, dt.$$

C'est une différentielle binome. (Pour les cas d'intégrabilité et les formules de réduction, *voir* les n°s 15 et 16.)

49. III. Soit à calculer

$$\int f(x, e^{ax}, e^{bx}, \ldots, \sin\alpha x, \cos\alpha x, \sin\beta x, \cos\beta x, \ldots)\, dx,$$

f désignant un polynome.

Remplaçons les sinus et cosinus par leurs valeurs en exponentielles

$$\sin\alpha x = \frac{e^{\alpha i x} - e^{-\alpha i x}}{2i}, \qquad \cos\alpha x = \frac{e^{\alpha i x} + e^{-\alpha i x}}{2},$$

f deviendra un polynome en x, e^{ax}, ..., $e^{\alpha i x}$, $e^{-\alpha i x}$, ..., et sera composé d'une somme de termes de la forme

$$A x^m e^{nx}.$$

Nous aurons donc à calculer l'intégrale

$$\int x^m e^{nx}\, dx,$$

que nous désignerons par I_m.

L'intégration par parties donne

$$I_m = x^m \frac{e^{nx}}{n} - \frac{m}{n}\int x^{m-1} e^{nx}\, dx = x^m \frac{e^{nx}}{n} - \frac{m}{n} I_{m-1}.$$

Répétant la réduction, on arrivera à l'intégrale

$$I_0 = \int e^{nx}\, dx = \frac{e^{nx}}{n}.$$

L'intégration faite, il conviendra de remplacer les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sinus et cosinus; les imaginaires disparaîtront alors de l'intégrale.

50. IV. Soit à calculer

$$\int f(x) e^{nx}\, dx,$$

$f(x)$ étant une fraction rationnelle.

Cette fraction pourra se décomposer en une partie entière E et en fractions simples de la forme

$$\frac{A}{(x-a)^m}.$$

L'intégrale $\int E e^{nx}\, dx$ s'obtient par la méthode qui vient d'être exposée.

Restent les intégrales de la forme

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m} dx.$$

Si $m > 1$, l'intégration par parties donnera

$$\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^m} dx$$
$$= e^{nx} \frac{1}{(-m+1)(x-a)^{m-1}} - \frac{n}{-m+1}\int \frac{e^{nx}}{(x-a)^{m-1}} dx.$$

Cette formule de réduction permet de ramener le calcul de l'intégrale cherchée à celui de l'intégrale

$$\int \frac{e^{nx}}{x-a}\,dr.$$

Posons

$$x = a + \frac{t}{n};$$

d'où

$$dx = \frac{dt}{n}.$$

Cette intégrale devient

$$\int \frac{e^{an+t}}{t}\,dt = e^{an}\int \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Toute la question est donc ramenée au calcul de la transcendante unique

$$\int \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Posant enfin $e^t = y$, cette intégrale se transformera en

$$\int \frac{dy}{\log y}.$$

Cette transcendante (où l'on déterminera la constante d'intégration de telle sorte qu'elle s'annule pour $y = 0$) se nomme le *logarithme intégral* de y.

51. V. Les intégrales

$$\int f(x, \log x)\,dx \quad \text{et} \quad \int f(x, \arcsin x)\,dx,$$

où f désigne un polynome, se ramènent à celles qui viennent d'être étudiées, en prenant respectivement $\log x$, $\arcsin x$ pour nouvelle variable.

52. L'intégration des fonctions rationnelles (et plus géné-

ralement celle des fonctions algébriques) conduit, ainsi que nous l'avons vu, à des fonctions transcendantes.

On pourrait supposer que l'intégration de ces dernières fonctions en produirait de nouvelles ; mais il est aisé de voir qu'il n'en est rien.

Soit, en effet, I une de ces transcendantes et considérons l'intégrale

$$\int \mathrm{I}\, dx.$$

L'intégration par parties donnera

$$\int \mathrm{I}\, dx = x\mathrm{I} - \int x\mathrm{I}'\, dx.$$

Or $x\mathrm{I}'$ est, ainsi que I', une fonction rationnelle (ou une fonction algébrique).

CHAPITRE II.

INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — Intégrales définies généralisées.

53. Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, intégrable dans un intervalle AB. Soient a et b deux points quelconques de cet intervalle. Nous avons défini, au Tome I, l'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Cette intégrale satisfait à la relation

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Nous avons vu, en outre, que c'est une fonction continue de a et de b. On aura donc (en supposant, pour fixer les idées, $b > a$)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{\varepsilon=0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon=0,\,\varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx. \end{aligned} \right.$$

Ces relations permettent de donner un sens au symbole

$\int_a^b f(x)\,dx$ dans certains cas où la définition ordinaire par une limite de sommes cesserait d'être applicable.

Supposons, par exemple, que la fonction $f(x)$, sans être intégrable entre a et b, le soit entre $a+\varepsilon$ et b, quelque petit que soit ε (ce qui arrivera notamment si elle est continue entre a et b, mais tend vers ∞ lorsque x tend vers la limite inférieure a). L'expression

$$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

aura pour chaque valeur de ε une valeur déterminée. Si, lorsque ε tend vers zéro, elle tend vers une limite fixe, nous prendrons cette limite pour définition de l'expression

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

De même, si la fonction $f(x)$ devient infinie (ou plus généralement cesse d'être intégrable) aux environs de la limite supérieure b, ou à la fois aux environs des deux limites, nous définirons $\int_a^b f(x)\,dx$ par l'équation

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

ou par celle-ci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=0,\,\varepsilon'=0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx,$$

en supposant, bien entendu, que les seconds membres tendent effectivement vers des limites déterminées.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la différence

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} - \int_{a+\eta}^{b-\eta'} = \int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} + \int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'}$$

tende vers zéro en même temps que les infiniment petits ε, η, ε', η', quels que soient les rapports de ces derniers.

54. Il existe un cas important où cette discussion sera facile. Supposons que, à la limite inférieure a, $f(x)$ devienne infinie d'ordre α. On pourra poser

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-a)^\alpha},$$

$\varphi(x)$ tendant, lorsque x tend vers a, vers une limite L différente de zéro.

Le facteur $(x-a)^\alpha$ restant positif entre $a+\varepsilon$ et $a+\eta$, le théorème de la moyenne donnera

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} f(x)\,dx = \lambda \int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} \frac{dx}{(x-a)^\alpha},$$

λ étant une quantité intermédiaire entre le maximum et le minimum de $\varphi(x)$ entre $a+\varepsilon$ et $a+\eta$. Si ε et η tendent vers zéro, λ se rapprochera de L qui n'est ni nul ni infini. Il suffira donc de discuter le second facteur, dont l'intégration s'effectue aisément. Si $\alpha \gtrless 1$, l'intégrale sera

$$\left[\frac{(x-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{a+\varepsilon}^{a+\eta} = \frac{\eta^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

expression qui tendra vers zéro si $\alpha < 1$, et qui, au contraire, sera indéterminée si $\alpha > 1$; car les deux termes dont elle se compose sont infinis séparément, sans avoir entre eux aucune relation.

Si $\alpha = 1$, l'intégrale sera

$$[\operatorname{Log}(x-a)]_{a+\varepsilon}^{a+\eta} = \operatorname{Log}\eta - \operatorname{Log}\varepsilon$$

et sera indéterminée.

Donc, *pour que l'intégrale* $\int_{a+\varepsilon}^{a+\eta} f(x)\,dx$ *tende vers zéro, il faut et il suffit que l'ordre d'infinitude* α *de la fonction* $f(x)$ *pour* $x = a$ *soit* < 1.

Supposons, d'autre part, que $f(x)$ devienne infini d'ordre β pour l'autre limite $z = b$. On aura de même

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{(x-b)^\beta},$$

$\psi(x)$ tendant vers une limite M finie et différente de zéro quand x tend vers b. Il viendra ensuite

$$\int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} f(x)\,dx = (-1)^\beta \int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} \frac{\psi(x)\,dx}{(b-x)^\beta}$$
$$= (-1)^\beta \mu \int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} \frac{dx}{(b-x)^\beta},$$

μ étant intermédiaire entre le maximum et le minimum de $\psi(x)$ et, par suite, tendant vers M quand ε' et η' tendent vers zéro. Quant à l'intégrale

$$\int_{b-\eta'}^{b-\varepsilon'} \frac{dx}{(b-x)^\beta},$$

elle est égale à

$$\frac{\eta'^{1-\beta} - \varepsilon'^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad \text{si} \quad \beta \gtrless 1,$$

à

$$\log\eta' - \log\varepsilon', \quad \text{si} \quad \beta = 1,$$

et pour qu'elle tende vers zéro, il faut et il suffit qu'on ait $\beta < 1$.

Ce résultat est le même qu'on a déjà trouvé pour la limite inférieure.

55. Supposons plus généralement que $f(x)$ reste intégrable dans tout le champ ab, sauf aux environs de certains points $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en nombre limité. Nous définirons $\int_a^b$ par l'équation

$$\int_a^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \ldots + \int_{c_n}^b$$
$$= \lim_{\varepsilon_1 = 0} \int_a^{c_1 - \varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon'_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0} \int_{c_1 + \varepsilon'_1}^{c_2 - \varepsilon_2} + \ldots + \lim_{\varepsilon'_n = 0} \int_{c_n + \varepsilon'_n}^b$$

Cette définition n'a de sens précis que si les limites en question existent, en considérant $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \varepsilon'_2, \ldots$ comme des infiniment petits indépendants.

Il peut arriver, lors même que ces limites n'existent pas en général, que le second membre ait cependant une limite déterminée dans l'hypothèse particulière où l'on a

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon'_2, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_n = \varepsilon'_n.$$

Cette limite a été nommée par Cauchy la *valeur principale* de l'intégrale $\int_a^b$. On pourra, dans certains cas, avoir intérêt à introduire cette valeur principale dans les calculs, lorsque l'intégrale elle-même, ne représentant rien de déterminé, ne pourra y figurer.

56. Supposons enfin que les points $c_1, c_2, \ldots$ soient en nombre infini. Ils formeront dans tous les cas un ensemble parfait. En effet, si la fonction f est intégrable aux environs d'un point x, c'est-à-dire dans l'intervalle de $x - h$ à $x + h$ (h étant convenablement choisi), elle le sera *a fortiori* dans toute portion de cet intervalle. Si donc ξ désigne un point quelconque compris entre $x - h$ et $x + h$, elle sera intégrable aux environs du point ξ. Donc, le point x ne peut être un point limite de l'ensemble $c_1, c_2, \ldots$. Donc, tout point limite de cet ensemble lui appartient nécessairement.

Cela posé, décomposons le champ ab en intervalles partiels, de longueur moindre qu'une quantité infiniment petite δ. Considérons ceux de ces intervalles qui ne contiennent ni à leur intérieur, ni à leurs extrémités, aucun des points singuliers $c_1, c_2, \ldots$. Ils forment par leur réunion un domaine jouissant des propriétés suivantes :

1° Il contient tous les points de l'intervalle ab dont l'écart à l'ensemble $(c_1, c_2, \ldots)$ est égal ou supérieur à δ ;

2° Il est formé d'un nombre fini de portions $a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots$

d'un seul tenant, séparées les unes des autres par des points singuliers.

Soit D un domaine quelconque satisfaisant à ces deux conditions. On pourra déterminer les intégrales

$$\int_{a_1}^{b_1} f\,dx, \quad \int_{a_2}^{b_2} f\,dx, \quad \ldots$$

et leur somme représentera la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{D}} f\,dx = \sum \int_{a_i}^{b_i} f\,dx$$

prise dans le domaine D.

Supposons maintenant que δ décroisse indéfiniment. Le domaine variable D englobera progressivement tous les points de l'intervalle ab qui ne sont pas singuliers. Car l'écart de chacun d'eux à l'ensemble $(c_1, c_2, \ldots)$ est une quantité déterminée h différente de zéro. Il appartiendra donc nécessairement à D dès que δ sera devenu $< h$.

Si l'intégrale $\int_{\mathrm{D}} f\,dx$ tend dans ces conditions vers une limite déterminée, nous la désignerons par $\int_a^b f\,dx$. Cette définition comprend évidemment celle que nous avons donnée ci-dessus pour des cas particuliers.

57. Pour que cette limite existe, il faut et il suffit évidemment qu'on puisse trouver pour chaque valeur de ε une quantité correspondante η, telle que, en appelant D et D_1 deux domaines quelconques correspondants à des valeurs de la variable δ moindres que η, on ait toujours

$$\left| \int_{\mathrm{D}_1} f\,dx - \int_{\mathrm{D}} f\,dx \right| < \varepsilon.$$

Soit donc Δ un domaine quelconque contenant D et formé comme lui de parties d'un seul tenant séparées par des points

singuliers ; il satisfait aux mêmes conditions que D, pour la même valeur de δ ; on aura donc comme cas particulier de l'inégalité précédente

$$\left|\int_\Delta f\,dx - \int_D f\,dx\right| < \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité suffit d'ailleurs pour l'existence de la limite cherchée ; car, si elle est satisfaite, prenons pour Δ le domaine Δ_1 formé par les points de l'intervalle ab qui appartiennent à D ou à D_1 ou qui sont situés entre un point de D et un point de D_1 sans en être séparés par un point singulier ; nous aurons

$$\left|\int_{\Delta_1} - \int_D\right| < \varepsilon, \qquad \left|\int_{\Delta_1} - \int_{D_1}\right| < \varepsilon,$$

d'où

$$\left|\int_{D_1} - \int_D\right| < 2\varepsilon,$$

quantité infiniment petite.

58. Le domaine $\Delta - D$ est formé d'un certain nombre de portions d'un seul tenant $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, ... ; et l'on aura

$$\left|\int_\Delta - \int_D\right| = \left|\sum \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f\,dx\right| \leqq \sum \left|\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f\,dx\right| \leqq \sum \int_{\alpha_i}^{\beta_i} |f|\,dx.$$

Cette dernière somme pourra être rendue moindre que ε, si $|f|$ admet entre a et b une intégrale finie (et par suite déterminée ; car $|f|$ étant positif, son intégrale ne peut que croître avec l'étendue du champ).

Donc $\int_a^b f\,dx$ *sera toujours déterminée si* $\int_a^b |f|\,dx$ *est finie*. De plus, on aura

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Car cette inégalité a lieu pour chacun des intervalles $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... qui constituent le domaine D. Ajoutant ces inégalités, il vient

$$\left|\int_{\mathrm{D}} f(x)\,dx\right| = \left|\sum \int_{a_i}^{b_i} f\,dx\right| \leqq \sum \left|\int_{a_i}^{b_i} f\,dx\right|$$
$$\leqq \sum \int_{a_i}^{b_i} |f|\,dx \leqq \int_{\mathrm{D}} |f|\,dx,$$

et, en passant à la limite, on obtiendra la relation cherchée.

Nous pourrons dire, par analogie avec une dénomination adoptée dans la théorie des séries, que l'intégrale

$$\int_a^b f\,dx$$

(supposée déterminée) est *absolument convergente*, si l'intégrale

$$\int_a^b |f|\,dx,$$

est finie ; *semi-convergente* dans le cas contraire.

59. Par analogie avec ce qui précède, nous définirons les symboles

$$\int_a^{\infty} f\,dx, \quad \int_{-\infty}^{b} f\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f\,dx$$

par les équations

$$\int_a^{\infty} = \lim_{b=\infty} \int_a^b, \qquad \int_{-\infty}^{b} = \lim_{a=-\infty} \int_a^b, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} = \lim_{\substack{a=-\infty \\ b=\infty}} \int_a^b,$$

à condition que les seconds membres aient des limites déterminées.

Pour cela, il faut et il suffit évidemment que la différence

$$\int_a^{b'} - \int_a^b = \int_b^{b'},$$

ou la différence analogue $\int_a^{a'}$, ou enfin toutes deux à la fois, tendent vers zéro, lorsque b et b' tendent vers $+\infty$, et a, a' vers $-\infty$.

Comme on a

$$\left|\int_b^{b'} f\,dx\right| \leqq \int_b^{b'} |f|\,dx, \qquad \left|\int_a^{a'} f\,dx\right| \leqq \int_a^{a'} |f|\,dx,$$

on voit que l'intégrale de f dans un champ infini sera encore déterminée toutes les fois que l'intégrale de $|f|$ dans le même champ sera finie, et que son module ne pourra surpasser cette dernière intégrale.

On dira encore dans ce cas que l'intégrale est absolument convergente ; elle sera semi-convergente, si elle reste déterminée, sans que l'intégrale de $|f|$ soit finie. Nous donnerons plus loin un exemple de ce genre.

Enfin nous appellerons *valeur principale* de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ l'expression

$$\lim_{b=\infty} \int_{-b}^{b},$$

laquelle se confond évidemment avec l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ si celle-ci a un sens précis, mais qui peut être déterminée sans que cette dernière le soit.

60. Il existe ici encore un cas très général où l'on peut reconnaître si l'intégrale est ou non déterminée.

Supposons que, pour $x = +\infty$, $f(x)$ soit un infiniment petit d'un ordre déterminé α, de telle sorte qu'on ait

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha},$$

$\varphi(x)$ tendant vers une limite fixe L, finie et différente de zéro

quand x tend vers $+\infty$. On aura

$$\int_{b'}^{b} f(x)\,dx = \int_{b'}^{b} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha} = \lambda \int_{b'}^{b} \frac{dx}{x^\alpha},$$

λ étant intermédiaire entre le maximum et le minimum de $\varphi(x)$ dans le champ d'intégration, et tendant vers L lorsque b et b' croissent indéfiniment. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\int_{b'}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} &= \frac{b^{1-\alpha} - b'^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \qquad \text{si } \alpha \gtrless 1,\\ &= \log b - \log b', \qquad \text{si } \alpha = 1;\end{aligned}$$

pour b et b' infinis, cette expression tendra vers zéro si $\alpha > 1$; elle sera indéterminée si $\alpha \leqq 1$. Donc, *pour qu'on puisse étendre le champ d'intégration jusqu'à l'infini positif sans que l'intégrale cesse d'être finie et déterminée, il faut et il suffit que, pour $x = +\infty$, $f(x)$ soit infiniment petit d'ordre > 1.*

On arriverait évidemment au même résultat pour l'infini négatif.

61. Nous avons établi au Tome I un certain nombre de propriétés des intégrales définies, fondées sur leur définition comme limites de sommes.

Il est essentiel de reconnaître jusqu'à quel point ces propositions subsistent pour les nouvelles intégrales que nous venons de définir.

1° Les relations (1) et (2) subsistent évidemment, puisqu'elles sont le point de départ de nos généralisations.

2° Il en est de même de la formule

$$\int_{a}^{b} = -\int_{b}^{a}. \tag{3}$$

En effet, l'intervalle ab étant d'abord supposé fini, décomposons-le, comme il a été expliqué, en intervalles partiels

infiniment petits ; on aura, pour tout intervalle $a_k b_k$, qui ne contient aucun des points singuliers c, c_1, ...,

$$\int_{a_k}^{b_k} = -\int_{b_k}^{a_k}.$$

Sommant les équations ainsi obtenues et passant à la limite, il viendra

$$\int_a^b = -\int_b^a.$$

Cette formule, étant ainsi démontrée pour des valeurs finies quelconques de a et de b, subsistera encore à la limite, si l'on fait tendre vers l'infini a ou b, ou tous les deux à la fois.

Nous avons encore trouvé (t. I, n° 55) les résultats suivants :

3° Si l'on a

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots,$$

C_1, C_2, ... étant des constantes et $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... des fonctions intégrables, on en déduit

$$(4) \quad \int_a^b f(x)\,dx = C_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + C_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots.$$

4° Si $f(x) \overline{\gtrless} f_1(x)$ et $b > a$, les deux fonctions étant intégrables, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \overline{\gtrless} \int_a^b f_1(x)\,dx.$$

Soient, par suite, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des fonctions intégrables dont la première reste positive dans tout l'intervalle ab, tandis que la seconde reste comprise entre deux nombres fixes M et m. En supposant, pour fixer les idées, $M > m$ et

$b > a$, on aura

$$(5)\qquad m\int_a^b \varphi(x)\,dx \overline{\leq} \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx \overline{\leq} M\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

et, par suite,

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \mu\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

μ étant intermédiaire entre M et m.

On voit, par un raisonnement identique au précédent, que ces relations subsistent encore pour nos intégrales généralisées.

62. Si $F(x)$ est une fonction primitive de la fonction $f(x)$, intégrable de a à b, on a (t. I, n° 82)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

L'extension de cette formule au cas actuel réclame plus d'attention.

Remarquons tout d'abord que, x désignant un point quelconque de l'intervalle ab, on a

$$\int_a^b = \int_a^x + \int_x^b.$$

Les deux intégrales qui figurent au second membre de cette formule, pouvant être calculées indépendamment l'une de l'autre, doivent être finies et déterminées pour que $\int_a^b$ le soit. L'intégrale $\int_a^x$ représente donc une fonction de x, définie dans tout l'intervalle ab. Cette fonction est d'ailleurs continue, car, si ε est un infiniment petit positif, on a par définition

$$\lim \int_a^{x-\varepsilon} = \int_a^x,$$

et, d'autre part,

$$\lim \int_a^{x+\varepsilon} = \lim \left[\int_a^b - \int_{x+\varepsilon}^b \right] = \int_a^b - \int_x^b = \int_a^x .$$

Enfin on sait que, pour toute valeur de x pour laquelle $f(x)$ est continue, cette intégrale a pour dérivée $f(x)$ (t. I, n° 81).

Supposons maintenant que $f(x)$ soit continue dans tout le champ ab, sauf en certains points isolés $c_1, \ldots, c_n$. Soit $F(x)$ une fonction primitive, qui jouisse de la même propriété que $\int_a^x$, à savoir d'avoir une dérivée égale à $f(x)$ dans tout le champ, sauf peut-être aux points $c_1, \ldots, c_n$. La différence

$$F(x) - \int_a^x ,$$

ayant sa dérivée constamment nulle dans l'intérieur de chacun des intervalles $ac_1, c_1 c_2, \ldots, c_n b$, s'y réduira à une constante ; mais cette constante pourra varier d'un intervalle à l'autre. Soient $k, k_1, \ldots, k_n$ ses diverses valeurs. On aura

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx + k = k,$$

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx + k_n,$$

d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - (k_n - k).$$

Le terme complémentaire $k_n - k$ n'est autre chose que la somme des discontinuités que la fonction $F(x)$ présente aux points $c_1, \ldots, c_n$. On a, en effet,

$$k_n - k = (k_n - k_{n-1}) + \ldots + (k_1 - k).$$

Or la discontinuité de $F(x)$ au point c_i est par définition

l'expression

$$\lim[F(c_i+\varepsilon')-F(c_i-\varepsilon)] = \lim\left[\int_a^{c_i+\varepsilon'} + k_i - \int_a^{c_i-\varepsilon} - k_{i-1}\right],$$

et se réduit à $k_i - k_{i-1}$, puisque l'intégrale est une fonction continue.

D'ailleurs $F(x)$, ayant une dérivée en tout point autre que $c_1, \ldots, c_n$, y sera continue.

Nous aurons donc finalement

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) - \Delta,$$

Δ désignant la discontinuité totale de la fonction $F(x)$ dans l'intervalle de a à b.

Un passage à la limite permettra d'étendre cette relation au cas où le champ est infini.

63. La règle pour l'intégration par parties est une conséquence immédiate de ce qui précède.

Soient, en effet, $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions telles que $f(x)\varphi'(x)$ et $f'(x)\varphi(x)$ soient continues entre a et b, sauf en des points isolés. La somme

$$f(x)\varphi'(x) + f'(x)\varphi(x)$$

étant la dérivée de $f(x)\varphi(x)$, on aura, en appliquant la formule ci-dessus,

$$(7) \quad \int_a^b [f(x)\varphi'(x) + f'(x)\varphi(x)]\,dx = [f(x)\varphi(x)]_a^b - \Delta,$$

Δ désignant la somme des discontinuités de $f(x)\varphi(x)$.

Si donc l'une des intégrales

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx, \qquad \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx$$

a une valeur déterminée, et s'il en est de même du second

membre de l'équation, l'autre intégrale sera également déterminée, et pourra se calculer par cette formule.

L'équation (7) subsistera d'ailleurs à la limite, si a ou b tendent vers ∞.

64. Nous avons vu que, si $\varphi(t)$ est une fonction quelconque, dont la dérivée reste continue et différente de zéro dans l'intervalle de t_0 à T, on a, en supposant

$$x = \varphi(t),$$

la relation

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(T)} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \tag{8}$$

Supposons maintenant que $\varphi'(t)$ devienne nulle ou discontinue, mais seulement à l'une des deux limites du champ, en T, par exemple. On pourra appliquer le théorème dans l'intervalle de t_0 à $T - \varepsilon$. Il viendra

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(T-\varepsilon)} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{T-\varepsilon} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Faisons tendre ε vers zéro. Si la fonction $\varphi(t)$ reste continue au point T, $\varphi(T-\varepsilon)$ tendra vers $\varphi(T)$ et l'on obtiendra la formule (8).

Si $\varphi(T-\varepsilon)$ tendait vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, cette formule subsisterait encore, en y remplaçant $\varphi(T)$ par $+\infty$ ou par $-\infty$.

Si nous admettons enfin que la fonction $\varphi'(t)$ reste continue et de même signe dans tout l'intervalle de T à $+\infty$, par exemple, on pourra, sans que la formule cesse de subsister, y faire croître indéfiniment la quantité T ; $\varphi(T)$, variant toujours dans le même sens, tendra vers une limite déterminée, finie ou infinie ; en la désignant par $\varphi(\infty)$, on voit que la formule subsiste encore pour $T = \infty$.

Supposons, en dernier lieu, que la dérivée $\varphi'(t)$ soit nulle ou discontinue en des points isolés $c_1, c_2, \ldots$ situés dans le

champ d'intégration. On devra, pour opérer en toute sécurité, décomposer le champ ab en intervalles partiels $ac_1, c_1c_2, \ldots$, dans chacun desquels on pourra appliquer la formule précédente, car $f'(t)$ n'y devient nulle ou discontinue qu'aux limites du champ.

65. Soit, comme exemple, à transformer l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

par le changement de variable

$$x = \frac{1}{t}.$$

Si a et b sont de même signe, lorsque x varie de a à b, t varie de $\frac{1}{a}$ à $\frac{1}{b}$; et la dérivée $\frac{dx}{dt}$ restera continue et différente de zéro. On aura donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{-f\left(\frac{1}{t}\right)dt}{t^2}.$$

Mais cette formule serait inexacte si a et b étaient de signe contraire ; car x passe par la valeur zéro, pour laquelle $\frac{dx}{dt}$ s'annule. On devra donc décomposer l'intégrale $\int_a^b$ dans les deux suivantes

$$\int_a^0 + \int_0^b,$$

qu'on transformera séparément.

Soit, par exemple, $a < 0$, $b > 0$. Lorsque x varie de a à 0, t varie de $\frac{1}{a}$ à $-\infty$; quand x varie de 0 à b, t varie de $+\infty$

à $\frac{1}{b}$. La véritable formule de transformation sera donc

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int_{\frac{1}{a}}^{-\infty} + \int_{+\infty}^{\frac{1}{b}}\right] \frac{-f\left(\frac{1}{t}\right)dt}{t^2}.$$

66. Soit encore à transformer l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin^m x\,dx$$

par la substitution

$$x = \operatorname{arc}\sin t.$$

La dérivée de arc sin t est égale à

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Elle devient infinie pour $x = \frac{\pi}{2}$. On devra donc décomposer l'intégrale dans les deux suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}.$$

Dans la première, t varie de 1 à 0, $\cos x$ est positif; l'intégrale transformée sera donc

$$\int_0^1 \frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

le radical étant pris positivement.

Dans la seconde, t varie de 1 à 0, et $\cos x$ est négatif; elle a donc pour transformée

$$\int_1^0 \frac{t^m\,dt}{-\sqrt{1-t^2}} = \int_0^1 \frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Ajoutant les résultats trouvés, il viendra

$$\int_0^\pi \sin^m x\,dx = 2\int_0^1 \frac{t^m\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

67. Le théorème établi (t. I, n° 329) pour l'intégration des séries peut être généralisé comme il suit.

Soit

$$S = u_1 + u_2 + \ldots$$

une série dont les termes sont des fonctions de x, admettant des intégrales déterminées dans l'intervalle de a à b (ces limites pouvant être infinies). Si le reste R_n, négligé en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme de la série, peut se mettre sous la forme

$$R_n = \varepsilon_n\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction positive de x, dont l'intégrale entre a et b soit finie, et ε_n un facteur qui tende uniformément vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on aura

$$(9)\qquad \int_a^b S\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots.$$

On a, en effet,

$$\int_a^b S\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

Il suffit donc de montrer que le terme complémentaire

$$\int^b R_n\,dx = \int_a^b \varepsilon_n\,\varphi(x)\,dx$$

tend vers zéro quand n tend vers ∞. Or on peut prendre n assez grand pour que, dans tout le champ, $|\varepsilon_n|$ soit constamment moindre qu'une quantité ε d'une petitesse arbitraire, et le théorème de la moyenne donnera

$$\left|\int_a^b \varepsilon_n\,\varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

quantité qui tend vers zéro.

68. Soient a, A, b, B des constantes finies; $f(x,y)$ une fonction des deux variables x, y, continue dans le rectangle R formé par les droites $x=a$, $x=\mathrm{A}$, $y=b$, $y=\mathrm{B}$. On aura (t. I, n° 58) l'égalité

$$\int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f\,dx = \int_a^{\mathrm{A}} dx \int_b^{\mathrm{B}} f\,dy, \tag{10}$$

car les deux membres de cette égalité ne sont que deux expressions différentes de l'intégrale double

$$\mathbf{S}_{\mathrm{R}} f\,dx\,dy.$$

Mais si l'une des limites a, A, b, B devenait infinie ou si $f(x,y)$ cessait d'être continue dans tout le champ d'intégration, la démonstration précédente n'étant plus applicable, l'égalité (10) pourrait cesser d'être exacte, ainsi que le montrent les exemples suivants.

69. Posons

$$\mathrm{V} = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}, \qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{\partial x\,\partial y} = f(x,y),$$

$$a = b = 0, \qquad \mathrm{A} = \mathrm{B} = 1.$$

On aura

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y}\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right]_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = [\operatorname{arc\,tang} y]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x\,\partial y}\,dy = \int_0^1 dx \left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{-dx}{1+x^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

70. Considérons en second lieu la fonction

$$\mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \ldots + \mathrm{K}x + \mathrm{L},$$

A, B, ..., K, L étant des constantes, que nous supposerons réelles pour plus de simplicité.

Posons

$$x = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

La fonction prendra la forme

$$P + Qi,$$

en faisant, pour abréger,

$$P = A\rho^m \cos m\varphi + B\rho^{m-1} \cos(m-1)\varphi + \ldots + K\rho\cos\varphi + L,$$
$$Q = A\rho^m \sin m\varphi + B\rho^{m-1} \sin(m-1)\varphi + \ldots + K\rho \sin\varphi.$$

Posons

$$V = \operatorname{arc\,tang} \frac{P}{Q}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{Q\dfrac{\partial P}{\partial \rho} - P\dfrac{\partial Q}{\partial \rho}}{P^2 + Q^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{Q\dfrac{\partial P}{\partial \varphi} - P\dfrac{\partial Q}{\partial \varphi}}{P^2 + Q^2},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi} = \frac{M}{(P^2 + Q^2)^2},$$

M désignant un polynome par rapport à ρ et aux sinus et cosinus des multiples de φ.

Nous allons démontrer que, en désignant par R une quantité suffisamment grande, les deux intégrales

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi}\, d\varphi$$

et

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi}\, d\rho,$$

n'auront pas la même valeur.

La première intégrale est égale à

$$\int_0^R d\rho \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)_0^{2\pi} = 0,$$

car, $\frac{\partial V}{\partial \rho}$ reprenant, pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi$, la même valeur, la quantité à intégrer est nulle.

La seconde intégrale a pour valeur

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)_0^R.$$

Or, pour $\rho = 0$, on a $Q = 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0$, d'où $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$. Pour $\rho = R$, on aura, en n'écrivant que les termes du degré le plus élevé en R,

$$P = AR^m \cos m\varphi + \ldots,$$
$$Q = AR^m \sin m\varphi + \ldots;$$
$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = -mAR^m \sin m\varphi + \ldots,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = mAR^m \cos m\varphi + \ldots;$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{-mA^2R^{2m} + \ldots}{A^2R^{2m} + \ldots} = -m + \varepsilon,$$

ε étant une quantité très petite, quand R est très grand.

La seconde intégrale a donc pour valeur

$$\int_0^{2\pi} d\varphi(-m + \varepsilon)$$

ou sensiblement

$$\int_0^{2\pi} -m\, d\varphi = -2m\pi,$$

quantité différente de zéro.

Les deux intégrales que nous venons de calculer ayant une valeur différente, il faut nécessairement que la fonction $\frac{\partial^2 V}{\partial \rho\, \partial \varphi}$ soit discontinue dans le champ de l'intégration.

Mais elle est égale à $\frac{M}{(P^2+Q^2)^2}$, où M, P, Q sont des fonctions évidemment continues. Elle ne peut donc devenir discontinue que si son dénominateur s'annule. Il existe donc un système de valeurs de ρ et de φ qui annule à la fois P et Q. Donc il existe une valeur $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ de la variable x qui annule le polynome $Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots + L$.

Nous avons ainsi démontré à nouveau cette proposition fondamentale de la théorie des équations, que *toute équation algébrique a une racine.*

71. Il est utile d'assigner un ensemble de conditions suffisantes pour qu'on puisse opérer avec sûreté le renversement de l'ordre de deux intégrations successives.

Supposons d'abord a, A, b, B finis et admettons :

1° Que les points c du champ pour lesquels la fonction f cesse d'être continue soient tous situés sur un nombre limité d'arcs de courbe continus $P_1Q_1, \ldots, P_nQ_n$ sur chacun desquels x d'une part, et y de l'autre, aillent constamment en croissant ou constamment en décroissant;

2° Que l'intégrale $\int_x^{x+\lambda} f\,dx$, prise suivant un segment d'une parallèle aux x, situé d'une manière quelconque dans le champ, et dont la longueur λ ne surpasse pas un nombre fixe l, ait toujours une valeur déterminée, dont le module soit constamment inférieur à une quantité ε_l, ne dépendant que de l et tendant vers zéro avec lui;

3° Que l'intégrale analogue $\int_y^{y+\lambda} f\,dy$, prise suivant une parallèle aux y, ait de même une valeur déterminée, de module moindre qu'une quantité ε'_l analogue à ε_l.

Dans ces conditions, nous allons montrer : 1° que les intégrales

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^A dx \int_b^B f\,dy$$

ont des valeurs finies et déterminées; 2° qu'elles sont égales.

Remarquons d'abord que, sur chacun des arcs PQ, x est une fonction continue de y, toujours croissante ou toujours décroissante, et réciproquement. Les points de cet arc compris dans la bande limitée par deux parallèles y et $y+dy$ à l'axe des x infiniment voisines l'une de l'autre auront donc des abscisses infiniment peu différentes; et si nous supposons $dy < \delta$, δ désignant un infiniment petit, ils seront tous contenus à l'intérieur d'un rectangle r de hauteur dy et de longueur moindre que l, l étant une quantité que nous pourrons faire décroître à volonté en même temps que δ.

Chacun des n arcs $P_1Q_1, \ldots, P_nQ_n$ donnera lieu à un semblable rectangle (si toutefois il rencontre la bande de hauteur dy que nous considérons). Si deux des rectangles ainsi formés empiètent l'un sur l'autre, ou sont contigus, nous les réunirons en un rectangle unique dont la longueur sera moindre que $2l$. Continuant ainsi, on voit que tous les points des arcs $P_1Q_1, \ldots, P_nQ_n$ contenus dans la bande seront intérieurs à des rectangles $r_1, r_2, \ldots$ dont le nombre m est au plus égal à n, et tels que la somme de leurs longueurs soit moindre que nl.

On en conclut que l'intégrale

$$\int_a^A f(x,y)\,dx$$

est une fonction continue de y. En effet, elle se compose :

1° De m intégrales prises suivant les segments de la droite d'intégration renfermés dans les rectangles $r_1, \ldots, r_m$. Le module de chacune d'elles sera $< \varepsilon_{nl}$, et il en sera de même pour les modules des portions correspondantes de l'intégrale

$$\int_a^A f(x, y+dy)\,dx.$$

2° Des $m+1$ intégrales prises suivant les segments de la droite d'intégration extérieurs aux rectangles. Celles-ci seront des fonctions continues de y puisque $f(x,y)$ est continue en dehors des rectangles. Le module de l'accroissement de chacune d'elles, lorsque y sera changé en $y+dy$, sera donc moindre qu'une quantité arbitraire ε, si dy est assez petit.

On aura donc

$$\left|\int_a^A f(x, y+dy)\,dx - \int_a^A f(x,y)\,dx\right| < 2m\varepsilon_{nl} + (m+1)\varepsilon.$$

Or, si l'on fait décroître indéfiniment dy, on pourra faire décroître en même temps ε, δ et, par suite, l, ε_{nl}; notre proposition est donc établie.

L'expression

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx,$$

intégrale d'une fonction continue de y, sera finie et déterminée.

La même démonstration s'appliquerait évidemment à l'intégrale

$$\int_a^A dx \int_b^B f\,dy.$$

Il reste à prouver que ces intégrales sont égales.

72. Pour cela, décomposons le champ d'intégration par des parallèles aux axes coordonnés en rectangles élémentaires de côtés moindres que δ. Désignons généralement par e ceux de ces rectangles qui n'ont aucun point commun avec les arcs PQ ; par e' les autres, qui rencontrent au moins l'un de ces arcs.

L'intégrale

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx$$

est évidemment une somme d'intégrales analogues ayant respectivement pour champ les divers éléments e et e'. D'ailleurs dans les éléments e, où la fonction f reste continue, l'intégrale double $\mathrm{S}f\,dx\,dy$ existe et représente la valeur de $\int dy \int f\,dx$; on aura donc

$$\int_b^{\mathrm{B}} dy \int_a^{\mathrm{A}} f\,dx = \sum_e \mathrm{S} f\,dx\,dy + \sum_{e'} \int dy \int f\,dx.$$

Nous allons montrer que le dernier terme de cette égalité tend vers zéro en même temps que δ.

Soient en effet e'_k ceux des éléments e' qui sont compris entre deux parallèles aux x consécutives, y_k et $y_k + dy_k$. Ceux de ces éléments e'_k qui rencontrent un même arc PQ seront contigus, et leur réunion fournira un rectangle ρ entièrement contenu, si les parallèles aux y sont suffisamment rapprochées, dans le rectangle r de longueur λ moindre que l qui, d'après le numéro précédent, contient à son intérieur tous les points communs à PQ et à la bande considérée. A chacun des arcs $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ qui rencontrent la bande correspond ainsi un rectangle ρ. Réunissant encore en un seul ceux de ces rectangles qui seraient contigus ou empiéteraient les uns sur les autres, on voit que les éléments e'_k se groupent en rectangles $\rho_1, \rho_2, \ldots$ en nombre au plus égal à n et tels que la somme de leurs longueurs soit moindre que nl.

La somme des intégrales $\int dy \int f\,dx$ relative aux éléments e'_k est évidemment égale à la somme des mêmes intégrales relatives aux divers rectangles $\rho_1, \rho_2, \ldots$. Or, pour chacun de ceux-ci, l'intégrale $\int f\,dx$ ayant son module moindre que ε_{nl}, celui de l'intégrale $\int dy \int f\,dx$ sera moindre que

$$\int_{y_k}^{y_k+dy_k} \varepsilon_{nl}\,dy = \varepsilon_{nl}\,dy_k.$$

On a donc

$$\left|\sum_{e'_k}\int dy\int f\,dx\right| < n\,\varepsilon_{nl}\,dy_k,$$

et par suite

$$\left|\sum_{e'}\int dy\int f\,dx\right| \overline{\overline{<}} \sum_k\left|\sum_{e'_k}\int dy\int f\,dx\right|$$

$$< n\varepsilon_{nl}\sum_k dy_k < n\varepsilon_{nl}(\mathrm{B}-b),$$

expression dont la limite est bien égale à zéro.

Il résulte de ce que nous venons d'établir qu'on a

$$\int_b^{\mathrm{B}} dy\int_a^{\mathrm{A}} f\,dx = \lim_{\delta=0}\sum_e \mathrm{S} f\,dx\,dy.$$

On obtiendrait, par un raisonnement identique, le même résultat pour l'intégrale $\int_a^{\mathrm{A}} dx\int_b^{\mathrm{B}} f\,dy$. Ces deux intégrales sont donc égales.

73. Le théorème qui vient d'être établi subsistera encore si l'on suppose : 1° que les conditions (1) et (2), sans être nécessairement satisfaites dans le rectangle $(a, \mathrm{A}, b, \mathrm{B})$, le soient dans tout rectangle $(a, \mathrm{A}, b+\eta, \mathrm{B}-\eta')$ quelque petites que soient les quantités positives η, η'; 2° que la condition (3) soit satisfaite dans le rectangle $(a, \mathrm{A}, b, \mathrm{B})$.

En effet, les deux derniers termes de l'expression

$$\int_b^{\mathrm{B}} f\,dy = \int_{b+\eta}^{\mathrm{B}-\eta'} f\,dy + \int_b^{b+\eta} f\,dy + \int_{\mathrm{B}-\eta'}^{\mathrm{B}} f\,dy$$

ont, par hypothèse, un module $<\varepsilon_l$ si η et η' sont moindres que l, quel que soit d'ailleurs x; la somme de leurs variations, lorsqu'on y change x en $x+dx$, est donc moindre en valeur absolue que $4\varepsilon_l$.

En outre, le premier terme est une fonction continue de x. Donc $\int_b^B f\,dy$ sera également continue, car, en prenant d'abord l, puis dx suffisamment petits, on pourra faire décroître autant qu'on voudra chacun des termes de sa variation.

L'intégrale

$$\int_a^A dx \int_b^B f\,dy$$

aura donc une valeur déterminée, qui sera la limite de l'intégrale

$$\int_a^A dx \int_{b+\eta}^{B-\eta'} f\,dy,$$

car la différence entre ces deux intégrales sera égale à

$$\int_a^A dx \left(\int_b^{b+\eta} f\,dy + \int_{B-\eta'}^B f\,dy \right),$$

expression dont le module est moindre que

$$\int_a^A 2\varepsilon_l\,dx = 2\varepsilon_l(A - a)$$

et, par suite, tend vers zéro avec l.

Mais on a

$$\int_a^A dx \int_{b+\eta}^{B-\eta'} f\,dy = \int_{b+\eta}^{B-\eta'} dy \int_a^A f\,dx;$$

la limite dont nous venons d'établir l'existence n'est donc, par définition, autre chose que l'intégrale

$$\int_b^B dy \int_a^A f\,dx.$$

Il est d'ailleurs évident que le théorème subsistera encore

pour tout champ décomposable en un nombre limité de rectangles dont chacun, considéré séparément, satisfasse aux conditions précédentes.

74. Passons enfin au cas où le champ est infini. Supposons, à cet effet, que a, A, b restant fixes, on puisse faire croître indéfiniment B sans que le théorème cesse d'avoir lieu.

Admettons, en outre, que pour toutes les valeurs de x comprises entre a et A, l'intégrale

$$\int_{B}^{\infty} f\, dy$$

ait une valeur déterminée, dont le module soit moindre que $\varepsilon_B \varphi(x)$, le premier facteur ε_B restant borné et tendant uniformément vers zéro pour $B = \infty$ dans tout l'intervalle de $x = a$ à $x = A$ (ou tout au moins dans toute portion de cet intervalle qui ne contient pas certains points isolés $c, c', \ldots$); $\varphi(x)$ désignant d'autre part une fonction de x, positive, également bornée entre a et A et admettant dans cet intervalle une intégrale finie.

Dans ces conditions, l'intégrale $\int_b^{\infty} f\, dy$ représentera entre a et A une fonction de x, continue (sauf peut-être aux points exceptionnels c, c', ...). En effet, soit x un point quelconque différent de ceux-là; on aura

$$\int_b^{\infty} f\, dy = \int_b^{B} f\, dy + \int_B^{\infty} f\, dy. \tag{11}$$

Pour toutes les valeurs de x suffisamment voisines de celle que nous considérons, $\varphi(x)$ sera inférieur à une quantité fixe M, et ε_B pourra, en prenant B assez grand, être rendu moindre qu'un nombre arbitraire ε. La variation du terme $\int_B^{\infty} f\, dy$ en passant du point x à un point infiniment voisin $x + dx$ aura donc son module moindre que $2M\varepsilon$.

D'autre part, $\int_b^B f\,dy$ étant continue, le module de sa variation sera $< \varepsilon$ si dx est assez petit.

Le module de la variation de $\int_b^\infty f\,dy$ sera donc moindre que $(2M+1)\varepsilon$ et décroîtra ainsi autant qu'on voudra, en faisant d'abord croître suffisamment la quantité auxiliaire B, puis prenant dx assez petit.

Si donc il n'existe dans le champ aA aucun des points exceptionnels $c, c', \ldots$ que nous avons supposés, $\int_b^\infty f\,dy$ sera continue dans tout le champ, et l'intégrale

$$\int_a^A dx \int_b^\infty f\,dy$$

aura une valeur déterminée.

Dans tous les cas, d'ailleurs, où cette intégrale, ou celle-ci

$$\int_b^\infty dy \int_a^A f\,dx = \lim_{B=\infty} \int_b^B dy \int_a^A f\,dx = \lim_{B=\infty} \int_a^A dx \int_b^B f\,dy,$$

sera déterminée, elles le seront toutes deux, et elles seront égales. Intégrant, en effet, l'égalité (11) de $x = a$ à $x = A$ et faisant tendre B vers ∞, il viendra

$$\int_a^A dx \int_b^\infty f\,dy = \lim_{B=\infty} \int_a^A dx \int_b^B f\,dy + \lim_{B=\infty} \int_a^A dx \int_B^\infty f\,dy.$$

Il suffira donc pour établir notre proposition, de montrer que l'expression

$$\int_a^A dx \int_B^\infty f\,dy$$

a pour limite zéro pour $B = \infty$.

Pour cela, isolons dans le champ aA des intervalles partiels de longueur $< \delta$ contenant respectivement dans leur intérieur les divers points $c, c', \ldots$.

Considérons l'un de ces intervalles $\alpha\alpha'$ contenant le point c, par exemple.

Le module de l'intégrale

$$\int_B^\infty f\,dy$$

y sera moindre que $\varepsilon_B\varphi(x)$ et *a fortiori* moindre que $\mu\varphi(x)$, μ désignant le maximum de la fonction ε_B, qui est supposée bornée. L'intégrale $\int_\alpha^{\alpha'} dx \int_B^\infty f\,dy$ prise dans cet intervalle aura donc un module moindre que $\mu \int_\alpha^{\alpha'} \varphi(x)\,dx$, qui tend vers zéro avec δ, puisque $\varphi(x)$ est supposée intégrable.

Donc, en prenant δ assez petit, on pourra faire décroître, autant qu'on voudra, la somme des intégrales relatives aux petits intervalles que nous avons isolés. Désignons par D le reste du champ ; ε_B y tend uniformément vers zéro lorsque B tend vers ∞ ; donc, en prenant B assez grand, on pourra rendre ε_B constamment moindre qu'une quantité arbitraire ε ; on aura, par suite,

$$\left|\int_D dx \int_B^\infty f\,dy\right| < \varepsilon \int_D \varphi(x)\,dx < \varepsilon \int_a^A \varphi(x)\,dx,$$

quantité qui tend vers zéro avec ε.

75. L'égalité

$$\int_a^A dx \int_B^\infty f\,dy = \int_b^\infty dy \int_a^A f\,dx$$

étant établie, sous les conditions précédentes, faisons tendre A à son tour vers ∞. Admettons : 1° que pour les valeurs de y comprises entre b et ∞, l'intégrale $\int_A^\infty f\,dx$ ait une valeur déterminée, de module inférieur à $\varepsilon_A\psi(y)$, ε_A restant toujours borné et tendant uniformément vers zéro, lorsque A tend vers ∞, dans tout l'intervalle de b à ∞ (sauf peut-être

aux environs de certains points exceptionnels, en nombre fini), et $\psi(y)$ étant une fonction positive de y, dont l'intégrale de b à ∞ soit finie. Un raisonnement tout semblable au précédent montrera que, si l'une des intégrales

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f\,dx, \qquad \int_a^\infty dx \int_b^\infty f\,dy$$

est déterminée (ce qui arrivera toujours s'il n'y a pas de points exceptionnels), elles seront égales.

II. — Intégrales multiples.

76. La définition des intégrales multiples peut être aisément généralisée comme celle des intégrales simples l'a été dans la Section précédente. Pour fixer les idées, nous considérerons les intégrales doubles.

Soit $f(x, y)$ une fonction de x, y, laquelle reste bornée aux environs de chaque point d'un domaine borné E, sauf aux environs de certains points c, c', ... en nombre fini ou infini. Nous pouvons supposer ces points d'exception situés sur la frontière de E; car, s'ils lui étaient intérieurs, en les excluant de ce domaine nous constituerions un nouveau domaine pour lequel ils seraient des points frontières, et c'est sur celui-ci que nous raisonnerions.

Soit D un domaine quelconque, mesurable et parfait, intérieur à E. La fonction $f(x, y)$ y sera bornée; car autour de chaque point x, y de D on peut tracer un cercle dans lequel f est bornée; elle le sera *a fortiori* dans tout domaine contenu dans ce cercle. Si donc cette propriété a lieu pour tout cercle ayant son centre en un point x, y, quelque grand que soit son rayon, elle aura lieu pour D; sinon on pourra déterminer un nombre r tel que f soit bornée dans les cercles de centre (x, y) et de rayon $< r$, mais ne le soit plus dans les cercles de rayon $> r$.

Un raisonnement identique à celui du n° 222 (t. I) montre

que r est une fonction continue de x, y et admet dans D un minimum ρ différent de zéro. Or on peut décomposer D en un nombre fini d'éléments de diamètre $< \rho$; la fonction f, étant bornée dans chacun d'eux, le sera dans D.

La fonction f admettra donc dans D une intégrale par excès et une intégrale par défaut ; nous les représenterons respectivement par $S_D^1 f de$ et $S_D^2 f de$, ou, plus simplement, par S_D^1, S_D^2. Lorsque nous n'aurons à considérer qu'une seule d'entre elles et que le raisonnement pourra s'appliquer indifféremment à l'une ou à l'autre, il deviendra inutile de les distinguer ; on pourra donc les désigner par la notation commune S_D, en supprimant l'indice supérieur.

77. Soit donc S_D l'une ou l'autre de nos deux intégrales. Si nous faisons varier le domaine D d'une manière quelconque, de telle sorte que son aire ait pour limite l'aire intérieure de E, il pourra arriver que l'intégrale S_D tende vers une limite déterminée. Nous dirons dans ce cas que cette limite est l'intégrale dans le domaine E, et nous la représenterons par S_E.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette limite existe est que l'intégrale S_D tende vers zéro lorsque D varie d'une manière quelconque, de telle sorte que son aire tende vers zéro : autrement dit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un autre nombre δ tel que, pour tout domaine D (mesurable, parfait et intérieur à E) d'aire moindre que δ, on ait

$$|S_D| < \varepsilon.$$

En effet, supposons cette dernière condition satisfaite et considérons deux domaines quelconques D et D' (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que leurs aires D et D' diffèrent de l'aire intérieure de E d'une quantité moindre que δ. Soit d l'ensemble des points de D qui n'appartiennent pas à D' ; d' celui des points de D' qui n'appartiennent pas

à D; on aura évidemment

$$d < E - D' < \delta, \qquad d' < E - D < \delta,$$
$$D - D' = d - d'$$

et, par suite,

$$S_D - S_{D'} = S_d - S_{d'},$$
$$|S_D - S_{D'}| \leqq |S_d| + |S_{d'}| < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve l'existence de la limite S_E.

Réciproquement, supposons la condition non satisfaite. Il existera une quantité ε pour laquelle on pourra déterminer un domaine d, d'aire inférieure à une quantité quelconque δ et tel que que l'intégrale S_d ait son module $\geqq \varepsilon$.

Soit D un domaine mesurable et parfait contenant d, intérieur à E et tel que $E - D$ soit moindre que δ. Si nous enlevons du domaine D les points intérieurs à d, nous obtiendrons un nouveau domaine $D' = D - d$ dont l'aire D' sera $> E - 2\delta$. Les deux aires D et D' tendront toutes deux vers E si l'on fait décroître δ; mais la différence des intégrales correspondantes

$$S_D - S_{D'} = S_d$$

aura son module au moins égal à ε. Donc la limite S_E n'existera pas.

78. Les deux intégrales

$$S_D^1 f\, de, \quad S_D^2 f\, de$$

sont, par définition, les limites des sommes

$$\sum_D M_k\, de_k, \quad \sum_D m_k\, de_k,$$

où M_k, m_k sont le maximum et le minimum de f dans l'élément infiniment petit de_k, Le maximum L_k du module de f dans cet élément sera la plus grande des deux quantités

$|M_k|$, $|m_k|$; on aura donc

$$|\Sigma M_k de_k| \leqq \Sigma L_k de_k,$$
$$|\Sigma m_k de_k| \leqq \Sigma L_k de_k,$$

et en passant à la limite

$$|S_D^1| \leqq S_D^1 |f| de, \qquad |S_D^2| \leqq S_D^1 |f| de.$$

Si donc, lorsque D tend vers zéro, on a

$$(1) \qquad \lim S_D^1 |f| de = 0,$$

on aura *a fortiori*

$$(2) \qquad \lim S_D^1 = 0, \qquad \lim S_D^2 = 0,$$

et les deux limites S_E^1, S_E^2 seront déterminées.

79. Nous allons voir que, réciproquement, les conditions (2) entraînent comme conséquence nécessaire la relation (1).

Soit en effet f_1 une fonction égale à f quand f est positif, et à zéro quand f est nul ou négatif; on aura par hypothèse, pour tout champ D d'aire inférieure à un certain nombre δ,

$$|S_D^1 f de| < \varepsilon,$$

et cette relation devra subsister pour tout champ contenu dans D. On en conclut aisément que l'intégrale

$$S_D^1 f_1 de$$

ne peut surpasser ε.

Décomposons en effet le champ D en éléments de_k infiniment petits; soient M_k le maximum de f, M_{1k} celui de f_1 dans l'élément de_k.

On peut prendre les éléments assez petits pour que la différence entre les sommes

$$\Sigma M_k de_k, \quad \Sigma M_{1k} de_k$$

et leurs minima

$$S_D^1 f de, \quad S_D^1 f_1 de$$

soit moindre qu'un nombre arbitraire η.

Il en sera ainsi *a fortiori* si les sommes et les intégrales ci-dessus sont restreintes à une portion des éléments de_k.

Or M_{1k} est égal à M_k dans tout élément où f prend des valeurs positives, égal à zéro dans les autres; on aura donc, en désignant par D_1 l'ensemble des éléments de la première sorte,

$$S_D^1 f_1\, de \leqq \sum_D M_{1k}\, de_k \leqq \sum_{D_1} M_k\, de_k \leqq S_{D_1}^1 f\, de + \eta \leqq \varepsilon + \eta$$

et, en faisant tendre η vers zéro,

$$S_D^1 f_1\, de \leqq \varepsilon.$$

Remarquons en second lieu que, le maximum de $-f$ dans un ensemble quelconque étant égal et de signe contraire au minimum de f, on a

$$S_D^2 f\, de = -S_D^1(-f)\, de.$$

Par hypothèse, le premier membre tend vers zéro en même temps que l'aire de D : il en est donc de même du second; et si f_2 désigne une fonction égale à $-f$ lorsque $-f$ est positif, à zéro dans le cas contraire, on aura, d'après ce qui précède,

$$S_D^1 f_2\, de \leqq \varepsilon.$$

Cela posé, on a évidemment

$$|f| = f_1 + f_2.$$

Le maximum de $|f|$ dans un ensemble quelconque est donc au plus égal à la somme des maxima de f_1 et de f_2; on a, par suite,

$$S_D^1 |f|\, de \leqq S_D^1 f_1\, de + S_D^1 f_2\, de \leqq 2\varepsilon.$$

Donc, si D tend vers zéro, on aura

$$\lim S_D^1 |f| = 0.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Pour que les intégrales, par excès et par défaut, de la

fonction f dans le domaine E *soient déterminées toutes deux, il faut et il suffit que l'intégrale par excès de* $|f|$ *dans ce même domaine soit déterminée.*

On remarquera que, dans ce cas, l'intégrale par défaut de $|f|$ dans E est également déterminée. En effet, l'intégrale par défaut

$$S_D^2 |f| de$$

a tous ses éléments positifs ou nuls et au plus égaux à ceux de l'intégrale par excès $S_D^1 |f| de$; elle tendra donc vers zéro en même temps que cette dernière, si D tend vers zéro.

80. Soit $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ une série déterminée, mais susceptible d'être choisie à volonté, de domaines successifs (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que chacun d'eux contienne le précédent et que l'écart maximum des points de la frontière de D_n à la frontière de E tende vers zéro, quand n tend vers ∞; l'intégrale

$$S_{D_n}^1 |f| de$$

sera positive et croîtra avec n. Si elle tend vers ∞ en même temps que n, l'intégrale $S_E^1 |f| de$ ne pourra être finie et déterminée. Dans le cas contraire, elle tendra vers une limite finie A, qui sera la valeur de l'intégrale $S_E^1 |f| de$.

En effet, soit D un domaine quelconque (mesurable, parfait et intérieur à E), dont l'aire soit $> E - \delta$. Il existe dans la suite $D_1, \ldots, D_n, \ldots$ un domaine D_n contenant en entier D, et l'on aura

$$S_D^1 |f| de \leqq S_{D_n}^1 |f| de \leqq A.$$

Posons, d'autre part,

$$S_{D_n}^1 |f| de = A - \varepsilon_n$$

et désignons par μ_n le maximum de $|f|$ dans D_n.

Désignons par d l'ensemble des points de D_n qui n'appartiennent pas à D; l'aire de cet ensemble sera moindre que

E — D et *a fortiori* moindre que δ. Cela posé, on aura

$$S_D^1 |f| de = S_{D_n}^1 |f| de - S_d^1 |f| de > A - \varepsilon_n - \mu_n \delta.$$

En prenant n suffisamment grand, puis δ suffisamment petit, nous pourrons rendre plus petits que toute quantité donnée, d'abord ε_n, puis $\mu_n\delta$. On aura donc

$$\lim_{\delta=0} S_D^1 |f| de = A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

81. Soient enfin E un domaine qui ne soit pas borné; $f(x, y)$ une fonction définie dans ce domaine, laquelle admette, dans tout domaine Δ borné et intérieur à E, une intégrale par excès S_Δ^1, ou une intégrale par défaut S_Δ^2.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait

$$\lim_{D=0} S_D^1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{D=0} S_D^2 = 0$$

pour tout domaine infiniment petit D intérieur à Δ. Et si ces deux conditions sont satisfaites à la fois, elles équivaudront à celle-ci :

$$\lim_{D=0} S_D^1 |f| de = 0.$$

Soit R l'écart minimum des points de E non contenus dans Δ à un point fixe, l'origine des coordonnées si l'on veut. Faisons varier Δ de telle sorte que R tende vers ∞ ; si l'intégrale $S_\Delta^1 f\, de$, par exemple, tend vers une limite fixe, cette limite se nommera l'*intégrale par excès* de f dans le domaine E, et se représentera par $S_E^1 f\, de$.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale

$$S_\Delta^1 f\, de$$

tende vers zéro, si l'on fait varier Δ de telle sorte que son écart à l'origine tende vers ∞.

En effet, supposons cette condition remplie. Soient Δ et Δ' deux domaines quelconques contenant tous les points de E dont l'écart à l'origine est $<$ R; soient d l'ensemble des points de Δ qui n'appartiennent pas à Δ'; d' celui des points de Δ' qui n'appartiennent pas à Δ; on aura évidemment

$$S_\Delta^1 - S_{\Delta'}^1 = S_d^1 - S_{d'}^1,$$

et les deux termes du second membre tendent vers zéro pour $R = \infty$.

Supposons, au contraire, que cette condition ne soit pas remplie. On pourra déterminer un nombre ε tel qu'il existe un domaine d, borné et intérieur à E dont l'écart à l'origine soit plus grand que toute quantité donnée, et pour lequel l'intégrale $S_d^1 f\,de$ ait son module $> \varepsilon$.

Cela posé, soient:

Δ un domaine quelconque;
R l'écart minimum des points de E qui n'appartiennent pas à Δ à l'origine;
ρ l'écart maximum des points de Δ à cette même origine.

On peut, quels que soient R et ρ, déterminer d de telle sorte que son écart à l'origine surpasse ρ. Cela posé, les intégrales prises dans les deux domaines Δ et $\Delta + d$ différeront de plus de ε, bien que chacun d'eux contienne tous les points de E dont l'écart à l'origine est $<$ R. L'intégrale S_Δ^1 ne peut donc tendre vers une limite déterminée pour $R = \infty$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent aux intégrales par défaut.

On peut enfin s'assurer, par des considérations toutes semblables à celles des nos 78 à 80, que, pour que les intégrales par excès et par défaut soient toutes les deux déterminées, il faut et il suffit que l'intégrale par excès du module de f soit finie.

82. Les propriétés fondamentales des intégrales définies

par excès et par défaut subsistent pour nos intégrales généralisées.

Supposons, par exemple, qu'on divise le champ E, supposé infini, pour plus de généralité, en plusieurs régions $E_1, E_2, \ldots$.

Soient respectivement $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ l'ensemble des points communs à $E_1, E_2, \ldots$, et au domaine Δ formé par tous les points de E dont l'écart à l'origine ne surpasse pas un nombre fixe R. Supposons que l'ensemble des frontières communes à $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ ait une aire nulle. Soient D un domaine mesurable et parfait contenu dans Δ; $D_1, D_2, \ldots$ les domaines partiels formés par les points de D qui sont respectivement à l'intérieur ou sur la frontière des ensembles $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$. On aura, en considérant indifféremment les intégrales par défaut ou par excès,

$$S_D = S_{D_1} + S_{D_2} + \ldots.$$

Faisons tendre D vers Δ; $D_1, D_2, \ldots$ tendant respectivement vers $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, on aura à la limite

$$S_\Delta = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \ldots.$$

Faisons croître R indéfiniment; ce second passage à la limite donnera

$$S_E = S_{E_1} + S_{E_2} + \ldots.$$

On démontre de la même manière, par un ou deux passages à la limite, que, si l'on a

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots,$$

on aura

$$S_E f\, de = c_1 S_E f_1\, de + c_2 S_E f_2\, de + \ldots$$

(en supposant que les intégrales du second membre aient des valeurs déterminées).

Le théorème de la moyenne s'établit par le même procédé.

83. Considérons enfin la formule pour les changements de variable.

Les anciennes variables x, y étant liées aux nouvelles u, v par les relations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v),$$

on a

$$S_{E'} f(x, y)\, dx\, dy = S_E f(\varphi, \varphi_1) |J|\, du\, dv.$$

Cette formule a été établie (t. I, nos 145 et suiv.) en supposant :

1° Que dans le domaine E, les dérivées de φ, φ_1 restent continues, et leur jacobien J différent de zéro ;

2° Que le domaine E est borné, et que chacun de ses points (u, v) correspond à un seul point (x, y) de E′ ;

3° Que la fonction $f(x, y) = f(\varphi, \varphi_1)$ reste bornée dans ces domaines.

Nous allons montrer qu'on peut, sans qu'elle cesse de subsister, se débarrasser de la plus grande partie de ces restrictions.

84. Supposons en effet que, en certains points de E, les dérivées de φ, φ_1 cessent d'exister ou soient discontinues, ou que le jacobien J soit nul, ou, enfin, que f cesse d'être bornée aux environs de ces points. On peut supposer ces points exclus du domaine E, de telle sorte qu'ils appartiennent à sa frontière. Nous exclurons de même du domaine E′ les points correspondants.

Nous pouvons ainsi admettre que, dans tout l'intérieur de E, les conditions précédentes soient satisfaites, les exceptions ne pouvant se présenter que sur sa frontière. Dans ces conditions, à tout domaine D, borné, mesurable et parfait contenu dans E, correspond un domaine D′ de même nature contenu dans E′, et réciproquement.

Cela posé, nous allons montrer que, si l'une des intégrales

$$S_{E'} f\, dx\, dy, \qquad S_E f |J|\, du\, dv,$$

la première, par exemple, est déterminée, l'autre le sera aussi et lui sera égale.

85. Soit, en effet, Δ' un domaine borné quelconque contenu dans E', mais renfermant tous ceux de ses points dont les coordonnées ne surpassent pas en valeur absolue un nombre donné R'.

On aura, à la seule condition de prendre R' assez grand,

$$|S_{E'} f\,dx\,dy - S_{\Delta'} f\,dx\,dy| < \varepsilon.$$

Soient, d'ailleurs, D' un domaine mesurable quelconque contenu dans Δ'; d' l'ensemble des points de Δ' qui n'appartiennent pas à D'; on aura de même, à la seule condition de prendre d' assez petit,

$$|S_{\Delta'} f\,dx\,dy - S_{D'} f\,dx\,dy| < \varepsilon$$

et, par suite,

$$|S_{E'} f\,dx\,dy - S_{D'} f\,dx\,dy| < 2\varepsilon.$$

Cette inégalité subsistera évidemment encore si l'on y remplace le domaine D' par un autre domaine D'' (également borné, mesurable, parfait et intérieur à E') qui contienne D'.

Soient, en effet, Δ'' le domaine formé par la réunion de D'' et de Δ'; d'' l'ensemble des points de Δ'' qui n'appartiennent pas à D''; Δ' étant contenu dans Δ'', et d'' dans d', on aura

$$|S_{E'} - S_{\Delta''}| < \varepsilon, \qquad |S_{\Delta''} - S_{D''}| < \varepsilon,$$

d'où

$$|S_{E'} - S_{D''}| < 2\varepsilon.$$

Au domaine D', défini comme ci-dessus, correspond dans le champ de la seconde intégrale un domaine borné et mesurable D.

Désignons par R le maximum que ne surpassent pas les modules des coordonnées des divers points de D.

86. Soient maintenant :

Δ un domaine borné quelconque contenu dans E et renfermant tous ceux de ses points dont les coordonnées ne surpassent pas en valeur absolue un nombre donné R_1;

D_1 un domaine borné et parfait contenu dans Δ;
d_1 l'ensemble des points de Δ qui n'appartiennent pas à D_1.

Il nous faut montrer que, en prenant R_1 assez grand, puis d_1 assez petit, on pourra rendre aussi petite qu'on voudra la différence

$$S_{E'} f\,dx\,dy - S_{D_1} f\,|J|\,du\,dv.$$

Or, si $R_1 > R$, Δ contiendra D; le domaine δ, formé par les points de D qui n'appartiennent pas à D_1, sera donc $\leqq d_1$. Soit, d'autre part, $\mathfrak{D}$ le domaine formé par la réunion de D et de D_1; on aura

$$D_1 = \mathfrak{D} - \delta$$

et, par suite,

$$S_{D_1} f\,|J|\,du\,dv = S_{\mathfrak{D}} f\,|J|\,du\,dv - S_\delta f\,|J|\,du\,dv.$$

Soit $\mathfrak{D}'$ la portion du champ E' qui correspond à $\mathfrak{D}$; on aura

$$S_{\mathfrak{D}} f\,|J|\,du\,dv = S_{\mathfrak{D}'} f\,dx\,dy,$$

et, comme $\mathfrak{D}'$ contient D', cette quantité différera de $S_{E'} f\,dx\,dy$ de moins de 2ε. D'autre part, $\big|f\,|J|\big|$ est borné dans le domaine D; en désignant par M son maximum, on aura

$$\left|S_\delta f\,|J|\,du\,dv\right| \leqq M\delta \leqq M d_1$$

et, par suite,

$$\left|S_{E'} f\,dx\,dy - S_{D_1} f\,|J|\,du\,dv\right| \leqq 2\varepsilon + M d_1.$$

Or, on peut choisir ε aussi petit qu'on veut; cela fait, R et M prendront des valeurs déterminées; on pourra ensuite choisir R_1, à volonté, pourvu qu'il soit $> R$; enfin, prendre d_1 assez petit pour que $M d_1$ devienne aussi petit qu'on voudra.

Le théorème est donc démontré.

87. Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ soit non seulement bornée, mais intégrable, dans tout domaine D

mesurable et parfait contenu dans E. Les deux intégrales par excès et par défaut S_D^1 et S_D^2 se confondront en une seule, qui sera l'intégrale proprement dite S_D, à laquelle les raisonnements précédents seront applicables. La valeur limite de cette intégrale, si elle est finie et déterminée, servira de définition à l'intégrale S_E. Pour qu'il en soit ainsi, il sera nécessaire et suffisant que l'intégrale

$$S_E |f| \, dx \, dy$$

ait une valeur finie.

88. Dans le cas des intégrales simples, précédemment étudié, cette condition était suffisante, mais non nécessaire. Cette différence s'explique en remarquant que les définitions ne sont pas identiques dans les deux cas.

En effet, considérons, pour fixer les idées, l'intégrale simple

$$\int_a^b f \, dx,$$

la fonction f cessant d'être intégrable aux environs d'un point c situé dans le champ. Cette intégrale sera, par définition, la limite de l'expression

$$\int_a^{c-\varepsilon} f \, dx + \int_{c+\varepsilon'}^b f \, dx,$$

lorsque ε, ε' tendent vers zéro. Ici le domaine E est l'intervalle de a à b, et D est formé par la somme des intervalles de a à $c - \varepsilon$ et de $c + \varepsilon'$ à b. Mais ce dernier domaine est assujetti à une condition que ne lui imposait pas la théorie générale, à savoir que, s'il contient deux points p et q qui ne soient pas séparés par le point c, il contient tous les points intermédiaires. On conçoit que l'intégrale prise dans un domaine D ainsi particularisé puisse tendre vers une limite déterminée, sans qu'il en soit de même pour les domaines qui ne sont pas astreints à cette condition. Dans ce cas,

l'intégrale $\int_a^b f\,dx$, définie comme nous l'avons fait, pourra donc être déterminée, sans qu'on ait le droit d'en conclure que l'intégrale $\int_a^b |f|\,dx$ le soit.

Cette différence entre les intégrales simples et les intégrales multiples est analogue à ce que nous avons signalé dans la théorie des séries. En effet, les séries simples peuvent être absolument convergentes, ou seulement semi-convergentes; pour les séries multiples, cette différence n'existe pas, l'absolue convergence étant un des éléments de leur définition.

89. Soit $f(x, y)$ une fonction intégrable dans un domaine E, borné et mesurable.

Désignons par F l'ensemble des valeurs de y auxquelles correspondent des points de E; par G_y l'ensemble des valeurs de x pour les divers points de E qui correspondent à une même valeur donnée de y.

On aura (t. I, 56 et 57)

$$S_E f\,dx\,dy = S_F\,dy\,[S_{G_y} f\,dx],$$

de sorte que le calcul de l'intégrale double se ramène à celui de deux intégrales simples successives, qui peuvent être prises indifféremment par défaut ou par excès.

Ce théorème peut être généralisé de la manière suivante. Supposons :

1° Que la fonction f soit intégrable dans tout domaine mesurable D contenu dans le domaine E (sans l'être nécessairement dans E) et que l'intégrale

$$S_E f\,dx\,dy$$

ait une valeur déterminée;

2° Que le domaine Δ_R formé par ceux des points de E dont les coordonnées ont des modules qui ne surpassent pas un nombre donné R soit mesurable, quel que soit R;

3° Que l'intégrale simple $S|f|\,dx$, prise dans un domaine quelconque d contenu dans l'un des domaines G_y et dont l'étendue ne surpasse pas l, soit constamment moindre que ε_l, la quantité ε_l ne dépendant que de l et tendant vers zéro avec l;

4° Enfin, que si le domaine d est en entier extérieur à Δ_R, la même intégrale soit constamment moindre, en valeur absolue, que $\varepsilon'_R\,\varphi(y)$, ε'_R ne dépendant que de R et tendant vers zéro avec $\frac{1}{R}$, et $\varphi(y)$ désignant d'autre part une fonction bornée, positive et dont l'intégrale par excès dans F soit finie.

Nous allons démontrer que, dans ces hypothèses, l'intégrale

$$S_F\,dy\,S_{G_y} f\,dx,$$

prise soit par défaut, soit par excès, est égale à

$$S_E f\,dx\,dy.$$

90. Tout d'abord, l'intégrale $S_{G_y}|f|\,dx$ aura une valeur bornée. Soit, en effet, ρ une quantité fixe quelconque.

Si $|y|>\rho$, l'intégrale sera, par hypothèse, moindre que $\varepsilon'_\rho\varphi(y)$.

Si $|y|\overline{\overline{<}}\rho$, on pourra décomposer le champ G_y en deux autres, formés respectivement par ceux de ses points où $x|>\rho$ et par ceux où $|x|\overline{\overline{<}}\rho$. Dans la première partie du champ, l'intégrale sera encore moindre que $\varepsilon'_\rho\varphi(y)$. L'étendue de l'autre partie du champ ne surpassant pas 2ρ, l'intégrale correspondante sera moindre que $\varepsilon_{2\rho}$; on aura donc dans tous les cas

$$S_{G_y}|f|\,dx<\varepsilon'_\rho\,\varphi(y)+\theta\varepsilon_{2\rho},$$

θ étant égal à zéro si $|y|>\rho$, à 1 dans le cas contraire.

Les intégrales par excès ou par défaut de la fonction f dans le domaine G_y sont donc déterminées, et pour chaque valeur de y leur module ne surpassera pas la limite ci-dessus,

Les intégrales

$$S_F\, dy\, S_{G_y} f\, dx$$

(calculées par excès ou par défaut) sont également déterminées. Il suffit, en effet, de montrer que l'intégrale

$$S_F\, dy \,|\, S_{G_y} f\, dx \,|$$

est finie. Or cette intégrale est au plus égale à

$$S_F\, dy\, [\varepsilon'_\rho\, \varphi(y) + \theta\varepsilon_{2\rho}],$$

dont la première partie,

$$\varepsilon'_\rho\, S_F\, \varphi(y)\, dy,$$

est finie, par hypothèse. La seconde partie l'est également, car elle est évidemment égale à

$$\varepsilon_{2\rho}\, F_1,$$

F_1 désignant la longueur de l'ensemble formé par les points de F pour lesquels $|y| \overline{\overline{<}} \rho$, longueur au plus égale à 2ρ.

91. Soit maintenant Δ_R l'ensemble des points de E pour lesquels $|x|$ et $|y|$ ne surpassent pas un nombre donné R. Décomposons le plan par des parallèles aux axes coordonnés en carrés de côté $\frac{R}{n}$, l'origine étant d'ailleurs un des sommets du réseau. Ces carrés seront de trois sortes :

1° Des carrés e intérieurs à Δ_R;
2° Des carrés e' extérieurs à Δ_R;
3° Des carrés e'' qui rencontrent sa frontière.

Soit D le domaine formé par l'ensemble des carrés e; si $\frac{R}{n}$ décroît indéfiniment, son aire tendra vers l'aire de Δ_R, et si, en même temps que $\frac{R}{n}$ décroît, on fait croître R, l'intégrale double

$$S_D f\, dx\, dy$$

tendra vers

$$S_E f\, dx\, dy.$$

D'ailleurs, f étant intégrable dans le domaine D qui est mesurable, cette intégrale double est égale à

$$S_{\varphi}\, dy\, S_{\gamma_y} f\, dx,$$

en désignant par φ l'ensemble des valeurs de y qui correspondent aux divers points de D, et par γ_y l'ensemble des valeurs de x qui correspondent à l'une de ces valeurs y. Comme D est contenu dans E, φ le sera dans F, et γ_y dans G_y. Enfin, si l'on remarque que, dans tout le domaine $F-\varphi$, γ_y est nul, on aura

$$S_{F-\varphi}\, dy\, S_{\gamma_y} f\, dx = 0.$$

L'intégrale précédente sera donc égale à

$$S_F\, dy\, S_{\gamma_y} f\, dx.$$

Il nous faut montrer que cette expression tend vers $S_F\, dy\, S_{G_y} f\, dx$ ou, ce qui est équivalent, que l'intégrale

$$S_F\, dy\, S_{H_y} f\, dx,$$

où $H_y = G_y - \gamma_y$, tend vers zéro.

92. Cette intégrale est la somme des deux suivantes :

$$S_F\, dy\, S_{A_y} f\, dx + S_F\, dy\, S_{B_y} f\, dx,$$

A_y et B_y représentant respectivement l'ensemble des points de H_y qui appartiennent aux carrés e' ou aux carrés e''.

1° En tout point de A_y, l'une au moins des coordonnées x, y a un module $> R$; on aura donc

$$|S_{A_y} f\, dx| \leqq S_{A_y} |f|\, dx < \varepsilon'_R\, \varphi(y)$$

et, par suite,

$$|S_F\, dy\, S_{A_y} f\, dx| < \varepsilon'_R\, S_F\, \varphi(y)\, dy,$$

quantité qui tend vers zéro si R tend vers ∞.

2° Passons à la seconde intégrale. Si $|y| > R$, H_y n'ayant

aucun point commun avec les carrés e'', le champ B_y s'annulera; et $S_{B_y} f\,dx$ sera nulle. Au lieu d'intégrer cette fonction dans tout le champ F, il suffira donc de l'intégrer de $y = -R$ à $y = +R$.

Soient, d'ailleurs, $y_0, \ldots, y_k, y_{k+1} = y_k + dy_k, \ldots$ les parallèles aux x qui ont été tracées pour former notre décomposition en carrés. L'intégrale

$$S_{-R}^{+R}\,dy\,S_{B_y} f\,dx,$$

que nous avons à calculer, sera la somme des intégrales

$$S_{y_k}^{y_k+dy_k}\,dy\,S_{B_y} f\,dx,$$

la sommation s'étendant à tous les intervalles dy_k dont la réunion forme l'intervalle de $-R$ à $+R$.

Soient l_k la somme des longueurs des carrés de l'espèce e'' qui sont contenus dans la bande comprise entre les droites y_k et $y_k + dy_k$; α_k une quantité au moins égale à l_k. Si y est compris entre y_k et $y_k + dy_k$, l'ensemble B_y formé par les points communs à H_y et à ces rectangles aura une étendue au plus égale à α_k. On aura par suite,

$$|S_{B_y} f\,dx| < \varepsilon_{\alpha_k},$$

$$|S_{y_k}^{y_k+dy_k}\,dy\,S_{B_y} f\,dx| < \varepsilon_{\alpha_k}\,dy_k,$$

et enfin

$$|S_{-R}^{+R}\,dy\,S_{B_y} f\,dx| < \Sigma\varepsilon_{\alpha_k}\,dy_k.$$

Les carrés e'' étant tous compris entre les droites $x = -R$ et $x = +R$, aucune des quantités l_k ne pourra surpasser $2R$. Soit σ la somme des longueurs des éléments dy_k pour lesquels l_k est supérieur à un nombre donné δ. Pour ces éléments, on pourra prendre $\alpha_k = 2R$, et pour les autres, dont l'étendue totale est $2R - \sigma$, on pourra prendre $\alpha_k = \delta$; on aura, par suite,

$$\Sigma\varepsilon_{\alpha_k}\,dy_k = \varepsilon_\delta(2R - \sigma) + \varepsilon_{2R}\,\sigma \leqq 2R\varepsilon_\delta + \sigma\varepsilon_{2R}.$$

D'ailleurs, l'aire totale des éléments e'' est évidemment

égale à

$$\Sigma l_k \, dy_k,$$

et, par suite, plus grande que $\delta\sigma$. On a donc

$$\sigma < \frac{\Sigma e''}{\delta}$$

et, par suite,

$$\Sigma \varepsilon_{\alpha_k} dy_k < 2 R \varepsilon_\delta + \frac{\Sigma e''}{\delta} \varepsilon_{2R}.$$

Or, ε_δ tend vers zéro avec δ, et d'autre part, Δ_R étant mesurable, $\Sigma e''$ tend vers zéro quand n tend vers ∞. On peut donc, quel que soit R, choisir δ assez petit, et ensuite n assez grand pour que chacun des deux termes ci-dessus devienne aussi petit qu'on voudra.

93. Les changements de variables sont un des meilleurs moyens de reconnaître si une intégrale définie a une valeur déterminée.

Considérons, par exemple, l'intégrale triple

$$S_E f \, dx \, dy \, dz,$$

le champ E étant supposé borné, et la fonction f intégrable dans tout le champ, sauf aux environs d'un point (a, b, c) intérieur à E.

Traçons du point (a, b, c) comme centre une sphère d d'un rayon ρ arbitraire. L'intégrale de $|f|$, prise dans le champ $E - d$, sera finie; il reste à savoir si elle est également finie dans la sphère d.

Prenons pour nouvelles variables des coordonnées polaires r, θ, φ ayant leur centre au point (a, b, c). L'intégrale

$$S_d |f| \, dx \, dy \, dz$$

sera changée en

$$S |f| \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

r variant de o à ρ, θ de o à π, et φ de o à 2π.

Supposons que, aux environs du point (a, b, c), on ait

constamment

$$|f| < \frac{M}{r^\mu},$$

M désignant une constante et μ un exposant < 3. Cette inégalité ayant lieu dans toute l'étendue de la sphère d si ρ est assez petit, l'intégrale à évaluer sera moindre que la suivante

$$\int_0^\rho dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^{\mu-2}} \sin\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^\rho dr \int_0^\pi \frac{2\pi M}{r^{\mu-2}} \sin\theta\, d\theta = 4\pi M \int_0^\rho \frac{dr}{r^{\mu-2}} = \frac{4\pi M}{3-\mu} \rho^{3-\mu}.$$

Elle sera donc finie.

Au contraire, si l'on avait aux environs du point (a, b, c)

$$|f| > \frac{M}{r^\mu}, \qquad \mu \overline{\geq} 3,$$

l'intégrale serait plus grande que la suivante

$$4\pi M \int_0^\rho \frac{dr}{r^{\mu-2}},$$

laquelle est infinie.

94. Supposons maintenant que l'intégrale $S f\, dx\, dy\, dz$ soit déterminée dans un champ borné quelconque, et cherchons dans quelles conditions on pourra l'étendre à tout l'espace sans qu'elle cesse d'être déterminée.

Considérons une sphère d'un rayon R ayant son centre au point (a, b, c), par exemple. L'intégrale de $|f|$ sera finie dans cette sphère; il s'agit de reconnaître si elle l'est également dans la région extérieure.

Prenons les mêmes coordonnées que tout à l'heure; dans la région en question, r variera de R à ∞, θ de o à π, et φ de o à 2π.

Supposons que, pour tous les points (x, y, z) suffisam-

ment éloignés du point fixe (a, b, c), on ait

$$|f| < \frac{M}{r^m}, \qquad m > 3.$$

L'inégalité précédente ayant lieu dans tout le champ, si R est assez grand, l'intégrale à évaluer sera moindre que

$$\int_R^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{M}{r^{m-2}} \sin\theta \, d\theta \leqq \frac{4\pi M}{m-3} \frac{1}{R^{m-3}}.$$

Elle sera donc finie.

Elle serait infinie, au contraire, si l'on avait pour tous les points suffisamment éloignés de (a, b, c)

$$|f| > \frac{M}{r^m}, \qquad m \leqq 3.$$

95. Soient enfin une surface définie par les équations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v), \qquad z = \varphi_2(u, v);$$
$$d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv$$

l'élément de son aire; f une fonction des coordonnées. Considérons l'intégrale double

$$\mathbf{S}_E f\, d\sigma$$

étendue à une portion E de cette surface.

Cette intégrale conservera une valeur déterminée, si la fonction f devient infinie en un point ordinaire O du champ de telle sorte que $r^\mu |f|$ soit moindre qu'un nombre fixe M (r désignant la distance du point variable (u, v) au point O et μ un exposant < 2).

Pour l'établir, il suffit de montrer que l'intégrale

$$\mathbf{S} |f|\, d\sigma$$

prise dans un champ infiniment petit choisi à volonté autour de O est infiniment petite.

Soit ρ la projection de r et $d\sigma'$ celle de $d\sigma$ sur le plan tangent en O. On aura

$$\rho \lesseqgtr r \qquad \text{et} \qquad d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos\psi},$$

ψ étant un angle infiniment petit. On aura par suite en désignant par e' la projection de e

$$\mathbf{S}_e |f|\, d\sigma < \mathbf{S}_e \frac{M}{r^\mu} d\sigma < \mathbf{S}_{e'} \frac{M}{\cos\psi} \frac{d\sigma'}{\rho^\mu} < M_1 \mathbf{S}_{e'} \frac{d\sigma'}{\rho^\mu},$$

M_1 étant le maximum de $\dfrac{M}{\cos\psi}$.

Or si nous adoptons des coordonnées polaires ρ, φ, on aura $d\sigma' = \rho\, d\rho\, d\varphi$; prenons d'ailleurs, ce qui est permis, pour e' un cercle de rayon ε infiniment petit, il viendra

$$\mathbf{S}_{e'} \frac{d\sigma'}{\rho^\mu} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\varepsilon} \frac{d\rho\, d\varphi}{\rho^{\mu-1}} = \frac{2\pi}{2-\mu} \varepsilon^{2-\mu},$$

quantité infiniment petite, puisque $\mu < 2$.

III. — Calcul des intégrales définies.

96. Soit à calculer l'intégrale définie

$$\int_a^b \frac{dx}{x - \alpha - \beta i}.$$

Supposons d'abord $\beta \gtrless 0$. L'intégrale indéfinie sera

$$\log(x - \alpha - \beta i) + \text{const.} = \frac{1}{2} \operatorname{Log}[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + \operatorname{Arc\,tang} \frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

Or, lorsque x varie de a à b, les diverses parties de cette

expression restent continues : la valeur cherchée sera donc

$$\frac{1}{2}\operatorname{Log}[(b-\alpha)^2+\beta^2]+\operatorname{Arc\,tang}\frac{b-\alpha}{\beta},$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Log}[(a-\alpha)^2+\beta^2]-\operatorname{Arc\,tang}\frac{a-\alpha}{\beta}.$$

Si $\beta=0$ et $\alpha<a<b$, l'intégrale indéfinie sera

$$\operatorname{Log}(x-\alpha)+\text{const.};$$

et comme $\operatorname{Log}(x-\alpha)$ reste continu entre a et b, l'intégrale définie sera

$$\operatorname{Log}(b-\alpha)-\operatorname{Log}(a-\alpha)=\operatorname{Log}\frac{b-\alpha}{a-\alpha}.$$

Si $\beta=0$ et $a<b<\alpha$, l'intégrale indéfinie sera

$$\operatorname{Log}(\alpha-x)+\text{const.},$$

et l'intégrale définie sera

$$\operatorname{Log}\frac{\alpha-b}{\alpha-a},$$

résultat qui concorde avec le précédent.

Enfin, si $\beta=0$ et $a<\alpha<b$, la fonction à intégrer devenant infinie du premier ordre au point α, qui est contenu dans le champ, l'intégrale sera indéterminée.

97. Soit à calculer l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx,$$

la fonction $f(x)$ admettant une dérivée déterminée en chaque point du champ, sauf en un nombre limité de points où elle devient infinie.

La fonction à intégrer est la dérivée de $\operatorname{Arc\,tang} f(x)$. Or cette dernière fonction reste continue tant que $f(x)$ reste fini; elle diminue brusquement de π chaque fois que $f(x)$

passe du positif au négatif en traversant l'infini ; elle augmente au contraire de π, si $f(x)$ passe du négatif au positif. On aura donc (62), en désignant par m et n les nombres de passages respectifs du positif au négatif et du négatif au positif.

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{Arc\,tang} f(b) - \operatorname{Arc\,tang} f(a) + (m-n)\pi.$$

Soit, en particulier, $f(x) = x$; m et n seront nuls ; il viendra

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tang} b - \operatorname{Arc\,tang} a$$

et, si l'on pose $a = 0$, $b = \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

98. Passons à la détermination de l'intégrale

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx,$$

m étant un entier positif.

Pour $m = 0$, on aura

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $m = 1$,

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = (-\cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

On a, d'autre part, quel que soit m,

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \sin x\,dx$$

et, en intégrant par parties,

$$I_m = (-\cos x \sin^{m-1} x)_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)(m-1)\sin^{m-2} x \cos x \, dx.$$

Le terme tout intégré s'annule aux deux limites o et $\frac{\pi}{2}$. Quant à l'intégrale du second membre, elle est égale à

$$(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x(1-\sin^2 x)\, dx = (m-1)(I_{m-2} - I_m).$$

On aura donc

$$I_m = (m-1)(I_{m-2} - I_m),$$

d'où

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Supposons, d'abord, que m soit un nombre pair $2n$. Cette formule donnera successivement

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2} I_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\,\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

Si $m = 2n+1$, on aura de même

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} \\ &= \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} I_{2n-3} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3} I_1 \\ &= \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}. \end{aligned} \right.$$

On déduit des formules (1) et (2) la relation suivante :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{[2n(2n-2)\ldots2]^2}{(2n-1)(2n-3)\ldots1.(2n+1)(2n-1)\ldots3}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}.$$

Il est d'ailleurs aisé de trouver deux limites supérieure et inférieure du rapport $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$. En effet, on a, en général,

$$I_m - I_{m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x(1-\sin x)\,dx.$$

Cette intégrale est positive; car, de 0 à $\frac{\pi}{2}$, les facteurs $\sin x$, $1-\sin x$ et dx sont tous positifs. Chacun des éléments dont la somme constitue l'intégrale est donc positif.

Posant successivement $m = 2n-1$ et $m = 2n$ dans cette relation, il viendra

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1},$$

d'où

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}},$$

et par suite, d'après la formule (2),

$$1 < \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} < \frac{2n+1}{2n}.$$

Si n tend vers ∞, $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ converge donc vers l'unité, de telle sorte qu'on aura

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{(2.4\ldots2n)^2}{1.3\ldots(2n-1).3.5\ldots(2n+1)}.$$

C'est la formule de Wallis, déjà trouvée dans le Calcul différentiel.

99. *Hermite* a établi que le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique. Nous allons exposer une démonstration nouvelle de ce beau théorème, donnée récemment par M. *Hurwitz*.

L'intégration par parties nous donne

$$\int_0^x e^{-x} f(x)\,dx = [-e^{-x} f(x)]_0^x + \int_0^x e^{-x} f'(x)\,dx.$$

Si $f(x)$ est un polynome entier, l'application répétée de cette formule nous donnera

$$\int_0^x e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(0),$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{F}(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots.$$

Nous aurons donc

$$\mathrm{F}(0)\,e^x = \mathrm{F}(x) + e^x \int_0^x e^{-x} f(x)\,dx.$$

Supposons que e satisfasse à une équation algébrique

$$c_0 + c_1 e + \ldots + c_n e^n = 0.$$

En posant dans la formule précédente $x = 0, 1, \ldots, n$ et ajoutant les équations obtenues, respectivement multipliées par $c_0, c_1, \ldots, c_n$, il viendra

$$0 = \sum_0^n c_k \mathrm{F}(k) + \sum_0^n c_k e^k \int_0^k e^{-x} f(x)\,dx,$$

et cette égalité devrait être satisfaite quel que fût le polynome $f(x)$. Or nous arriverons à une contradiction, par un choix convenable de ce polynome.

Posons en effet

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \ldots (x-n)^p,$$

p étant un nombre premier infiniment grand.

Développons ce polynome suivant les puissances crois-

santes de x; nous aurons

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}(A x^{p-1} + B x^p + \ldots),$$

A, B étant des entiers, dont le premier n'est pas divisible par p, si $p > n$. On aura donc

$$f(0) = 0, \quad \ldots, \quad f^{p-2}(0) = 0, \quad f^{p-1}(0) = A, \quad f^p(0) = Bp, \quad \ldots.$$

Donc

$$F(0) = f(0) + f'(0) + \ldots = A + Bp + C(p+1)p + \ldots$$

sera un entier, non divisible par p.

Développant $f(x)$ suivant les puissances de $x - k$, nous aurons de même, pour $k = 1, 2, \ldots, n$

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}[B_k(x-k)^p + C_k(x-k)^{p+1} + \ldots],$$

B_k, C_k, ... étant des entiers; et

$$F(k) = f(k) + f'(k) + \ldots = B_k p + C_k(p+1)p + \ldots$$

sera un entier divisible par p.

La somme

$$\sum_0^n c_k F(k)$$

sera donc un entier, non divisible par p, si $p > |c_0|$, et, par suite, différent de zéro.

On a, d'autre part, dans tout l'intervalle de 0 à n,

$$|e^{-x} f(x)| < \frac{1}{(p-1)!} n^{p-1}.n^p.n^p \ldots < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!}$$

et, par suite,

$$\left| \sum_0^n c_c e^k \int_0^k e^{-x} f(x)\, dx \right| < \frac{n^{(n+1)p-1}}{(p-1)!} \sum_1^n |c_k| e^k k,$$

quantité qui tend vers zéro pour $p = \infty$.

Or il est évident que la somme d'un entier et d'une fraction très petite ne peut être égale à zéro.

100. Le nombre π est également transcendant, mais nous nous bornerons à établir qu'il est incommensurable.

Prenons pour point de départ l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos zx \, dx,$$

n désignant un entier.

Posons, pour abréger,

$$(1 - x^2)^n = F(x),$$

et opérons une suite d'intégrations par parties portant sur le facteur transcendant. Il viendra

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos zx \, dx \\
&\quad = \left[\frac{F(x) \sin zx}{z}\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{F'(x) \sin zx}{z} dx \\
&\quad = \left[\frac{F(x) \sin zx}{z}\right]_{-1}^{+1} + \left[\frac{F'(x) \cos zx}{z^2}\right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{F''(x) \cos zx}{z^2} dx \\
&\quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad = \left\{ \begin{aligned} &\sin zx \left[\frac{F(x)}{z} - \frac{F''(x)}{z^3} + \ldots + (-1)^n \frac{F^{2n}(x)}{z^{2n+1}}\right] \\ &+ \cos zx \left[\frac{F'(x)}{z^2} - \frac{F'''(x)}{z^4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{F^{2n-1}(x)}{z^{2n}}\right] \end{aligned} \right\}_{-1}^{+1} \\
&\qquad + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{+1} \frac{F^{2n+1}(x) \sin zx}{z^{2n+1}} dx.
\end{aligned}$$

Or F est un polynome de degré $2n$; on aura donc $F^{2n+1}(x) = 0$, et l'intégrale du second membre se réduira à zéro.

D'autre part, $F(x)$ étant une fonction paire, il en sera de même de ses dérivées d'ordre pair $F''(x), \ldots, F^{2n}(x)$; au contraire, $F'(x), \ldots, F^{2n-1}(x)$ seront des fonctions impaires.

Les termes tout intégrés prendront donc pour $x = +1$ et pour $x = -1$ des valeurs égales et contraires. On aura, par suite, en substituant ces deux limites et faisant la différence des résultats,

$$(3)\qquad \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos zx \, dx = 2(\mathrm{M} \sin z + \mathrm{N} \cos z),$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{F}(1)}{z} - \frac{\mathrm{F}''(1)}{z^3} + \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{F}^{2n}(1)}{z^{2n+1}},$$

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{F}'(1)}{z^2} - \frac{\mathrm{F}'''(1)}{z^4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\mathrm{F}^{2n-1}(1)}{z^{2n}}.$$

Pour calculer les constantes $\mathrm{F}(1)$, $\mathrm{F}'(1), \ldots, \mathrm{F}^{2n}(1)$, on remarquera que la série de Taylor donne

$$\mathrm{F}(1 + h) = \mathrm{F}(1) + \frac{\mathrm{F}'(1)}{1} h + \ldots + \mathrm{F}^k(1) \frac{h^k}{1.2\ldots k} + \ldots.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(1 + h) &= [1 - (1 + h)^2]^n = (-1)^n (2h + h^2)^n \\ &= \mathrm{A}_n h^n + \mathrm{A}_{n+1} h^{n+1} + \ldots + \mathrm{A}_{2n} h^{2n}, \end{aligned}$$

$\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{n+1}, \ldots, \mathrm{A}_{2n}$ étant des entiers. On aura donc, en comparant ces deux expressions,

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(1) = 0, &&\ldots, &&\mathrm{F}^{n-1}(1) = 0, \\ &\mathrm{F}^n(1) = 1.2\ldots n \mathrm{A}_n, &&\ldots, &&\mathrm{F}^{2n}(1) = 1.2\ldots 2n \mathrm{A}_{2n}. \end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans la formule (3), et mettons $\frac{1.2\ldots n}{z^{2n+1}}$ en facteur commun; il viendra

$$(4)\qquad \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos zx \, dx = \frac{1.2\ldots n}{z^{2n+1}} (\mathrm{P} \sin z + \mathrm{Q} \cos z),$$

P et Q étant des polynomes en z, de degré inférieur à $2n+1$ et à coefficients entiers.

101. Cela posé admettons que $\frac{\pi}{2}$ fût égal à une fraction rationnelle $\frac{b}{a}$. Posons $z = \frac{\pi}{2}$ dans la formule (4). On aura $\cos z = 0$, $\sin z = 1$, $\frac{P}{z^{2n+1}} = \frac{E_n}{b^{2n+1}}$, E_n désignant un entier; et, par suite,

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos \frac{\pi}{2} x \, dx = \frac{1.2\ldots n}{b^{2n+1}} E_n,$$

d'où

$$(5) \qquad E_n = \frac{b^{2n+1}}{1.2\ldots n} \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos \frac{\pi}{2} x \, dx.$$

On devrait avoir une égalité de ce genre pour toute valeur de n. Mais cela est absurde, si n est suffisamment grand.

En effet, $1 - x^2$ et $\cos \frac{\pi}{2} x$ étant positifs, mais moindres que 1 dans toute l'étendue du champ d'intégration, l'intégrale $\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos \frac{\pi}{2} x \, dx$ sera positive, mais ses éléments seront moindres que ceux de l'intégrale $\int_{-1}^{+1} dx$, qui est égale à 2. On aura donc

$$\int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n \cos \frac{\pi}{2} x \, dx = \theta,$$

θ étant positif, mais < 2.

D'autre part, le facteur $\frac{b^{2n+1}}{1.2\ldots n}$ décroît rapidement quand n augmente : car, en changeant n en $n + 1$, on le multiplie par le facteur $\frac{b^2}{n+1}$, qui est très petit pour de grandes valeurs de n. Si donc on prend n assez grand, le second membre de l'équation (5) sera une quantité positive et moindre que l'unité, tandis que le premier membre est un entier. L'hypothèse de π commensurable conduit donc à une contradiction.

102. Soit à calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b=\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx.$$

Posons $b = 2n\pi + r$, r étant $< 2\pi$, et l'entier n tendant vers ∞; on pourra écrire

$$\int_0^b = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \ldots + \int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} + \int_{2n\pi}^{2n\pi+r}.$$

La dernière intégrale tend vers zéro; car le module de la fonction à intégrer y est moindre que $\frac{1}{2n\pi}$, et l'étendue du champ est $< 2\pi$; son module est donc $< \frac{1}{n}$.

Les autres intégrales peuvent se ramener aux mêmes limites par des changements de variable. En effet, posons

$$x = (2k-1)\pi + y$$

dans l'intégrale $\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}$; elle deviendra

$$\int_0^\pi \frac{-\sin y}{(2k-1)\pi + y}\,dy.$$

Posons, d'autre part,

$$x = (2k-1)\pi - y$$

dans l'intégrale précédente $\int_{(2k-2)\pi}^{(2k-1)\pi}$; elle deviendra

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{(2k-1)\pi - y}\,dy.$$

Réunissant toutes les intégrales ainsi transformées, on aura l'intégrale

$$\int_0^\pi \sin y\left(\frac{1}{\pi - y} - \frac{1}{\pi + y} + \frac{1}{3\pi - y} - \frac{1}{3\pi + y} + \ldots - \frac{1}{(2n-1)\pi + y}\right)dy$$

dont il faudra trouver la limite.

Cette limite ne sera pas altérée si l'on ajoute à la suite entre parenthèses la série infinie

$$R_n = \frac{1}{(2n+1)\pi - y} - \frac{1}{(2n+1)\pi + y} + \dots,$$

car pour toute valeur de y comprise dans le champ d'intégration, les termes de cette suite sont alternativement positifs et négatifs et vont en décroissant. La série a donc une valeur déterminée, positive et moindre que $\frac{1}{(2n+1)\pi - y}$ et *a fortiori* moindre que $\frac{1}{2n\pi}$.

L'intégrale

$$\int_0^\pi R_n \sin y \, dy$$

aura donc son module moindre que la quantité infiniment petite

$$\int_0^\pi \frac{dy}{2n\pi} = \frac{1}{2n}.$$

La limite cherchée sera donc l'intégrale

$$\int_0^\pi S \sin y \, dy,$$

S désignant la série infinie

$$\frac{1}{\pi - y} - \frac{1}{\pi + y} + \frac{1}{3\pi - y} - \frac{1}{3\pi + y} + \dots.$$

Or, si nous posons $y = \pi(1 - 2z)$, il viendra

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z+2} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2}\cot \pi z \qquad (\text{t. I, n}^\circ\ 377) \\ &= \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\pi - y}{2}\right) = \frac{1}{2}\tang\frac{y}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}y\sin y\,dy = \int_0^\pi \sin^2\frac{1}{2}y\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

103. Cette intégrale est d'ailleurs semi-convergente ; on a, en effet,

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

$$= \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \sin y\left[\frac{1}{\pi - y} + \frac{1}{\pi + y} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\pi + y}\right] dy.$$

Or le facteur entre parenthèses est plus grand que la quantité

$$m = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\pi}.$$

L'intégrale sera donc plus grande que

$$m\int_0^\pi \sin y\,dy = 2m.$$

Or la série $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ étant divergente, m tend vers l'infini en même temps que n.

104. Lorsqu'on n'est pas en mesure de trouver la valeur exacte d'une intégrale définie, on a recours à des procédés d'approximation que nous allons exposer.

Il faut tout d'abord s'assurer que l'intégrale cherchée a une valeur finie et déterminée, et assigner des limites entre lesquelles elle se trouve contenue. Le théorème de la moyenne permettra le plus souvent d'arriver à ce premier résultat.

105. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où k^2 est supposé < 1.

La fonction à intégrer devient infinie pour $x = 1$. Mais l'ordre d'infinitude est $\frac{1}{2}$: l'intégrale est donc finie. Pour assigner des limites à sa valeur, mettons-la sous la forme

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}.$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ restant positif dans toute l'étendue de l'intégration, on aura, en désignant par M et m des limites supérieure et inférieure de la valeur de l'autre facteur,

$$M\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} > K > m\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

D'ailleurs

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left(-2\sqrt{1-x}\right)_0^1 = 2.$$

D'autre part, x étant compris entre 0 et 1, $1+x$ sera compris entre 1 et 2, et $1-k^2x^2$ entre 1 et $1-k^2$; on aura donc

$$2 > (1+x)(1-k^2x^2) > 1-k^2.$$

On pourra donc poser

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad M = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}},$$

et l'on aura, en fin de compte,

$$\frac{2}{\sqrt{1-k^2}} > K > \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

106. Soit encore l'intégrale

$$\int_0^1 \log \sin x \, dx.$$

La fonction $\log \sin x$ étant constamment négative, l'intégrale a tous ses éléments négatifs ; sa valeur aura donc zéro pour limite supérieure.

Pour obtenir une limite inférieure, mettons-la sous la forme suivante :

$$\int_0^1 \log\left(x\frac{\sin x}{x}\right) dx = \int_0^1 \log x \, dx + \int_0^1 \log\frac{\sin x}{x} dx.$$

L'intégration par parties donne

$$\int_0^1 \log x \, dx = [x \log x]_0^1 - \int_0^1 x\frac{dx}{x} = -1.$$

D'autre part, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ étant évidemment décroissante de 0 à 1, la plus petite valeur de $\log\frac{\sin x}{x}$ correspondra à cette dernière limite et l'on aura

$$\int_0^1 \log\frac{\sin x}{x} dx \geqq \int_0^1 \log \sin(1) \, dx \geqq \log \sin(1).$$

On aura donc finalement

$$\int_0^1 \log \sin x \, dx \geqq -1 + \log \sin(1)$$

107. Considérons en dernier lieu l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

dont tous les éléments sont positifs. Pour lui assigner une limite supérieure, décomposons-la dans les deux suivantes :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx.$$

Dans la première intégrale, e^{-x^2} est toujours < 1. Elle sera donc moindre que la suivante

$$\int_0^1 dx = 1.$$

Dans la seconde, $e^{-x^2} < e^{-x}$. Elle sera donc inférieure à celle-ci

$$\int_1^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_1^\infty = e^{-1}.$$

On aura donc

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx < 1 + e^{-1}.$$

108. Pour calculer la valeur approchée d'une intégrale définie, on peut avoir recours à l'une des trois méthodes suivantes :

Première méthode : *Développement en série.* — On développe la fonction $f(x)$ à intégrer en une série

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont chaque terme soit une fonction dont on sache calculer l'intégrale. Si d'ailleurs cette série satisfait aux conditions du n° 67, l'intégrale $\int_a^b f(x)$ sera donnée par la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \ldots.$$

109. Considérons, comme application, l'intégrale elliptique de première espèce

$$\mathrm{F}(\Phi) = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}};$$

on aura, k étant < 1,

$$(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}k^{2n}\sin^{2n}\varphi + \ldots.$$

Intégrant de o à Φ, et posant, pour abréger,

$$\int_0^\Phi \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = I_{2n},$$

il viendra

$$(6)\quad F(\Phi) = \Phi + \frac{1}{2} I_2 k^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} I_{2n} k^{2n} + \ldots.$$

L'*amplitude* Φ du champ d'intégration une fois donnée, il restera à déterminer les intégrales I. On peut les calculer de proche en proche comme il suit :

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \int_0^\Phi \sin^{2n-1}\varphi \sin\varphi\, d\varphi \\
&= [-\sin^{(2n-1)}\varphi\cos\varphi]_0^\Phi + (2n-1)\int_0^\Phi \sin^{2n-2}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi \\
&= -\sin^{2n-1}\Phi\cos\Phi + (2n-1)\int_0^\Phi \sin^{2n-2}\varphi(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi \\
&= -\sin^{2n-1}\Phi\cos\Phi + (2n-1)[I_{2n-2} - I_{2n}],
\end{aligned}$$

d'où la formule récurrente

$$2n I_{2n} = -\sin^{2n-1}\Phi\cos\Phi + (2n-1) I_{2n-2}.$$

D'ailleurs on a évidemment $I_0 = \Phi$.

110. Le cas le plus intéressant est celui où $\Phi = \frac{\pi}{2}$. On a, dans ce cas (98),

$$I_{2n} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{\pi}{2};$$

d'où

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \ldots + \left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\}.$$

111. Si k est voisin de l'unité, la série (6) sera peu convergente. Posons, dans ce cas,

$$k^2 = 1 - k'^2,$$

d'où

$$(1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (\cos^2\varphi + k'^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos\varphi}\Big[1 - \frac{1}{2}k'^2 \operatorname{tang}^2\varphi + \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} k'^{2n} \operatorname{tang}^{2n}\varphi + \ldots\Big],$$

et intégrons de o à Φ; il viendra

$$(7) \qquad F(\Phi) = J_0 - \frac{1}{2}J_2 k'^2 + \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} J_{2n} k'^{2n} + \ldots,$$

en désignant par J_{2n} l'intégrale

$$\int_0^\Phi \operatorname{tang}^{2n}\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_0^\Phi \sin^{2n}\varphi \cos^{-2n-1}\varphi\, d\varphi.$$

On a d'ailleurs, en posant $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$,

$$J_0 = \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi} \frac{d\psi}{\sin\psi}$$

$$= -\left(\log \operatorname{tang}\frac{1}{2}\psi\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\Phi} = -\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right).$$

Les autres intégrales se calculent aisément. Posant en effet

$$\sin\varphi = t,$$

J_{2n} se transformera en

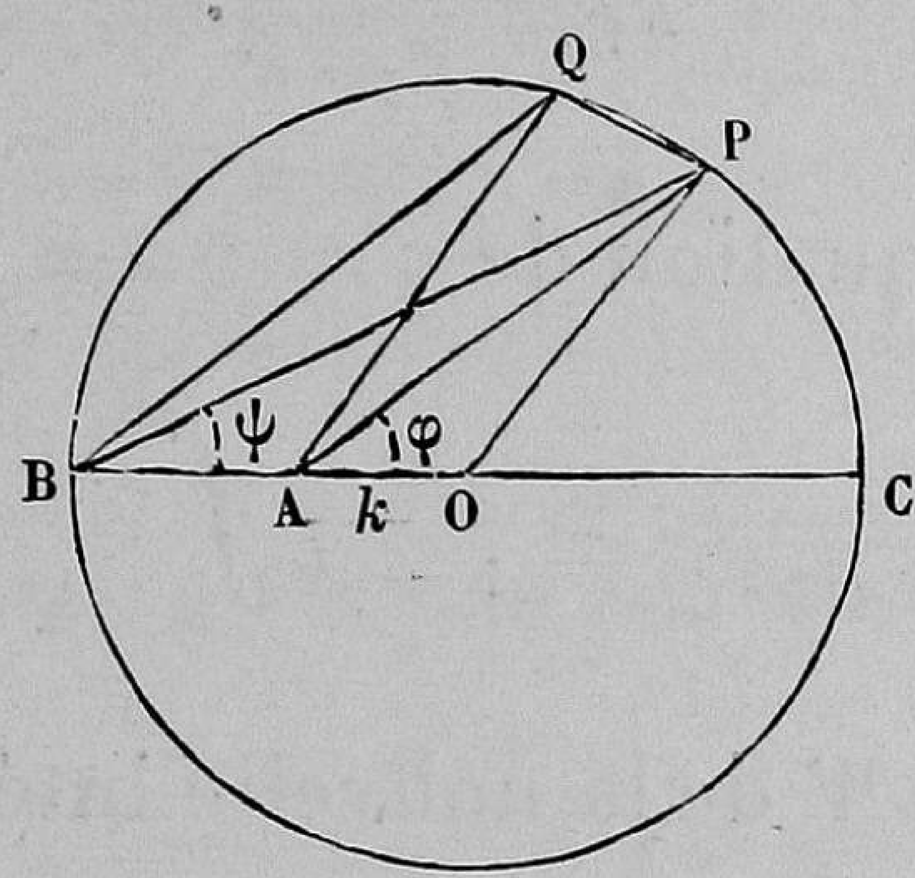
$$\int_0^{\sin\Phi} \frac{t^{2n}\,dt}{(1-t^2)^{n+1}},$$

expression facilement intégrable.

112. Si k n'est ni très petit, ni très voisin de l'unité, les séries (6) et (7) seront toutes deux peu convergentes. On peut, dans ce cas, par un changement de variables dû à *Landen*, transformer l'intégrale elliptique donnée en une autre dont le module soit plus avantageux.

Considérons, à cet effet, un cercle de rayon 1 et un point A situé sur le diamètre BC, à une distance $AO = k$ du centre

Fig. 1.



(*fig.* 1). Soit P un point quelconque du cercle. Joignons PO, PA, PB. Soient φ et ψ les deux angles PAO, PBO. On aura $POC = 2\psi$, $APO = 2\psi - \varphi$.

Cela posé, le triangle APO donnera

$$AP^2 = 1 + k^2 + 2k\cos 2\psi = (1+k)^2 - 4k\sin^2\psi$$

et

$$\sin(2\psi - \varphi) = k\sin\varphi,$$

d'où

$$\cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}.$$

Soit maintenant Q un point du cercle infiniment voisin de P. Joignons QP, QA, QB, et posons $PAQ = d\varphi$, $PBQ = d\psi$.

Le triangle infiniment petit APQ donnera

$$\frac{\sin d\varphi}{PQ} = \frac{\sin APQ}{AQ}.$$

Mais on a sensiblement

$$\sin d\varphi = d\varphi,$$

$$PQ = \text{arc}\,PQ = 2\,d\psi,$$

$$\sin APQ = \cos APO = \cos(2\psi - \varphi) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi},$$

$$AQ = AP = \sqrt{(1+k)^2 - 4k\sin^2\psi}$$

et, par suite,

$$\frac{d\varphi}{2\,d\psi} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}{\sqrt{(1+k)^2 - 4k\sin^2\psi}}$$

ou

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}},$$

en posant, pour abréger,

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Intégrons cette équation de $\varphi = 0$ à $\varphi = \Phi$, il viendra

$$\int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+k}\int_0^{\Psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}},$$

la limite supérieure Ψ de la nouvelle intégrale étant déterminée par l'équation

$$\sin(2\Psi - \Phi) = k\sin\Phi.$$

113. Le calcul de l'intégrale proposée se trouve ramené par cette formule à celui de l'intégrale analogue

$$\int_0^{\Psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}. \tag{8}$$

Le nouveau module k_1 est encore inférieur à l'unité, car on a

$$1 - k_1 = \frac{1 + k - 2\sqrt{k}}{1+k} = \frac{(1-\sqrt{k})^2}{1+k} > 0;$$

mais il est $> \sqrt{k}$, car on a $\frac{2}{1+k} > 1$.

Une transformation semblable à la précédente ramènera le calcul de l'intégrale (8) à celui d'une nouvelle intégrale dont le module k_2 sera $> \sqrt{k_1}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale dont le module soit assez voisin de l'unité pour que la formule (7) puisse lui être appliquée commodément.

114. Il est clair qu'on pourrait opérer en sens inverse et ramener le calcul d'une intégrale elliptique d'un module quelconque k_1 à celui d'une intégrale d'un module moindre k, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une intégrale où le module soit assez petit pour qu'on puisse employer la série (6).

115. Deuxième méthode : *Formule d'Euler.* — Cette formule a pour objet de donner la valeur approchée de l'intégrale $\int_a^{a+h} f(x)\,dx$ en fonction des valeurs que prennent la fonction $f(x)$ et ses dérivées d'ordre impair aux deux limites de l'intégration.

Pour l'établir, nous partirons de l'identité

$$\int_a^{a+h} \varphi'(z)\,dz = \varphi(a+h) - \varphi(a).$$

Posant $z = a + h - u$, elle deviendra

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \int_0^h \varphi'(a+h-u)\,du.$$

En intégrant par parties $2p$ fois de suite, il viendra successivement

$$(9) \quad \begin{aligned} &\varphi(a+h) - \varphi(a) \\ &= h\varphi'(a) + \int_0^h \varphi''(a+h-u)\,u\,du \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= h\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots + \frac{h^{2p}}{1.2\ldots 2p}\varphi^{2p}(a) \\ &\quad + \int_0^h \varphi^{2p+1}(a+h-u)\frac{u^{2p}\,du}{1.2\ldots 2p}. \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor, où le reste est exprimé par une intégrale définie.

Remplaçons successivement, dans cette formule, la fonction φ par ses dérivées $\varphi', \ldots, \varphi^{2p-1}$, en remplaçant en

même temps $2p$ par $2p-1$, $2p-2$, ..., il viendra

$$\begin{aligned}
&\varphi'(a+h)-\varphi'(a)\\
&\quad = h\varphi''(a)+\ldots+\frac{h^{2p-1}}{1.2\ldots(2p-1)}\varphi^{2p}(a)\\
&\quad\quad +\int_0^h \varphi^{(2p+1)}(a+h-u)\frac{u^{2p-1}\,du}{1.2\ldots(2p-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\varphi^{2p-1}(a+h)-\varphi^{2p-1}(a)\\
&\quad = h\varphi^{2p}(a)+\int_0^h \varphi^{2p+1}(a+h-u)\,u\,du.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces équations à l'équation (9), après les avoir respectivement multipliées par des coefficients $A_1 h$, ..., $A_{2p-1}h^{2p-1}$, choisis de telle sorte que les termes en $\varphi''(a)$,..., $\varphi^{2p}(a)$ disparaissent du second membre. Il viendra

$$\begin{aligned}
(10)\quad &\varphi(a+h)-\varphi(a)+A_1 h[\varphi'(a+h)-\varphi'(a)]+\ldots\\
&\quad + A_{2p-1}h^{2p-1}[\varphi^{2p-1}(a+h)-\varphi^{2p-1}(a)]\\
&\quad = h\varphi'(a)+\int_0^h \varphi^{2p+1}(a+h-u)\,F(u)\,du,
\end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$F(u)=\frac{u^{2p}}{1.2\ldots2p}+A_1\frac{hu^{2p-1}}{1.2\ldots(2p-1)}+\ldots+A_{2p-1}h^{2p-1}u.$$

Les coefficients A_1, ..., A_{2p-1} seront déterminés par les équations de condition suivantes :

$$\begin{gathered}
\frac{1}{1.2}+A_1=0,\\
\frac{1}{1.2.3}+\frac{A_1}{1.2}+A_2=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{1}{1.2\ldots2p}+\frac{A_1}{1.2\ldots(2p-1)}+\ldots+A_{2p-1}=0,
\end{gathered}$$

auxquelles on satisfera en posant

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_3 = 0, \quad \ldots, \quad A_{2p-1} = 0,$$

$$A_2 = \frac{B_1}{1.2}, \quad \ldots, \quad A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} B_k}{1.2\ldots 2k}, \quad \ldots,$$

$B_1, \ldots, B_k, \ldots$ désignant les nombres de Bernoulli. En effet, les équations qui résultent de la substitution de ces valeurs de A_1, A_2 coïncident avec celles qui déterminent ces nombres (*Calcul différentiel*, n° 269).

116. Prenons maintenant pour $\varphi(x)$ l'une quelconque des fonctions qui ont pour dérivée $f(x)$. On aura

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \int_a^{a+h} f(x)\,dx,$$

et la formule (10) donnera, en y substituant, pour $A_1, A_2, \ldots$, leurs valeurs

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} & f(x)\,dx \\ &= h\frac{f(a+h)+f(a)}{2} - \frac{1}{2}B_1 h^2[f'(a+h) - f'(a)] + \ldots \\ &\quad + \frac{(-1)^{p-1}B_{p-1}h^{2p-2}}{1.2\ldots(2p-2)}[f^{2p-3}(a+h) - f^{2p-3}(a)] + R,\end{aligned}$$

en désignant, pour abréger, par R l'intégrale définie

$$\begin{aligned}\int_0^h f^{2p}(a+h-u)\,du\Bigg[&\frac{u^{2p}}{1.2\ldots 2p} - \frac{1}{2}\frac{hu^{2p-1}}{1.2\ldots(2p-1)} \\ &+ \frac{B_1}{1.2}\frac{h^2 u^{2p-2}}{1.2\ldots(2p-2)} - \ldots\Bigg].\end{aligned}$$

En négligeant ce reste, on obtiendra la formule d'Euler.

117. Pour apprécier l'erreur commise, on remarquera que le polynome entre parenthèses, dans la formule précédente,

n'est autre chose que $h^{2p}\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)$, si l'on désigne par $\varphi_\alpha(n)$ le coefficient de x^α dans le développement de $\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}$, suivant les puissances de x (*Calcul différentiel*, n° 270). Or, de l'équation

$$\frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = n + \varphi_1(n)x + \ldots + \varphi_\alpha(n)x^\alpha + \ldots, \tag{11}$$

qui sert de définition aux polynomes $\varphi_1, \ldots, \varphi_\alpha, \ldots$, on déduit aisément plusieurs propriétés essentielles de ces polynomes :

1° Ils s'annulent pour $n = 0$ et pour $n = 1$; car, dans l'un comme dans l'autre cas, on a $\frac{e^{nx}-1}{e^x-1} = n$.

2° Prenons la dérivée de l'équation précédente par rapport à n, il viendra

$$\frac{x\,e^{nx}}{e^x-1} = 1 + \varphi'_1(n)x + \ldots + \varphi'_\alpha(n)x^\alpha + \ldots.$$

Mais on a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{x\,e^{nx}}{e^x-1} &= x\left(\frac{e^{nx}-1}{e^x-1}\right) + \frac{x}{e^x-1}\\ &= x[n + \varphi_1(n)x + \ldots + \varphi_\alpha(n)x^\alpha + \ldots]\\ &\quad + \left(-\frac{x}{2} + 1 + \frac{B_1 x^2}{1.2} - \frac{B_2 x^4}{1.2.3.4} + \frac{B_3 x^6}{1.2\ldots6} - \ldots\right).\end{aligned}$$

On aura donc, en égalant les coefficients des mêmes puissances de x,

$$\varphi'_{2k}(n) = \varphi_{2k-1}(n) + (-1)^{k+1}\frac{B_k}{1.2\ldots2k},$$
$$\varphi'_{2k+1}(n) = \varphi_{2k}(n).$$

On en conclut aisément que $\varphi_{2k+1}(n)$ ne peut reprendre plus de deux fois la même valeur dans l'intervalle de 0 à 1.

En effet, s'il prenait trois fois la même valeur, sa dérivée $\varphi'_{2k+1}(n) = \varphi_{2k}(n)$ s'annulerait pour deux valeurs au moins

comprises entre 0 et 1. Elle s'annule d'ailleurs à ces deux limites. Donc elle s'annulerait au moins quatre fois, et sa dérivée $\varphi'_{2k}(n)$ au moins trois fois. Donc $\varphi_{2k-1}(n)$ reprendrait trois fois au moins la même valeur. Il en serait évidemment de même de $\varphi_{2k-3}(n), \ldots$ et enfin de $\varphi_1(n)$, ce qui est absurde, $\varphi_1(n)$ étant un polynome du second degré.

D'ailleurs φ_{2k+1} s'annule aux deux limites 0 et 1; donc il ne pourra s'annuler entre ces deux limites, et conservera toujours le même signe.

Cela posé, dans l'intégrale

$$R = \int_0^h f^{2p}(a+h-u)h^{2p}\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du,$$

$\frac{u}{h}$ varie de 0 à 1 dans les limites de l'intégration. Le facteur $\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)$ ne change donc pas de signe, et l'on pourra poser

$$R = \mu h^{2p}\int_0^h \varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du,$$

μ étant une valeur intermédiaire entre le maximum et le minimum du facteur $f^{2p}(a+h-u)$. L'argument $a+h-u$ variant de $a+h$ à a dans le cours de l'intégration, on aura évidemment

$$\mu = f^{2p}(a+\theta h),$$

θ étant compris entre 0 et 1.

On a, d'autre part, en posant $\frac{u}{h} = t$,

$$\begin{aligned}\int_0^h \varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du &= h\int_0^1 \varphi_{2p-1}(t)\,dt \\ &= h\int_0^1 \left[\varphi'_{2p}(t) + \frac{(-1)^p B_p}{1.2\ldots 2p}\right]dt \\ &= h\left[\varphi_{2p}(t) + \frac{(-1)^p B_p}{1.2\ldots 2p}t\right]_0^1,\end{aligned}$$

et comme $\varphi_{2p}(t)$ s'annule aux deux limites, on aura enfin

$$R = f^{2p}(a+\theta h)\frac{(-1)^p B_p}{1.2\ldots 2p}h^{2p+1}.$$

118. Les nombres $B_1, B_2, \ldots$ croissant avec une rapidité extrême, la formule d'Euler deviendra le plus souvent divergente si l'on fait croître p indéfiniment. Toutefois, en donnant à ce nombre une valeur convenable, ni trop petite, ni trop grande, on obtiendra généralement une approximation largement suffisante. L'expression du reste, donnée ci-dessus, permettra d'ailleurs d'agir en sûreté.

119. Pour appliquer cette formule au calcul de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

il suffira évidemment de poser $h = b - a$.

Lorsque le champ de l'intégrale est un peu étendu, il conviendra, pour obtenir plus d'exactitude, de le subdiviser en plusieurs portions égales, en posant

$$h = \frac{b-a}{n},$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+h} f(x)\,dx + \int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx + \ldots$$
$$+ \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x)\,dx.$$

Appliquant la formule d'Euler à chacune de ces intégrales partielles et ajoutant les résultats, il viendra

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= h\left\{\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + \ldots + f[a+(n-1)h] + \frac{1}{2}f(b)\right\}$$
$$- \frac{1}{2}B_1 h^2[f'(b) - f'(a)] + \ldots$$
$$+ \frac{(-1)^{p-1}B_{p-1}h^{2p-2}}{1.2\ldots(2p-2)}[f^{2p-3}(b) - f^{2p-3}(a)],$$

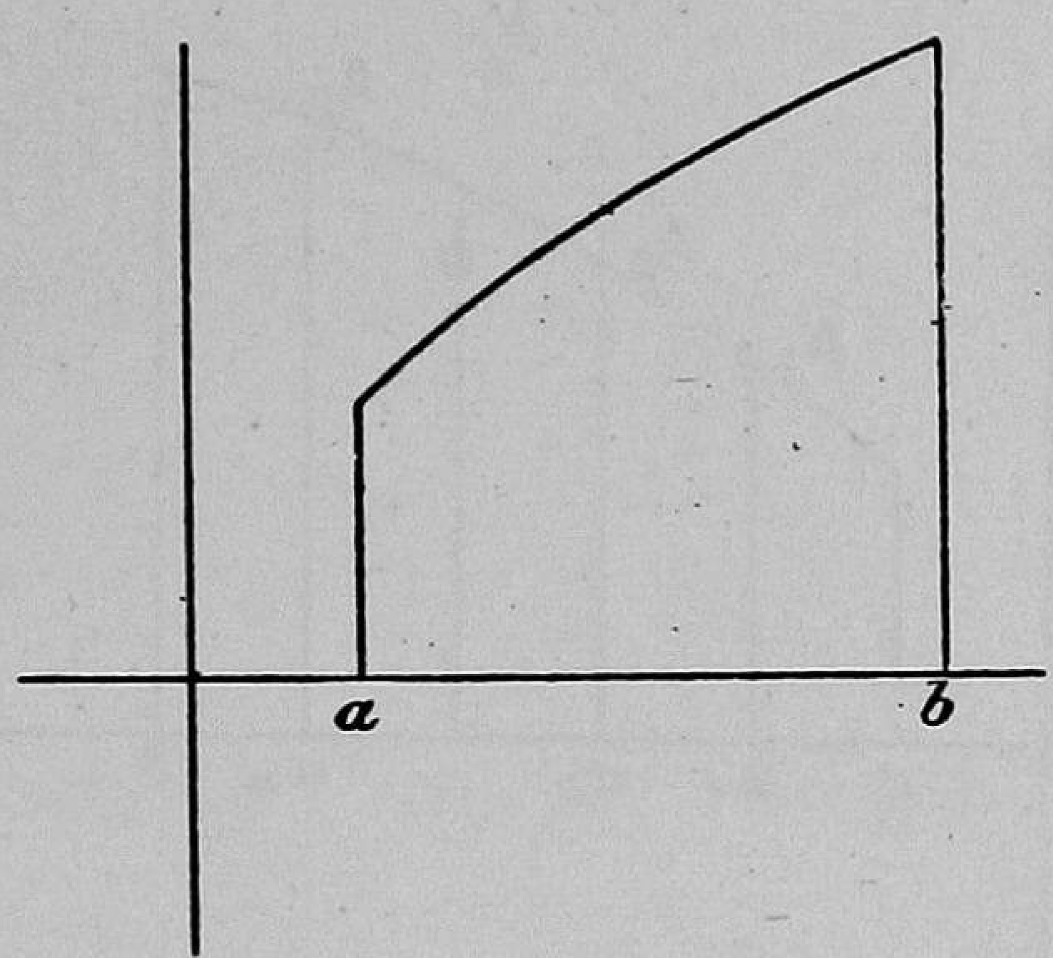
et le reste R sera donné par la formule

$$n\mu \frac{(-1)^p B_p}{1.2\ldots 2p} h^{2p+1},$$

μ étant compris entre le minimum et le maximum de $f^{2p}(x)$ dans l'intervalle de a à b.

120. Troisième méthode : *Interpolation.* — L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est représentée géométriquement par l'aire du trapèze curviligne T compris entre la courbe $y = f(x)$, l'axe des x, et les deux ordonnées $x = a$, $x = b$ (*fig.* 2).

Fig. 2.



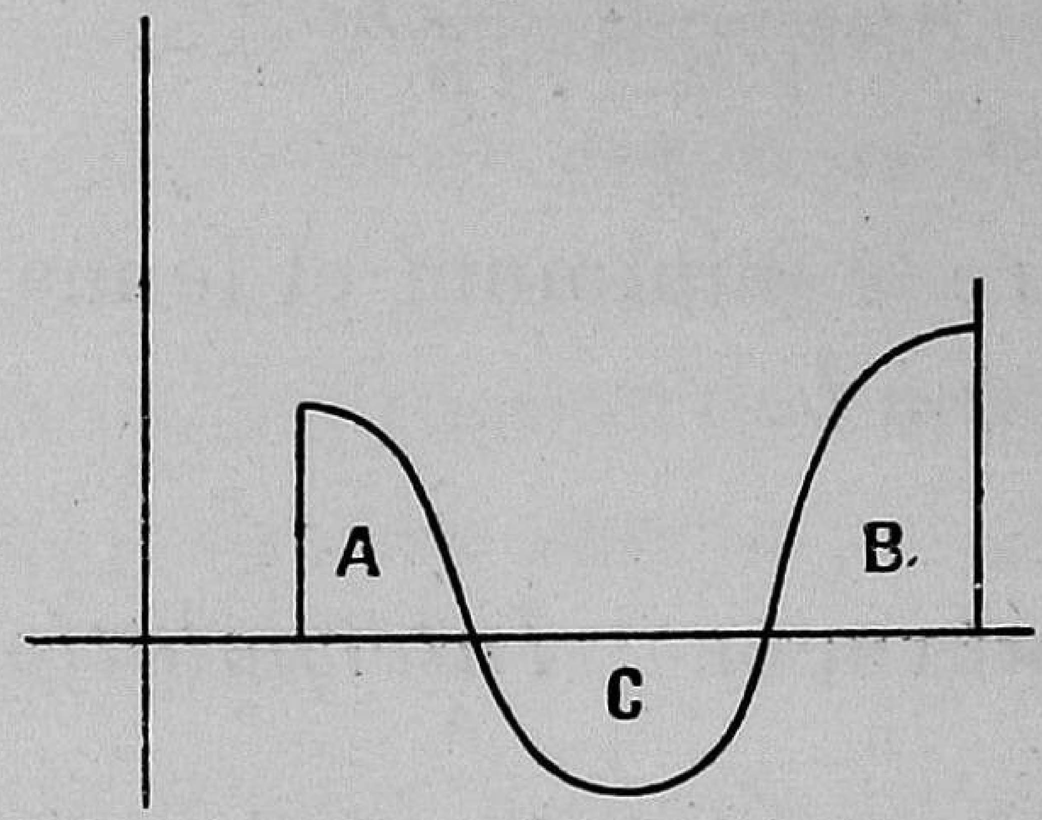
Cette aire est représentée, en effet, par l'intégrale double $S\,dx\,dy$ étendue au trapèze T. Dans ce champ, x varie de a à b. A chaque valeur de x correspondent d'ailleurs des points du champ dont l'ordonnée varie de o à $f(x)$; on aura donc

$$S\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque. — L'aire ainsi calculée sera affectée du signe + ou du signe — suivant que $f(x)$ est positif ou négatif; et si la courbe traverse l'axe des x, comme dans la figure 3, l'intégrale représentera la différence entre la somme des aires partielles A, B, situées au-dessus de cet axe, et l'aire C située au-dessous.

Le calcul de l'intégrale revient donc à la mesure de l'aire

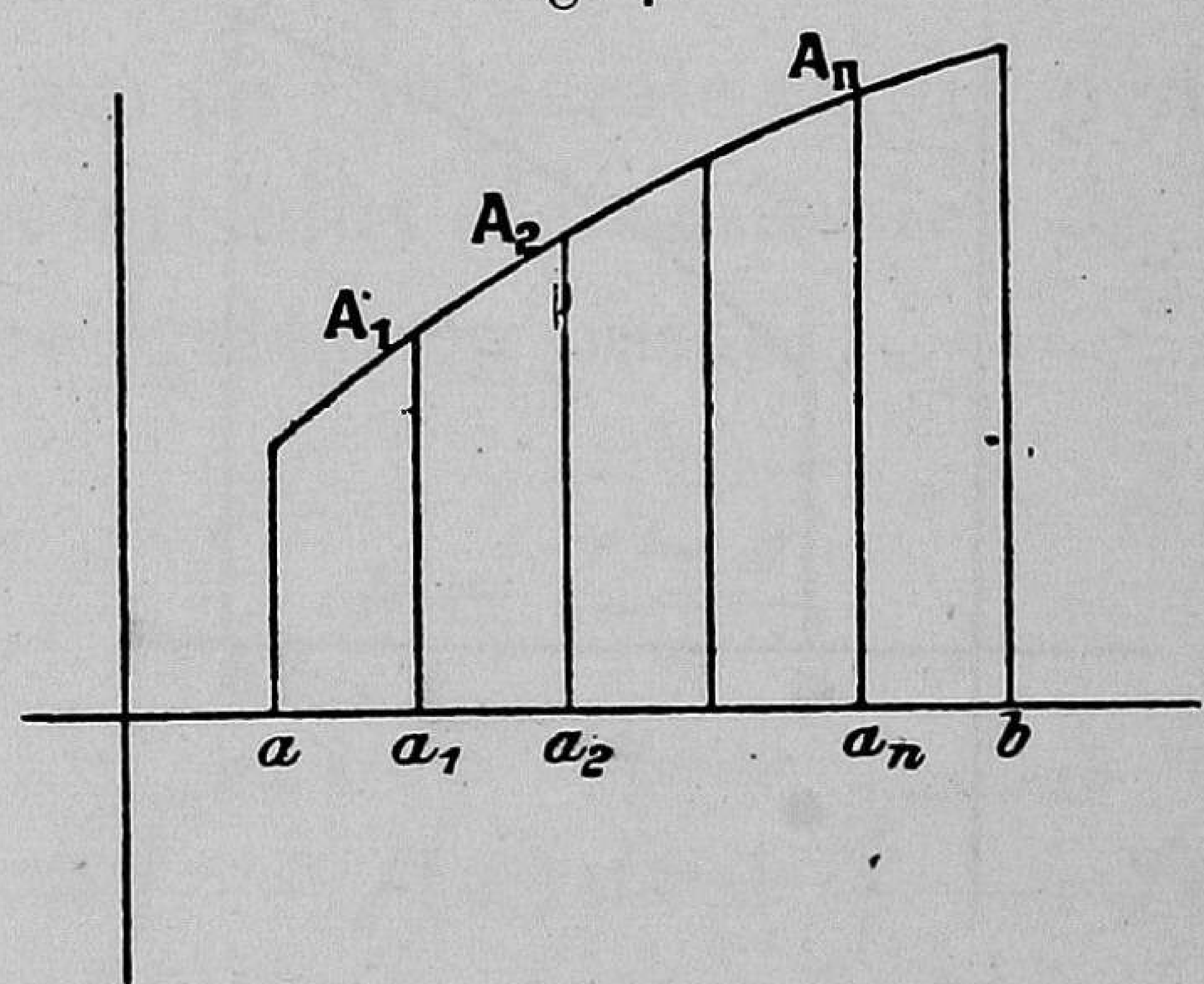
Fig. 3.



de T. Celle-ci peut se faire approximativement de la manière suivante :

Marquons sur la ligne ab (*fig.* 4) n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Fig. 4.



et mesurons les ordonnées correspondantes $y_1 = a_1 A_1, \ldots, y_n = a_n A_n$. Par les points $A_1, \ldots, A_n$ faisons passer une autre courbe $y = \varphi(x)$. Cette courbe, ayant une série de points communs avec la proposée dans l'intervalle ab, s'en éloignera vraisemblablement assez peu, et pourra lui être substituée dans le calcul de l'aire. Ce calcul pourra dès lors s'effectuer sans difficulté, si l'on a eu soin de choisir pour $\varphi(x)$ une fonction dont on connaisse l'intégrale indéfinie.

Le plus habituellement, on prend pour $\varphi(x)$ un polynome de degré $n-1$. On voit immédiatement que ce polynome aura l'expression suivante :

$$\varphi(x) = y_1 \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)} + \ldots + y_n \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

En effet, pour $x = a_1$, tous les termes de cette expression s'annulent, sauf le premier, qui se réduit à y_1 ; pour $x = a_2$, tous s'annulent, sauf le second, qui se réduit à y_2, etc.

Intégrant ce polynome de a à b, on aura, pour l'aire cherchée,

$$y_1 I_1 + \ldots + y_n I_n,$$

en désignant, pour abréger, par $I_1, \ldots, I_n$ les intégrales

$$\int_a^b \frac{(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)}dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}dx,$$

lesquelles sont indépendantes de la nature de la courbe $y = f(x)$.

121. Le calcul de ces intégrales n'offre aucune difficulté. On le simplifiera un peu en changeant de variable, de telle sorte que les limites deviennent 0 et 1. A cet effet, on posera

$$x = a + (b - a)t.$$

Soit, en outre,

$$a_1 = a + (b - a)\theta_1, \quad \ldots, \quad a_n = a + (b - a)\theta_n;$$

il viendra

$$I_1 = (b - a)J_1, \quad \ldots, \quad I_n = (b - a)J_n,$$

en posant, pour abréger,

$$J_1 = \int_0^1 \frac{(t-\theta_2)\ldots(t-\theta_n)}{(\theta_1-\theta_2)\ldots(\theta_1-\theta_n)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$J_n = \int_0^1 \frac{(t-\theta_1)\ldots(t-\theta_{n-1})}{(\theta_n-\theta_1)\ldots(\theta_n-\theta_{n-1})}.$$

Ces nouvelles intégrales ne dépendent plus de l'amplitude du champ d'intégration, mais seulement des rapports $\theta_1, \ldots, \theta_n$ des intervalles $a_1 - a, \ldots, a_n - a$ à l'intervalle total $b - a$. Si l'on détermine ces rapports toujours de la même

manière, on pourra calculer, une fois pour toutes, les constantes $J_1, \ldots, J_n$; cela fait, quelle que soit la courbe $f(x)$, on n'aura plus, pour trouver une valeur approchée de son aire, qu'à mesurer ou calculer les ordonnées $y_1, \ldots, y_n$ et à les substituer dans la formule

$$(b-a)(y_1 J_1 + \ldots + y_n J_n).$$

122. *Cotes*, qui a indiqué cette méthode, suppose les ordonnées équidistantes et pose, en conséquence, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{1}{n-1}$, $\theta_3 = \frac{2}{n-1}$, $\ldots$, $\theta_n = 1$.

Nous allons effectuer le calcul en supposant $n = 3$. On aura, dans ce cas,

$$J_1 = \int_0^1 \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1)}{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)\, dt = \left(\frac{2t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t\right)_0^1 = \frac{1}{6};$$

$$J_2 = \int_0^1 \frac{t(t-1)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \int_0^1 (-4t^2 + 4t)\, dt = \left(-\frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{2}t^2\right)_0^1 = \frac{4}{6};$$

$$J_3 = \int_0^1 \frac{t\left(t - \frac{1}{2}\right)}{1\left(1 - \frac{1}{2}\right)} dt = \int_0^1 (2t^2 - t)\, dt = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right)_0^1 = \frac{1}{6}.$$

L'aire cherchée $\mathcal{A}$ sera donc donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \frac{b-a}{6}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

On trouverait de même, pour $n = 4$,

$$\mathcal{A} = \frac{b-a}{8}(y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4);$$

pour $n = 5$,

$$\mathcal{A} = \frac{b-a}{90}(7y_1 + 32y_2 + 12y_3 + 32y_4 + 7y_5),$$

. . . .

123. *Gauss* choisit autrement les quantités $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Il se propose de les déterminer de manière à atténuer autant que possible les chances d'erreur résultant de l'application de la méthode.

Pour évaluer cette erreur, concevons qu'on ait développé $f(x)$ en une série de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m + \ldots;$$

on aura

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Sigma\alpha_m \int_a^b x^m\,dx.$$

D'autre part, $\varphi(x)$ étant une fonction linéaire des ordonnées $y_1, \ldots, y_n$, on aura évidemment

$$\varphi(x) = \Sigma\alpha_m\,\varphi_m(x),$$

$\varphi_m(x)$ étant ce que deviendrait $\varphi(x)$ si $f(x)$ se réduisait à x^m.

L'erreur commise en substituant $\varphi(x)$ à $f(x)$ sera

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx = \Sigma a_m k_m,$$

en posant, pour abréger,

$$\int_a^b [x^m - \varphi_m(x)]\,dx = k_m.$$

124. On peut donner une autre forme à cette intégrale. Effectuons, en effet, la division de x^m par le polynome de degré n

$$(x - a_1)\ldots(x - a_n) = \mathrm{P}(x);$$

il viendra

$$x^m = \mathrm{P}(x)\,\mathrm{Q}_m(x) + \mathrm{R}_m(x),$$

$Q_m(x)$ étant égal à zéro si $m < n$, à un polynome de degré $m - n$ dans le cas contraire, et $R_m(x)$ étant un polynome de degré $< n$. D'ailleurs $R_m(x)$, devenant égal à x^m pour les valeurs $a_1, \ldots, a_n$ qui annulent $P(x)$, ne sera autre chose que $\varphi_m(x)$.

On aura donc

$$x^m - \varphi_m(x) = P(x)\, Q_m(x),$$

d'où

$$k_m = \int_a^b P(x)\, Q_m(x)\, dx;$$

$Q_0(x), \ldots, Q_{n-1}(x)$ étant nuls, on aura

$$k_0 = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 0;$$

mais $k_n, k_{n+1}, \ldots$ différeront en général de zéro.

Néanmoins, si l'on peut déterminer les n quantités $a_1, \ldots, a_n$ qui figurent dans l'expression de $P(x)$, de manière à satisfaire aux n relations

$$(12) \qquad k_n = 0, \qquad \ldots, \qquad k_{2n-1} = 0,$$

on fera ainsi disparaître de l'expression de l'erreur les termes en $\alpha_n, \ldots, \alpha_{2n-1}$ lesquels sont vraisemblablement les plus importants, pour peu que la convergence de la série $\Sigma \alpha_m x^m$ soit rapide.

125. Pour satisfaire aux équations (12), il suffira, ainsi qu'on va le voir, de poser

$$P(x) = \frac{d^n[(x-a)(x-b)]^n}{dx^n}.$$

Tout d'abord, les racines $a_1, \ldots, a_n$ du polynome d'ordre n ainsi défini seront réelles et comprises entre a et b, ainsi que cela est nécessaire.

En effet le polynome $[(x-a)(x-b)]^n = X$ ayant n racines égales à a et n racines égales à b, sa dérivée X' aura $n - 1$ racines égales à a, $n - 1$ égales à b et une racine

réelle ξ comprise entre a et b : cela résulte du théorème de Rolle; X'', dérivée de X', aura de même $n-2$ racines égales à a, $n-2$ racines égales à b et deux racines η_1, η_2 respectivement comprises entre a et ξ, et entre ξ et b; et ainsi de suite jusqu'à $X^{(n)}$, qui n'est autre que $P(x)$.

En second lieu, chacune des quantités $k_n, \ldots, k_{2n-1}$ est de la forme

$$\int_a^b QX^{(n)}\,dx,$$

Q étant un polynome d'ordre $< n$. Or cette intégrale est nulle. En effet, l'intégration par parties donne

$$\int_a^b QX^{(n)}\,dx = (QX^{(n-1)} - Q'X^{(n-2)} + \ldots \pm Q^{(n-1)}X)_a^b$$
$$\mp \int_a^b Q^{(n)}X\,dx.$$

Or la partie tout intégrée s'annule pour $x=a$ et $x=b$, chacune des quantités $X^{(n-1)}, X^{(n-2)}, \ldots, X$ s'annulant pour ces limites. D'autre part, l'intégrale s'annule, car, Q étant d'ordre $< n$, sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est nulle.

126. Il conviendra, ainsi que nous l'avons expliqué, de transformer l'intégrale de telle sorte qu'elle ait pour limites 0 et 1; $P(x) = \dfrac{d^n[x(x-1)]^n}{dx^n}$ sera alors un polynome parfaitement défini, et l'on pourra calculer une fois pour toutes ses racines, ainsi que les valeurs correspondantes des intégrales $J_1, J_2, \ldots$.

Si les limites de l'intégrale, au lieu d'être 0 et 1, étaient -1 et $+1$, le polynome $P(x) = \dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ se confondrait, à un facteur constant près, avec le polynome X_n de Legendre, que nous avons précédemment étudié (*Calcul différentiel*, 273 à 275).

127. La méthode de Gauss, étant en général celle qui

donne le résultat le plus précis pour un nombre déterminé d'ordonnées, devra être employée de préférence lorsque ces ordonnées seront difficiles à calculer. Mais, s'il s'agit de trouver l'aire d'une courbe graphique, sur laquelle les ordonnées peuvent être mesurées immédiatement, on obtiendra de bons résultats par les méthodes plus simples que nous allons indiquer.

128. *Méthode des trapèzes.* — On divise l'aire à évaluer en n parties par des ordonnées équidistantes. A chacun des trapèzes curvilignes ainsi obtenus, on substitue le trapèze rectiligne ayant les mêmes sommets. En désignant par $y_0, \ldots,$ y_n les ordonnées, ces nouveaux trapèzes auront pour aires respectives

$$\frac{y_0 + y_1}{2}\,\frac{b-a}{n}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\,\frac{b-a}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{y_n + y_{n-1}}{2}\,\frac{b-a}{n},$$

et l'aire totale sera

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

129. *Méthode de Simpson.* — Simpson divise encore l'aire en n parties, mais dans chacun des trapèzes curvilignes il mesure l'ordonnée médiane, pour substituer à la courbe une parabole, suivant la méthode de Cotes. Il trouve ainsi, pour les aires des trapèzes successifs, en désignant par $y_0, \ldots, y_{2n}$ les ordonnées,

$$(y_0 + 4y_1 + y_2)\frac{b-a}{6n}, \quad (y_2 + 4y_3 + y_4)\frac{b-a}{6n}, \quad \ldots,$$

et pour l'aire totale

$$[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1})]\,\frac{b-a}{6n}.$$

IV. — Applications géométriques.

130. Rectification des courbes. — Une courbe plane étant définie par deux équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

on a vu que la différentielle de l'arc est donnée par la formule

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

La longueur de l'arc $s_1 - s_0$, compris entre les points t_0 et t_1, sera donc donnée par l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

1° Appliquons cette formule à la cycloïde. On aura (t. I, n° 457)

$$ds = a\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2a \sin\frac{1}{2} t\, dt,$$

d'où

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} 2a \sin\frac{1}{2} t\, dt = \left[-4a\cos\frac{1}{2} t\right]_{t_0}^{t_1}.$$

On aura, en particulier, la longueur de l'arc correspondant à une révolution entière du cercle générateur en prenant $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi$. La longueur cherchée sera $8a$.

2° Pour la parabole

$$y^2 = 2px,$$

on aura, en prenant y pour variable indépendante,

$$ds = \sqrt{y^2 + p^2}\, \frac{dy}{p},$$

d'où

$$s_1 - s_0 = \frac{1}{p}\int_{y_0}^{y_1} \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

L'intégration par parties donne

$$\int \sqrt{y^2+p^2}\,dy = y\sqrt{y^2+p^2} - \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2+p^2}};$$

mais on a

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2+p^2}} = \int \sqrt{y^2+p^2}\,dy - p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$$

et, en substituant dans l'équation précédente,

$$2\int \sqrt{y^2+p^2}\,dy = y\sqrt{y^2+p^2} + p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}}$$
$$= y\sqrt{y^2+p^2} + p^2 \log\left(\sqrt{y^2+p^2} + y\right) + c.$$

La longueur $s_1 - s_0$ de l'arc compris entre les points y_0, y_1, sera donc

$$\left[y\,\frac{\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\left(\sqrt{y^2+p^2}+y\right)\right]_{y_0}^{y_1}.$$

3° Considérons enfin l'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

On a

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt$$

ou, en posant $b^2 = a^2(1 - e^2)$,

$$ds = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt.$$

En posant

$$t = \frac{\pi}{2} + u,$$

on voit que l'arc sera représenté par une intégrale elliptique de seconde espèce

$$\int_{u_0}^{u_1} a\sqrt{1 - e^2\sin^2 u}\,du.$$

On peut prendre, pour variable indépendante, au lieu de t

ou de u, la *latitude* λ, c'est-à-dire l'angle de la normale avec le grand axe. On a

$$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{dx}{dy} = \frac{a}{b}\operatorname{tang} t,$$

d'où

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}^2\lambda}} = \frac{a\cos\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}} = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}};$$

$$\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = b\cos t\sqrt{\operatorname{tang}^2\lambda + 1} = \frac{b\cos t}{\cos\lambda}$$

et enfin

$$\frac{a}{b}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{d\lambda}{\cos^2\lambda}, \qquad dt = \frac{b}{a}\,\frac{\cos^2 t}{\cos^2\lambda}\,d\lambda;$$

d'où

$$s_1 - s_0 = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{b^2}{a}\,\frac{\cos^3 t}{\cos^3\lambda}\,d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{(1 - e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'excentricité e est faible, on obtiendra aisément une valeur approchée de cette intégrale en développant la fonction à intégrer suivant les puissances entières de e^2; dans les coefficients figureront les intégrales

$$I_m = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sin^{2m}\lambda\,d\lambda,$$

que nous savons calculer.

131. Si la courbe proposée est définie par une équation

$$r = f(\omega),$$

entre les coordonnées polaires r et ω, on aura, comme on sait,

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\omega$$

et, par suite,

$$s_1 - s_0 = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\omega.$$

132. Enfin, une courbe gauche étant définie par trois équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

on aura

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

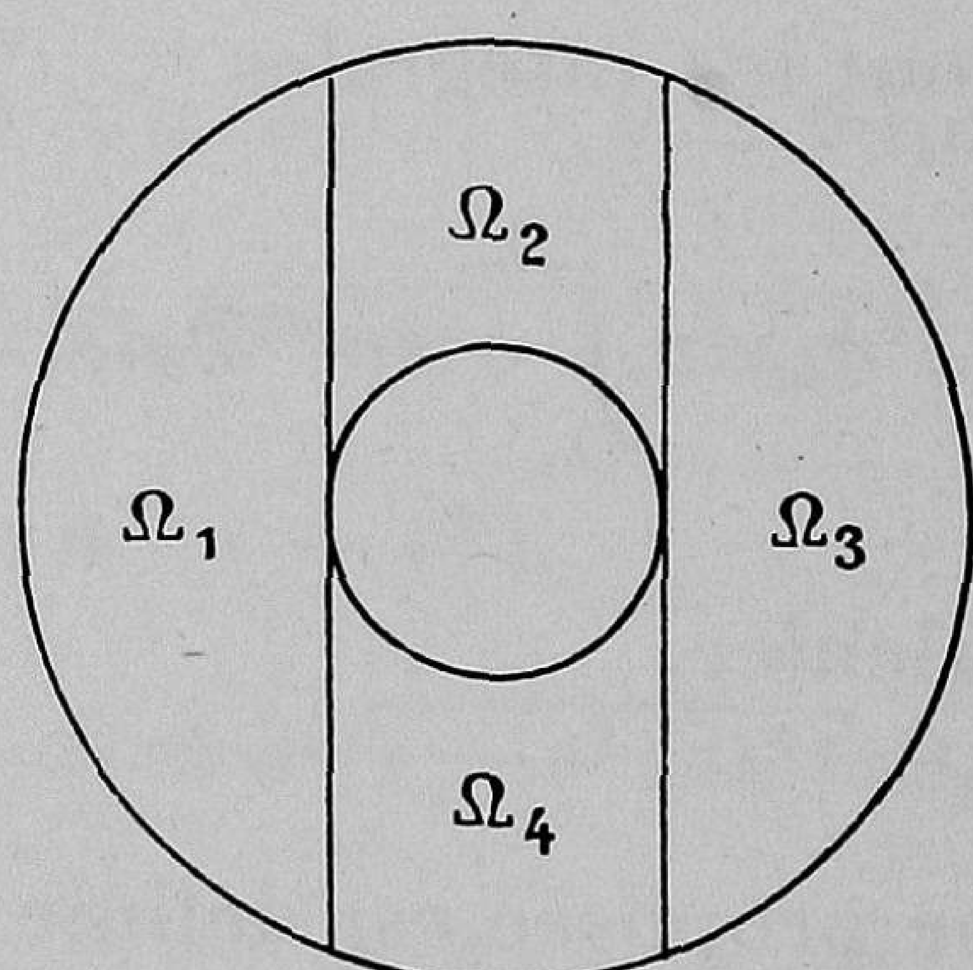
et l'arc $s_1 - s_0$ sera donné par l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

133. Aires planes. — Soit Ω une région du plan des xy, dont la frontière C soit constituée par la réunion de plusieurs arcs de courbe, dont chacun ne soit rencontré qu'en un seul point par une parallèle à l'un des axes, celui des y par exemple. (L'ensemble de ces arcs pourra former un seul contour fermé, ou plusieurs.)

Par les extrémités de ces arcs, menons des parallèles à Oy; elles décomposeront Ω en régions partielles $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, telles

Fig. 5.



qu'une parallèle à Oy, tracée dans l'intérieur de l'une d'elles, ne coupe sa frontière qu'en deux points.

(La figure 5 montre cette décomposition dans le cas où Ω est une couronne circulaire.)

L'aire de Ω est égale à la somme des aires de $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ Reste à déterminer celles-ci.

Or chacune des régions $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$, est comprise entre

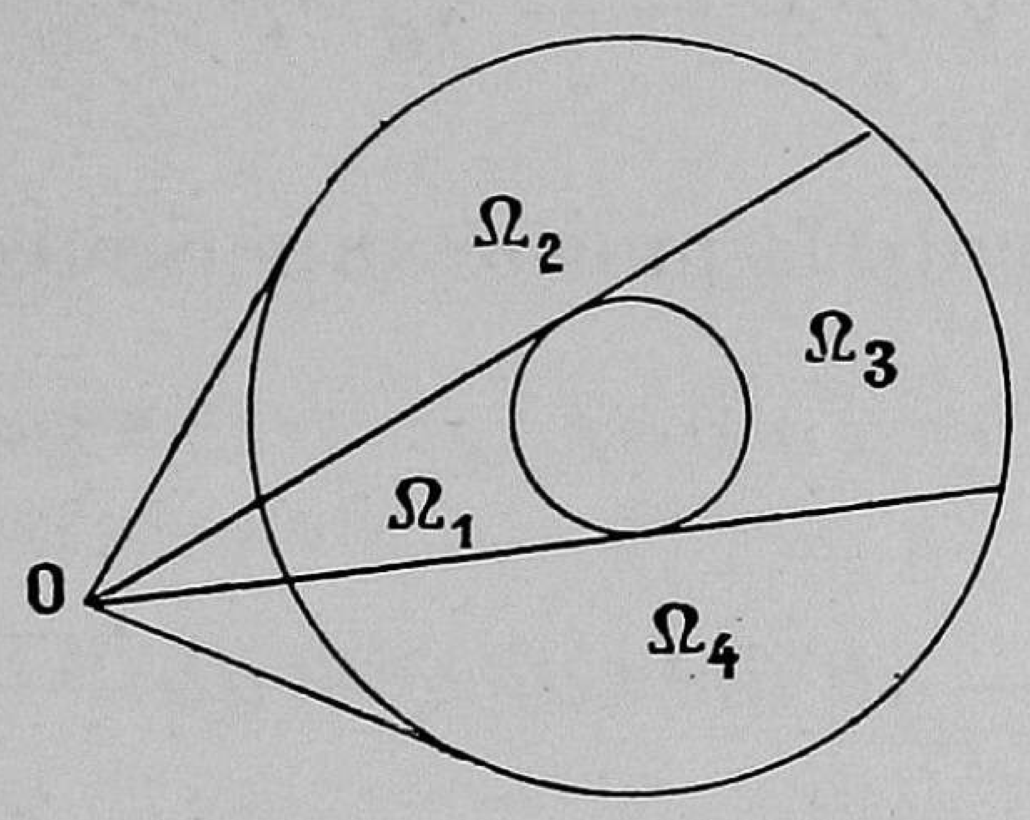
deux parallèles $x = x_0$, $x = x_1$ à l'axe Oy et elle est limitée en dessous et en dessus par deux arcs de courbe C_0, C_1, dont les ordonnées y_0, y_1 seront des fonctions connues de x. Son aire sera

$$\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy = \int_{x_0}^{x_1} [y_1 - y_0]\, dx.$$

Elle est donc donnée par une intégrale simple.

134. On obtient un résultat analogue en employant des coordonnées polaires r, φ. Supposons en effet que C résulte de la réunion d'arcs de courbe dont chacun ne soit rencontré qu'en un seul point par un rayon vecteur issu de l'origine O. Par les extrémités de ces arcs, menons des rayons vecteurs.

Fig. 6.



Si O est extérieur à Ω, ils décomposeront Ω en régions partielles Ω_1, Ω_2, ..., comprises chacune entre deux rayons vecteurs $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ et deux arcs de courbe C_0, C_1, dont les rayons vecteurs r_0, r_1, seront des fonctions connues de φ. L'aire d'une semblable région sera

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{r_0}^{r_1} r\, dr\, d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [r_1^2 - r_0^2]\, d\varphi.$$

Le cas où le point O serait intérieur à Ω ou situé sur sa frontière se ramène immédiatement au précédent en excluant du champ Ω une région infiniment petite entourant le point O.

135. L'aire du trapèze curviligne limité par les droites $x = x_0$, $x = x_1$, l'axe Ox et la courbe C dont l'ordonnée est y, est représentée, comme on vient de le voir, par l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$.

1° Si C est l'hyperbole équilatère

$$xy = a,$$

l'aire cherchée sera

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{a\,dx}{x} = a \log \frac{x_1}{x_0}.$$

2° Si C est la parabole

$$y^2 = 2px,$$

cette aire sera

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2px}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\left[x_1^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}}\right].$$

3° Si C représente la moitié supérieure de l'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t,$$

on aura

$$y\,dx = -ab\sin^2 t\,dt = -ab\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt,$$

et t variera de π à 0. L'aire cherchée sera

$$\int_{\pi}^{0} -ab\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = -ab\left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}\right]_{\pi}^{0} = \frac{\pi ab}{2}.$$

4° Enfin, si C est la cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t),$$

on aura

$$y\,dx = a^2(1-\cos t)^2\,dt = a^2\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt,$$

et si t varie de t_0 à t_1, l'aire du trapèze correspondant sera

$$\int_{t_0}^{t_1} y\,dx = a^2\left[t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t_0}^{t_1}.$$

L'aire comprise entre l'axe des x et la cycloïde pour une révolution complète du cercle générateur s'obtiendra en posant $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi$. Elle est égale à $3\pi a^2$.

136. Aire d'une surface courbe. — L'aire d'une portion de surface courbe, définie par les équations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v), \qquad z = \varphi_2(u, v),$$

est donnée par l'intégrale double

$$S\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv,$$

A, B, C désignant les jacobiens des fonctions φ, φ_1, φ_2, prises deux à deux.

Il existe deux cas assez étendus où l'on peut effectuer l'une des deux intégrations nécessaires pour le calcul de cette intégrale double.

137. Considérons, en premier lieu, la surface engendrée par le mouvement hélicoïdal d'une courbe. (Ce cas comprend celui des surfaces de révolution.) Prenons pour axe des z l'axe de ce mouvement, et soient

$$X = f(u), \qquad Z = \varphi(u)$$

les équations de la section de la surface par le plan des xy. Lorsqu'elle aura tourné d'un angle v, elle se sera élevée de mv, m désignant une constante. Le point (X, Y) sera donc venu en un point (x, y, z), où

$$x = X\cos v, \qquad y = X\sin v, \qquad z = Z + mv.$$

Les deux variables indépendantes seront u et v, et l'on aura

$$\begin{aligned} A &= X'\sin v . m - X\cos v . Z', \\ B &= -Z'. X\sin v - m . X'\cos v, \\ C &= X'\cos v . X\cos v + X\sin v . X'\sin v = XX', \\ \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} &= \sqrt{m^2 X'^2 + X^2 Z'^2 + X^2 X'^2}. \end{aligned}$$

Cette expression ne dépendant que de u, l'intégration par rapport à v sera immédiate.

138. Cherchons, d'après cette formule, l'aire du tore engendré par la révolution du cercle

$$X = a + r\cos u, \qquad Z = r\sin u.$$

On aura

$$m = 0, \qquad Z'^2 + X'^2 = r^2,$$

et la fonction à intégrer se réduira à

$$rX = r(a + r\cos u).$$

On aura à intégrer de 0 à 2π par rapport à v, puis par rapport à u. La première intégration donnera

$$2\pi r(a + r\cos u)$$

et la seconde

$$[2\pi r(au + r\sin u]_0^{2\pi} = 2\pi r \cdot 2\pi a.$$

139. Le second cas est celui des surfaces réglées, définies par les équations

$$x = a + bu, \qquad y = a_1 + b_1 u, \qquad z = a_2 + b_2 u,$$

a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 étant des fonctions d'un paramètre v.

En désignant leurs dérivées par a', b', ..., on aura

$$C = b(a'_1 + b'_1 u) - b_1(a' + b'u),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par suite, $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ sera de la forme

$$\sqrt{M + 2Nu + Pu^2},$$

où M, N, P ne dépendent que de v. Or nous savons effectuer l'intégration indéfinie de ce radical par rapport à u.

140. Considérons comme application le paraboloïde hy-

perbolique défini par les équations

$$x = a + b u + c v + d uv,$$
$$y = a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 uv,$$
$$z = a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 uv,$$

a, b, ... étant des constantes.

Chacun des jacobiens A, B, C sera de la forme

$$\alpha + \beta u + \gamma v.$$

L'expression à intégrer sera donc de la forme

$$\sqrt{F}\, du\, dv,$$

F étant une fonction du second degré en u, v et positive.

Proposons-nous de calculer l'aire de la portion de surface comprise entre les quatre génératrices $u = u_0, u = u_1, v = v_0$, $v = v_1$. Prenons pour variables indépendantes, au lieu de u et v, de nouvelles variables ξ, η fonctions linéaires de u et de v. Ces fonctions pourront être choisies de manière à ramener F à la forme

$$m(1 + \xi^2 + \eta^2),$$

m étant un facteur constant. Le jacobien de la transformation est également une constante. Enfin on voit aisément que le nouveau champ d'intégration sera un parallélogramme. Or un parallélogramme (et généralement un polygone quelconque) peut être considéré comme une somme algébrique de triangles ayant un sommet à l'origine des coordonnées.

Cherchons donc la valeur de l'intégrale

$$S\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}\, d\xi\, d\eta$$

dans un semblable triangle.

Posons

$$\xi = r \cos\omega, \qquad \eta = r \sin\omega,$$

l'intégrale se transformera en

$$S\sqrt{1+r^2}\,r\,dr\,d\omega.$$

Les côtés du triangle qui passent par l'origine ont des équations de la forme

$$\omega=\omega_0, \qquad \omega=\omega_1$$

et le côté opposé une équation de la forme

$$r=\frac{p}{\cos(\omega-\lambda)},$$

p et λ étant des constantes. La première intégration, par rapport à r, peut s'effectuer et donne comme résultat

$$\left[\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{p}{\cos(\omega-\lambda)}} d\omega=\frac{1}{3}\,\frac{[\cos^2(\omega-\lambda)+p^2]^{\frac{3}{2}}}{\cos^3(\omega-\lambda)}\,d\omega-\frac{1}{3}\,d\omega.$$

Il restera à intégrer cette expression de ω_0 à ω_1. Cette intégration peut s'effectuer aisément en posant, dans le premier terme de la différentielle proposée,

$$\sin(\omega-\lambda)=t.$$

Il sera transformé en

$$\frac{1}{3}(1-t^2+p^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dt}{(1-t^2)^2},$$

expression intégrable par les méthodes connues.

141. Considérons enfin l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Cherchons l'aire S de la moitié de cet ellipsoïde située au-dessus du plan des xy.

Décomposons l'ellipse de base

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en éléments infiniment petits $d\sigma$. Chacun d'eux sera la projection d'un élément de l'aire cherchée, égal à

$$\frac{d\sigma}{\cos\varphi},$$

φ désignant l'angle que la normale à l'élément fait avec l'axe des z. Nous aurons donc à calculer l'intégrale double

$$\mathrm{S}\frac{d\sigma}{\cos\varphi}.$$

Or on a

$$\cos\varphi = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

Le lieu des points pour lesquels φ est constant sera donc la courbe définie par l'équation (1) et la suivante

$$\cos^2\varphi\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) = \frac{z^2}{c^4}.$$

Éliminant z^2, on aura, pour la projection de cette courbe sur le plan des xy, l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}\cos^2\varphi\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2}\cos^2\varphi\right) = 1 - \cos^2\varphi,$$

dont l'aire U sera

$$\pi ab\frac{1 - \cos^2\varphi}{\sqrt{(1 - \alpha^2\cos^2\varphi)(1 - \beta^2\cos^2\varphi)}},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = \alpha^2, \qquad \frac{b^2 - c^2}{b^2} = \beta^2.$$

La somme des éléments $d\sigma$, compris entre les ellipses φ et $\varphi + d\varphi$, sera évidemment $d\mathrm{U}$, et la bande correspondante de l'ellipsoïde aura évidemment pour aire $\frac{d\mathrm{U}}{\cos\varphi}$. On obtiendra S en sommant toutes ces bandes, de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui conduit à déterminer l'intégrale simple

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \frac{d\mathrm{U}}{\cos\varphi}.$$

142. Considérons d'abord l'intégrale indéfinie.

L'intégration par parties donnera

$$\int \frac{d\mathrm{U}}{\cos\varphi} = \frac{\mathrm{U}}{\cos\varphi} - \int \mathrm{U}\, d\frac{1}{\cos\varphi},$$

et, en posant

$$\alpha\cos\varphi = \sin\psi, \qquad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = k^2,$$

d'où

$$\frac{1}{\pi ab}\mathrm{U} = \frac{1 - \frac{1}{\alpha^2}\sin^2\psi}{\cos\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}},$$

on a

$$d\frac{1}{\cos\varphi} = \alpha\, d\frac{1}{\sin\psi} = -\alpha\frac{\cos\psi\, d\psi}{\sin^2\psi},$$

$$\frac{1}{\pi ab}\int \frac{d\mathrm{U}}{\cos\varphi} = \frac{\alpha^2 - \sin^2\psi}{\alpha\sin\psi\cos\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} + \int \frac{\alpha^2 - \sin^2\psi}{\alpha\sin^2\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}.$$

Mais, en remplaçant, dans la dernière intégrale, α^2 par $\alpha^2(1 - k^2\sin^2\psi + k^2\sin^2\psi)$, elle deviendra

$$\left(-\frac{1}{\alpha} + \alpha k^2\right)\int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} + \alpha\int \frac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}{\sin^2\psi}d\psi.$$

Or

$$\frac{d\psi}{\sin^2\psi} = -d\cot\psi;$$

on aura donc, en intégrant par parties,

$$\int \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}{\sin^2\psi}\,d\psi$$
$$= -\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\cot\psi - \int \frac{k^2\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,d\psi$$
$$= -\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\cot\psi$$
$$-(k^2-1)\int \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \int\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

Réunissant ces résultats, il vient

$$\frac{1}{\pi ab}\int\frac{dU}{\cos\varphi} = \frac{\alpha^2-\sin^2\psi}{\alpha\sin\psi\cos\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\cot\psi$$
$$+\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \alpha\int\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

143. Il ne reste plus qu'à assigner les limites de l'intégration. Or, pour $\varphi=0$, on a $\psi=\arcsin\alpha$; pour $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\psi=0$.

On remarquera que la substitution $\psi=0$ rend infinis les deux termes tout intégrés. Mais leur différence s'annule; ce sont, en effet, des fonctions impaires, dont les valeurs principales $\frac{\alpha}{\psi}$ et $-\frac{\alpha}{\psi}$ se détruisent.

On obtiendra ainsi la formule

$$\frac{1}{\pi ab}S = \sqrt{1-k^2\alpha^2}\sqrt{1-\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\int_0^{\arcsin\alpha}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$$
$$+\alpha\int_0^{\arcsin\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi.$$

L'aire cherchée s'exprime donc par les intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce.

144. Volumes. — Soit K une région de l'espace dont on demande le volume.

Si la frontière Ω de K (formée par une ou plusieurs sur-

faces) peut se décomposer en un nombre fini de régions telles qu'une parallèle à Oz ne coupe chacune d'elles qu'en un seul point, menons des cylindres parallèles à Oz et ayant pour directrices les contours qui bordent ces régions. Ils décomposeront K en champs partiels, dont chacun sera limité inférieurement par une surface $z_0 = f_0(x, y)$, supérieurement par une surface $z_1 = f_1(x, y)$, et latéralement par un de nos cylindres.

Le volume correspondant sera $S\,dx\,dy\,dz$. Effectuant l'intégration par rapport à z, son expression deviendra

$$S(z_1 - z_0)\,dx\,dy = S(z_1 - z_0)\,d\sigma,$$

intégrale double ayant pour champ la section droite σ du cylindre.

145. Cherchons par exemple le volume d'un cylindre parallèle à Oz et limité, d'un côté, par le plan des xy, de l'autre, par la surface S définie par les équations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v), \qquad z = \varphi_2(u, v).$$

On aura ici $z_0 = 0$, $z_1 = \varphi_2$ et le volume cherché sera donné par l'intégrale double

$$S\,z\,d\sigma = \int\int_\sigma \varphi_2 |C|\,du\,dv,$$

C désignant le jacobien de φ et de φ_1.

Cette intégrale double se ramène elle-même à une intégrale simple :

1° Si la surface S est hélicoïdale [ou en particulier de révolution]; car on a dans ce cas (137)

$$\varphi_2 = Z + mv, \qquad C = XX',$$

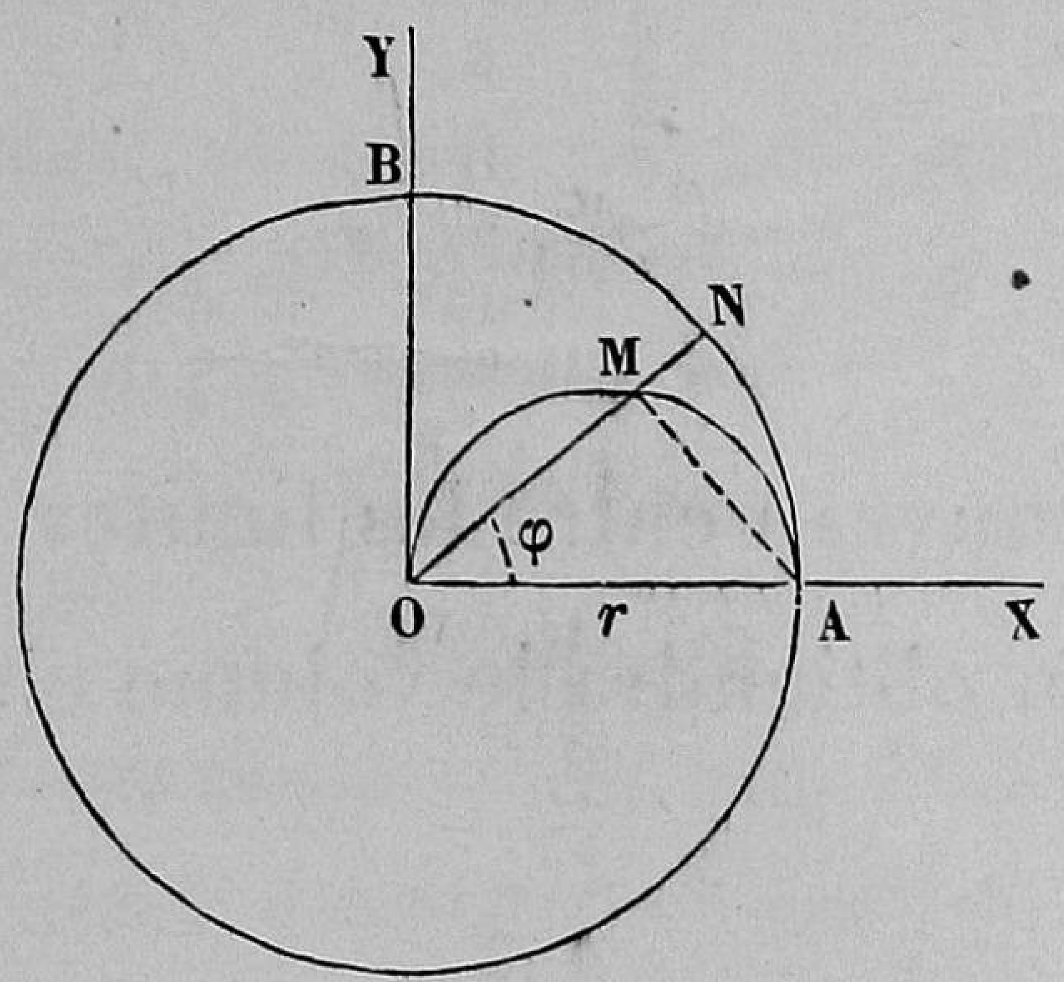
et $\varphi_2 |C|$ étant linéaire par rapport à v, on pourra effectuer l'intégration relative à cette variable;

2° Si elle est réglée, car φ_2 et C étant linéaires en u, $\varphi_2 |C|$

sera par rapport à cette variable un polynome du second degré, qu'on sait intégrer.

146. Cherchons, comme application, le volume compris entre les plans des xy, des yz, une demi-sphère de rayon r,

Fig. 7.



avec son centre à l'origine, et un cylindre droit dont la base a pour diamètre le rayon OA (*fig.* 7).

Prenons des coordonnées semi-polaires ρ, φ, z déterminées par les relations

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z.$$

L'ordonnée z de la sphère est évidemment définie par la relation

$$z = \sqrt{r^2 - \rho^2}.$$

On aura, d'autre part,

$$C = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Nous aurons donc à évaluer l'intégrale double

$$\int\int \sqrt{r^2 - \rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

le champ d'intégration étant le triangle curviligne AOB.

Une première intégration par rapport à ρ donnera pour

résultat

$$d\varphi\left[-\frac{(r^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{\text{OM}}^{\text{ON}},$$

OM et ON étant des valeurs extrêmes de ρ pour une valeur déterminée de φ. Or la figure donne $\text{OM}=r\cos\varphi$, $\text{ON}=r$. Substituant ces limites il viendra, comme résultat de la première sommation,

$$\frac{r^3}{3}\sin^3\varphi\,d\varphi.$$

Intégrant de nouveau entre les limites extrêmes de φ, qui sont ici o et $\frac{\pi}{2}$, on obtiendra le volume cherché

$$\frac{r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,d\varphi=\frac{r^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}-(1-\cos^2\varphi)\,d\cos\varphi$$

$$=\frac{r^3}{3}\left(-\cos\varphi+\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{9}r^3.$$

147. Cherchons encore le volume compris entre le plan des xy et la moitié supérieure de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Cette équation peut être remplacée par le système des suivantes

$$x=a\sin v\cos u,\qquad y=b\sin v\sin u,\qquad z=c\cos v,$$

et l'on obtiendra tous les points du demi-ellipsoïde en faisant varier u de o à 2π et v de o à $\frac{\pi}{2}$.

On aura

$$\begin{aligned}C&=-a\sin v\sin u\,.\,b\cos v\sin u\\&\quad-a\cos v\cos u\,.\,b\sin v\cos u\\&=-ab\sin v\cos v.\end{aligned}$$

Le volume cherché sera donc donné par l'intégrale double

$$abc\, \mathrm{S} \sin v \cos^2 v\, dv\, du = 2\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v \sin v\, dv$$

$$= 2\pi abc \left(- \frac{\cos^3 v}{3} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \pi abc.$$

148. Si l'on voulait adopter des coordonnée polaires r, θ, φ, on décomposerait de même K en champs partiels, limités chacun par deux surfaces

$$r_0 = f_0(\theta, \varphi), \qquad r_1 = f_1(\theta, \varphi),$$

et latéralement par un cône ayant son sommet à l'origine.

L'élément de volume étant ici $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, le volume de cette région sera

$$\mathrm{S} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

Intégrant par rapport à r, on aura l'intégrale double

$$\frac{1}{3} \mathrm{S} (r_1^3 - r_0^3) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

149. Masses. — On nomme *densité moyenne* d'un corps le rapport de sa masse à son volume. Un corps sera *homogène* si, en le décomposant d'une manière quelconque en plusieurs parties, ces diverses parties ont toutes la même densité moyenne. Dans le cas contraire, le corps sera *hétérogène.*

Considérons un corps hétérogène; soient P l'un de ses points; Q une portion du corps, qui contienne le point P. Nous admettrons que, si l'on fait décroître indéfiniment suivant une loi quelconque le diamètre de Q, sa densité moyenne tendra vers une limite déterminée. Cette limite se nomme la *densité* au point P. Cette densité variera en général d'un point à l'autre et sera une fonction des coordonnées.

Supposons que l'on connaisse cette fonction et qu'elle soit

continue. Proposons-nous de calculer, d'après ces données, la masse totale du corps. A cet effet, décomposons le corps en éléments de diamètre infiniment petit. Soient ΔV l'un d'eux; μ la densité en un point (x, y, z) choisi arbitrairement dans ΔV. La densité moyenne de l'élément sera $\mu + \varepsilon$, ε étant infiniment petit; sa masse sera donc $(\mu + \varepsilon)\Delta V$, et la masse totale M sera donnée par la formule

$$M = \Sigma(\mu + \varepsilon)\Delta V.$$

Si l'on passe à la limite, $\Sigma\varepsilon\,\Delta V$ tendra vers zéro, car son module ne peut surpasser

$$\eta \Sigma\,\Delta V = \eta V,$$

V désignant le volume du corps, et η la plus grande des quantités $|\varepsilon|$; or celles-ci tendent uniformément vers zéro dans tout le corps. Donc M sera égal à l'intégrale triple

$$\lim \Sigma\mu\,\Delta V = S\mu\,dV,$$

étendue à tout le corps.

150. Centres de gravité. Moments d'inertie. — Soient (x, y, z), (x', y', z'), ... des points de masses $m, m', \ldots$. On nomme *centre de gravité* du système le point dont les coordonnées X, Y, Z sont définies par les équations

$$X = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \qquad Y = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \qquad Z = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m},$$

et *moment d'inertie* du système par rapport à une droite la somme

$$\Sigma m\delta^2,$$

δ désignant la distance de la droite au point (x, y, z) de masse m.

Si, au lieu d'une série de points isolés, on a un corps continu, ces sommes se changeront en intégrales. Décompo-

sons, en effet, le corps en éléments infiniment petits, comme plus haut.

Soient

ΔV le volume d'un de ces éléments;
μ la densité en un de ses points (x, y, z);
δ la distance de ce point à l'axe par rapport auquel on prend les moments d'inertie.

La masse m de l'élément sera sensiblement égale à $\mu \Delta V$. D'autre part, tous les points de l'élément auront sensiblement pour coordonnées x, y, z, et leur distance à l'axe sera sensiblement égale à δ. On aura donc, en passant à la limite,

$$\begin{aligned}\Sigma m &= \lim \Sigma \mu \, \Delta V = S \mu \, dV,\\ \Sigma m x &= \lim \Sigma \mu x \, \Delta V = S \mu x \, dV,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \Sigma m \delta^2 &= \lim \Sigma \mu \delta^2 \, \Delta V = S \mu \delta^2 \, dV.\end{aligned}$$

151. *Application.* — Soit à trouver le moment d'inertie d'une sphère homogène, par rapport à un diamètre. Prenant cette droite pour axe des z et le centre de la sphère pour origine, on aura $\delta^2 = x^2 + y^2$. Il faudra donc calculer l'intégrale

$$S \mu (x^2 + y^2) \, dV.$$

On trouverait de même, pour les moments d'inertie relatifs aux axes des x et des y,

$$S \mu (y^2 + z^2) \, dV \quad \text{et} \quad \Sigma \mu (z^2 + x^2) \, dV.$$

Ces trois moments d'inertie sont égaux, chacun d'eux sera égal à la moyenne

$$\frac{2}{3} S \mu (x^2 + y^2 + z^2) \, dV.$$

En coordonnées polaires, on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad dV = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

On aura donc à calculer l'intégrale

$$\frac{2}{3} S \mu r^4 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\psi.$$

Dans l'étendue de la sphère, ψ varie de o à 2π, θ de o à π, r de o à R, rayon de la sphère.

Les intégrations sont immédiates et donnent pour résultat

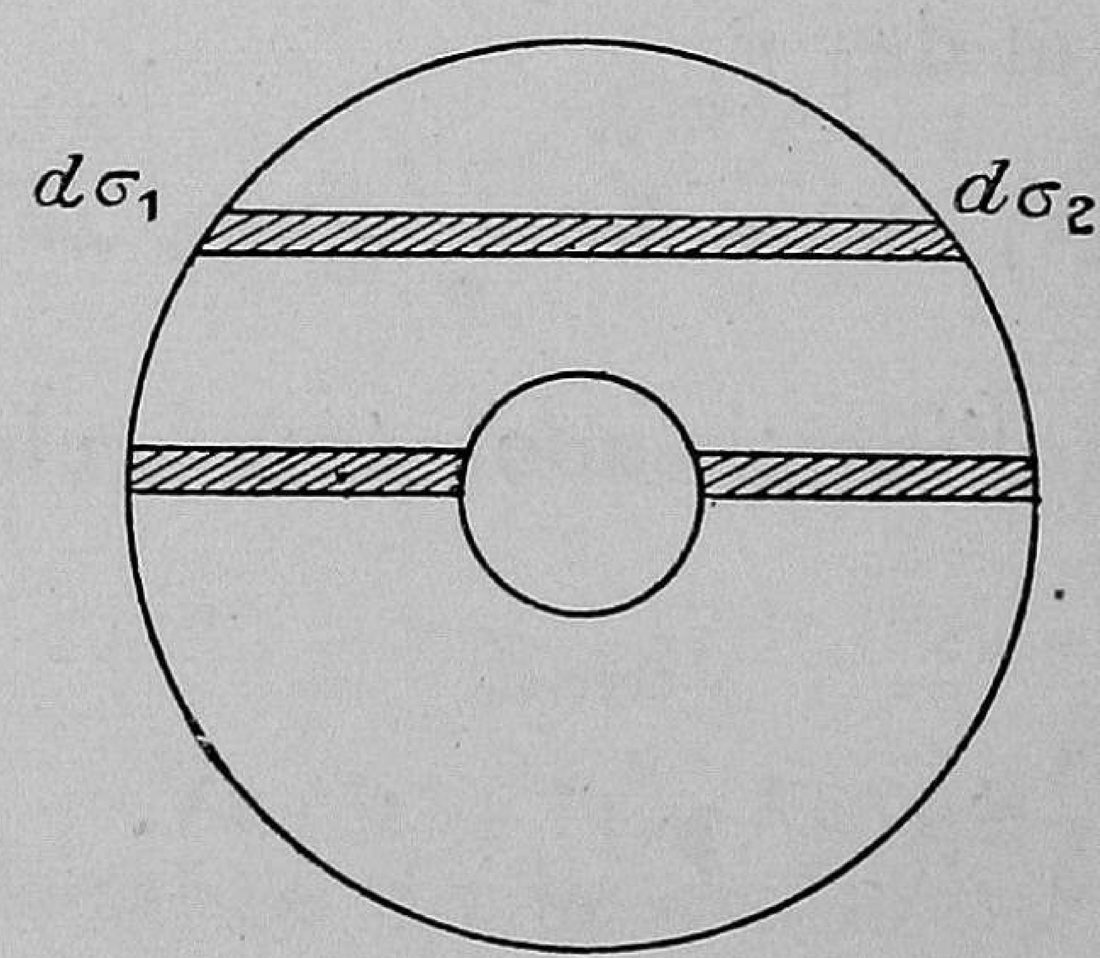
$$\mu \frac{8}{15} \pi R^5.$$

V. — Vecteurs.

152. Nous établirons dans cette section une série de relations importantes entre des intégrales définies. Toutes les démonstrations supposent qu'il s'agit d'intégrales ordinaires. Nous admettrons donc, une fois pour toutes, sans le répéter à chaque fois : 1° que le champ est borné; 2° que les fonctions arbitraires contenues dans les formules, et toutes celles de leurs dérivées qui figurent sous les signes d'intégration, sont continues dans tout le champ.

153. Soient K une région de l'espace; Ω sa frontière. Décomposons K en cylindres élémentaires parallèles à l'un

Fig. 8.



des axes coordonnés, tel que Ox, et arrêtés à leur rencontre avec Ω. La figure 8, où K représente une sphère creuse,

met en évidence quelques-uns de ces éléments cylindriques.

Soient k l'un d'eux; $d\omega$ sa section droite; $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ les éléments de Ω qui le terminent; $n_1 x$, $n_2 x$ les angles que les normales élevées sur ces éléments *extérieurement à* k forment avec Ox; $n_1 x$ sera obtus, $n_2 x$ aigu; on aura donc, en tenant compte des signes des cosinus,

$$d\omega = - ds_1 \cos n_1 x = + ds_2 \cos n_2 x.$$

L'élément de volume dans k est d'ailleurs

$$dv = dx\, d\omega.$$

Cela posé, soient P une fonction quelconque des coordonnées; P_1, P_2 ses valeurs sur $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$, et considérons l'intégrale de volume

$$\int\int\int_K \frac{\partial P}{\partial x} dv.$$

La portion de cette intégrale correspondante à k sera

$$\int_k \frac{\partial P}{\partial x} dx\, d\omega = (P_2 - P_1)\, d\omega = P_2 \cos n_2 x\, d\sigma_2 + P_1 \cos n_1 x\, d\sigma_1.$$

Sommons les résultats relatifs à tous les cylindres élémentaires, il viendra

$$\int\int\int_K \frac{\partial P}{\partial x} dv = \int\int_\Omega P \cos n x\, d\sigma. \tag{1}$$

Posons dans cette formule générale $P = x$; elle devient

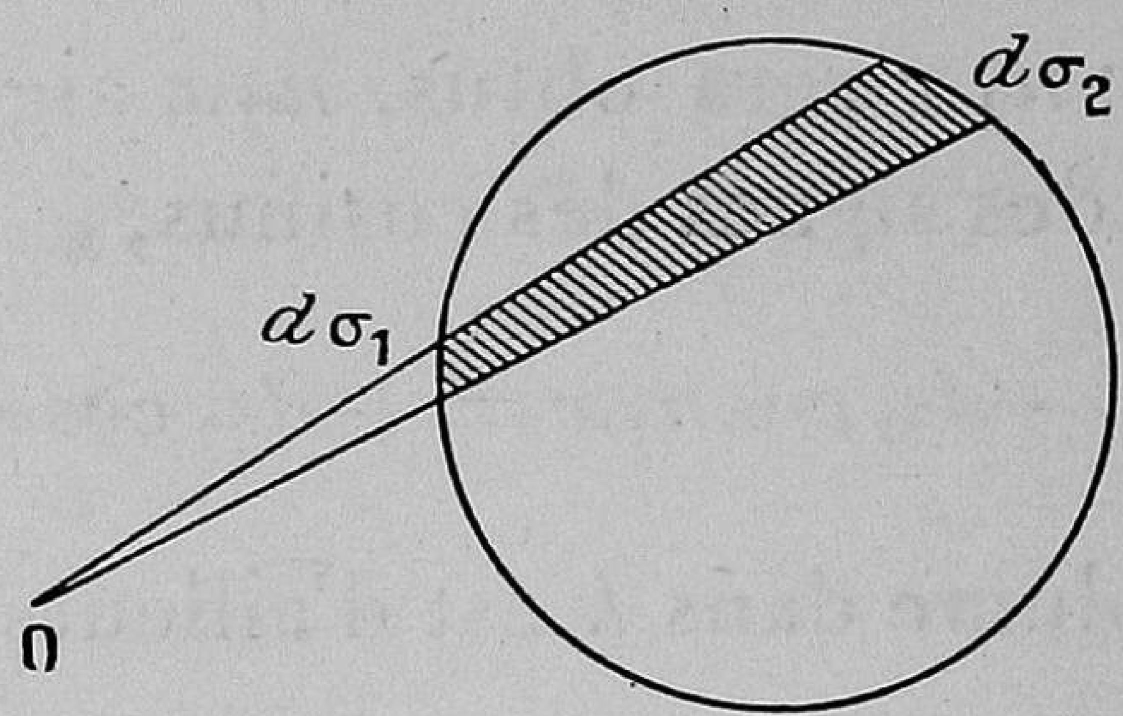
$$\int\int\int_K dv = \int\int_\Omega x \cos n x\, d\sigma \tag{2}$$

et donne l'expression du volume par une intégrale double.

154. L'emploi des coordonnées polaires r, θ, φ donne lieu à des formules du même genre.

Soit O l'origine des coordonnées. Supposons-la d'abord en dehors de K. Nous décomposerons K en éléments tronconiques (*fig.* 9). Soit k l'un d'eux. Il découpe sur une

Fig. 9.



sphère de rayon 1 et de centre O un élément $d\omega$, qui mesure son ouverture, et sur Ω des éléments $d\sigma_1$, $d\sigma_2$; soient $n_1 r$, $n_2 r$ les angles que les normales extérieures élevées sur $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ forment avec le rayon vecteur; $n_1 r$ sera obtus, $n_2 r$ aigu, et l'on aura

$$d\omega = -\frac{ds_1 \cos n_1 r}{r_1^2} = +\frac{ds_2 \cos n_2 r}{r_2^2}.$$

Considérons l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int_K \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial r}\,dv.$$

L'élément de volume dv dans k étant $r^2\,dr\,d\omega$, la portion correspondante de l'intégrale sera

$$\mathbf{S}_k \frac{\partial P}{\partial r}\,dr\,d\omega = (P_2 - P_1)\,d\omega = \frac{P_2 \cos n_2 r\,d\sigma_2}{r_2^2} + \frac{P_1 \cos n r_1\,d\sigma_1}{r_1^2}.$$

La sommation donnera

$$(3)\qquad \int\!\!\int\!\!\int_K \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial r}\,dv = \int\!\!\int_\Omega \frac{P \cos nr}{r^2}\,d\sigma.$$

155. Si O est intérieur à K, nous décrirons de ce point comme centre une sphère k, d'un rayon ρ infiniment petit. Soient k son volume, ω sa surface.

Appliquons la formule précédente au domaine $K - k$ limité par Ω et ω, on aura

$$\iiint_{K-k} \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial r}\,dv = \iint_{\Omega} \frac{P\cos nr}{r^2}\,d\sigma + \iint_{\omega} \frac{P\cos nr}{r^2}\,d\sigma.$$

Passons à la limite. L'intégrale du premier nombre tendra (93) vers

$$\iiint_{K} \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial r}\,dv.$$

D'autre part, sur ω, r a la valeur constante ρ et $\cos nr = -1$ (car la normale extérieure à $K - k$ est directement opposée au rayon vecteur). Enfin l'aire ω est égale à $4\pi\rho^2$.

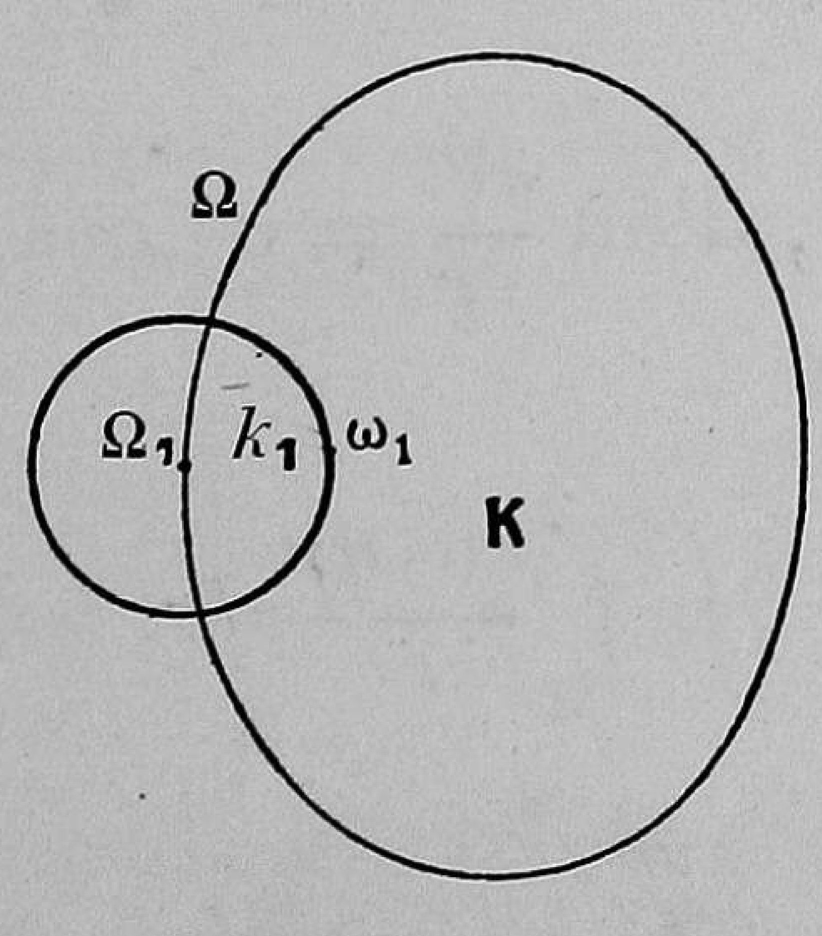
L'intégrale suivant ω sera donc égale à $\frac{-\mu}{\rho^2}4\pi\rho^2 = -4\pi\mu$, μ étant une valeur intermédiaire entre le maximum et le minimum de P sur la sphère. Lorsque ρ tend vers zéro, l'un et l'autre tendent vers P_0, valeur de P à l'origine.

On aura donc pour un point intérieur O, au lieu de la formule (3), la suivante

$$(4)\qquad \iiint_{K} \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial r}\,dv = \iint_{\Omega} \frac{P\cos nr}{r^2}\,d\sigma - 4\pi P_0.$$

156. Supposons enfin que O soit sur Ω et soit un point ordinaire sur cette surface. Soient k_1 la région commune

Fig. 10.



à K et à k; ω_1 et Ω_1 les portions de ω et de Ω qui la bordent (*fig.* 10). Appliquons la formule (3) au do-

maine $K - k_1$, bordé par $\Omega - \Omega_1$ et ω_1, puis passons à la limite. L'intégrale triple suivant $K - k_1$ tendra vers

$$\int\int\int_K \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial r} dv.$$

De même l'intégrale de surface suivant $\Omega - \Omega_1$, tendra vers

$$\int\int_\Omega \frac{P \cos nr}{r^2} d\sigma.$$

Pour l'établir il suffit (95) de montrer que, pour $r = 0$, $\frac{P \cos nr}{r^2}$ est d'un ordre d'infinitude < 2. Or, $r \cos nr$ est égal à la distance δ de l'origine au plan tangent mené à Ω_1 à l'extrémité de r; et l'on sait que δ est de l'ordre de r^2.

Enfin, l'intégrale prise suivant ω_1 est égale à $\frac{-\mu}{\rho^2}\omega_1$. A la limite μ tend vers P_0 et ω_1 vers $\frac{1}{2}\omega = 2\pi\rho^2$. La valeur limite de l'intégrale sera donc $-2\pi P_0$, et l'on aura finalement

$$\int\int\int_K \frac{1}{r^2}\frac{\partial P}{\partial r} dv = \int\int_\Omega \frac{P \cos nr}{r^2} d\sigma - 2\pi P_0. \tag{5}$$

157. Posons dans les formules précédentes $P = \frac{r^3}{3}$, d'où $P_0 = 0$; elles donneront une expression du volume de K,

$$\int\int\int_K dv = \frac{1}{3}\int\int_\Omega r \cos nr \, d\sigma. \tag{6}$$

158. Posons $P = 1$, d'où $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$; ces formules donneront la valeur de l'intégrale

$$\int\int_\Omega \frac{\cos nr}{r^2} d\sigma.$$

Elle sera égale à

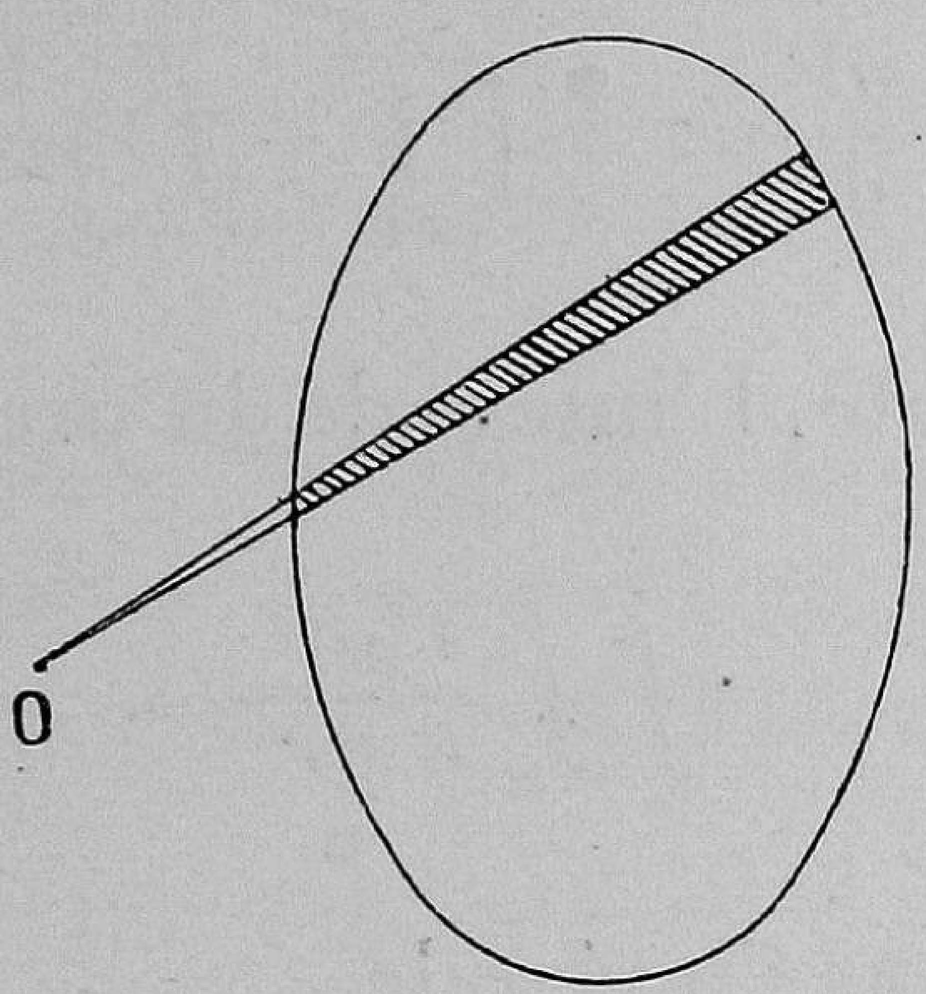
1°	zéro	si O est extérieur à K,
2°	4π	si O est intérieur,
3°	2π	si O est sur la frontière.

159. On obtient des résultats analogues pour les intégrales prises dans des domaines plans.

Soient Ω un semblable domaine; C sa frontière, formée par une ou plusieurs courbes; r, φ des coordonnées polaires, dont l'origine O soit extérieure à Ω.

Partageons Ω en bandes élémentaires, comprises chacune entre deux rayons vecteurs et arrêtées à C (*fig.* 11). Consi-

Fig. 11.



dérons l'une d'elles. Soient $d\varphi$ l'angle des deux rayons vecteurs, ds_1, ds_2 les éléments qu'elle détache sur C; $n_1 r$, $n_2 r$ les angles que les normales extérieures élevées sur ds_1, ds_2 forment avec le rayon vecteur. On aura

$$d\varphi = -\frac{ds_1 \cos n_1 r}{r_1} = +\frac{ds_2 \cos n_2 r}{r_2}$$

(ds_1, ds_2 étant pris positivement).

D'autre part, l'élément $d\sigma$ de l'aire sera $r\, dr\, d\varphi$.

Considérons donc l'intégrale

$$\int\int_\Omega \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} d\sigma = \int\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial r} dr\, d\varphi.$$

La partie de cette intégrale relative à la bande élémentaire sera

$$(P_2 - P_1)\, d\varphi = \frac{P_2 \cos n_2 r}{r_2} ds_2 + \frac{P_1 \cos n_1 r}{r_1} ds_1,$$

et la sommation donnera

$$(7)\qquad \int\int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}d\sigma = \int_C \frac{P\cos nr}{r}ds.$$

160. Si O est intérieur à Ω, décrivons de ce point comme centre un cercle de rayon infiniment petit ρ; soient ω son aire, c sa circonférence. Appliquons la formule précédente au domaine $\Omega - \omega$ borné par C et c. Il viendra

$$\int_{\Omega-\omega}\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}d\sigma = \left(\int_C + \int_c\right)\frac{P\cos nr}{r}ds.$$

Passons à la limite. L'intégrale du premier membre tendra vers

$$\int\int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}d\sigma.$$

D'autre part, dans l'intégrale

$$\int_c \frac{P\cos nr}{r}ds,$$

on a $r = \rho$, $\cos nr = -1$. L'intégrale aura donc pour valeur

$$\frac{-\mu}{\rho}2\pi\rho = -2\pi\mu,$$

μ désignant une valeur moyenne de P sur c. Or, à la limite, μ tend vers P_0; on aura donc finalement

$$(8)\qquad \int\int_\Omega \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}d\sigma = \int_C \frac{P\cos nr}{r}ds - 2\pi P_0.$$

Si O était sur la frontière, on verrait, comme au n° 156, que le terme complémentaire $-2\pi P_0$ devrait être réduit de moitié.

161. Posant dans les formules ci-dessus $P = \frac{r^2}{2}$, on aura

l'expression de l'aire

$$\iint_\Omega d\sigma = \frac{1}{2}\int_c r \cos nr\, d\sigma. \tag{9}$$

En posant $P = 1$, on aura la valeur de l'intégrale

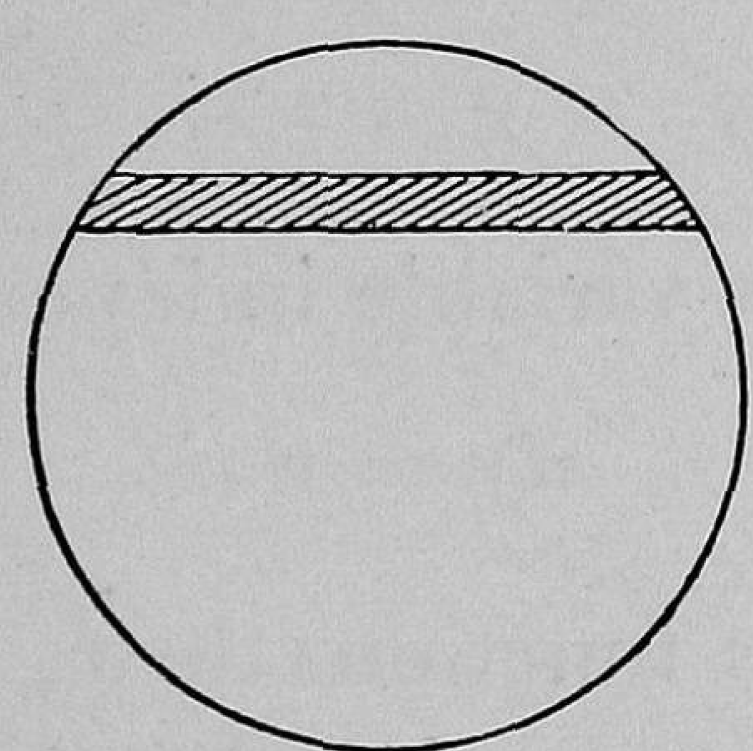
$$\int_c \frac{\cos nr}{r}\, ds,$$

à savoir

0	pour O extérieur,
2π	pour O intérieur,
π	pour O sur la frontière.

162. Si au lieu des coordonnées polaires on emploie des coordonnées cartésiennes x, y, on décomposera Ω en bandes parallèles à Ox (*fig.* 12). Considérons l'une d'elles, de

Fig. 12.



largeur dy, et limitée par les arcs élémentaires ds_1, ds_2; on aura, n_1x, n_2x désignant les angles des normales extérieures avec Ox

$$dy = -ds_1 \cos n_1x = +ds_2 \cos n_2x.$$

La portion de l'intégrale

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\, d\sigma$$

correspondant à cette bande sera

$$(P_2 - P_1)\, dy = P_2 \cos n_2x\, ds_2 + P_1 \cos n_1x\, ds_1.$$

Par une sommation, on trouvera

$$(10)\qquad \int\!\!\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\,d\sigma = \int_C P\cos nx\,ds.$$

163. Posant $P = x$, nous aurons une nouvelle expression de l'aire

$$(11)\qquad \int\!\!\int_\Omega d\sigma = \int_C x\cos nx\,ds.$$

Posant d'autre part $P = 1$, il vient

$$\int_C \cos nx\,ds = 0.$$

C'est le théorème des projections.

164. Intégrales curvilignes. — Soit L un arc de courbe, défini par les équations

$$x = \varphi s,\qquad y = \varphi_1 s,\qquad z = \varphi_2 s,$$

l'arc s étant pris pour variable indépendante. On aura

$$dx = x'\,ds,\qquad dy = y'\,ds,\qquad dz = z'\,ds.$$

Soient P, Q, R des fonctions de x, y, z; leurs valeurs en chaque point de L seront déterminées en fonction de s; et si s_0, s_1 sont les valeurs de s au commencement et à la fin de L, on pourra calculer l'intégrale

$$\int_{s_0}^{s_1} (Px' + Qy' + Rz')\,ds.$$

Une expression de ce genre se nomme une *intégrale curviligne* prise suivant L et se représente par la notation

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Elle changerait évidemment de signe si l'on décrivait la ligne L en sens contraire, ds devenant négatif.

Au contraire, dans les formules des n°s 159-163, les éléments ds sont pris toujours positivement.

La valeur de l'intégrale curviligne variera en général, si l'on remplace L par une autre ligne d'intégration L′ ayant les mêmes extrémités.

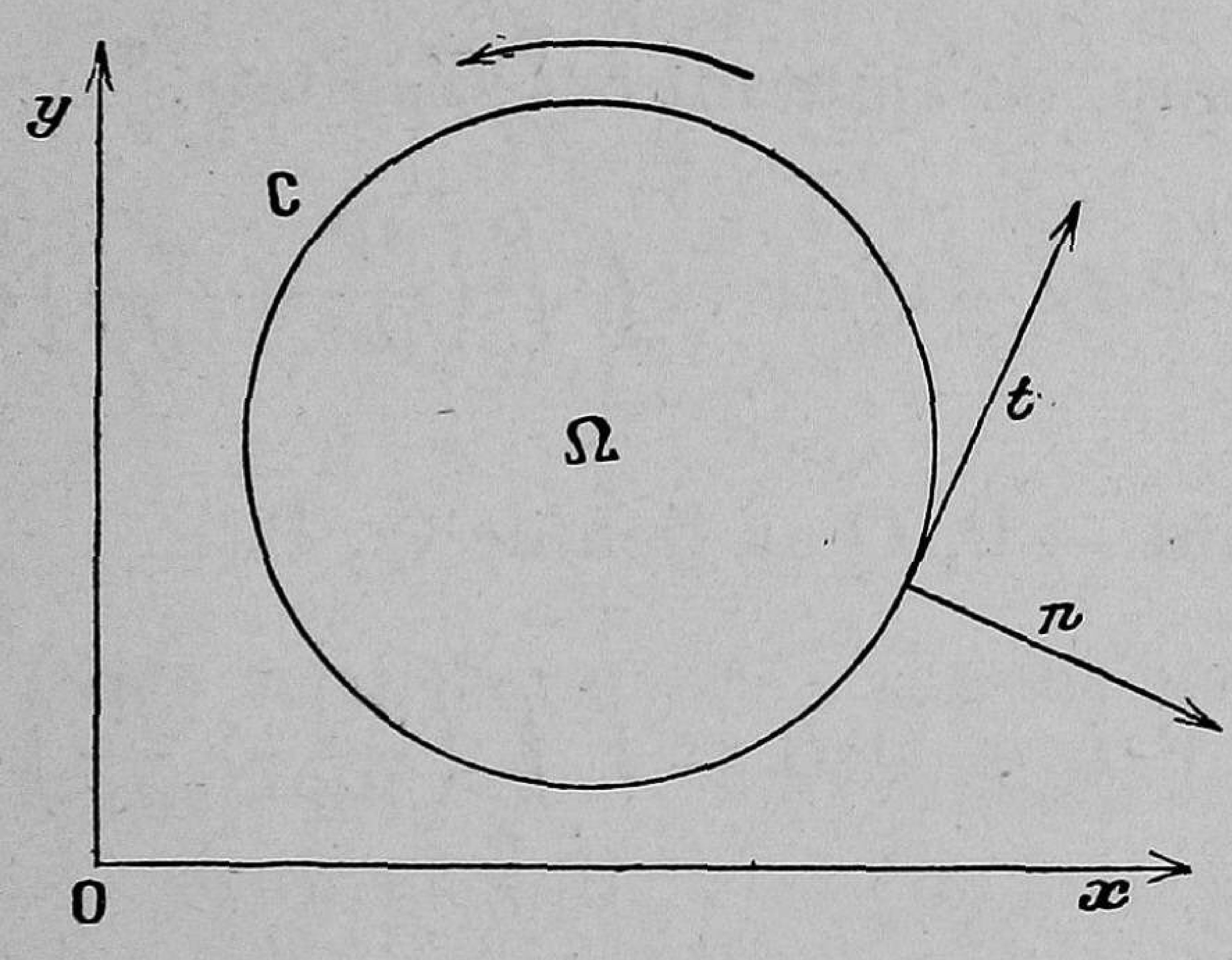
Si la ligne L est située dans le plan des xy, z et dz seront nuls et l'intégrale se réduira à

$$\int_L P\,dx + Q\,dy,$$

où P, Q sont des fonctions de x, y.

165. Ces définitions posées, considérons, dans le plan des xy, un contour fermé C (*fig.* 13). Soient n la normale

Fig. 13.



extérieure en l'un de ses points, nx l'angle qu'elle fait avec Ox; t la tangente menée dans un sens tel que les demi-droites n, t aient entre elles les mêmes relations de position que Ox, Oy; on aura, pour un petit déplacement ds dans le sens de t,

$$dy = ds \cos nx.$$

Si donc on décrit le contour C dans le sens indiqué par la flèche, l'intégrale curviligne obtenue $\int_C P\,dy$ sera égale à $\int_C P \cos nx\,ds$, ou à l'intégrale double $\int\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}\,d\sigma$.

Si un observateur, debout sur le plan des xy et regardant suivant Ox laisse Oy à sa gauche (supposition habituelle en géométrie plane et représentée dans la figure), le même observateur décrivant le contour devra laisser Ω à sa gauche. Si Oy était à droite de Ox, il devrait laisser Ω à droite (c'est la supposition admise dans la géométrie à trois dimensions).

En permutant P, x, y avec Q, y, x, on trouverait de même que $\int_C Q\,dx$ est égal à $\int\int_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx$, mais à la condition de changer le sens dans lequel C est décrit; car si Oy est à gauche de Ox, Ox sera à la droite de Oy. Revenant au sens primitif, on aura

$$-\int_C Q\,dx = \int\int_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}\,d\sigma.$$

On aura donc, en ajoutant ces résultats,

$$\int_C P\,dy - Q\,dx = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) d\sigma,$$

ou, en écrivant $-$P, Q au lieu de Q, P,

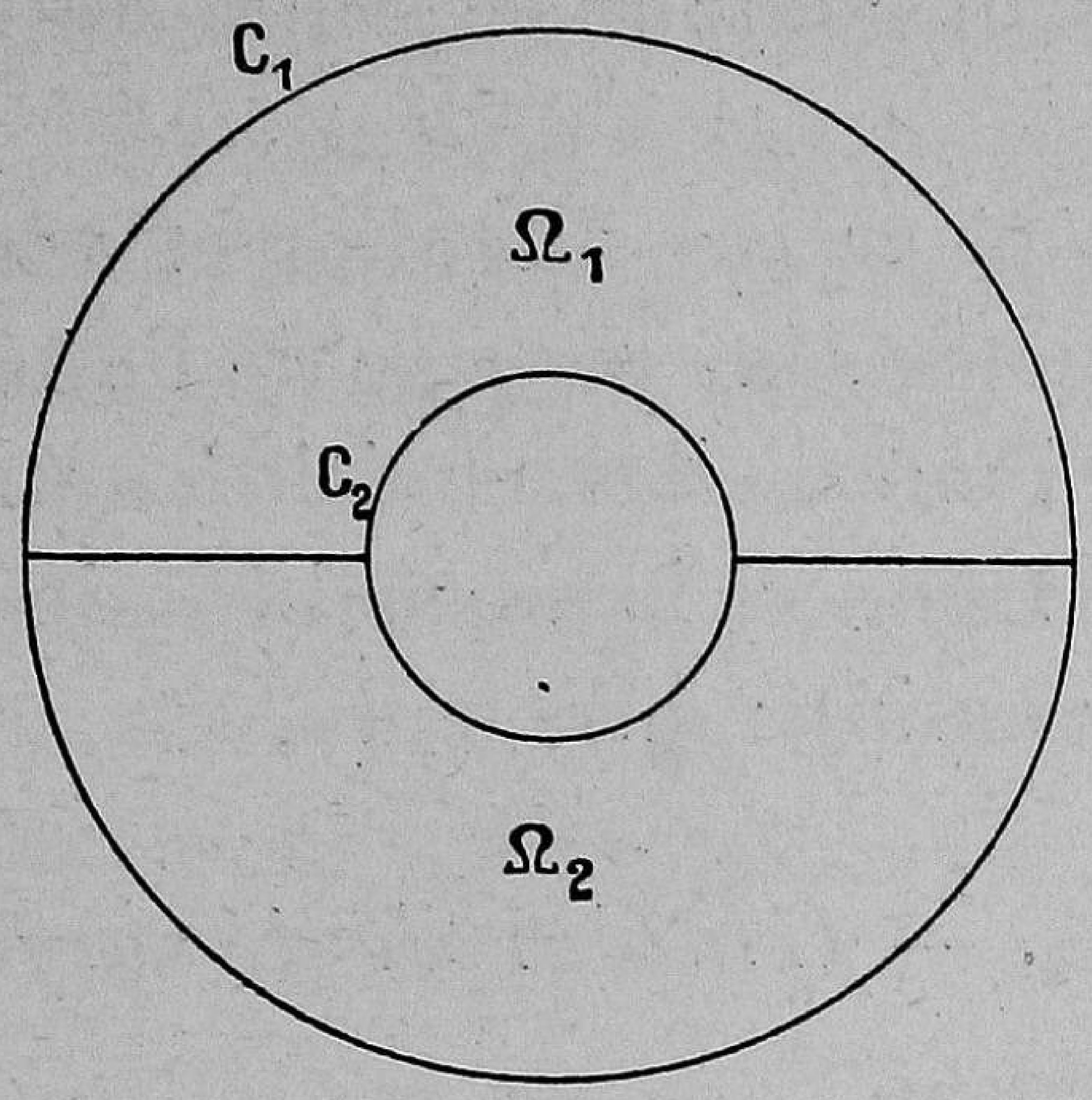
$$(12) \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy = \int\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma.$$

166. Cette formule subsiste pour un domaine Ω dont la frontière C serait formée de plusieurs contours fermés C_1, C_2, ... (*fig.* 14).

Décomposons, en effet, par des transversales, le domaine Ω en domaines partiels Ω_1, Ω_2, ... limités chacun par un seul contour. Appliquons la formule à chacun d'eux et ajoutons les résultats. Les intégrales doubles s'ajouteront, ainsi que les intégrales curvilignes prises sur les diverses parties de C_1, C_2, ... Chaque transversale étant suivie deux fois et dans des sens différents, les intégrales correspondantes se détruiront.

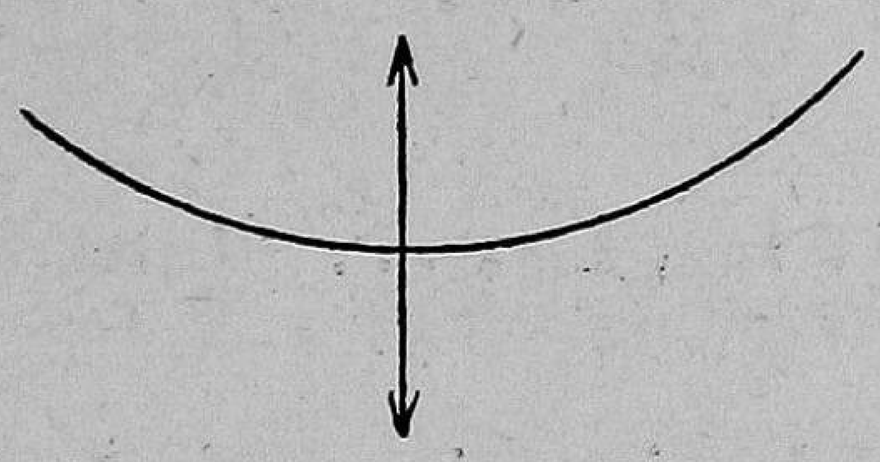
167. Soient Ω une portion de surface gauche; ayant pour frontière C, un ou plus généralement plusieurs contours

Fig. 14.



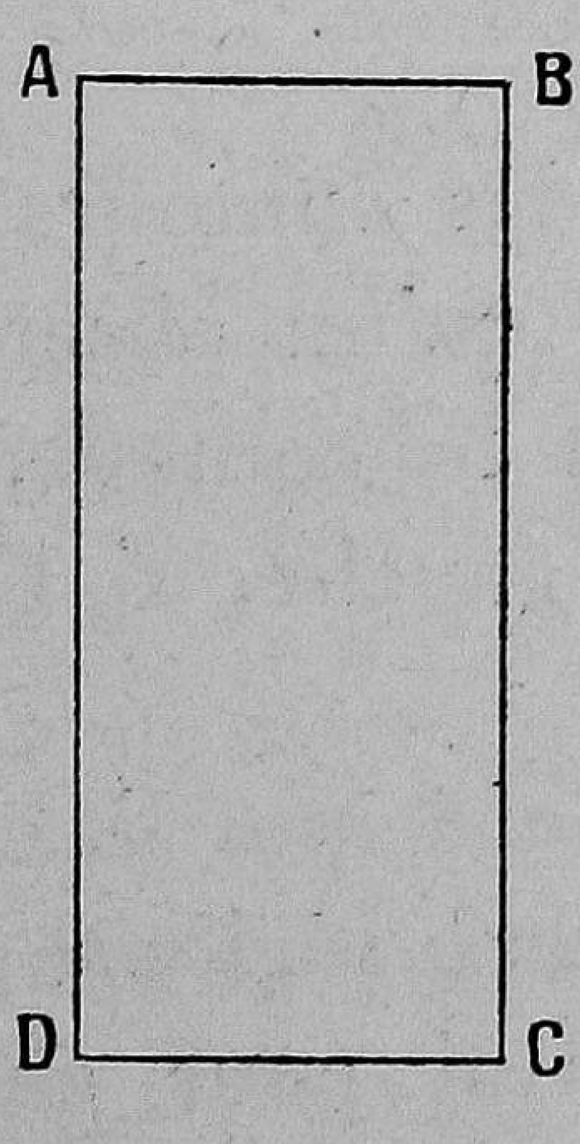
fermés C_1, C_2, ... En chaque point p de Ω, on peut y distinguer deux faces, sur chacune desquelles on peut élever une normale (*fig.* 15). Si, partant de p, on chemine sur

Fig. 15.



l'une de ces faces sans traverser C, il peut arriver qu'après avoir décrit un contour fermé convenable, on se retrouve en p sur la face opposée à celle d'où l'on était parti.

Fig. 16.



On peut réaliser cette hypothèse de la manière suivante :

prenons une feuille de papier rectangulaire ABCD et tordons-la, de manière à amener C sur A et D sur B; puis soudons les lignes AB, CD. La surface ainsi obtenue sera limitée par un seul contour et jouira de la propriété indiquée.

Laissons de côté ce cas singulier et admettons que Ω ait deux faces distinctes sans passage de l'une à l'autre. Appelons face positive l'une d'elles, choisie à notre gré; la normale n élevée sur cette face sera la normale positive. Soient $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ ses cosinus directeurs.

168. Théorème. — *L'intégrale de surface*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z}\cos ny - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\cos nz\right) d\sigma$$

est égale à l'intégrale curviligne

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}\,dx = \int_{\mathrm{C}_1} \mathrm{P}\,dx + \int_{\mathrm{C}_2} \mathrm{P}\,dx + \ldots,$$

chacun des contours C_1, C_2, ... étant décrit dans un sens convenable.

Ce sens dépend de la situation relative des directions positives $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, $\mathrm{O}z$ des axes coordonnés. On les choisit ordinairement de telle sorte qu'un observateur ayant les pieds en O, la tête en z et regardant $\mathrm{O}x$, ait $\mathrm{O}y$ à sa droite. (Cet énoncé subsisterait si l'on y permutait circulairement x, y, z.)

Dans ce cas, chacun des contours C_1, C_2, ... devra être décrit dans un sens tel qu'un observateur, debout sur la face positive, et suivant le contour, laisse Ω à sa droite (on devrait le laisser à gauche, si $\mathrm{O}y$ était à gauche du plan $z\mathrm{O}x$).

Remarquons tout d'abord que si, comme au n° 166, nous partageons Ω en plusieurs régions par des transversales, le théorème, supposé vrai pour chacune d'elles, le sera pour Ω.

Il suffira donc d'établir le théorème pour une région Ω limitée par un seul contour fermé C et assez petite pour que $\cos nz$ n'y change pas de signe.

Le choix de la face positive est d'ailleurs indifférent, car le changement de face entraîne celui du signe des cosinus, et celui du sens dans lequel C doit être décrit. Les deux membres de l'égalité à démontrer changeront donc tous deux de signe.

Nous pouvons donc supposer $\cos nz$ positif.

Cela posé, sur la surface Ω, z est une fonction déterminée de x, y. Substituant cette valeur dans $P(x, y, z)$, il viendra, sur Ω (et en particulier sur C),

$$P(x, y, z) = \mathfrak{P}(x, y),$$

$\mathfrak{P}$ étant une nouvelle fonction de x, y seuls.

Dérivons cette égalité par rapport à y, x restant constant; il vient

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}.$$

Mais la droite qui joint sur la surface les points (x, y, z) et $(x + dx, y + dy, z + dz)$ est perpendiculaire à la normale; d'où la relation

$$\cos nx\, dx + \cos ny\, dy + \cos nz\, dz = 0.$$

On en déduit

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos ny}{\cos nz}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos ny - \frac{\partial P}{\partial y}\cos nz\right) d\sigma &= -\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) d\sigma \cos nz \\ &= -\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y} d\sigma',\end{aligned}$$

$d\sigma'$ désignant l'élément de l'aire de la projection Ω' de Ω sur le plan des xy.

Soit d'autre part C′ la projection de C sur le même plan.

On aura

$$\int_C P\,dx = \int_C \mathfrak{P}\,dx = \int_{C'} \mathfrak{P}\,dx,$$

car sur C on a $\mathfrak{P} = P$, et d'autre part dx a la même valeur sur les éléments correspondants de C et de C'.

D'ailleurs C' devra être décrit dans le sens correspondant à celui de C, c'est-à-dire qu'un observateur debout sur le plan horizontal et parcourant C' devra laisser Ω' à sa droite.

L'égalité à démontrer revient donc à celle-ci

$$\int_{C'} \mathfrak{P}\,dx = -\int\int_{\Omega'} \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}\,d\sigma'.$$

Elle résulte de la formule (12) en y posant $P = \mathfrak{P}$, $Q = 0$.

169. Champs de vecteurs. — Soient F une fonction de x, y, z; l une droite de cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ issue du point (x, y, z); $F + \Delta F$ la valeur de la fonction au point $(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta, z + h\cos\gamma)$ situé sur l à une distance infiniment petite h du point (x, y, z). La limite du rapport $\frac{\Delta F}{h}$ se nomme la dérivée de F dans la direction l et se désigne par $\frac{\partial F}{\partial l}$.

Si F est développable par la série de Taylor, on aura

$$\Delta F = h\left[\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma\right] + \frac{h^2}{1.2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\cos\alpha\cos\beta + \ldots\right] + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta + \ldots.$$

Soit λ la direction opposée à l; les cosinus directeurs

auront changé de signe ; on aura donc

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -\frac{\partial F}{\partial l}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial l^2}.$$

170. Soient P, Q, R trois fonctions de (x, y, z); L un segment de droite issu du point (x, y, z) et ayant pour projections P, Q, R. Ce segment se nomme un *vecteur*. L'ensemble des vecteurs correspondants aux divers points de l'espace constitue un *champ de vecteurs*.

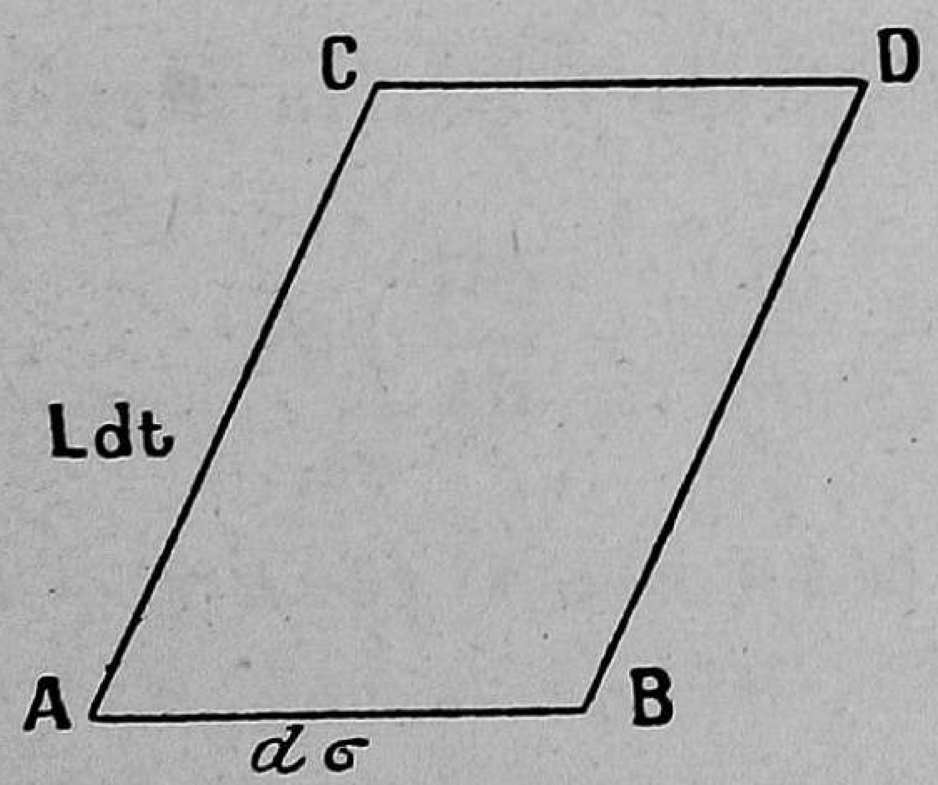
Si l'on conçoit que le vecteur représente une force, le travail accompli, lorsque le vecteur parcourt une ligne C, sera

$$\int_C L\cos(L, ds)\,ds = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

On nomme *lignes de force* celles dont la tangente en chaque point est dirigée suivant le vecteur.

Concevons d'autre part que L représente en grandeur et direction la vitesse d'un fluide en mouvement. Considérons un élément de surface $d\sigma$ passant par le point (x, y, z). Il présentera deux faces, que nous appellerons l'une positive, l'autre négative. Soient $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ les cosinus directeurs de la normale positive n. Au bout d'un instant dt, les molécules de fluide qui se trouvaient sur $d\sigma$ se seront déplacées de $L\,dt$ dans la direction de L. Celles qui les sui-

Fig. 17.



vent, en traversant $d\sigma$ de la face négative à la face positive, rempliront le cylindre ABCD (*fig.* 17) dont le volume est

$$d\sigma \cos(L, n)\,L\,dt.$$

Cette considération explique le nom de *flux élémentaire* qu'on donne à l'expression

$$L \cos(L, n)\, d\sigma = (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\sigma.$$

Si l'on changeait la dénomination des faces, les cosinus, et par suite le flux lui-même, changeraient de signe,

Le flux total à travers une surface Ω sera donné par l'intégrale

$$\int\int_{\Omega} (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\sigma.$$

On nomme encore :

Tourbillon du vecteur (P, Q, R), un nouveau vecteur ayant pour projections

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Divergence du même vecteur, la fonction

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

171. Théorème d'Ostrogradsky. — *L'intégrale de la divergence d'un vecteur dans l'intérieur d'un volume* K *est égale au flux de ce vecteur à travers sa frontière* Ω, *le flux étant compté de l'intérieur à l'extérieur.*

Cette égalité est exprimée par la formule suivante

$$(13) \quad \int\int\int_{K} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = \int\int_{\Omega} (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\sigma,$$

$\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ étant les cosinus directeurs de la normale extérieure.

Or on a établi (153) l'égalité des termes qui dépendent de P dans ces deux intégrales. En permutant x, y, z ; P, Q, R ;

on voit qu'il en sera de même des termes dépendants de Q et de R.

172. Théorème de Stokes. — *Le flux du tourbillon d'un vecteur à travers une portion de surface* Ω *est égal au travail de même vecteur lorsque son point d'application décrit le contour* C *qui forme la frontière de* Ω (dans le sens précisé au n° 168).

Ce théorème s'exprime par la formule

$$(14)\quad \int\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos nx + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos ny + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos nz\right]d\sigma = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Or l'égalité des termes dépendants de P a été établie (168). Celle des autres termes s'en déduit par une permutation circulaire.

173. Certains champs particuliers méritent une mention spéciale

Champs à potentiel. — Ce sont ceux où les composantes du vecteur sont les dérivées partielles d'une même fonction U qu'on appelle le potentiel du champ.

Les surfaces U = const. sont dites *surfaces de niveau*. On a sur ces surfaces

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = 0,$$

ce qui montre qu'elles sont normales aux lignes de force.

Le travail du vecteur le long d'une ligne l joignant les points (abc), $(a'b'c')$ sera

$$\int_l \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \int_l dU = U(a'b'c') - U(abc).$$

Il reste donc constant si l'on déforme la ligne l pourvu que ses extrémités restent fixes, ou plus généralement se déplacent sur des surfaces de niveau. Il est nul pour tout contour fermé (tracé dans une région où $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ restent continues).

Les composantes du tourbillon

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y}, \ldots$$

sont identiquement nulles.

174. Réciproquement, tout champ de vecteurs (P, Q, R) où le travail est nul pour tout contour fermé aura un tourbillon identiquement nul, et admettra un potentiel.

En effet, si le travail est nul pour tout contour fermé, la formule de Stokes montre qu'il en sera de même du flux du tourbillon à travers une surface quelconque. Mais pour que l'intégrale qui représente ce flux soit nulle quel que soit le champ, il faut évidemment que la fonction à intégrer le soit. On aura donc

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos nx$$
$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos ny + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos nz = 0.$$

Cela ayant lieu quels que soient les angles nx, ny, nz, on aura

$$(15) \qquad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Ces conditions expriment que le tourbillon est nul. Nous allons montrer qu'elles suffisent pour permettre de déterminer une fonction U telle que l'on ait

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz = dU$$

et par suite

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Posons en effet

$$U = \int_{z_0}^{z} R\,dz + U_1 = I + U_1$$

z_0 étant une constante quelconque et U_1 une nouvelle inconnue.

On aura

$$dU = \frac{\partial I}{\partial x}dx + \frac{\partial I}{\partial y}dy + \frac{\partial I}{\partial z}dz + dU_1.$$

Mais

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}dz = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial z}dz = P - P_0,$$

P_0 étant ce que devient P pour $z = z_0$.

De même

$$\frac{\partial I}{\partial y} = Q - Q_0.$$

Enfin

$$\frac{\partial I}{\partial z} = R.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation à satisfaire, elle devient

$$dU_1 = P_0\,dx + Q_0\,dy.$$

D'ailleurs en posant $z = z_0$ dans la dernière des relations (15), elle devient

$$\frac{\partial Q_0}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial y} = 0.$$

Posons

$$U_1 = \int_{y_0}^{y} Q_0\,dy = I_1 + U_2,$$

y_0 étant une constante. L'équation à satisfaire deviendra

$$dU_2 = P_{00}\,dx,$$

P_{00} étant ce que devient P_0 pour $y = y_0$.

Cette dernière équation a pour solution générale

$$U_2 = \int_{x_0}^{x} P_{00}\,dx + \text{const.}$$

On aura donc finalement

$$U = \int_{z_0}^{z} R\,dz + \int_{y_0}^{y} Q_0\,dy + \int_{x_0}^{x} P_{00}\,dx + \text{const.}$$

La méthode que nous venons de suivre peut évidemment s'appliquer aux expressions différentielles contenant un nombre quelconque n de variables, et nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Pour que l'expression

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n$$

soit une différentielle exacte dU, *il faut et il suffit qu'on ait identiquement*

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

pour toutes les valeurs de i *et de* k. *Si ces conditions sont remplies, la fonction* U *sera définie à une constante près et pourra se calculer par une suite de quadratures.*

175. *Champs à facteur intégrant.* — Ce sont ceux où les composantes du vecteur ont la forme suivante

$$P = V\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = V\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = V\frac{\partial U}{\partial z},$$

U, V étant des fonctions quelconques de x, y, z.

Ces équations équivalent à la suivante

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = V\,dU$$

qui exprime que $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ devient une différentielle exacte dU, lorsqu'on le multiplie par le facteur d'intégration $\mu = \frac{1}{V}$.

Les composantes du tourbillon sont dans ce cas

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x}.$$

On en déduit l'identité

$$(16)\quad P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$

qui exprime que le vecteur est perpendiculaire au tourbillon.

176. Réciproquement si cette condition est remplie $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ admettra un facteur intégrant.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur le lemme suivant, qui sera démontré ultérieurement :

Une équation différentielle

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

admet toujours une solution dite générale

$$f(x, y, c) = 0,$$

contenant une constante arbitraire c.

Cette équation, résolue par rapport à c, prendra la forme

$$\varphi(x, y) = c.$$

On en déduit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0.$$

En comparant cette équation à la proposée

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

on voit que P et Q devront être proportionnels à $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

Soit μ le facteur de proportionnalité, on aura

$$\mu P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \mu Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

et par suite

$$\frac{\partial \mu Q}{\partial x} - \frac{\partial \mu P}{\partial y} = 0.$$

Si nous remarquons que P et Q contiennent z, il en sera de même des fonctions φ et μ, et l'on aura

$$d\varphi = \mu P\, dx + \mu Q\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz.$$

Si donc nous posons pour abréger

$$\mu R - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u,$$

on aura

$$\mu(P\, dx + Q\, dy + R\, dz) = d\varphi + u\, dz.$$

Si u est une fonction de φ et de z seulement, on pourra trouver deux fonctions λ et U de φ et de z telles que l'on ait

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \qquad \lambda u = \frac{\partial U}{\partial z}$$

et par suite

$$\lambda\mu(P\, dx + Q\, dy + R\, dz) = \lambda(d\varphi + u\, dz) = dU,$$

de sorte que $\lambda\mu$ sera un facteur intégrant.

Mais pour que u ne dépende que de φ et de z, il faut et il suffit qu'il existe entre les différentielles du, $d\varphi$, dz une relation linéaire. Celle-ci s'obtiendra, si elle existe, en éliminant dx et dy entre les équations

$$d\varphi = \mu P\, dx + \mu Q\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz,$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Pour que cette élimination simultanée soit possible, il faut

et il suffit qu'on ait

$$P\frac{\partial u}{\partial y} - Q\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Or

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mu R}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial \mu R}{\partial x} - \frac{\partial \mu P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \mu R}{\partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial \mu R}{\partial y} - \frac{\partial \mu Q}{\partial z}.$$

Substituons dans l'équation de condition précédente et ajoutons la quantité nulle

$$R\left(\frac{\partial \mu Q}{\partial x} - \frac{\partial \mu P}{\partial y}\right),$$

il viendra

$$P\left(\frac{\partial \mu R}{\partial y} - \frac{\partial \mu Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial \mu P}{\partial z} - \frac{\partial \mu R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial \mu Q}{\partial x} - \frac{\partial \mu P}{\partial y}\right) = 0.$$

Effectuons les dérivations indiquées. Les termes où μ est dérivé se détruisent. Supprimant dans les autres le facteur μ, on trouve la relation (16), laquelle est vérifiée par hypothèse.

177. L'application du théorème d'Ostrogradsky aux champs de vecteurs ci-dessus conduit à des formules importantes, connues sous le nom de *formules de Green*.

On a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \ldots.$$

Si donc nous posons, pour abréger,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U,$$

la divergence sera

$$V\,\Delta U + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

D'autre part, n désignant la normale extérieure et ν la

normale intérieure, l'expression du flux sera

$$V\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos nx+\frac{\partial U}{\partial y}\cos ny+\frac{\partial U}{\partial z}\cos nz\right)=V\frac{\partial U}{\partial n}=-V\frac{\partial U}{\partial \nu}.$$

La formule d'Ostrogradsky deviendra donc

$$(17)\quad \int\!\!\int\!\!\int_K\left(V\,\Delta U+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right)dv$$
$$=-\int\!\!\int_\Omega V\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma,$$

U et V étant des fonctions quelconques.

Si on les suppose égales, la formule précédente devient

$$(18)\quad \int\!\!\int\!\!\int_K\left[U\,\Delta U+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dv$$
$$=-\int\!\!\int_\Omega U\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

D'autre part, permutons U et V dans la formule (17) et retranchons l'équation ainsi obtenue de la précédente. Il viendra

$$(19)\quad \int\!\!\int\!\!\int_K (V\,\Delta U-U\,\Delta V)\,dv=\int\!\!\int_\Omega\left[U\frac{\partial V}{\partial \nu}-V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right]d\sigma.$$

178. Une fonction U est dite *régulière dans le domaine* K, si U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ sont continues en tout point intérieur à K ou situé sur sa frontière Ω, et $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ continues en tout point intérieur à K, et finies (quoique pouvant être discontinues) sur Ω.

Les formules (17), (18), (19) ne cesseront pas d'être vraies, si U et V sont des fonctions régulières dans K, lors même que les dérivées secondes présenteraient des discontinuités sur Ω.

Soit en effet Ω′ une surface parallèle à Ω, infiniment voisine et située dans l'intérieur de K. On pourra appliquer

chacune des formules précédentes au domaine K′ bordé par Ω′.

Passons à la limite. L'intégrale triple $\int\int\int_{K'}$ tendra vers $\int\int\int_{K}$: car la différence des deux intégrales a pour maximum de son module le produit du maximum du module de la fonction à intégrer, qui est fini, par le volume de K — K′ qui est infiniment petit.

D'autre part, chaque élément $M' d\sigma'$ de l'intégrale de surface $\int\int_{\Omega'}$ tendra vers l'élément correspondant $M d\sigma$ de $\int\int_{\Omega}$; car la fonction M à intégrer, ne contenant que U, V et leurs dérivées premières, sera continue ; donc M′ tend vers M ; et $d\sigma'$ tendra aussi vers $d\sigma$ à cause du parallélisme des surfaces Ω et Ω′.

179. Soit E le domaine extérieur à K. Il a aussi pour frontière Ω mais s'étend à l'infini. Nous dirons que la fonction U est régulière dans E si : 1° elle est régulière dans tout domaine fini contenu dans E; 2° R désignant la distance du point (x, y, z) à l'origine, RU, $R^2 \frac{\partial U}{\partial x}$, $R^2 \frac{\partial U}{\partial y}$, $R^2 \frac{\partial U}{\partial z}$, $R^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $R^3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $R^3 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ restent finis pour $R = \infty$. On énonce cette dernière condition en disant que U est *régulière à l'infini*.

Si U, V sont régulières dans E, les formules de Green subsisteront dans ce domaine. Considérons, en effet, l'une d'elles et appliquons-la au domaine E′ limité par Ω et par une sphère ω de rayon ρ infini. Chacune de nos formules donnera un résultat de la forme

$$\int\int\int_{E'} M\, dv = \int\int_{\Omega} N\, d\sigma + \int\int_{\omega} N\, d\sigma,$$

M et N étant des fonctions telles que $R^4 M$, $R^3 N$ restent limités pour $R = \infty$.

Passons à la limite : l'intégrale $\int\int\int_{E'}$ tendra vers

$\int\int\int_E M\,dv$ (93). D'autre part, soit μ le maximum du module de $N\rho^3$ sur la sphère. L'intégrale $\int\int_\omega$ aura un module au plus égal à $\frac{\mu}{\rho^3}\cdot 4\pi\rho^2$; sa limite pour $\rho=\infty$ sera donc nulle.

180. Champs de tourbillons. — Ce sont ceux où le vecteur (P, Q, R) étant le tourbillon d'un autre vecteur (E, F, G), on a

$$(20)\quad P=\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z},\qquad Q=\frac{\partial E}{\partial z}-\frac{\partial G}{\partial x},\qquad R=\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial E}{\partial y}.$$

On en déduit les conséquences suivantes :

1° La divergence $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ est nulle;

2° Le flux à travers une surface Ω limitée par un contour C sera, d'après le théorème de Stokes, égal à

$$\int_C E\,dx+F\,dy+G\,dz,$$

expression qui ne dépend pas de la forme de Ω, mais seulement de son contour terminal;

3° Le flux à travers une surface fermée étant égal à l'intégrale de la divergence, qui est nulle, sera égal à zéro.

181. Réciproquement, si le flux qui traverse une surface fermée quelconque est nul, l'intégrale de la divergence sera nulle dans un domaine quelconque; donc la divergence elle-même le sera.

De cette condition

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

on déduira comme il suit la possibilité de satisfaire aux trois équations (20).

Cherchons tout d'abord une solution particulière, où G soit nul.

On satisfera aux deux premières équations en posant

$$E = \int_{z_0}^{z} Q\,dz, \qquad F = -\int_{z_0}^{z} P\,dz + \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction arbitraire.

La troisième équation deviendra

$$R = -\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = R - R_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

R_0 étant ce que devient R pour $z = z_0$.

Cette équation sera vérifiée en posant

$$\varphi = \int_{x_0}^{x} R_0\,dx.$$

Ayant obtenu ainsi une première solution E_1, F_1, G_1, il est aisé d'en déduire toutes les autres.

Posons en effet

$$E = E_1 + \mathcal{E}, \qquad F = F_1 + \mathcal{F}, \qquad G = G_1 + \mathcal{G},$$

les équations deviendront

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0,$$

et auront pour solution générale

$$\mathcal{E} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mathcal{F} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \mathcal{G} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

la fonction U restant arbitraire.

182. Fonctions harmoniques. — Une fonction U est dite *harmonique* dans le domaine K, si elle satisfait en tout point de K à la relation

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Ainsi une fonction linéaire $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ est harmonique partout, et partout aussi régulière, sauf à l'infini.

La fonction

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

est harmonique : car on a

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}, \qquad \ldots,$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -\frac{3}{r^3} + 3\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{r^5} = 0.$$

Elle est régulière partout, sauf au point (abc).

183. Reprenons la formule de Green

$$(19) \qquad \iiint_K (V\,\Delta U - U\,\Delta V)\,dv = \iint_\Omega \left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\sigma.$$

où U, V, sont deux fonctions quelconques régulières dans K.

Supposons-les harmoniques ; l'équation se réduira à

$$(21) \qquad \iint_\Omega \left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\sigma = 0.$$

En particulier, soit $V = 1$; il viendra

$$(22) \qquad \iint_\Omega \frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma = 0.$$

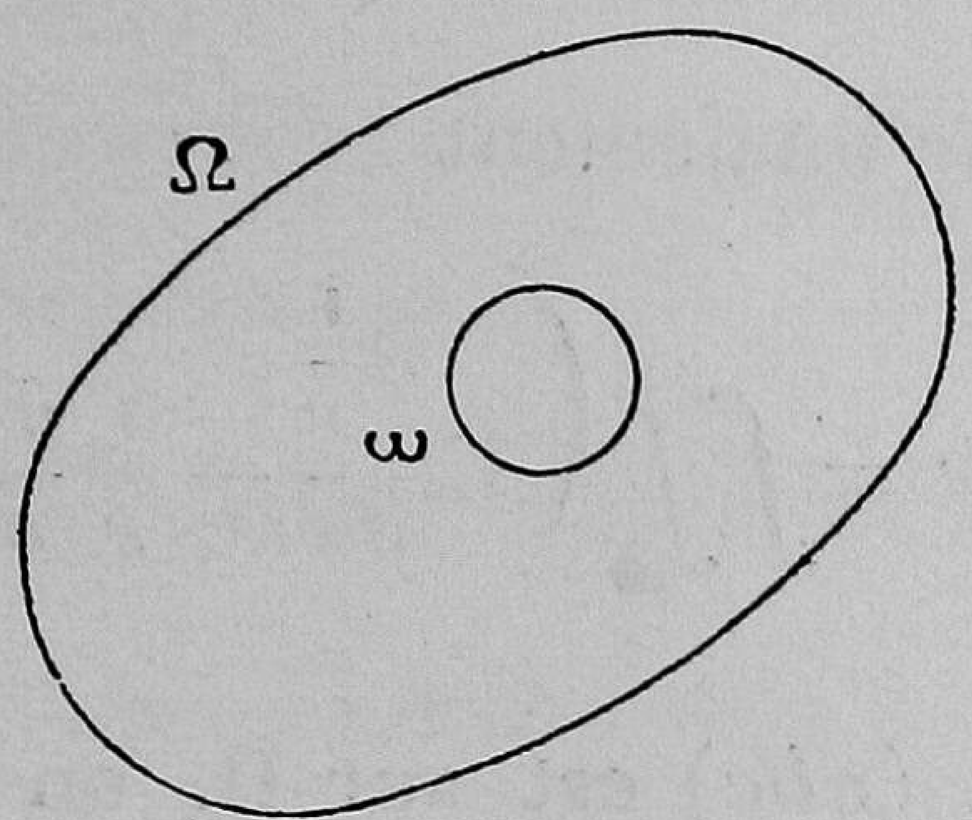
184. Si le point (abc) est extérieur à K, nous pourrons poser dans la relation (19) $V = \frac{1}{r}$, U étant régulière dans K, mais d'ailleurs quelconque. La formule devient

$$(23) \qquad \iiint_K \frac{1}{r}\,\Delta U\,dv = \iint_\Omega \left(U\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\sigma.$$

Comment doit être modifiée cette formule lorsque (abc) appartient à K ?

185. Supposons-le intérieur. Entourons-le d'une sphère ω

Fig. 18.



d'un rayon ρ infiniment petit et appliquons la formule au domaine $K - k$ compris entre Ω et ω (*fig.* 18). On aura

$$\iiint_{K-k} \frac{1}{r} \Delta u \, dv = \left(\iint_{\Omega} + \iint_{\omega} \right) \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Passons à la limite. L'intégrale triple tendra (93) vers

$$\iiint_{K} \frac{1}{r} \Delta u \, dv.$$

D'autre part, sur ω on a

$$r = \rho, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial \nu} = -\frac{1}{\rho^2},$$

car la normale ν intérieure à $K - k$ a la direction de r. L'intégrale $\iint_{\omega}$ devient donc

$$\iint_{\omega} \left(-\frac{U}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

L'intégrale du premier terme aura pour valeur

$$\frac{-\mu}{\rho^2} 4\pi\rho^2 = -4\pi\mu,$$

μ étant une moyenne entre les valeurs que prend U sur ω.

Or ces valeurs tendent toutes vers $U(abc)$. Donc cette première intégrale tendra vers $-4\pi U(abc)$.

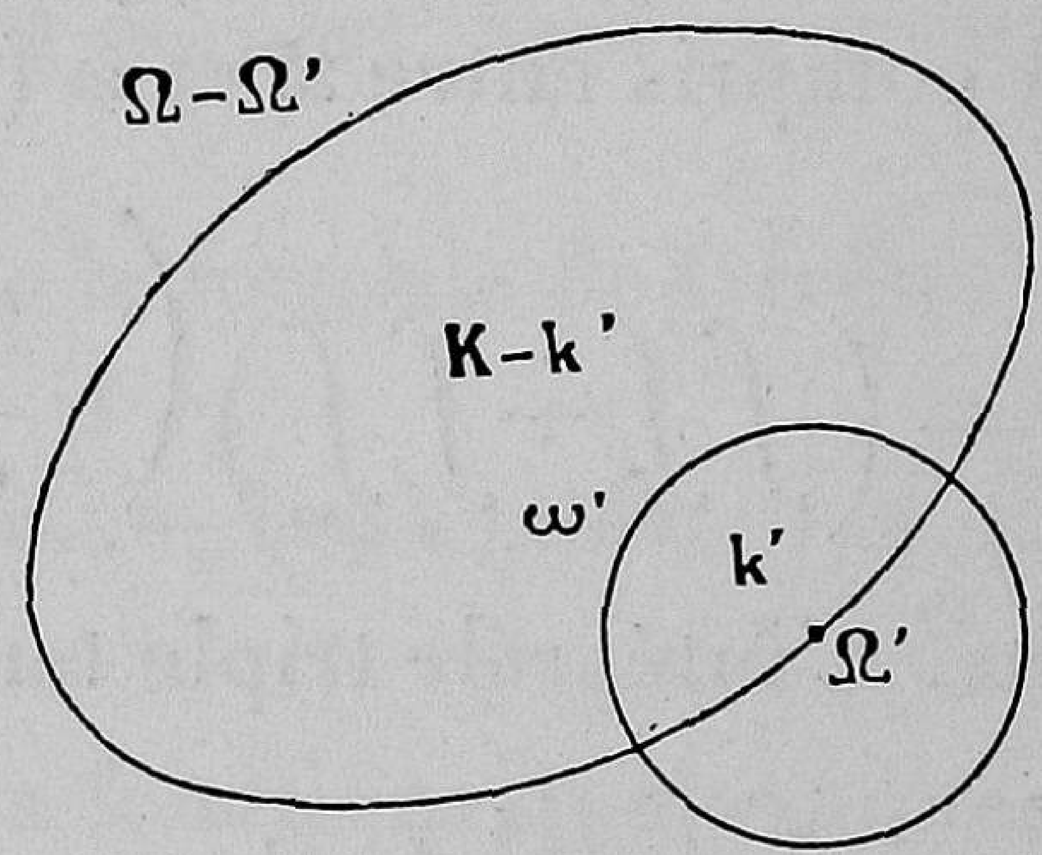
Soit μ' le maximum du module de $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ sur ω; le module de la seconde intégrale sera au plus égal à $\frac{\mu'}{\rho}\cdot 4\pi\rho^2$, et tendra vers zéro.

Nous aurons donc finalement

$$(24) \qquad \iiint_K \frac{1}{r}\Delta U\, dv = \iint_\Omega \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu} \right) d\sigma - 4\pi U(abc).$$

186. Si le point (abc) est sur Ω, on appliquera la for-

Fig. 19.

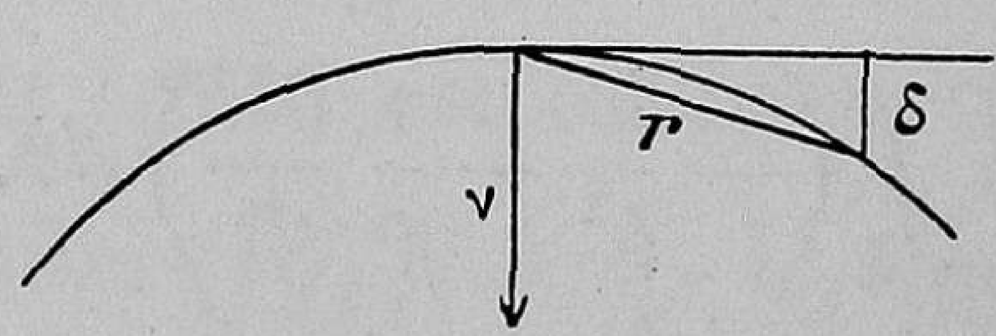


mule à la région $K - k'$ bordée par les surfaces $\Omega - \Omega'$ et ω'. Passant à la limite, l'intégrale triple tendra encore vers

$$\iiint_K \frac{1}{r}\Delta U\, dv$$

D'un autre côté, si l'on suppose que (abc) soit un point

Fig. 20.



ordinaire sur Ω', on aura sur cette surface (*fig.* 20).

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} = -\frac{1}{r^2}\cos \nu r = -\frac{\delta}{r^3},$$

δ étant la distance de l'extrémité de r au plan tangent, laquelle est du second ordre par rapport à r. Donc sur Ω'

$$\mathrm{U}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}-\frac{1}{r}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\nu}$$

sera infini du premier ordre seulement par rapport à r. Donc l'intégrale $\int\int_{\Omega-\Omega'}$ tendra vers $\int\int_{\Omega}$.

Reste à calculer la valeur limite de l'intégrale $\int\int_{\omega'}$; elle sera $-2\pi\mathrm{U}(abc)$, ω' représentant à la limite la moitié seulement de ω.

Nous aurons donc finalement

$$(25)\qquad \int\int\int_{\mathrm{K}}\frac{1}{r}\Delta u\,dv=\int\int_{\Omega}\left(\mathrm{U}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}-\frac{1}{r}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\nu}\right)d\sigma-2\pi\mathrm{U}(abc).$$

Si la fonction U est harmonique, $\Delta\mathrm{U}$ étant nul, ces formules se simplifieront. Elles deviennent

$$(26)\qquad \int\int_{\Omega}\left(\mathrm{U}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}-\frac{1}{r}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\nu}\right)d\sigma = \begin{cases} 0, & (abc)\text{ extérieur à K},\\ 4\pi\mathrm{U}(abc), & (abc)\text{ intérieur à K},\\ 2\pi\mathrm{U}(abc), & (abc)\text{ sur }\Omega.\end{cases}$$

187. Soit ω une sphère de centre (abc) et de rayon R contenue dans K; (abc) lui étant intérieur, on aura

$$4\pi\mathrm{U}(abc)=\int\int_{\omega}\left(\mathrm{U}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}-\frac{1}{r}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial\nu}\right)d\sigma.$$

Mais on a sur ω

$$r=\mathrm{R},\qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\nu}=\frac{1}{\mathrm{R}^2},$$

et d'après la formule (22)

$$\int\!\!\int_\omega -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma = -\frac{1}{R}\int\!\!\int_\omega \frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma = 0.$$

La relation précédente se réduit donc à

$$U(abc) = \frac{1}{4\pi R^2}\int\!\!\int_\omega U\,d\sigma.$$

Elle exprime que *la valeur de* U *au point* (abc) *est égale à la moyenne de ses valeurs sur la sphère* ω.

On en conclut que U *ne peut admettre ni maximum ni minimum dans* K, *si ce n'est sur* Ω. Car si l'on avait un maximum en (abc) par exemple, on pourrait entourer ce point d'une sphère assez petite pour que sur toute sa surface U fût $< U(abc)$, ce qui contredirait la proposition ci-dessus.

188. Corollaire. — *Une fonction* U *harmonique et régulière dans* K *est complètement déterminée dans* K *par la connaissance de ses valeurs sur* Ω.

Car si le problème comportait deux solutions U, U_1, leur différence $U - U_1$ serait une fonction harmonique et régulière dans K et nulle sur Ω, sans l'être dans tout l'intérieur de K. Elle admettrait donc au moins un maximum ou un minimum.

La détermination effective de U dans l'intérieur de K, d'après ses valeurs sur Ω, constitue le *problème intérieur de Dirichlet*. Nous montrerons dans le Calcul des Variations qu'il admet une solution; nous voyons déjà qu'elle est unique.

On pourrait de la même manière se proposer de définir une fonction dans la région infinie E extérieure à K par la condition d'y être harmonique et régulière et de prendre des valeurs données sur Ω. Ce *problème extérieur*, de même que le précédent, ne comporte qu'une solution, car

s'il en avait deux, U, U_1, leur différence serait une nouvelle fonction harmonique et régulière. Elle s'annulerait donc à l'infini ainsi que sur Ω; elle admettrait donc au moins un maximum ou un minimum.

189. La formule (26), quoique donnant en chaque point intérieur à K la valeur de U(*abc*),

$$(27)\qquad 4\pi\,\mathrm{U}(abc) = \int\!\!\int_{\Omega}\left(\mathrm{U}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\nu}\right)d\sigma$$

ne résout pas le problème de Dirichlet, car dans le second membre figure, outre U, la fonction $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\nu}$ dont les valeurs sur Ω ne sont pas données.

Mais on aurait la solution cherchée si l'on savait déterminer une fonction G(x, y, z, a, b, c) des variables x, y, z et des paramètres a, b, c, qui fût harmonique et régulière dans K, et qui sur Ω prît les mêmes séries de valeurs que $\frac{1}{r}$. Une semblable fonction se nomme *fonction de Green*.

En effet, supposons-la connue. Posant V = G dans la formule (21) et remarquant que sur Ω on a $\mathrm{G} = \frac{1}{r}$, il vient

$$\int\!\!\int_{\Omega}\left(\mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial\nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial\nu}\right)d\sigma = 0.$$

Retranchant cette égalité de (27), il vient

$$(28)\qquad 4\pi\,\mathrm{U}(abc) = \int\!\!\int_{\Omega}\mathrm{U}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu} - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial\nu}\right)d\sigma.$$

190. La fonction G est aisée à construire lorsque K est une sphère de rayon R.

Soient en effet (*fig.* 21) M = (*abc*) un point intérieur; M′ un point extérieur situé sur le même rayon; OM = d et OM′ = d' étant liés par la relation

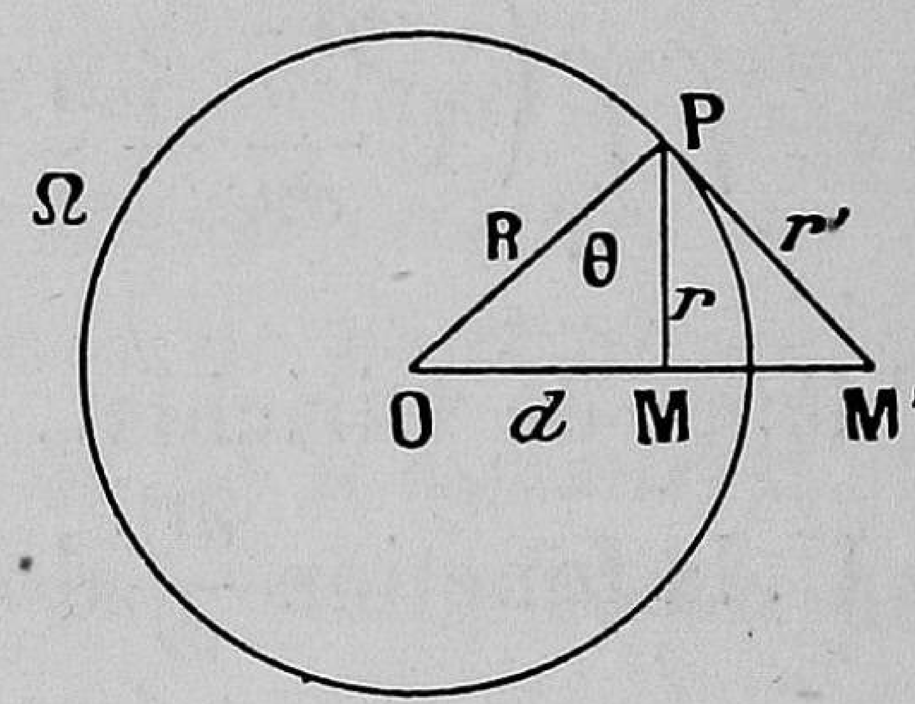
$$dd' = \mathrm{R}^2.$$

Les distances r, r' de ces deux points à un point quelconque P de Ω sont liées, comme on sait, par la relation

$$\frac{r'}{r} = \frac{R}{d} = \frac{d'}{R}.$$

Pour le problème intérieur, la fonction de Green sera donc $\frac{R}{dr'}$, cette expression étant harmonique et régulière dans l'in-

Fig. 21.



térieur de la sphère, et égale à $\frac{1}{r}$ sur Ω. $\Big($Pour le problème extérieur, cette fonction serait $\frac{R}{d'r}$.$\Big)$

Considérons le problème intérieur. On aura

$$4\pi\, U(abc) = \int\int_{\Omega} U \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{R}{d} \frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Or

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \nu} = \frac{1}{r^2}\cos\theta = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr^3},$$

et de même

$$\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial \nu} = \frac{R^2 + r'^2 - d'^2}{2Rr'^3},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{R}{d}\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial \nu} = \frac{R^2 + r^2 - d^2}{2Rr^3} - \frac{R^2 + r'^2 - d'^2}{2dr'^3}.$$

Remplaçons r', d' par leurs valeurs $\frac{Rr}{d}$, $\frac{R^2}{d}$; cette expression se réduira à

$$\frac{R^2 - d^2}{Rr^3}.$$

On aura donc finalement

$$(29) \qquad 4\pi U(abc) = \int\int_{\Omega} U \frac{R^2 - d^2}{R r^3} d\sigma.$$

191. De cette expression, on déduit le théorème suivant :

Une fonction harmonique et régulière dans tout domaine fini, dont le module reste inférieur à un nombre fini M, *est une constante.*

On a en effet

$$4\pi[U(abc) - U(ooo)] = \int\int_{\Omega} U\left(\frac{R^2 - d^2}{R r^3} - \frac{1}{R^2}\right) d\sigma,$$

l'intégration pouvant se faire sur une sphère d'un rayon R quelconque. Or, si on le prend infini, l'intégrale sera infiniment petite. On a en effet

$$U\left(\frac{R^2 - d^2}{R r^3} - \frac{1}{R^2}\right) = U \frac{R^3 - r^3 - d^2 R}{R^2 r^3}$$
$$= U\left[\frac{(R - r)(R^2 + Rr + r^2) - d^2 R}{R^2 r^3}\right].$$

Or r est compris entre $R - d$ et $R + d$. Le module de la fonction à intégrer ne peut donc surpasser

$$M \frac{d[R^2 + R(R + d) + (R + d)^2] + d^2 R}{R^2 (R - d)^3}.$$

Multipliant par $4\pi R^2$, on aura une limite supérieure du module de l'intégrale. Elle sera évidemment de l'ordre de $\frac{1}{R}$.

Donc

$$U(abc) = U(ooo) = \text{const.}$$

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — Dérivation des intégrales définies.

192. Une intégrale définie

$$\int_a^A f(x, t)\,dx,$$

où la fonction à intégrer dépend d'un paramètre t, est elle-même une fonction de ce paramètre. Les limites a, A peuvent d'ailleurs être constantes, ou dépendre aussi du paramètre; mais ce second cas se ramène aisément au premier par un changement de variable. Posons en effet

$$x = a + (A - a)y,$$

L'intégrale transformée sera

$$\int_0^1 f[a + (A - a)y, t]\,(A - a)\,dy,$$

et aura ses limites constantes.

On opérerait de même pour une intégrale double

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y, t)\,dx.$$

En remplaçant d'abord x, puis y par de nouvelles variables, on rendrait constantes successivement les limites des intégrales à effectuer.

Nous pouvons donc nous borner au cas des limites constantes.

193. Soit

$$I = \int_a^A f(x, t)\, dx$$

l'intégrale considérée.

Supposons qu'à toute quantité positive ε on puisse faire correspondre un autre nombre δ et une décomposition du champ d'intégration en deux parties D et d jouissant des propriétés suivantes :

1° Le champ D est borné et parfait ; et la fonction f reste continue par rapport aux deux variables x et t, tant que x reste contenu dans D, et t dans l'intervalle de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$.

2° L'intégrale $\int_d f\, dx$, prise dans le champ d, a son module moindre que ε pour toutes les valeurs de t comprises entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$.

Dans ces conditions, I sera une fonction de t, continue au point t_0.

Changeons en effet t_0 en $t_0 + h$; I subira un accroissement

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_a^A f(x, t_0 + h)\, dx - \int_a^A f(x, t_0)\, dx \\ &= \int_D f(x, t_0 + h)\, dx - \int_D f(x, t_0)\, dx \\ &\quad + \int_d f(x, t_0 + h)\, dx - \int_d f(x, t_0)\, dx. \end{aligned}$$

Si $|h| < \delta$, les deux dernières intégrales ont leur module moindre que ε. En désignant par η le module de la différence des deux premières, on aura donc

$$|\Delta I| < \eta + 2\varepsilon.$$

Or on peut choisir ε aussi petit qu'on veut, puis prendre h

assez petit pour rendre η moindre que toute quantité donnée, car l'intégrale $\int_D f(x, t)\,dx$ est continue (t. I, n° 83).

194. Si les conditions énoncées ci-dessus ne sont pas satisfaites, l'intégrale sera souvent discontinue.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin t x}{x}\,dx.$$

Si t est positif, posons $tx = y$; l'intégrale sera transformée en

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

et sera égale à $\frac{\pi}{2}$ (102).

Si t est négatif, posons $tx = -y$; elle se transformera en

$$-\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy,$$

et aura pour valeur $-\frac{\pi}{2}$.

Enfin si $t = 0$, elle sera nulle.

L'intégrale est donc discontinue au point $t = 0$.

195. Dérivation sous le signe $\int$. — Nous avons vu (t. I, n° 83) que l'intégrale

$$I = \int_a^A f(x, t)\,dx$$

admet au point $t = t_0$ une dérivée, représentée par l'intégrale

$$\int_a^A \frac{\partial f}{\partial t_0}\,dx.$$

Cet important résultat n'a été établi qu'en supposant a et A

finis, et $\frac{\partial f}{\partial t}$ continu par rapport à x et t, tant que x reste dans l'intervalle de a à A, et t dans l'intervalle de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$ (δ pouvant être choisi aussi petit qu'on voudra). Mais nous pouvons étendre la démonstration à d'autres cas.

En effet, la dérivée de I au point $t = t_0$ est, par définition, égale à

$$\begin{aligned}
&\lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_a^A [f(x, t_0 + h) - f(x, t_0)]\, dx \\
&= \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_a^A dx \int_{t_0}^{t_0+h} \frac{\partial f}{\partial t} dt \\
&= \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} dt \int_a^A \frac{\partial f}{\partial t} dx = \int_a^A \frac{\partial f}{\partial t} dx.
\end{aligned}$$

Le théorème sera donc établi toutes les fois que les trois transformations que nous venons de faire seront licites.

La première suppose que la fonction $\frac{\partial f}{\partial t}$ n'est discontinue, par rapport à t, qu'en un nombre fini de points, entre t_0 et $t_0 + h$, et que f reste continue en ces points (**62**). Si donc on peut déterminer une quantité δ telle que $f(x, t)$ soit une fonction continue de t dans tout le rectangle $(a, A, t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, et que, pour chaque valeur de x comprise entre a et A, $\frac{\partial f}{\partial t}$ n'ait qu'un nombre limité de discontinuités entre $t_0 - \delta$ et $t_0 + \delta$, cette transformation sera permise dès que $|h|$ sera devenu moindre que δ.

Si a et A sont finis, l'interversion des deux intégrations sera permise aux conditions suivantes (**71**).

1° Les points du rectangle ci-dessus aux environs desquels $\frac{\partial f}{\partial t}$ cesserait d'être continue sont situés sur un nombre limité d'arcs de courbe continus P_1Q_1, P_2Q_2, ... tels que le long de chacun d'eux x d'une part et t de l'autre soient croissants ou décroissants.

2° L'intégrale

$$\int_x^{x+\lambda} \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

a une valeur déterminée, et si $|\lambda| \overline{\gtrless} l$, son module sera $< \varepsilon_l$, ε_l tendant vers zéro avec l.

3° L'intégrale

$$\int_t^{t+\lambda} \frac{\partial f}{\partial t} dt = f(x, t+\lambda) - f(x, t)$$

jouit de propriétés analogues.

Cette dernière condition sera certainement satisfaite, si, dans le rectangle, f est une fonction continue des deux variables x et t ; car sa continuité sera uniforme.

Si l'une des limites a, A, par exemple A, est remplacée par ∞, on pourra encore intervertir les intégrations, si cette opération est permise dans l'intervalle de a à un nombre quelconque A, et si de plus l'intégrale

$$\int_A^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

est déterminée et a un module moindre que $\varepsilon_A \varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant intégrable de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$ et ε_A tendant uniformément vers zéro dans cet intervalle lorsque A tend vers ∞ (74).

Enfin, si les conditions précédentes sont satisfaites, l'intégrale

$$\int_a^A \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

sera continue (même si le champ est infini). La dernière transformation sera donc toujours permise.

196. On pourrait donner des règles analogues pour la dérivation des intégrales multiples ; mais elles seraient moins utiles, car la dérivation sous le signe d'intégration reste encore applicable dans bien des cas où la fonction f n'est pas continue. On peut conduire la discussion comme il suit.

Considérons, par exemple, une intégrale double

$$\mathbf{S}_E f(x, y, t)\, dx\, dy.$$

Décomposons le champ d'intégration, supposé d'abord borné, en deux parties D et d, dont la première soit mesurable, et telle que $\frac{\partial f}{\partial t}$ reste continue lorsque x, y décrit le champ D, et t l'intervalle de $t_0 - \delta$ à $t_0 + \delta$. Dans le champ D, on pourra dériver sous le signe d'intégration ; on aura, par suite,

$$\frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_E = \frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_D + \frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_d = \mathbf{S}_D \frac{\partial f}{\partial t_0} dx\, dy$$
$$+ \lim \mathbf{S}_d \left[\frac{f(x, y, t_0 + h) - f(x, y, t_0)}{h}\right] dx\, dy.$$

Faisons décroître indéfiniment δ, et supposons, ce qui arrivera très généralement, qu'on puisse en même temps accroître progressivement la région D aux dépens de la région d, de telle sorte que l'aire de cette dernière tende vers zéro. L'intégrale

$$\mathbf{S}_D \frac{\partial f}{\partial t_0} dx\, dy$$

tendra vers

$$\mathbf{S}_E \frac{\partial f}{\partial t_0} dx\, dy.$$

Pour reconnaître si la formule est applicable, on devra donc discuter le second terme, et s'assurer qu'il tend vers zéro. Si, par exemple, on peut montrer que, lorsque d et $|h|$ sont devenus suffisamment petits, on a toujours

$$\left|\frac{f(x, y, t_0 + h) - f(x, y, t_0)}{h}\right| < \varphi(x, y),$$

φ désignant une fonction positive dont l'intégrale dans E soit finie, ce terme aura son module moindre que

$$\mathbf{S}_d \varphi(x, y)\, dx\, dy,$$

expression qui tendra vers zéro avec d.

197. Supposons enfin que E soit infini, mais que la for-

mule de dérivation soit applicable à tout domaine borné contenu dans E. On décomposera de même E en deux régions D et d, dont la première soit bornée, et contienne tous les points de E dont la distance à l'origine n'est pas plus grande qu'un nombre donné R. On aura encore

$$\frac{d}{dt_0}\mathbf{S}_{\mathrm{E}} = \mathbf{S}_{\mathrm{D}}\frac{\partial f}{\partial t_0}dx\,dy$$
$$+\lim_{h=0}\mathbf{S}_d\left[\frac{f(x,y,t_0+h)-f(x,y,t_0)}{h}\right]dx\,dy.$$

Faisons tendre R vers ∞. Le premier terme tendra vers

$$\mathbf{S}_{\mathrm{E}}\frac{\partial f}{\partial t_0}dx\,dy,$$

et la formule sera applicable si le second terme a pour limite zéro, et notamment si, pour R suffisamment grand et $|h|$ suffisamment petit, on a toujours

$$\frac{f(x,y,t_0+h)-f(x,y,t_0)}{h} < \varphi(x,y),$$

$\varphi(x,y)$ admettant une intégrale finie dans E.

198. Applications diverses. — La différentiation, seule ou combinée avec l'interversion des intégrations, l'intégration par parties et le développement en série, permet d'obtenir la valeur d'un grand nombre d'intégrales définies. Nous allons en donner quelques exemples.

I. Soit à calculer l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Nous avons déjà vu (107) qu'elle a une valeur finie.

Pour la déterminer, changeons de variable, en posant $x = \alpha t$, α étant > 0 ; il viendra

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-\alpha^2 t^2}\alpha\,dt.$$

Multiplions par $e^{-\alpha^2}$, et intégrons de o à ∞ ; il viendra

$$I^2 = I\int_0^\infty e^{-\alpha^2} d\alpha = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} \alpha\, dt.$$

Dans le second membre, on peut intervertir les intégrations, car les conditions indiquées aux n°s 74 et 75 sont remplies. En effet, considérons en premier lieu l'intégrale

$$\int_B^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} \alpha\, dt = e^{-\alpha^2} \int_{\alpha B}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Soit A un nombre positif quelconque. La fonction $e^{-\alpha^2}$ admet de o à A une intégrale finie. D'autre part, le second facteur est dans cet intervalle au plus égal à la constante finie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx ;$$

enfin il tend uniformément vers zéro, lorsque B tend vers ∞, dans tout intervalle partiel qui ne contient pas le point $\alpha = 0$, car si μ est le minimum de α dans cet intervalle, ce facteur ne pourra surpasser la quantité

$$\int_{B\mu}^\infty e^{-x^2} dx,$$

qui est infiniment petite, et indépendante de α.

Considérons en second lieu l'intégrale

$$\int_A^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} \alpha\, d\alpha = \frac{e^{-A^2(1+t^2)}}{2(1+t^2)}.$$

La fonction $\frac{1}{2(1+t^2)}$ admet, de $t = 0$ à $t = \infty$, une intégrale finie, et le facteur $e^{-A^2(1+t^2)}$ est moindre que e^{-A^2}, quantité indépendante de t et qui tend vers zéro pour $A = \infty$.

On aura donc

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+t^2)} \alpha\, d\alpha \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2}(\text{arc tang}\, t)_0^\infty = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

d'où

$$\text{I} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Cette intégrale permet d'en obtenir plusieurs autres.

199. II. Posons d'abord $x = y\sqrt{a}$, a étant une constante positive ; il viendra

$$\text{I} = \int_0^\infty e^{-ay^2}\sqrt{a}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d'où

$$\int_0^\infty e^{-ay^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}},$$

et par une série de dérivations successives par rapport à a

$$\int_0^\infty y^2 e^{-ay^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}},$$

. . . . ,

$$\int_0^\infty y^{2n} e^{-ay^2}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}a^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Car il est aisé de justifier que la règle de dérivation sous le signe $\int$ est applicable à ces intégrales, bien que le champ soit infini.

Posons, en effet,

$$y^{2n}e^{-ay^2} = f(y, a),$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -y^{2n+2}e^{-ay^2}.$$

Soit a_0 une valeur particulière quelconque de a ; prenons $\delta < a_0$. Pour les valeurs de a comprises entre $a_0 - \delta$ et $a_0 + \delta$, l'intégrale

$$\int_{\text{A}}^\infty \frac{\partial f}{\partial a}\,dy$$

sera déterminée ; car, pour des valeurs suffisamment grandes

de y, on aura

$$\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| \leqq y^{2n+2} e^{-(n_0-\delta)y^2} < \frac{1}{y^2}.$$

En outre, si l'on suppose A suffisamment grand, on aura

$$\left|\int_A^\infty \frac{\partial f}{\partial a} dy\right| \leqq \int_A^\infty \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| dy \leqq \int_A^\infty \frac{dy}{y^2} \leqq \frac{1}{A},$$

quantité indépendante de a et qui tend vers zéro quand A croît indéfiniment. On se trouve ainsi dans les conditions indiquées au n° 195, ε_A étant égal à $\frac{1}{A}$, et la fonction φ se réduisant à l'unité.

200. III. Passons à l'intégrale

$$K = \int_0^\infty \cos 2by\, e^{-ay^2}\, dy.$$

Remplaçons $\cos 2by$ par son développement en série

$$1 - \frac{(2by)^2}{1.2} + \frac{(2by)^4}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{(-1)^n (2by)^{2n}}{1.2\ldots 2n} + R_n,$$

R_n étant de la forme

$$\frac{(-1)^{n+1}(2by)^{2n+2}\cos\theta 2by}{1.2\ldots(2n+2)}, \qquad \text{où} \qquad 0 < \theta < 1.$$

On aura

$$K = \int_0^\infty \left[1 - \frac{(2by)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(-1)^n(2by)^{2n}}{1.2\ldots 2n} + R_n\right] e^{-ay^2}\, dy,$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Bigg[a^{-\frac{1}{2}} - \frac{(2b)^2}{1.2}\,\frac{1}{2}\, a^{-\frac{3}{2}} + \ldots \\ + \frac{(-1)^n)2b)^{2n}}{1.2\ldots 2n}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\, a^{-\frac{2n+1}{2}}\Bigg] + \int_0^\infty R_n e^{-ay^2} dy \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, a^{-\frac{1}{2}}\left[1 - \frac{b^2}{a} + \ldots + \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{b^2}{a}\right)^n\right] + \int_0^\infty R_n e^{-ay^2}\, dy. \end{aligned}$$

Faisons tendre n vers l'infini. La somme entre crochets tendra vers $e^{-\frac{b^2}{a}}$, et l'intégrale complémentaire vers zéro, car son module est moindre que

$$\int_0^\infty \frac{(2b)^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} y^{2n+2} e^{-ay^2} dy = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-\frac{1}{2}}}{1.2\ldots(n+1)} \left(\frac{b^2}{a}\right)^{n+1},$$

quantité qui tend vers zéro. On aura donc

$$K = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

201. IV. Considérons encore l'intégrale

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} dx.$$

On aura

$$\frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{-2a}{x^2} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} dx.$$

Car si a_0 est une valeur particulière quelconque de a, et δ une quantité positive quelconque moindre que a_0, on aura, pour toutes les valeurs de a comprises entre $a_0 + \delta$ et $a_0 - \delta$

$$\left| \int_A^\infty \frac{-2a}{x^2} e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}} dx \right| < \int_A^\infty \frac{2(a_0+\delta)}{x^2} dx < \frac{2(a_0+\delta)}{A},$$

quantité indépendante de a, et qui tend vers zéro pour $A = \infty$.

Posant $x = \frac{a}{t}$, il viendra

$$\frac{dI}{da} = \int_\infty^0 2e^{-t^2-\frac{a^2}{t^2}} dt = -2I,$$

d'où

$$\frac{dI}{I} = -2\,da, \qquad \log I = -2a + \log C,$$

et enfin

$$I = Ce^{-2a},$$

C désignant une constante.

Pour la déterminer, faisons tendre a vers zéro ; il viendra

$$C = \lim_{a=0} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2} dx + \lim_{a=0} \int_0^\infty e^{-x^2}\left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - 1\right) dx.$$

Le premier terme est égal $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; le second a pour limite zéro. Soit, en effet, μ un nombre positif quelconque. Décomposons l'intégrale en deux autres, prises respectivement de 0 à μ et de μ à ∞. Dans la première, le module de la fonction à intégrer aura pour maximum 2; dans la seconde, il ne pourra surpasser $e^{-x^2}\left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)$. L'intégrale cherchée sera donc au plus égale à

$$\int_0^\mu 2\,dx + \left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)\int_\mu^\infty e^{-x^2} dx = 2\mu + \left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)\int_\mu^\infty e^{-x^2} dx,$$

et comme

$$\int_\mu^\infty e^{-x^2} dx < \int_0^\infty e^{-x^2} dx < \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

il sera moindre que

$$2\mu + \left(1 - e^{-\frac{a^2}{\mu^2}}\right)\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

expression dont les deux termes décroîtront autant qu'on voudra, en donnant des valeurs suffisamment petites à μ, puis à a.

On aura donc finalement

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2a}.$$

202. V. Soit encore à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} dx.$$

On a (199)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha$$

et par suite,

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{ix}\, dx \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x}\, d\alpha,$$

ou, en renversant les intégrations,

$$I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{(-\alpha^2+i)x}\, dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2 - i} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \left(\frac{1}{\alpha - e^{\frac{\pi i}{4}}} - \frac{1}{\alpha + e^{\frac{\pi i}{4}}} \right).$$

Mais

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

La première fraction simple aura donc pour intégrale indéfinie

$$\frac{1}{2}\log\left[\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] + i \operatorname{arc\,tang}(\alpha\sqrt{2} - 1) + \text{const.}$$

et la seconde

$$-\frac{1}{2}\log\left[\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] + i \operatorname{arc\,tang}(\alpha\sqrt{2} + 1) + \text{const.}$$

La somme de ces expressions a pour partie réelle

$$\frac{1}{2}\log \frac{\left(\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}}{\left(\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}},$$

qui s'annule aux deux limites $\alpha = 0$, $\alpha = \infty$, la quantité sous le logarithme se réduisant à l'unité. Quant aux arc tang, ils varieront respectivement de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$, lorsque α

croîtra de o à ∞. La somme de leurs accroissements sera donc π.

On aura donc

$$I = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \pi i = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i),$$

et, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire,

$$(1) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

203. Nous avons effectué un renversement d'intégrations qu'il est nécessaire de justifier.

Pour cela, considérons, en premier lieu, l'intégrale

$$\int_B^\infty e^{(-\alpha^2+i)x} \, d\alpha.$$

En posant $\alpha\sqrt{x} = \beta$, elle se change en

$$\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \int_{B\sqrt{x}}^\infty e^{-\beta^2} \, d\beta.$$

Or soit A un nombre positif quelconque ; l'intégrale de $\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$ entre o et A a une valeur finie. D'autre part, l'intégrale qui forme le second facteur ne peut surpasser la quantité fixe

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2} \, d\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Enfin, lorsque B tend vers ∞, elle tend uniformément vers zéro dans tout intervalle qui ne contient pas la valeur $x = 0$.

En second lieu, considérons l'intégrale

$$\int_A^\infty e^{(-\alpha^2+i)x} \, dx = \frac{e^{(-\alpha^2+i)A}}{\alpha^2 - i}.$$

Elle a pour module

$$\frac{e^{-\alpha^2 A}}{\sqrt{\alpha^4+1}}.$$

Or $\frac{1}{\sqrt{\alpha^4+1}}$ admet entre 0 et ∞ une intégrale finie. D'autre part, $e^{-\alpha^2 A}$ est constamment < 1; enfin il tend uniformément vers zéro, lorsque A tend vers ∞, dans tout intervalle qui ne contient pas la valeur $\alpha = 0$.

204. Si, dans les formules (1), nous posons $x = y^2$, il viendra

$$\int_0^\infty \cos y^2\, dy = \int_0^\infty \sin y^2\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Ces intégrales ont été rencontrées par *Fresnel* dans la théorie de la diffraction.

205. Si a désigne une constante positive, on a

$$\int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a},$$

et en intégrant de $a = \alpha$ à $a = \beta$ (α et β étant positifs)

$$\int_\alpha^\beta da \int_0^\infty e^{-ax}\, dx = \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

On peut intervertir l'ordre des intégrations ; on a, en effet,

$$\int_B^\infty e^{-ax}\, dx = \frac{e^{-aB}}{a}.$$

Or, dans l'intervalle de α à β, $\frac{1}{a}$ admet une intégrale finie et e^{-aB} tend uniformément vers zéro lorsque B tend vers ∞.

Effectuant donc l'intégration par rapport à a, il viendra

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} = \mathrm{Log}\, \frac{\beta}{\alpha}.$$

Cette formule permet de reconnaître si l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{A\,e^{-\alpha x}}{x^m} + \frac{B\,e^{-\beta x}}{x^n} + \ldots\right) dx,$$

où $m, n, \ldots$ sont des entiers et $\alpha, \beta, \ldots$ des constantes positives, est finie et déterminée, et d'assigner sa valeur.

En effet, intégrons d'abord entre ε et ∞, ε étant une constante positive, que nous ferons décroître ensuite jusqu'à zéro. L'intégration par parties, appliquée au premier terme, donnera

$$\begin{aligned} &\int_\varepsilon^\infty \frac{A\,e^{-\alpha x}}{x^m} dx \\ &= \left[-\frac{A}{m-1}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{m-1}} + \frac{A\alpha}{(m-1)(m-2)}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{m-2}} - \ldots\right]_\varepsilon^\infty \\ &\quad + \int_\varepsilon^\infty \frac{(-1)^{m-1} A\,\alpha^{m-1}}{(m-1)(m-2)\ldots}\frac{e^{-\alpha x}}{x} dx. \end{aligned}$$

La partie intégrée, s'annulant pour $x = \infty$, se réduira à

$$\frac{A}{m-1}\frac{e^{-\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^{m-1}} + \ldots.$$

Opérant de même sur chacun des autres termes et réunissant les résultats, on obtiendra :

1° Pour la partie intégrée, une somme de termes de la forme

$$\frac{K e^{-\alpha\varepsilon}}{\varepsilon^p};$$

2° Pour l'intégrale restante, une expression de la forme

$$\int_0^\infty A_1 e^{-\alpha x} + B_1 e^{-\beta x} + \ldots)\frac{dx}{x}.$$

La partie intégrée est aisément développable suivant les puissances entières et croissantes de ε. Soit

$$\frac{C_\lambda}{\varepsilon^\lambda} + \frac{C_{\lambda-1}}{\varepsilon^{\lambda-1}} + \ldots + C_0 + R$$

ce développement, R désignant l'ensemble des termes qui contiennent les puissances positives de ε.

D'autre part, si nous posons, pour abréger,

$$A_1 + B_1 + \ldots = S,$$

l'intégrale restante pourra s'écrire ainsi :

$$\int_\varepsilon^\infty [Se^{-\alpha x} + B_1(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}) + \ldots] \frac{dx}{x}.$$

L'intégrale du premier terme peut se décomposer en deux parties, à savoir $\int_\varepsilon^1 \frac{Se^{-\alpha x}dx}{x}$, qui a pour valeur

$$S\mu \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = -S\mu \operatorname{Log} \varepsilon,$$

μ étant une quantité intermédiaire entre les valeurs extrêmes $e^{-\alpha\varepsilon}$ et $e^{-\alpha}$ du facteur $e^{-\alpha x}$; et $\int_1^\infty \frac{Se^{-\alpha x}dx}{x}$, qui a évidemment une valeur finie que nous représenterons par SD.

L'intégrale de chacun des autres termes, tels que

$$B_1(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}) \frac{dx}{x},$$

aura également une valeur finie, qui, pour $\varepsilon = 0$, tendra vers $B_1 \operatorname{Log} \frac{\alpha}{\beta}$.

La partie de l'intégrale primitive, qui tend vers ∞ quand ε tend vers zéro, sera donc la suivante :

$$\frac{C_\lambda}{\varepsilon^\lambda} + \frac{C_{\lambda-1}}{\varepsilon^{\lambda-1}} + \ldots - S\mu \operatorname{Log} \varepsilon.$$

Ces termes, étant d'ordres inégaux, devront s'annuler séparément pour que l'intégrale reste finie, ce qui donnera les conditions

$$C_\lambda = 0, \quad C_{\lambda-1} = 0, \quad \ldots, \quad C_1 = 0, \quad S = 0.$$

Si ces conditions sont satisfaites, R s'annulant d'ailleurs

pour $\varepsilon = 0$, la valeur de l'intégrale se réduira à

$$C_0 + B_1 \operatorname{Log} \frac{\alpha}{\beta} + \ldots = C_0 - A_1 \operatorname{Log} \alpha - B_1 \operatorname{Log} \beta - \ldots.$$

206. *Exemples.* — 1° Appliquons cette formule à l'intégrale

$$\int_0^\infty \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) e^{-x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \left(e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}\right) \right] \frac{dx}{x}.$$

L'intégration par parties des termes en $\frac{1}{x^2}$ permettra de donner à cette expression la forme suivante :

$$\left(- \frac{e^{-nx} - e^{-\frac{1}{2}x}}{x} \right)_0^\infty + \int_0^\infty \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) (e^{-x} - e^{-nx}) \frac{dx}{x} \right].$$

Le terme tout intégré aura pour valeur

$$\lim \left(\frac{e^{-n\varepsilon} - e^{-\frac{1}{2}\varepsilon}}{\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}$$

$$= \lim \left(\frac{1 - n\varepsilon + \ldots - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \ldots}{\varepsilon} \right) = -n + \frac{1}{2}.$$

Quant à l'intégrale restante, elle aura pour valeur

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} n.$$

On aura donc, pour valeur de l'intégrale totale,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} n - n + \frac{1}{2}.$$

2° Un calcul analogue donnera, pour la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x} \right) dx,$$

l'expression suivante :

$$1 - \operatorname{Log} 2.$$

II. — Intégrales eulériennes.

207. On donne le nom d'*intégrale eulérienne de deuxième espèce* à l'intégrale

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx.$$

Cette intégrale n'a de sens que si n est positif ; car, si n était négatif ou nul, la fonction à intégrer devenant infinie du premier ordre au moins à la limite $x = 0$, l'intégrale serait infinie.

Si n est positif, l'intégrale sera, au contraire, finie et déterminée, car l'ordre d'infinitude de la fonction à intégrer pour $x = 0$ est inférieur à 1 ; elle est finie dans tout le reste du champ ; enfin, pour $x = \infty$, elle devient plus petite qu'une puissance quelconque de x.

On peut varier à volonté la forme de cette intégrale en changeant de variable. Posons, par exemple, $x = y^2$; il viendra

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty 2y^{2n-1} e^{-y^2}\, dy.$$

Soit, en particulier, $n = \frac{1}{2}$; il viendra

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty 2e^{-y^2}\, dy = \sqrt{\pi}.$$

Posons, d'autre part, $x = \log\frac{1}{z}$, il viendra

$$\Gamma(n) = \int_0^1 \left(\log\frac{1}{z}\right)^{n-1} dz.$$

208. Il est aisé de vérifier l'identité de cette fonction avec le produit Γ étudié dans le *Calcul différentiel* (382 à 385).

En effet, soit μ un entier que nous ferons croître indéfi-

niment ; on aura, par définition,

$$\Gamma(n) = \lim_{\mu=\infty} \int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \left(\log \frac{1}{z}\right)^{n-1} dz.$$

Or on pourra, sans changer la limite de cette expression, y remplacer $\log \frac{1}{z}$ par $\mu\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)$. Posons, en effet,

$$1 - z^{\frac{1}{\mu}} = h,$$

d'où

$$\mu = \frac{\log z}{\log(1-h)},$$

$$\mu\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right) = \frac{h \log z}{\log(1-h)} = -\frac{h}{\log(1-h)} \log \frac{1}{z};$$

on aura

$$\int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \mu^{n-1}\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz = k^{n-1} \int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \left(\log \frac{1}{z}\right)^{n-1} dz,$$

k désignant une valeur intermédiaire entre le maximum et le minimum du facteur $\frac{-h}{\log(1-h)}$.

Mais h est une quantité infiniment petite, comprise entre les limites $1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{\mu}}}$ et 0 correspondant aux valeurs extrêmes $e^{-\sqrt{\mu}}$ et 1 de la variable z. Le facteur

$$\frac{-h}{\log(1-h)} = \frac{h}{h + \frac{h^2}{2} + \ldots}$$

diffère donc infiniment peu de l'unité, de telle sorte qu'on aura à la limite $k = 1$ et

$$\lim_{\mu=\infty} \int_{e^{-\sqrt{\mu}}}^{1} \mu^{n-1}\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz = \Gamma(n).$$

On a d'ailleurs

$$\int_{0}^{e^{-\sqrt{\mu}}} \mu^{n-1}\left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz < \int_{0}^{e^{-\sqrt{\mu}}} \mu^{n-1}\, dz < \mu^{n-1} e^{-\sqrt{\mu}},$$

expression dont la limite est nulle. On pourra donc abaisser jusqu'à zéro la limite inférieure de l'intégrale, et écrire

$$\Gamma(n) = \lim \mu^{n-1} \int_0^1 \left(1 - z^{\frac{1}{\mu}}\right)^{n-1} dz.$$

Posons $z = y^\mu$; il viendra

$$\Gamma(n) = \lim \mu^n \int_0^1 y^{\mu-1}(1-y)^{n-1}\,dy;$$

or l'intégration par partie donne

$$\int_0^1 y^{\mu-1}(1-y)^{n-1}\,dy$$
$$= \left[-\frac{1}{n} y^{\mu-1}(1-y)^n\right]_0^1 + \frac{\mu-1}{n}\int_0^1 y^{\mu-2}(1-y)^n\,dy$$
$$= \frac{\mu-1}{n}\int_0^1 y^{\mu-2}(1-y)^n\,dy$$
$$= \frac{(\mu-1(\mu-2)}{n(n+1)}\int_0^1 y^{\mu-3}(1-y)^{n+1}\,dy$$
....
$$= \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+\mu-2)}\int_0^1 (1-y)^{n+\mu-2}\,dy$$
$$= \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+\mu-2)}\,\frac{1}{n+\mu-1}.$$

On aura donc

$$\Gamma(n) = \lim \mu^n \frac{(\mu-1)(\mu-2)\ldots 1}{n(n+1)\ldots(n+\mu-1)}.$$

C'est l'équation qui définit les produits Γ (*Calcul différentiel*, n° 382).

209. L'expression de la fonction $\Gamma(n)$ par une intégrale définie, que nous venons d'obtenir (dans le cas où n est positif), fournit un moyen commode de calculer sa valeur pour chaque valeur donnée de la variable. On peut d'ailleurs démontrer à nouveau, en partant de cette expression, les principales propriétés de la fonction.

Ainsi l'intégration par parties donnera immédiatement

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$
$$= (-x^n e^{-x})_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\,dx = n\Gamma(n),$$

et plus généralement, si k est un entier,

$$\Gamma(n+k) = (n+k-1)\Gamma(n+k-1) = \ldots$$
$$= (n+k-1)(n+k-2)\ldots n\Gamma(n).$$

Cette formule permet de ramener le calcul de la fonction Γ au cas où la variable ne surpasse pas l'unité.

Posons, en particulier, $n=1$ dans la formule précédente. En remarquant qu'on a

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1,$$

il viendra

$$\Gamma(1+k) = k!$$

210. La fonction $\operatorname{Log}\Gamma(n)$ peut également se mettre sous forme d'intégrale définie.

Prenons, en effet, la dérivée de l'expression

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x}\,dx;$$

il viendra

$$\Gamma'(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} \operatorname{Log} x\,dx.$$

On peut, en effet, dériver sous le signe $\int$; car soit m_0 une valeur particulière du paramètre m, et soit δ une quantité suffisamment petite. Pour toutes les valeurs de m comprises entre $m_0-\delta$ et $m_0+\delta$, l'intégrale

$$\int_B^\infty x^{m-1} e^{-x} \operatorname{Log} x\,dx$$

convergera uniformément vers zéro lorsque B tend vers ∞,

car elle sera au plus égale à

$$\int_{B}^{\infty} x^{m_0+\delta-1} e^{-x} \operatorname{Log} x \, dx,$$

quantité indépendante de m, et qui tend vers zéro.

Mais on a (205)

$$\operatorname{Log} x = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} dz.$$

Si donc nous posons, pour abréger,

$$x^{m-1} e^{-x} \frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z} = f,$$

nous aurons

$$\Gamma'(m) = \int_{0}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} f \, dz.$$

211. On peut intervertir les intégrations. Pour l'établir, nous montrerons tout d'abord qu'en désignant par λ une constante positive, on aura

$$(1) \qquad \int_{\lambda}^{\infty} dx \int_{0}^{\infty} f \, dz = \int_{0}^{\infty} dz \int_{\lambda}^{\infty} f \, dx.$$

En effet, on a, d'une part,

$$\left| \int_{B}^{\infty} f \, dz \right| \leqq x^{m-1} e^{-x} \int_{B}^{\infty} \frac{e^{-z} + e^{-\lambda z}}{B} dz$$

$$\leqq x^{m-1} e^{-x} \left(\frac{e^{-B}}{B} + \frac{e^{-\lambda B}}{\lambda B} \right).$$

Or $x^{m-1} e^{-x}$ a une intégrale finie entre $x = \lambda$ et $x = \infty$, et le second facteur est indépendant de x et tend vers zéro quand B croît indéfiniment.

On a, d'autre part, d'après la série de Taylor arrêtée à son premier terme,

$$e^{-z} = 1 - z e^{-\theta z} \qquad (0 < \theta < 1),$$

$$e^{-xz} = 1 - xz e^{-\theta' xz} \qquad (0 < \theta' < 1),$$

d'où (x et z étant positifs)

$$\left|\frac{e^{-z} - e^{-xz}}{z}\right| \overline{\overline{<}}\, e^{-\theta z} + x\, e^{-\theta' xz} < 1 + x,$$

d'où

$$\left|\int_A^\infty f\,dx\right| < \int_A^\infty x^{m-1}\, e^{-x}(1+x)\,dx,$$

quantité indépendante de z, et qui tend vers zéro quand A tend vers ∞.

212. Faisons tendre λ vers zéro dans l'équation (1). Le second membre tendra vers $\int_0^\infty dz \int_0^\infty f\,dx$. Pour le faire voir, il suffit de montrer que

$$\int_0^\infty dz \int_0^\lambda f\,dx$$

tend vers zéro.

Or cette intégrale est la somme des deux suivantes (μ étant un nombre arbitraire) :

$$\int_0^\mu dz \int_0^\lambda f\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_\mu^\infty dz \int_0^\lambda f\,dx.$$

La première a son module moindre que

$$\int_0^\mu dz \int_0^\lambda x^{m-1}(1+x)\,dx = \mu\left(\frac{\lambda^m}{m} + \frac{\lambda^{m+1}}{m+1}\right).$$

La seconde a son module moindre que

$$\int_\mu^\infty dz \int_0^\lambda x^{m-1}\,\frac{e^{-z} + e^{-xz}}{z}\,dx$$
$$= \frac{\lambda^m}{m}\int_\mu^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz + \int_\mu^\infty dz \int_0^\lambda \frac{x^{m-1}\,e^{-xz}}{z}\,dx.$$

Dans cette dernière intégrale, posons $x = \frac{y}{z}$. Elle devient

$$\int_\mu^\infty dz \int_0^{\lambda z} \frac{y^{m-1}\,e^{-y}\,dy}{z^{m+1}},$$

quantité moindre que la suivante

$$\int_\mu^\infty dz \int_0^\infty \frac{y^{m-1} e^{-y}\, dy}{z^{m+1}} = \frac{\Gamma(m)}{m \mu^m}.$$

L'intégrale cherchée a donc pour limite supérieure de son module

$$\mu\left(\frac{\lambda^m}{m} + \frac{\lambda^{m+1}}{m+1}\right) + \frac{\lambda^m}{m}\int_\mu^\infty \frac{e^{-z}}{z}\, dz + \frac{\Gamma(m)}{m\mu^m}.$$

Or, si nous prenons $\mu = \lambda^{-n}$, n étant un nombre $< m$, les trois termes qui précèdent tendront séparément vers zéro. Le premier membre de l'équation (1) tendra vers la même limite, qui, par définition, sera l'intégrale

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f\, dz.$$

213. Notre proposition est donc démontrée, et nous aurons

$$\Gamma'(m) = \int_0^\infty \frac{dz}{z} \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} (e^{-z} - e^{-xz})\, dx.$$

Mais

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} e^{-z}\, dx = e^{-z} \Gamma(m),$$

et, d'autre part, en posant $x(1+z) = y$,

$$\int_0^\infty x^{m-1} e^{-x} e^{-xz}\, dx = \int_0^\infty \frac{y^{m-1} e^{-y}\, dy}{(1+z)^m} = \frac{\Gamma(m)}{(1+z)^m}.$$

Donc

$$\Gamma'(m) = \Gamma(m) \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^m}\right].$$

Divisons par $\Gamma(m)$ et intégrons de $m=1$ à $m=n$; on aura, au premier membre, $\log \Gamma(n)$, car

$$\log \Gamma(1) = \log 1 = 0.$$

Au second membre, on pourra encore intervertir les

intégrations ; on a, en effet, μ désignant un nombre positif quelconque moindre que 1 et que n (m étant au contraire compris entre 1 et n),

$$\left|\int_B^\infty \frac{dz}{z}\left[e^{-z} - \frac{1}{(1+z)^m}\right]\right| \leqq \int_B^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{z} + \int_B^\infty \frac{dz}{z^{1+\mu}},$$

quantité indépendante de m et qui tend vers zéro quand B croît indéfiniment.

Effectuant donc l'intégration par rapport à m, il viendra

$$\log\Gamma(n) = \int_0^\infty \frac{dz}{z}\left[(n-1)e^{-z} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-n}}{\log(1+z)}\right].$$

Posant en particulier $n = 2$, il viendra, en remarquant que $\log\Gamma(2) = \log 1 = 0$,

$$0 = \int_0^\infty dz\left[\frac{e^{-z}}{z} - \frac{(1+z)^{-2}}{\log(1+z)}\right].$$

Multipliant par $(n-1)$, et retranchant de la formule précédente, pour se débarrasser du terme en e^{-z}, il vient

$$\log\Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1)(1+z)^{-2} - \frac{(1+z)^{-1} - (1+z)^{-n}}{z}\right]\frac{dz}{\log(1+z)},$$

et, en posant $\log(1+z) = x$, d'où $z = e^x - 1$,

$$\log\Gamma(n) = \int_0^\infty \left[(n-1)e^{-x} - \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}\right]\frac{dx}{x}.$$

214. Le facteur $\dfrac{1}{1 - e^{-x}}$, qui multiplie e^{-nx} dans l'intégrale précédente, étant développé en série suivant les puissances croissantes de x, aura pour premiers termes $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$. Réunissant ces termes $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\right)e^{-nx}$ à ceux qui sont indépendants de cette exponentielle, il viendra

$$\log\Gamma(n) = F(n) + \varpi(n),$$

en posant, pour abréger,

$$F(n)=\int_0^\infty\left[\left(n-1-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)e^{-nx}\right]\frac{dx}{x},$$

$$\varpi(n)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-nx}\frac{dx}{x}.$$

L'intégrale $F(n)$ peut se calculer exactement. On a, en effet (206),

$$\begin{aligned}F(n)-F\left(\frac{1}{2}\right)&=\int_0^\infty\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)e^{-x}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{-nx}-e^{-\frac{1}{2}x}\right)\right]\frac{dx}{x}\\&=\left(n-\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

On a, en second lieu,

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\log\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)-\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\log\pi-\varpi\left(\frac{1}{2}\right).$$

Enfin

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}\frac{dx}{x},$$

ou, en changeant x en $2x$,

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x}. \tag{2}$$

Mais on a, d'autre part,

$$\varpi(1)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)e^{-x}\frac{dx}{x},$$

et, en changeant x en $2x$,

$$\varpi(1)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{1-e^{-2x}}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\frac{dx}{x},$$

et, en retranchant,

$$o = \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-2x}} - \frac{2-e^{-x}}{2x} - \frac{1-e^{-x}}{2} \right) e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Retranchant cette égalité de la formule (2), il viendra (206)

$$\varpi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x^2} - \frac{e^{-2x}}{x} \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2.$$

On aura donc enfin

$$F(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Quant à la seconde intégrale $\varpi(n)$, elle tend évidemment vers zéro quand n augmente. On peut la développer en série de diverses manières.

215. Développons, par exemple, la fonction qui multiplie e^{-nx} suivant les puissances de x.

On a

$$\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} - \frac{1}{x} = \frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2} - \frac{1}{x}.$$

Mais on a (*Calcul différentiel*, 377)

$$\pi\cot\pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2z}{z^2-n^2},$$

et, en posant $z = \frac{ix}{2\pi}$ et multipliant par $\frac{i}{2\pi}$,

$$\frac{i}{2}\cot\frac{ix}{2} - \frac{1}{x} = 2\sum_1^\infty \frac{x}{x^2+4n^2\pi^2}$$

et, par suite,

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}$$

$$=2\sum_1^\infty \frac{1}{x^2+4n^2\pi^2}$$

$$=2\sum_1^\infty\left[\frac{1}{4n^2\pi^2}-\frac{x^2}{(4n^2\pi^2)^2}+\frac{x^4}{(4n^2\pi^2)^3}-\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(4n^2\pi^2)^m(x^2+4n^2\pi^2)}\right].$$

On a d'ailleurs (*Calcul différentiel*, 376)

$$2\sum_1^\infty \frac{1}{(4n^2\pi^2)^p}=\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2p}}=\frac{B_p}{1.2\ldots 2p}.$$

En outre,

$$2\sum_1^\infty\frac{1}{(4n^2\pi^2)^m(x^2+4n^2\pi^2)}=2\theta\sum_1^\infty\frac{1}{(4n^2\pi^2)^{m+1}}$$

$$=\theta\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots(2m+2)},$$

θ étant compris entre o et 1. On aura donc

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}$$

$$=\frac{B_1}{1.2}-\frac{B_2}{1.2.3.4}x^2+\ldots+(-1)^m\frac{B_{m+1}}{1.2\ldots(2m+2)}\theta x^{2m}.$$

On en déduira $\varpi(n)$, en multipliant par e^{-nx}, et intégrant de o à ∞.

Mais on a

$$\int_0^\infty x^{2p}\,e^{-nx}\,dx=\frac{\Gamma(2p+1)}{n^{2p+1}}=\frac{1.2\ldots 2p}{n^{2p+1}},$$

$$\int_0^\infty \theta x^{2m}\,e^{-nx}\,dx=\theta_1\int_0^\infty x^{2m}\,e^{-nx}\,dx=\theta_1\frac{1.2\ldots 2m}{n^{2m+1}},$$

θ_1 étant encore compris entre o et 1. On trouvera donc

$$\varpi(n) = \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{n} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}B_m}{(2m-1)2m}\frac{1}{n^{2m-1}} + \frac{(-1)^m B_{m+1}}{(2m+1)(2m+2)}\frac{\theta_1}{n^{2m+1}}.$$

216. La série que nous venons d'obtenir pour la valeur de $\varpi(n)$ serait divergente si on la prolongeait jusqu'à l'infini. Toutefois, les premiers termes décroissent rapidement pour peu que n soit considérable. L'expression du reste montre d'ailleurs que l'erreur est moindre que le premier terme négligé. En s'arrêtant au moment où les termes commencent à croître de nouveau, on aura donc une valeur de $\varpi(n)$ dont le degré d'exactitude est facile à apprécier, et sera, en général, largement suffisant.

Si n tend vers ∞, $\varpi(n)$ tendra vers zéro et pourra être négligé. On aura donc à la limite

$$\log\Gamma(n) = F(n),$$

et, comme on a

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

il viendra

$$\log\Gamma(n+1) = F(n) + \log n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

217. Les résultats qui précèdent permettent de calculer, avec une erreur relative d'autant plus faible que n sera plus grand, la valeur d'une factorielle quelconque

$$F = a(a+b)\ldots(a+nb).$$

On a, en effet,

$$F = ab^n\left(\frac{a}{b}+1\right)\ldots\left(\frac{a}{b}+n\right) = ab^n\frac{\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right)},$$

$$\log F = \log a + n\log b + \log\Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right) - \log\Gamma\left(\frac{a}{b}+1\right).$$

Mais on obtiendra, par la méthode précédente, une valeur approchée de $\log \Gamma\left(\frac{a}{b}+n+1\right)$. Le dernier logarithme se calculera de même, si $\frac{a}{b}$ est un grand nombre; sinon, on devra recourir à une Table des valeurs de la fonction Γ.

218. L'une des applications les plus importantes de la formule précédente est relative au Calcul des probabilités.

Soient p et $q = 1 - p$ les probabilités de deux événements contradictoires A et B. On démontre aisément que la probabilité que sur μ épreuves successives l'événement B se présente m fois, et l'événement A, $\mu - m$ fois, est représentée par le terme en $p^{\mu-m}q^m$ du développement du binome $(p+q)^\mu$. Ce terme T_m est donné par la formule

$$T_m = \frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots(\mu-m)} p^{\mu-m}q^m$$
$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\mu-m+1)} p^{\mu-m}q^m.$$

On en déduit

$$\frac{T_m}{T_{m-1}} = \frac{\mu-m+1}{m}\,\frac{q}{p} = \frac{\mu-m+1}{m}\,\frac{q}{1-q}.$$

Ce rapport sera > 1 ou < 1, suivant qu'on aura

$$m < (\mu+1)q \qquad \text{ou} \qquad > (\mu+1)q.$$

Le plus grand terme sera donc T_n, n étant le plus grand entier contenu dans $(\mu+1)q$. Ce nombre n, étant $> (\mu+1)q - 1$, mais $\overline{\gtrless}(\mu+1)q$, sera de la forme $\mu q + r$, r étant compris entre $q - 1$ et q.

219. Cela posé, cherchons à évaluer la limite vers laquelle tend, lorsque μ croît indéfiniment, la somme

$$S = T_{n-\lambda} + \ldots + T_n + T_{n+1} + \ldots + T_{n+\lambda-1},$$

λ étant un entier fixe ou variable, mais d'un ordre de grandeur inférieur à celui de $\mu^{\frac{2}{3}}$.

Considérons à cet effet la fonction

$$f(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(n+x+1)\,\Gamma(\mu-n-x+1)}\, p^{\mu-n-x} q^{n+x}.$$

Soient M et m le maximum et le minimum du rapport $\frac{f(x+\theta)}{f(x)}$ lorsque θ varie de o à 1 et x de $-\lambda$ à $\lambda-1$. Soit ρ l'un des entiers compris dans ce dernier intervalle.

Pour $x=\rho$, $f(x)$ se réduira à $T_{n+\rho}$, et de $x=\rho$ à $x=\rho+1$, $f(x)$ sera compris entre $MT_{n+\rho}$ et $mT_{n+\rho}$; on aura donc

$$MT_{n+\rho} > \int_\rho^{\rho+1} f(x)\,dx > mT_{n+\rho}.$$

Posant $\rho=-\lambda, \ldots, \lambda-1$ et ajoutant les résultats, il vient

$$MS > \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx > mS,$$

d'où

$$S = k\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx,$$

k étant compris entre $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{M}$.

Or on a

$$\log f(x) = \log\Gamma(\mu+1) - \log\Gamma(n+x+1) - \log\Gamma(\mu-n-x+1) \\ + (\mu-n-x)\log p + (n+x)\log q,$$

ou, d'après la formule d'approximation trouvée plus haut,

$$\log f(x) = \left(\mu+\frac{1}{2}\right)\log\mu - \mu + \frac{1}{2}\log 2\pi \\ - \left(n+x+\frac{1}{2}\right)\log(n+x) + n + x - \frac{1}{2}\log 2\pi \\ - \left(\mu-n-x+\frac{1}{2}\right)\log(\mu-n-x) + \mu - n - x \\ - \frac{1}{2}\log 2\pi + (\mu-n-x)\log p + (n+x)\log q + R,$$

le reste R étant infiniment petit.

Mais on a $n = \mu q + r$, d'où l'on déduit

$$\mu - n = \mu p - r,$$

$$\begin{aligned}
\log(n+x) &= \log(\mu q + r + x) \\
&= \log \mu q + \log\left(1 + \frac{x+r}{\mu q}\right) \\
&= \log \mu + \log q + \frac{x+r}{\mu q} - \frac{(x+r)^2}{2\mu^2 q^2} + R', \\
\log(\mu - n - x) &= \log(\mu p - r - x) \\
&= \log \mu p + \log\left(1 - \frac{x+r}{\mu p}\right) \\
&= \log \mu + \log p - \frac{x+r}{\mu p} - \frac{(x+r)^2}{2\mu^2 p^2} + R'',
\end{aligned}$$

les restes R′ et R″ étant des infiniment petits d'ordre supérieur au premier (μ étant considéré comme infini du premier ordre), car x varie entre $-\lambda$ et $+\lambda - 1$, qui sont d'ordre inférieur à $\frac{2}{3}$.

Substituant ces valeurs dans l'expression de $\log f(x)$, réduisant et négligeant les termes infiniment petits, il viendra

$$\log f(x) = -\frac{1}{2}\log \mu - \frac{1}{2}\log p - \frac{1}{2}\log q - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)\frac{x^2}{\mu},$$

d'où

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi pq\mu}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{x^2}{\mu}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pq\mu}} e^{-\frac{x^2}{2pq\mu}}.$$

On en déduit

$$\frac{f(x+\theta)}{f(x)} = e^{-\frac{2\theta x + \theta^2}{2pq\mu}}.$$

Si θ varie de 0 à 1 et x de $-\lambda$ à $\lambda - 1$, ce rapport restera compris entre

$$M = e^{\frac{2\lambda - 1}{2pq\mu}} \quad \text{et} \quad m = e^{-\frac{2\lambda-1}{2pq\mu}}.$$

Si μ tend vers ∞, ces deux quantités tendront vers l'unité.

Nous aurons donc

$$\lim k = 1$$

et

$$\lim S = \lim \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx = \lim \frac{1}{\sqrt{2\pi pq\mu}} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-\frac{x^2}{2pq\mu}}\,dx$$

220. Posons, pour simplifier,

$$x = t\sqrt{2pq\mu}.$$

L'intégrale

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx$$

deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{\lambda}{\sqrt{2pq\mu}}}^{\frac{\lambda}{\sqrt{2pq\mu}}} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2pq\mu}}} e^{-t^2}\,dt.$$

Si λ croît moins rapidement que $\sqrt{\mu}$, cette intégrale aura pour limite zéro, le champ d'intégration décroissant indéfiniment. Si $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}$ tend vers une limite finie, l'intégrale aura une valeur variable avec cette limite. Enfin, si $\frac{\lambda}{\sqrt{\mu}}$ tend vers ∞, l'intégrale tendra vers

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1.$$

Donc si le nombre μ des épreuves croît indéfiniment, la probabilité que le rapport du nombre des événements B au nombre des événements A reste compris entre les deux limites $\frac{n-\lambda}{\mu-n+\lambda}$ et $\frac{n+\lambda-1}{\mu-n-\lambda+1}$ tendra vers la certitude, si λ croît plus vite que $\sqrt{\mu}$. Or les deux limites ci-dessus tendent évidemment toutes deux vers $\frac{q}{p}$. Donc le rapport du nombre des événements B à celui des événements A tendra vers la même limite.

Cet important résultat est connu sous le nom de *théorème de Bernoulli*.

221. *Produit de deux fonctions* Γ. — On a

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty 2x^{2p-1}e^{-x^2}dx . \int_0^\infty 2y^{2q-1}e^{-y^2}dy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty 4x^{2p-1}y^{2q-1}e^{-x^2-y^2}dx\,dy$$

et, en posant $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty 4\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}d\rho\,d\varphi$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi . \int_0^\infty 2\rho^{2p+2q-1}e^{-\rho^2}d\rho$$
$$= B(p,q)\Gamma(p+q),$$

en posant, pour abréger,

$$B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^{2p-1}\varphi\sin^{2q-1}\varphi\,d\varphi.$$

Soit en particulier $p = q = \frac{1}{2}$. On aura

$$B(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,d\varphi = \pi,$$
$$\Gamma(p+q) = 1$$

et, par suite,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi,$$

formule déjà obtenue (**207**).

Posons plus généralement $q = 1 - p$; il viendra (*Calcul différentiel*, **384**)

$$B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

222. L'intégrale $B(p,q)$, que nous venons de ramener aux fonctions Γ, porte le nom d'*intégrale eulérienne de*

première espèce. Elle est susceptible de plusieurs autres formes.

Posons, par exemple,

$$\cos^2\varphi = x, \qquad \text{d'où} \qquad -2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = dx;$$

il viendra

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Posons encore

$$x = \frac{y}{1+y}, \qquad \text{d'où} \qquad 1 - x = \frac{1}{1+y}, \qquad dx = \frac{dy}{(1+y)^2};$$

il viendra

$$B(p, q) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}\,dy}{(1+y)^{p+q}}.$$

223. Considérons l'intégrale multiple

$$I = \int\int\int f\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma\right] x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1}\,dx\,dy\,dz$$

prise pour tous les systèmes de valeurs positives des variables qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta + \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma \leqq 1.$$

Posons

$$x = a x_1^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad y = b y_1^{\frac{1}{\beta}}, \qquad z = c z_1^{\frac{1}{\gamma}},$$
$$p = \alpha p_1, \qquad q = \beta q_1, \qquad r = \gamma r_1.$$

L'intégrale deviendra

$$\frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma}\int\int\int f(x_1 + y_1 + z_1)\, x_1^{p_1-1} y_1^{q_1-1} z_1^{r_1-1}\,dx_1\,dy_1\,dz_1$$

et devra être étendue à tous les systèmes de valeurs positives des variables qui satisfont à la relation

$$x_1 + y_1 + z_1 \leqq 1.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} X &= x_1 + y_1 + z_1 = \xi, \\ Y &= \quad\;\; y_1 + z_1 = \xi\eta, \\ Z &= \qquad\quad\; z_1 = \xi\eta\zeta. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi\,(1-\eta), \\ y_1 &= \xi\eta(1-\zeta), \\ z_1 &= \xi\eta\zeta \end{aligned}$$

et

$$dX\,dY\,dZ = dx_1\,dy_1\,dz_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta & \xi & 0 \\ \eta\zeta & \xi\zeta & \xi\eta \end{vmatrix} d\xi\,d\eta\,d\zeta = \xi^2\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Enfin ξ, η, ζ varieront de 0 à 1.

Substituant les nouvelles variables à la place de x_1, y_1, z_1, l'intégrale précédente deviendra

$$\frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1-1}(1-\eta)^{p_1-1} \times \eta^{q_1+r_1-1}(1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Les variables étant complètement séparées, cette intégrale sera le produit des trois suivantes :

$$\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi,$$

$$\int_0^1 (1-\eta)^{p_1-1}\eta^{q_1+r_1-1}\,d\eta = B(q_1+r_1, p_1) = \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1+r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)},$$

$$\int_0^1 (1-\zeta)^{q_1-1}\zeta^{r_1-1}\,d\zeta \quad = B(r_1, q_1) \quad = \frac{\Gamma(q_1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(q_1+r_1)}.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(q_1)\Gamma(r_1)}{\Gamma(p_1+q_1+r_1)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{p_1+q_1+r_1-1}\,d\xi \\ &= \frac{a^p b^q c^r}{\alpha\beta\gamma}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}\right)}\int_0^1 f(\xi)\,\xi^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}-1}\,d\xi, \end{aligned}$$

et l'intégrale multiple sera ainsi réduite à une intégrale simple.

224. Supposons, en particulier, que la fonction f se réduise à une constante K. L'intégrale simple sera égale à $\frac{K}{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}}$, et I sera complètement calculé en fonction des transcendantes Γ.

Cette formule a de nombreuses applications au calcul des volumes, centres de gravité, moments d'inertie. Cherchons, par exemple, le moment d'inertie d'un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

homogène et de densité 1, par rapport à l'axe des z. L'intégrale à calculer sera la suivante

$$\int\int\int(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

On en aura le huitième en se bornant aux valeurs positives des coordonnées.

Le premier terme de cette intégrale s'obtient en posant, dans la formule précédente,

$$\alpha=\beta=\gamma=2, \qquad p=3, \qquad q=r=1, \qquad f=1.$$

Il aura pour valeur

$$\frac{a^3bc}{8}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{a^3bc}{8}\frac{\pi}{\frac{3}{2}\frac{5}{2}}.$$

Calculant de même le second terme, ajoutant et multipliant par 8, il viendra, pour le moment d'inertie cherché,

$$\frac{4}{15}(a^2+b^2)\pi abc.$$

CHAPITRE IV.

POTENTIELS NEWTONIENS.

I. — Étude analytique des potentiels.

225. On désigne sous le nom de potentiels newtoniens les intégrales suivantes :

1° *Potentiel de volume :* c'est l'intégrale triple

$$\iiint_K \frac{\mu(x, y, z)}{r} dv;$$

2° *Potentiel de simple couche :* c'est l'intégrale double

$$\iint_\Omega \frac{\mu(u, v)}{r} d\sigma,$$

Ω étant une surface, les coordonnées de ses points étant supposés exprimés au moyen de paramètres u, v;

3° *Potentiel de double couche :* c'est l'intégrale

$$\iint_\Omega \mu(u, v) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = -\iint_\Omega \mu(u, v) \frac{\cos nr}{r^2} d\sigma,$$

où n désigne la normale positive; r est la distance de l'élément à un point fixe (abc). Le champ des intégrales est supposé fini. La fonction μ, *densité* de l'élément, est supposée développable en tout point du champ par la série de Taylor.

Ces potentiels sont des fonctions de (a, b, c) que nous allons étudier.

226. En dehors du champ d'intégration, ce sont des intégrales ordinaires, qu'on peut dériver indéfiniment par la règle de Leibnitz.

Elles sont régulières à l'infini. Soient en effet R, ρ les distances à l'origine du point (abc) et du point variable (x, y, z); r sera compris entre $R - \rho$ et $R + \rho$ et, *a fortiori*, entre $R - d$ et $R + d$, d désignant le maximum de ρ dans le champ; donc $\frac{r}{R}$ tendra vers l'unité pour $R = \infty$.

On a d'ailleurs

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{x-a}{r^3}, \qquad \dots,$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{(x-a)^2}{r^5}, \qquad \dots;$$

$x - a$, $y - b$, $z - c$ étant au plus égaux à r en valeur absolue, on voit que $\frac{1}{r}$ est de l'ordre de $\frac{1}{R}$, ses dérivées premières de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$, ses dérivées secondes de l'ordre de $\frac{1}{R^3}$, etc.

Les intégrales obtenues en multipliant ces expressions par une fonction finie μ et intégrant dans un champ fini jouiront évidemment des mêmes propriétés.

Ce sont des fonctions harmoniques. Désignons, en effet, pour abréger, par ∇ l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} + \frac{\partial^2}{\partial c^2}.$$

On a évidemment

$$\nabla \frac{1}{r} = 0$$

et, par suite,

$$\nabla \int\int\int_K \frac{\mu\, dv}{r} = \int\int\int_K \mu \nabla \frac{1}{r} dv = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\nabla \int\int_\Omega \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = \int\int_\Omega \mu \frac{\partial}{\partial n} \nabla \frac{1}{r} d\sigma = 0.$$

227. Lorsque (abc) est dans le champ d'intégration, les potentiels existent encore d'après les n°s 93 et 95; car la fonction à intégrer ne devient infinie que du premier ordre pour $r = 0$. En effet, $\frac{\cos nr}{r}$ est fini. [On doit toutefois remarquer que, pour les potentiels de surface, la démonstration du n° 95 suppose que le point (abc) est un point ordinaire de Ω, non situé sur sa frontière.]

228. Pour étudier les propriétés des potentiels lorsque (abc) est dans le champ d'intégration, nous nous appuierons sur un théorème de Cauchy relatif à l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles. Nous le démontrerons en son lieu. Dans le cas qui nous occupe, il peut se formuler ainsi :

Soit

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = F\left(x, y, z, \frac{\partial V}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial z}\right)$$

une équation aux dérivées partielles du second ordre résolue par rapport à $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$. Soient, d'autre part,

$$f(x, y), \quad f_1(x, y),$$

deux fonctions de x, y. Si chacune des fonctions F, f, f_1 est une série de puissances entières des quantités qui y figurent, on pourra déterminer une série V de puissances entières de x, y, z satisfaisant à l'équation (1) et telle que, pour $z = 0$, on ait

$$(2) \qquad V = f(x, y), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = f_1(x, y).$$

On formera aisément cette fonction en calculant ses dérivées successives pour $x=y=z=0$ et en appliquant la formule de Maclaurin.

Or les équations (2) et leurs dérivées successives font connaître toutes celles des dérivées cherchées où ne figure qu'une dérivation au plus par rapport à z. L'équation (1) et ses dérivées successives feront connaître les autres par récurrence.

La série de Maclaurin ainsi formée sera une fonction régulière dans l'intérieur de son cercle de convergence. Mais il resterait à prouver que le rayon de ce cercle n'est pas nul. Nous l'admettrons provisoirement.

Remarque. — Le théorème subsisterait si le coefficient de $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ dans l'équation (1), au lieu d'être égal à 1, était une série de puissances $S(x, y, z)$ commençant par un terme constant; car l'inverse de S étant une série de même nature, il suffirait de diviser l'équation par S pour être ramené au cas précédent.

Comme cas particulier de ce théorème, nous aurons la proposition suivante :

L'équation

$$\Delta V = F(x, y, z)$$

admet aux environs de l'origine une solution régulière telle que pour $z=0$, on ait

$$V=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Nous allons généraliser ce résultat.

229. Soit O un point ordinaire d'une surface Ω. Prenons-le pour origine, l'axe des z étant dirigé suivant la normale.

La surface étant donnée sous la forme paramétrique

$$x=\varphi(u, v), \qquad y=\varphi_1(u, v), \qquad z=\varphi_2(u, v),$$

on peut admettre que les paramètres aient été choisis de telle

sorte qu'ils s'annulent à l'origine. Les équations de la surface seront alors

$$x = au + bv + \ldots, \; y = a'u + b'v + \ldots, \; z = a''u + b''v + \ldots.$$

Le plan tangent sera

$$\begin{vmatrix} X & a & b \\ Y & a' & b' \\ Z & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

Mais il se confond avec le plan des xy ; d'où

$$a'' = b'' = 0, \qquad ab' - ba' \gtrless 0.$$

On pourrait au besoin prendre pour nouveaux paramètres $au + bv$, $a'u + b'v$. Par cette simplification, les équations de la surface deviennent

$$(3) \qquad x = u + \ldots, \qquad y = v + \ldots, \qquad z = au^2 + \ldots.$$

Cela posé, nous allons démontrer la proposition suivante :

230. *Il existe une solution de l'équation*

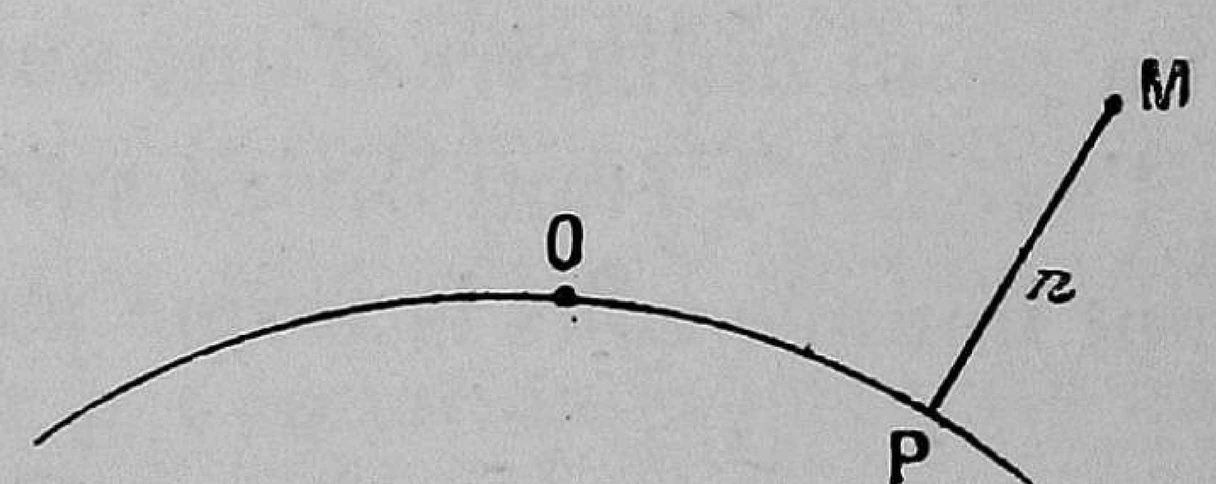
$$(4) \qquad \Delta V = F(x, y, z)$$

développable en série de Maclaurin aux environs de l'origine, et telle qu'on ait sur Ω,

$$(5) \qquad V = f(u, v), \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = f_1(u, v).$$

Un point M de l'espace, voisin du point O, peut être

Fig. 22.



déterminé (*fig.* 22) par sa distance $n = MP$ à la surface

et les coordonnées u, v du point P. On aura, en effet,

$$x = \xi + n\cos nx, \qquad y = \eta + n\cos ny, \qquad z = \zeta + n\cos nz,$$

ξ, η, ζ étant les coordonnées cartésiennes de P. Or ξ, η, ζ sont donnés par les formules (3), et les cosinus par les formules

$$\cos nx = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad \ldots,$$

où A, B, C désignent les déterminants

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \ldots.$$

Ce sont des séries de puissances de u, v, dont une seule C contient un terme constant, égal à 1; donc $\cos nx$, $\cos ny$, $\cos nz$ seront des séries analogues, et seul $\cos nz$ contiendra un terme constant, égal à 1.

Les coordonnées du point M seront donc

$$\left.\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= n \end{aligned}\right\} + \text{termes en } u, v, n \text{ de degré} > 1.$$

On en déduit réciproquement

$$\left.\begin{aligned} u &= x \\ v &= y \\ n &= z \end{aligned}\right\} + \text{termes en } x, y, z \text{ de degré} > 1.$$

Cela posé, transformons l'équation (4) en prenant u, v, n pour nouvelles variables. On aura

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial n^2}\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + \ldots.$$

L'équation transformée sera donc linéaire par rapport aux dérivées premières et secondes de V. Les coefficients seront

des séries de puissances; en particulier celui de $\frac{\partial^2 V}{\partial n^2}$, à savoir

$$\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)^2,$$

commencera par un terme constant 1, provenant de $\frac{\partial n}{\partial z}$. Donc l'équation admettra bien une solution régulière satisfaisant aux relations (5).

231. Ces préliminaires posés, abordons l'étude des potentiels.

Potentiel de volume. — Soit O un point *intérieur* au champ K. Entourons-le d'une sphère k intérieure à K, dont ω désigne la surface. Soient V une fonction quelconque régulière dans k; (abc) un point intérieur à k. La formule (24) du n° 185 donnera, en y changeant U, K, Ω en V, k, ω,

$$\int\int\int_k \frac{1}{r}\Delta V\,dv = \int\int_\omega \left(V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right)d\sigma - 4\pi V(abc).$$

Si la sphère k est assez petite (tout en restant finie), on pourra choisir la fonction V de telle sorte qu'elle satisfasse à l'équation

$$\Delta V = \mu(x, y, z).$$

Substituant cette valeur de ΔV et ajoutant aux deux membres l'intégrale

$$\int\int\int_{K-k} \frac{\mu}{r}\,dv,$$

il viendra

$$\int\int\int_K \frac{\mu}{r}\,dv = \int\int\int_{K-k}\frac{\mu}{r}\,dv + \int\int_\omega V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\,d\sigma$$
$$-\int\int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\nu}\,d\sigma - 4\pi V(abc).$$

Le potentiel

$$U = \iiint_K \frac{\mu}{r} dv$$

est donc la somme algébrique de trois potentiels, de volume, de simple couche et de double couche et d'un terme tout intégré.

Le point (abc) n'étant plus dans le champ des nouveaux potentiels, chacun de ces quatre termes pourra être dérivé autant de fois qu'on voudra.

Donc V *est régulier à l'intérieur du champ*; *mais il n'est plus harmonique;* car si l'on effectue l'opération ∇ sur l'égalité précédente, elle donnera un résultat nul sur les trois potentiels du second membre et $-4\pi\mu(a, b, c)$ sur le dernier terme. D'où cette importante formule, due à *Poisson*,

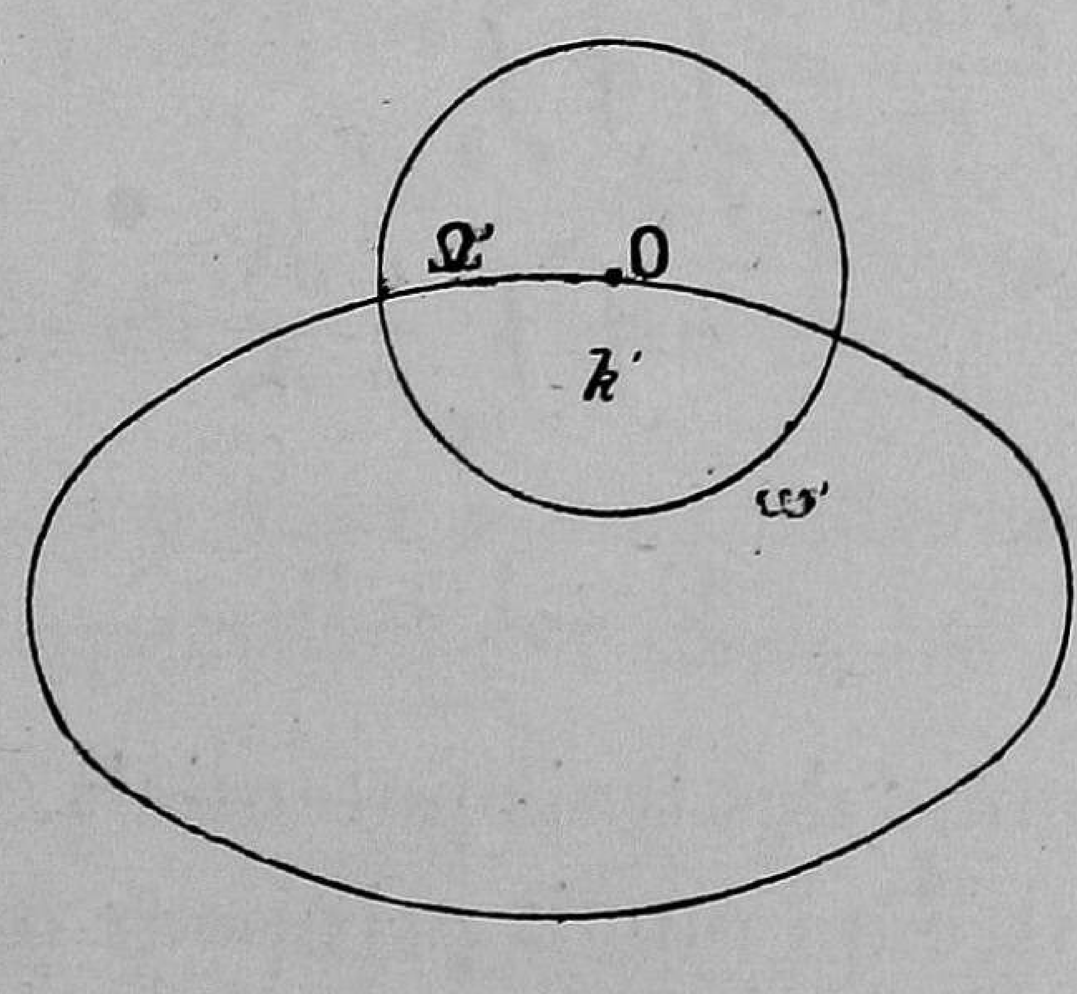
$$\nabla U = -4\pi\mu. \tag{6}$$

Pour un point extérieur, on avait la formule de *Laplace*

$$\nabla U = 0. \tag{7}$$

232 Soit enfin O, un point situé non plus à l'intérieur de K, mais sur sa frontière Ω. Traçons la sphère k comme tout à l'heure; Ω la partagera (*fig.* 23) en deux régions k' et $k - k'$;

Fig. 23.



elle partagera de même ω en deux régions ω′ et ω — ω′. Réciproquement, ω partagera Ω en deux régions Ω′ et Ω — Ω′.

Soient encore V une fonction régulière dans k; (abc) un point intérieur à k. Appliquons les formules des n°s 184 à 186 à la fonction V pour le domaine k'. Il viendra

$$\int\!\!\int\!\!\int_{k'} \frac{1}{r}\Delta V\, dv = \int\!\!\int_{\Omega'+\omega'} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \nu} \right) d\sigma + R(a, b, c),$$

$R(a, b, c)$ étant égal à zéro si (abc) est extérieur à k', à $-4\pi V(a, b, c)$ si (abc) est intérieur, à $-2\pi V(a, b, c)$ si (abc) est sur Ω'.

Si k est assez petit, on pourra choisir V de telle sorte qu'on ait dans son intérieur

$$\Delta V = \mu,$$

et sur Ω'

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

$\frac{\partial V}{\partial \nu}$ étant égal et contraire à $\frac{\partial V}{\partial n}$ sera nul également, de sorte que l'intégrale de surface sera nulle sur Ω'.

Substituant la valeur de ΔV et ajoutant aux deux membres l'intégrale

$$\int\!\!\int\!\!\int_{K-k'} \frac{1}{r}\mu\, dv,$$

il viendra

$$U = \int\!\!\int\!\!\int_{K} \frac{\mu\, dv}{r} = \int\!\!\int\!\!\int_{K-k'} \frac{\mu\, dv}{r} + \int\!\!\int_{\omega'} V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma$$
$$- \int\!\!\int_{\omega'} \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \nu} d\sigma + R(a, b, c)$$

ou

$$U = I + R,$$

I désignant la somme des trois potentiels.

On peut admettre qu'on ait pris pour origine le point O et pour axe des z la normale extérieure n; choisissant les coordonnées curvilignes u, v, n comme au n° 230, V et $\frac{\partial V}{\partial n}$ s'annulant identiquement pour $n = 0$, le développement de

V sera de la forme

$$V = n^2(c + c_1 u + c_2 v + \ldots),$$

ou, en remplaçant u, v, n par leurs valeurs en x, y, z,

$$V = cz^2 + \text{termes de degré} > 2.$$

Donc V s'annulera à l'origine, ainsi que ses dérivées premières et secondes, sauf $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \mu(x, y, z),$$

et, en faisant $x = y = z = 0$,

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)_0 = \mu_0,$$

μ_0 représentant la valeur de μ à l'origine.

Soit donc l une direction quelconque, de cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. On aura

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha\cos\beta + \ldots + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\cos^2\gamma,$$

et en particulier à l'origine

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial l^2}\right)_0 = \mu_0 \cos^2\gamma.$$

Soient donc p et q deux points infiniment voisins de l'origine et situés respectivement dans les régions $k - k'$, k'. On aura au point p

$$U = I, \qquad \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial I}{\partial l}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial l^2},$$

et à la limite

$$\lim_{p=0} U = I_0, \qquad \lim \frac{\partial U}{\partial l} = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0, \qquad \lim \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial l^2}\right)_0.$$

Au point q, on a

$$U = I - 4\pi V, \qquad \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial I}{\partial l} - 4\pi \frac{\partial V}{\partial l}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial l^2} - 4\pi \frac{\partial^2 V}{\partial l^2}$$

et à la limite

$$\lim_{q=0} U = I_0, \qquad \lim \frac{\partial U}{\partial l} = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0,$$
$$\lim \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial l^2}\right)_0 - 4\pi\mu_0 \cos^2\gamma.$$

On voit par là que U *et ses dérivées premières restent continues, lorsqu'on traverse la surface* Ω. *Mais la dérivée seconde* $\frac{\partial^2 U}{\partial l^2}$ *s'accroît brusquement de* $4\pi\mu_0 \cos^2\gamma$, *lorsqu'on passe de l'intérieur de* K *à l'extérieur.*

En particulier, la dérivée normale $\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$ s'accroîtra de $4\pi\mu_0$.

233. Cherchons la valeur de U et de ses dérivées au point O lui-même.

On a, en ce point,

$$U_0 = I_0 - 2\pi V_0,$$

mais V_0 étant nul, on peut écrire aussi bien

$$U_0 = I_0 \quad \text{ou} \quad U_0 = I_0 - 4\pi V_0.$$

Supposons que la ligne de direction l, issue du point O, fasse un angle aigu γ avec la normale extérieure Oz. Elle sera située tout entière dans la région où $U = I$. On aura donc

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_0 = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0, \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial l^2}\right)_0.$$

Soit λ la direction opposée à l. La ligne $O\lambda$ est située tout entière dans la région où $U = I - 4\pi V$. On aura donc

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_0 = \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_0 - 4\pi\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)_0 = -\left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0,$$
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial \lambda^2}\right)_0 - 4\pi\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial l^2}\right)_0 - 4\pi\mu_0 \cos^2\gamma.$$

On déduit de là

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_0 = -\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_0,$$

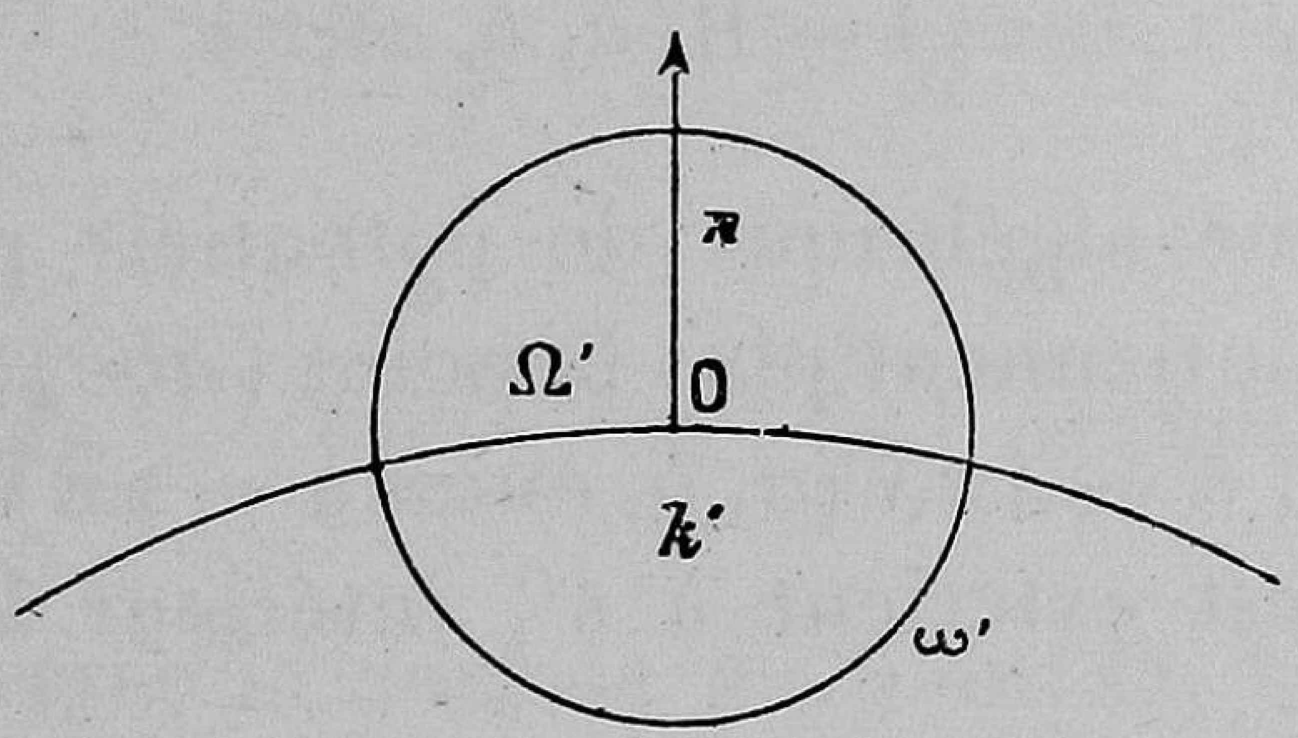
$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial l^2}\right)_0 - 4\pi\mu_0 \cos^2\gamma.$$

234. *Potentiel de simple couche.* — Soit

$$U = \int\int_{\Omega} \frac{\mu}{r} d\sigma$$

un semblable potentiel et faisons la même construction qu'au

Fig. 24



n° 232 (*fig.* 24), (abc) désignant un point intérieur à k.

Nous aurons la même égalité

$$(8) \qquad \int\int\int_{k'} \frac{1}{r} \Delta V \, dv = \int\int_{\Omega'+\omega'} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) d\sigma + R(a, b, c).$$

Déterminons ici la fonction V par les conditions

$$\Delta V = 0$$

et

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = \mu \quad \text{sur } \Omega'.$$

En remarquant que

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = -\frac{\partial V}{\partial n} = -\mu,$$

la relation précédente se réduira à

$$o = \int\int_{\omega'} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int\int_{\Omega'} \frac{\mu}{r} d\sigma + R(a, b, c)$$

ou en ajoutant de part et d'autre

$$\int\int_{\Omega - \Omega'} \frac{\mu\, d\sigma}{r},$$

$$\int\int_{\Omega - \Omega'} \frac{\mu\, d\sigma}{r} = \int\int_{\omega'} \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \nu} \right) d\sigma + U + R(a, b, c),$$

et enfin

$$U = I - R(a, b, c),$$

I étant une somme algébrique de potentiels pris dans des champs qui ne contiennent plus le point (abc); et $R(a, b, c)$ étant égal à zéro, à $-4\pi V(a, b, c)$ ou à $-2\pi V(a, b, c)$ suivant que (abc) est extérieur à k', intérieur à k', ou situé sur Ω'.

D'ailleurs V s'annulant identiquement pour $n = o$, et $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_0$ étant égal à μ_0, le développement de V sera de la forme

$$V = n(\mu_0 + \ldots)$$

ou, en remplaçant n, u, v par leurs valeurs en x, y, z,

$$V = z(\mu_0 + \ldots).$$

Donc

$$V_0 = o, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 = o, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = o, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = \mu_0.$$

Or, l étant une direction définie par les cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on a généralement

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma.$$

Donc, à l'origine,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_0 = \mu_0 \cos\gamma.$$

Soient p, q deux points infiniment voisins de l'origine et situés respectivement dans les régions $k - k'$ et k'. On aura au point p

$$U = I, \qquad \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial I}{\partial l}$$

et, à la limite,

$$\lim_{p=0} U = I_0, \qquad \lim_{p=0} \frac{\partial U}{\partial l} = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0.$$

Au point q, on a

$$U = I + 4\pi V, \qquad \frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial I}{\partial l} + 4\pi \frac{\partial V}{\partial l}$$

et, à la limite,

$$\lim_{q=0} U = I_0, \qquad \lim_{q=0} \frac{\partial U}{\partial l} = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0 + 4\pi\mu_0 \cos\gamma.$$

Si donc on traverse la surface au point O, U restera continu, mais sa dérivée $\frac{\partial V}{\partial l}$ croîtra brusquement de $4\pi\mu_0 \cos\gamma$.

235. Cherchons les valeurs de U et de ses dérivées au point O lui-même.

On a, en ce point,

$$U_0 = I_0 + 2\pi V_0.$$

Mais V_0 étant nul, on peut écrire aussi

$$U_0 = I_0, \qquad U_0 = I_0 + 4\pi V_0.$$

Si l'angle γ est aigu, la ligne Ol sera comprise en totalité dans une région où $U = I$; on aura donc

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_0 = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0.$$

Soit $O\lambda$ la direction opposée. La ligne $O\lambda$ étant située

tout entière dans une région où $U = I + 4\pi V$, on aura

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_0 = \left(\frac{\partial I}{\partial \lambda}\right)_0 + 4\pi\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)_0$$

$$= -\left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0 - 4\pi\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_0 = -\left(\frac{\partial I}{\partial l}\right)_0 - 4\pi\mu_0 \cos\gamma.$$

Donc

$$\left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)_0 = -4\pi\mu_0 \cos\gamma.$$

En particulier, si $\gamma = 0$, on aura, entre les dérivées prises suivant les deux directions n et ν de la normale, la relation symétrique

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial \nu}\right)_0 = -4\pi\mu_0.$$

236. *Potentiel de double couche.* — On fera encore la même construction ; mais on déterminera V par les relations

$$\Delta V = 0,$$

$$V = \mu, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Omega'.$$

La formule (8) deviendra, en y remplaçant $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}$, $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ par $-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$, $-\frac{\partial V}{\partial n}$,

$$0 = -\int\int_{\Omega'} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int\int_{\omega'} \left(-V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma + R(abc).$$

Ajoutant aux deux membres l'intégrale

$$U = \int\int_{\Omega} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma,$$

il viendra

$$U = \int\int_{\Omega - \Omega'} \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \int\int_{\omega'} \left(-V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma + R(abc)$$

$$= I + R(a, b, c).$$

On aura au point p

$$U = I$$

et, si p tend vers l'origine,

$$\lim_{p=0} U = I_0.$$

Au point q

$$U = I - 4\pi V$$

et

$$\lim_{q=0} U = I_0 - 4\pi V_0 = I_0 - 4\pi\mu_0.$$

Au point O lui-même

$$U_0 = I_0 - 2\pi V_0 = I_0 - 2\pi\mu_0.$$

Le potentiel U présente ainsi à la traversée de la surface une double discontinuité. Il n'existe donc pas de dérivées au point O.

Remarquons toutefois que, $\frac{\partial V}{\partial n}$ étant nul sur la surface, on aura

$$\lim_{p=0} \frac{\partial U}{\partial n} = \lim_{q=0} \frac{\partial U}{\partial n} = \left(\frac{\partial I}{\partial n}\right)_0.$$

II. — Applications physiques.

237. Gravitation. — *Hypothèse.* — Deux points matériels (xyz), (abc) de masses m, m', situés à la distance r l'un de l'autre, exercent l'un sur l'autre une attraction dirigée suivant la droite qui les joint, et d'intensité $\frac{fmm'}{r^2}$, f étant une constante positive.

Supposons, pour simplifier l'écriture, $m' = \frac{1}{f}$. L'attraction sur (abc) sera le vecteur

$$\frac{m}{r^2}$$

et ses composantes seront

$$\frac{m(x-a)}{r^3}, \quad \frac{m(y-b)}{r^3}, \quad \frac{m(z-c)}{r^3}.$$

Soient K un corps continu, dv un de ses éléments de volume, de coordonnées x, y, z et de densité $\mu(x, y, z)$. Le vecteur, attraction de K sur (abc), aura pour composantes

$$X = \mathop{\mathrm{S}}_{K} \frac{\mu(x-a)}{r^3} dv, \quad Y = \mathop{\mathrm{S}}_{K} \frac{\mu(y-b)}{r^3} dv, \quad Z = \mathop{\mathrm{S}}_{K} \frac{\mu(z-b)}{r^3} dv.$$

Si (abc) est extérieur à K, ce sont là des intégrales ordinaires, et l'on aura

$$X = \frac{\partial U}{\partial a}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial b}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial c},$$

U désignant le potentiel de volume,

$$U = \mathop{\mathrm{S}}_{K} \frac{\mu\, dv}{r}.$$

238. On sait que ces intégrales restent déterminées si (abc) fait partie de K. Dans ce cas encore, X, Y, Z seront les dérivées de U. Dans l'ignorance où nous sommes si la règle de Leibnitz est applicable ici, nous l'établirons comme il suit.

Soit k une région infiniment petite contenant (abc) à son intérieur. On aura

$$U = \mathop{\mathrm{S}}_{K-k} \frac{\mu\, dv}{r} + \mathop{\mathrm{S}}_{k} \frac{\mu\, dv}{r}.$$

Cherchons la dérivée $\frac{\partial V}{\partial a}$.

Le premier terme a pour dérivée

$$\mathop{\mathrm{S}}_{K-k} \frac{\mu(x-a)}{r^3} dv,$$

qui tend vers X par définition.

La dérivée du second terme est la limite pour $h = 0$ de l'intégrale

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k} \frac{\mu}{h}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) d\sigma = \mathop{\mathrm{S}}_{k} \mu \frac{r - r'}{h} \frac{d\sigma}{rr'},$$

r' étant ce que devient r par le changement de a en $a+h$. Or r, r', h étant les trois côtés d'un triangle, $\left|\frac{r-r'}{h}\right| \overline{\leq} 1$. D'autre part

$$\frac{1}{rr'} < \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}.$$

Le module de l'intégrale est donc moindre que

$$\mathop{\mathrm{S}}_{k} \frac{\mu\, dv}{r^2} + \mathop{\mathrm{S}}_{k} \frac{\mu\, dv}{r'^2},$$

expression dont les deux termes sont infiniment petits.

239. Cherchons l'expression du flux du vecteur (X, Y, Z) à travers une surface fermée Ω. Le flux de sortie est égal (Ostrogradsky) à l'intégrale de la divergence

$$\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial c} = \nabla U$$

dans le volume I intérieur à Ω. Mais ∇U est nul pour tout élément de I extérieur à K et égal à $-4\pi\mu$ pour tout élément de la région L commune à I et à K. Le flux sera donc égal à

$$-4\pi \mathop{\mathrm{S}}_{L} \mu\, dv = -4\pi \mathfrak{M},$$

$\mathfrak{M}$ désignant la somme des masses attirantes contenues dans I.

Ce résultat est dû à *Gauss*.

240. Théorème. — *Si la distance du corps attirant au point (abc) est grande par rapport aux dimensions du corps, le potentiel et, par suite, l'attraction seront sensiblement les mêmes que si toutes les masses attirantes étaient concentrées en leur centre de gravité.*

Prenons, pour plus de simplicité, ce centre de gravité O pour origine, et soient R, ρ ses distances aux points (abc),

(xyz) (*fig.* 25). Développons l'expression

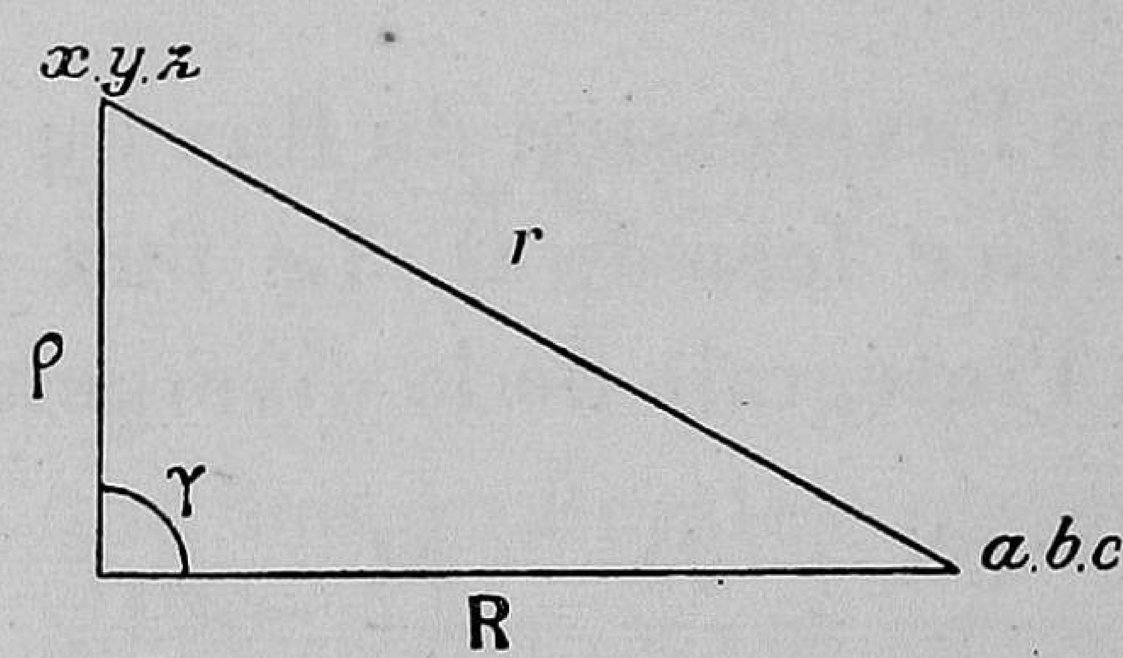
$$\frac{1}{r} = (R^2 - 2R\rho\cos\gamma + \rho^2)^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances croissantes de $\frac{\rho}{R}$; il viendra

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\rho\cos\gamma}{R} + \ldots\right) = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{ax+by+cz}{R^2} + \ldots\right).$$

Multiplions par $\mu\,dv$ et intégrons. L'intégrale $\int_K \mu\,dv$ repré-

Fig. 25.



sentant la masse totale M et les intégrales $\int_K \mu x\,dv$, $\int_K \mu y\,dv$, $\int_K \mu z\,dv$ étant nulles par la définition du centre de gravité, on aura comme résultat

$$\frac{M}{R},$$

les termes négligés étant de l'ordre de $\frac{d^2}{R^2}$, si d désigne le maximum de ρ.

241. *Potentiel d'une sphère.* — Cherchons à déterminer le potentiel d'une sphère creuse homogène, de densité μ, par rapport à un point $p = (abc)$.

Soient ρ_0, ρ_1 les rayons des sphères concentriques qui limitent le corps attirant. Il est clair que le potentiel cherché ne doit dépendre que de la distance $R = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ du point attiré au centre.

Soient U′, U″ les dérivées de U par rapport à R ; on aura

$$\frac{\partial U}{\partial a} = U' \frac{a}{R}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = U'' \frac{a^2}{R^2} + \frac{U'}{R} - U' \frac{a^2}{R^3}, \qquad \ldots,$$

$$\nabla U = U'' \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^2} + 3 \frac{U'}{R} - U' \frac{a^2 + b^2 + c^2}{R^3} = U'' + \frac{2 U'}{R}.$$

Si p n'appartient pas au corps attirant, cette expression doit être nulle. On aura donc

$$\frac{U''}{U'} + \frac{2}{R} = 0,$$

et en intégrant

$$\log U' + 2 \log R = \text{const.}$$

$$U' = \frac{C}{R^2},$$

$$U = -\frac{C}{R} + C',$$

C et C′ étant des constantes qui restent à déterminer. Deux cas sont à distinguer ici :

1° p est dans la cavité : en le supposant au centre, on aura

$$U = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mu r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{r} = 2\pi\mu(\rho_1^2 - \rho_0^2).$$

Donc

$$C = 0, \qquad C' = 2\pi\mu(\rho_1^2 - \rho_0^2).$$

Le potentiel est donc constant dans la cavité, et *l'attraction est nulle.*

En vertu de la continuité du potentiel, cette formule sera encore valable si p est à la surface de la sphère intérieure.

2° p est dans la région extérieure aux sphères. Supposons-le à l'infini. On sait que, dans ce cas, U est infiniment petit et doit avoir $\frac{M}{R}$ pour valeur principale ; donc $C = -M$, $C' = 0$, et l'on a rigoureusement

$$U = \frac{M}{R}.$$

Le potentiel (et par suite l'attraction) sont donc les mêmes que si toute la masse attirante était réunie au centre.

Cette formule s'appliquerait encore si ρ était situé sur la sphère extérieure.

Reste à considérer le cas où R étant compris entre ρ_0 et ρ_1, p ferait partie de la masse attirante. Traçons dans ce cas une sphère de rayon R ; elle partage la couche sphérique en deux autres, dont les potentiels peuvent être calculés séparément par les formules précédentes.

Le potentiel d'une sphère pleine s'obtiendrait en posant $\rho = 0$.

242. En général, si la densité μ du corps attirant est constante, les composantes X, Y, Z de l'attraction pourront être ramenées, et cela de plusieurs manières, à des intégrales doubles.

Soient en effet nx, ny, nz, nr les angles de la normale extérieure n avec les axes et avec le rayon vecteur r issu du point attiré ; rx, ry, rz les angles de ce rayon vecteur avec les axes.

On a d'une part

$$X = \mu \int\int\int_K \frac{x-a}{r^3}\,dv = -\mu \int\int\int_K \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,dv,$$

et par suite (153)

$$X = -\mu \int\int_\Omega \frac{\cos nx}{r}\,d\sigma.$$

D'autre part

$$\frac{x-a}{r^3} = \frac{1}{r^2}\cos rx = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial r \cos rx}{\partial r},$$

car $\cos rx$ ne dépend que de la direction de r et non de sa grandeur. On aura donc, en posant $P = r \cos rx$ dans les

formules des n°s 154 à 156,

$$X = \mu \int\int_{\Omega} \frac{\cos rx \cos nx}{r} d\sigma.$$

243. *Attraction d'un ellipsoïde homogène.* — Appliquons ces résultats à la recherche de l'attraction d'un ellipsoïde homogène

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

de densité 1.

Son équation peut être remplacée par le système suivant

$$x = \alpha \cos p,$$
$$y = \beta \sin p \cos q,$$
$$z = \gamma \sin p \sin q,$$

où p variera de 0 à π et q de 0 à 2π.

On a

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\alpha \sin p, \qquad \frac{\partial x}{\partial q} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial p} = \beta \cos p \cos q, \qquad \frac{\partial y}{\partial q} = -\beta \sin p \sin q,$$
$$\frac{\partial z}{\partial p} = \gamma \cos p \sin q, \qquad \frac{\partial z}{\partial q} = \gamma \sin p \cos q.$$

L'élément d'aire $d\sigma$ aura pour projections

$$\begin{aligned} d\sigma \cos nx &= \left(\frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial z}{\partial p}\right) dp\, dq \\ &= \beta\gamma \sin p \cos p\, dp\, dq \\ &= \alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq\, \frac{x}{\alpha^2} \end{aligned}$$

$$d\sigma \cos ny = \alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq\, \frac{y}{\beta^2},$$

$$d\sigma \cos nz = \alpha\beta\gamma \sin p\, dp\, dq\, \frac{z}{\gamma^2}.$$

On aura donc (242)

$$X = -\int\int_{\Omega} \frac{\beta\gamma \sin p \cos p\, dp\, dq}{r},$$

d'où, en posant

$$\frac{X}{\alpha\beta\gamma} = \xi,$$

$$(1) \qquad \alpha\xi \equiv -\int\int_{\Omega} \frac{\sin p \cos p \, dp \, dq}{r}.$$

Cherchons comment varie ξ, lorsque α, β, γ varient de telle sorte que les différences $\beta^2 - \alpha^2 = \delta$, $\gamma^2 - \alpha^2 = \delta_1$ demeurent constantes.

En vertu de ces relations, une seule de ces variables, α, par exemple, sera indépendante; et l'on aura

$$\alpha \, d\alpha = \beta \, d\beta = \gamma \, d\beta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \cos p = \frac{x}{\alpha^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{y}{\beta^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial \gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha} = \frac{z}{\gamma^2}\alpha,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{(x-a)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + (y-b)\frac{\partial y}{\partial \alpha} + (z-c)\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{r}$$
$$= \left(\frac{x}{\alpha^2}\cos rx + \frac{y}{\beta^2}\cos ry + \frac{z}{\gamma^2}\cos rz\right)\alpha,$$

$$d\alpha\xi = \alpha \, d\xi + \xi \, d\alpha = \int\int_{\Omega} \frac{\sin p \cos p}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \alpha} d\alpha \, dp \, dq$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial r}{\partial \alpha}$ par sa valeur et $\cos p$ par $\frac{x}{\alpha}$,

$$\alpha \, d\xi + \xi \, d\alpha$$
$$= \int\int_{\Omega} \frac{\sin p}{r^2} x \left[\frac{x}{\alpha^2}\cos rx + \frac{y}{\beta^2}\cos ry + \frac{z}{\gamma^2}\cos rz\right] d\alpha \, dp \, dq$$
$$= \frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\int\int_{\Omega} x\left(\frac{\cos nx \cos rx + \cos ny \cos ry + \cos nz \cos rz}{r^2}\right) d\sigma$$
$$= \frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\int\int_{\Omega} \frac{x \cos nr}{r^2} d\sigma$$
$$= \frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\int\int_{\Omega} \frac{x-a}{r^2}\cos nr \, d\sigma + \frac{a \, d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\int\int_{\Omega} \frac{\cos nr}{r^2} d\sigma.$$

Or le premier terme est égal (**242**) à

$$\frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}\int\int_{\Omega}\frac{\cos nx \cos nr \, d\sigma}{r} = \frac{d\alpha}{\alpha\beta\gamma}X = \xi\, d\alpha$$

et le second est égal à zéro ou à $\frac{4\pi a\, d\alpha}{\alpha\beta\gamma}$, suivant que le point (abc) est extérieur ou intérieur à l'ellipsoïde (158).

244. Supposons d'abord le point extérieur. L'équation précédente se réduit à

$$\alpha\, d\xi = 0.$$

On en déduit

$$\xi = C, \qquad X = C\alpha\beta\gamma,$$

C désignant une constante ; d'où ce théorème :

Les composantes des attractions de deux ellipsoïdes homofocaux homogènes sur un point extérieur sont proportionnelles à leurs masses.

On sait d'ailleurs que X est une fonction continue de a, b, c. Le théorème subsistera donc si le point (abc) est situé sur la surface de l'un des ellipsoïdes que l'on compare.

Le problème de l'attraction sur un point extérieur se réduit donc à celui de l'attraction sur un point de la surface, lequel n'est lui-même qu'un cas particulier de celui de l'attraction sur un point intérieur.

245. Examinons donc ce dernier cas. Nous aurons

$$\alpha\, d\xi = \frac{4\pi a\, d\alpha}{\alpha\beta\gamma},$$

d'où

$$d\xi = \frac{4\pi a\, d\alpha}{\alpha^2\beta\gamma} = 4\pi a\frac{d\alpha}{\alpha^2\sqrt{(\alpha^2+\delta)(\alpha^2+\delta_1)}},$$

$$\xi = 4\pi a\int_{\infty}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha^2\sqrt{(\alpha^2+\delta)(\alpha^2+\delta_1)}} + \text{const.}$$

Pour déterminer la constante, on remarquera qu'en vertu

de la formule (1) ξ tend vers o quand α augmente indéfiniment; car r croît indéfiniment en même temps que α, β, γ. Donc la constante est nulle. Si donc on désigne, pour plus de clarté, par t la variable d'intégration, on aura

$$X = \alpha\beta\gamma\xi = 4\pi\alpha\beta\gamma a \int_{\infty}^{\alpha} \frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2+\delta)(t^2+\delta_1)}}$$

ou en posant $t = \frac{\alpha}{u}$ et remarquant que

$$\delta = \beta^2 - \alpha^2, \qquad \delta_1 = \gamma^2 - \alpha^2,$$

$$X = -\frac{4\beta\gamma a}{\alpha^2}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2}u^2\right)\left(1 - \frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2}u^2\right)}}.$$

Une permutation circulaire donnera Y et Z.

On remarquera que X, Y, Z varient proportionnellement à a, b, c. On aura donc à calculer les mêmes intégrales, quel que soit le point attiré.

En outre, X, Y, Z ne dépendent que des rapports des axes α, β, γ. Si donc l'on remplace l'ellipsoïde considéré par un autre qui lui soit homothétique, l'attraction restera la même. Donc :

L'attraction d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques sur un point intérieur est nulle.

246. Électricité statique. — *Hypothèses.* — Il existe deux fluides électriques existant en abondance dans tous les corps. Ils sont généralement combinés en un fluide neutre, mais peuvent se séparer.

Deux molécules d'un même fluide se repoussent et deux molécules de fluides différents s'attirent suivant la loi de Newton.

Une répulsion pouvant être considérée comme une attraction négative, on est conduit à attribuer aux molécules de l'un des fluides des masses négatives, et à représenter l'ac-

tion mutuelle de deux molécules par $\frac{fmm'}{r^2}$, la constante f étant négative.

Si, pour simplifier l'écriture, nous supposons la masse m' du point attiré égale à $\frac{1}{f}$, l'attraction exercée sur m' par la molécule m sera $\frac{m}{r^2}$.

Il existe des corps *conducteurs* où les fluides électriques peuvent se mouvoir librement, et des *diélectriques* où ce mouvement n'a pas lieu.

La *charge électrique* d'un corps est l'excès (positif, nul ou négatif) de la masse M de fluide positif qu'il contient sur la masse M' du fluide négatif.

247. Si l'on place un conducteur K dans un champ électrique, l'électricité qu'il contient se mettra en mouvement, pour atteindre un état d'équilibre que nous allons étudier.

Soit U le potentiel de ce champ en équilibre électrique. En tout point (abc) intérieur à K, les composantes de l'attraction $\frac{\partial U}{\partial a}$, $\frac{\partial U}{\partial b}$, $\frac{\partial U}{\partial c}$ doivent être nulles, pour que l'équilibre ne soit pas rompu. De là deux conséquences :

1° Le potentiel, ayant ses dérivées nulles dans l'intérieur de K, aura une valeur constante C dans tout cet intérieur et aussi sur la surface Ω de K ; car c'est une fonction continue ;

2° En tout point (abc) intérieur à K, on a donc $\nabla U = 0$. Mais, d'après le théorème de Poisson,

$$\nabla U = -4\pi\mu(a, b, c).$$

Donc μ est nul. L'électricité du conducteur s'est donc portée tout entière à sa surface, où elle forme une couche Ω.

La densité de cette couche en chaque point s'obtiendrait aisément, si l'on connaissait le potentiel U du champ. Celui-ci est la somme de deux autres ; l'un U_1 provenant des

masses extérieures au conducteur, l'autre u provenant de la couche Ω.

Soient n la normale extérieure, ν la normale intérieure en un point de Ω, μ_0 la densité en ce point. Nous aurons (235)

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial \nu} = -4\pi\mu_0.$$

Mais, d'autre part, U_1 étant développable par la série de Taylor, on a

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} + \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = 0.$$

Ajoutons, il vient

$$\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial \nu} = -4\pi\mu_0$$

ou plus simplement

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -4\pi\mu_0,$$

car U étant constant le long de la normale intérieure, $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ est nul.

248. La détermination de l'état d'équilibre qui se produit, lorsqu'on met en présence des corps électrisés, dont quelques-uns sont conducteurs, est un problème difficile, surtout s'il y a plusieurs conducteurs. S'il n'y en a qu'un seul, la solution se ramène, comme nous allons le voir, à celle du problème de Dirichlet.

Pour plus de généralité, nous admettrons que le conducteur est creux, et que les masses électriques fixes, en présence desquelles il est placé, sont situées, partie dans la cavité de K, partie à l'extérieur.

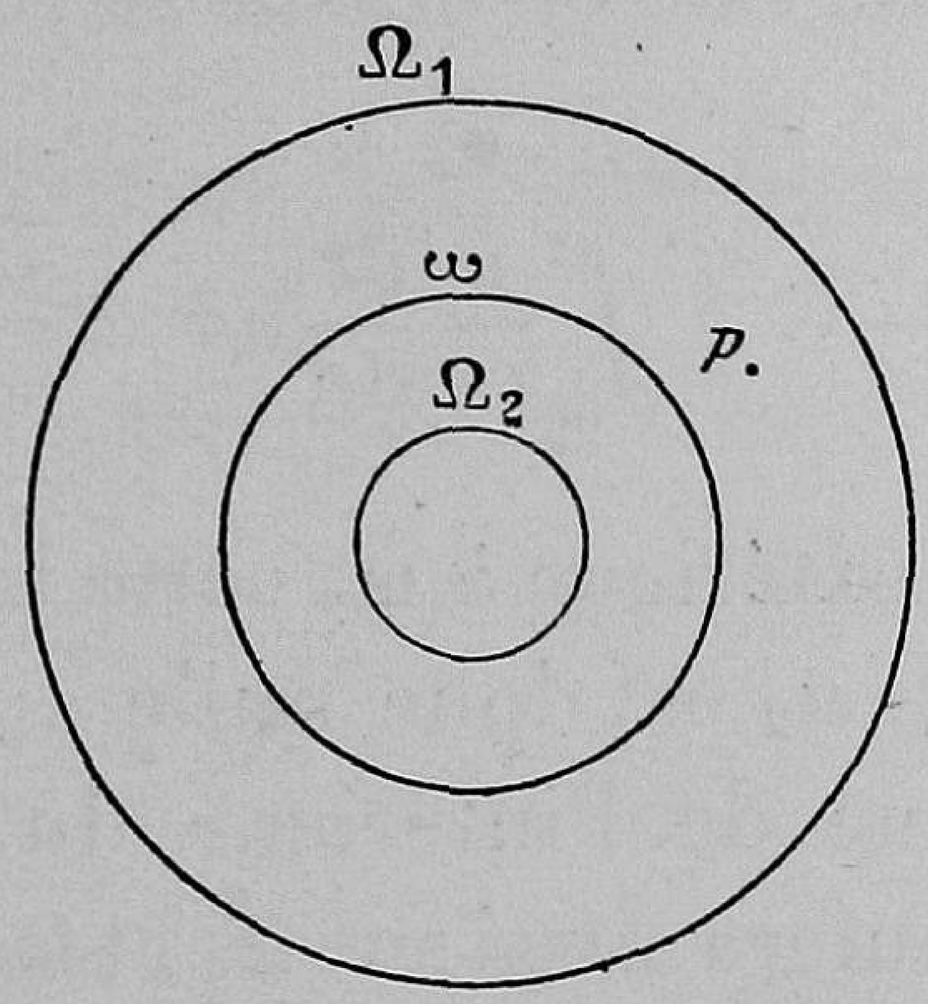
Les données sont : 1° la somme M_1 des masses extérieures et le potentiel U_1 correspondant ; 2° la somme M_2 des masses contenues dans la cavité et leur potentiel U_2 ; 3° la charge q du conducteur.

Les inconnues sont : 1° la densité en chaque point des

couches électriques qui se forment sur la face extérieure Ω_1 et sur la face intérieure Ω_2 du conducteur; 2° les masses totales m_1, m_2 de ces couches et les potentiels correspondants u_1, u_2; 3° la valeur constante du potentiel total U dans le conducteur.

Soient $p = (abc)$ un point quelconque intérieur au conducteur (*fig.* 26); ω une surface fermée contenue dans K et

Fig. 26.



enveloppant Ω_2, mais laissant p à son extérieur; n la normale extérieure à ω; ν la normale intérieure.

Le potentiel $U_1 + u_1$ étant harmonique et régulier à l'intérieur de ω, à laquelle p est extérieur, on aura, d'après la formule (26) du n° 186,

$$\int\!\!\int_\omega \left[(U_1 + u_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \frac{\partial (U_1 + u_1)}{\partial \nu} \right] d\sigma = 0.$$

D'autre part, $U_2 + u_2$ étant harmonique et régulière à l'extérieur de ω, région qui contient p et pour laquelle la normale intérieure est n, la même formule donnera

$$\int\!\!\int_\omega \left[(U_2 + u_2) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} (U_2 + u_2) \right] d\sigma$$
$$= 4\pi [U_2(a, b, c) + u_2(a, b, c)].$$

Retranchons l'égalité précédente de celle-ci en remarquant

que les dérivées par rapport à ν sont égales et contraires aux dérivées par rapport à n, et que $U_1 + u_1 + U_2 + u_2 = U$, potentiel total; il vient

$$\int\int_\omega \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 4\pi [U_2(a, b, c) + u_2(a, b, c)].$$

Mais dans tout l'intérieur du conducteur U est une constante C. Donc l'intégrale ci-dessus se réduit à

$$\int\int_\omega C \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn} d\sigma = -C \int\int_\omega \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} d\sigma = -C \int\int_\omega \frac{\cos nr}{r^2} d\sigma.$$

Le point p étant extérieur à ω, cette intégrale est nulle.

La fonction $U_2 + u_2$ est donc nulle au point p, lequel est un point quelconque de l'intérieur du conducteur. Étant continue, elle s'annulera aussi sur Ω_1 et Ω_2. Étant harmonique et régulière à l'extérieur de Ω_1 et nulle sur cette surface, elle sera encore nulle en dehors de Ω_1, de sorte qu'on aura partout

$$u_2 = -U_2,$$

sauf dans la cavité. Là u_2 sera égal à $-V_2$, V_2 étant la fonction harmonique et régulière dans la cavité qui sur Ω_2 est égale à U_2. Elle différera en général de U_2, qui n'est pas régulière. On la connaîtra si l'on sait résoudre le problème intérieur de Dirichlet.

La densité μ_0 de la couche Ω_2 en un de ses points sera donnée par la formule

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = -4\pi\mu_0,$$

ou, d'après les valeurs qui viennent d'être trouvées pour u_2,

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{\partial V_2}{\partial \nu} = 4\pi\mu_0.$$

Pour obtenir sa masse m_2 on remarquera que le flux de

$U_2 + u_2$ à travers ω est nul; mais il est égal (239) à

$$-4\pi(M_2 + m_2).$$

Donc

$$m_2 = -M_2.$$

On remarquera que les masses intérieures à la cavité influent seules sur la formation de la couche Ω_2. S'il n'y en a pas, cette couche n'existera pas; car U_2 sera nul, V_2 également; et μ_0 le sera aussi.

249. Passons au calcul de la couche extérieure Ω_1.

La relation

$$C = U_1 + u_1 + U_2 + u_2,$$

qui a lieu dans le conducteur, se réduit à

$$U_1 + u_1 = C.$$

Dans la cavité, $U_1 + u_1$ sera la fonction harmonique et régulière qui se réduit à C sur Ω_2. C'est la constante C.

A l'extérieur de Ω_1, u_1 sera la fonction harmonique et régulière dans cette région qui, sur Ω_1, est égale à $C - U_1$. Soient W et V_1 les deux fonctions, harmoniques et régulières à l'extérieur de Ω_1 qui, sur Ω_1, sont respectivement égales à 1 et à U_1. On les connaîtra si l'on sait résoudre le problème extérieur de Dirichlet; et l'on aura alors à l'extérieur de Ω_1

$$u_1 = CW - V_1.$$

La densité μ de la couche en un de ses points sera donnée par la formule

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = -4\pi\mu,$$

ou, d'après les expressions ci-dessus de u_1 aux deux côtés de Ω_1,

$$C\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = -4\pi\mu.$$

Sa masse m_1 sera $\int\int_\Omega \mu\, d\sigma$. Mais, d'autre part, la charge q

du conducteur étant donnée, on a

$$m_1 + m_2 = q.$$

D'ailleurs m_2 est égal à $-M_2$; donc

$$m_1 = q + M_2.$$

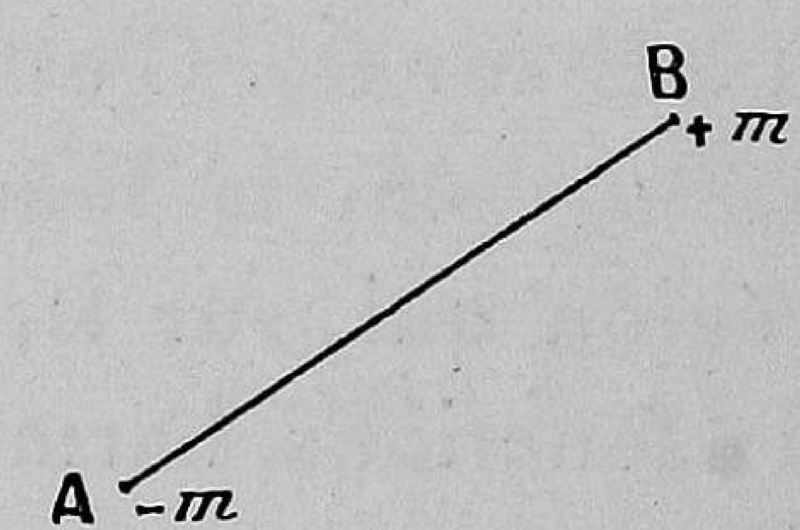
Égalant ces deux expressions de m_1, on aura l'équation

$$C \int\int_{\Omega_1} \frac{\partial W}{\partial n} d\sigma - \int\int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial U_1}{\partial \nu} \right) d\sigma = -4\pi(q + M_2),$$

qui déterminera la constante C, achevant ainsi la solution du problème.

250. Magnétisme. — *Hypothèses.* — Un système de deux molécules électriques de masses $-m$ et $+m$ situées en deux

Fig. 27.



points A, B très voisins, et liées invariablement constitue un *élément magnétique* (*fig.* 27).

Les points A, B sont les *pôles* de l'élément.

La ligne orientée AB est son *axe*.

Un *aimant* est constitué par une agglomération d'éléments magnétiques, disposés de telle sorte que des éléments voisins aient sensiblement la même orientation.

Cherchons à évaluer le potentiel d'un aimant par rapport à un pôle magnétique de masse $\frac{1}{f}$ situé en un point $p = (abc)$ extérieur à l'aimant.

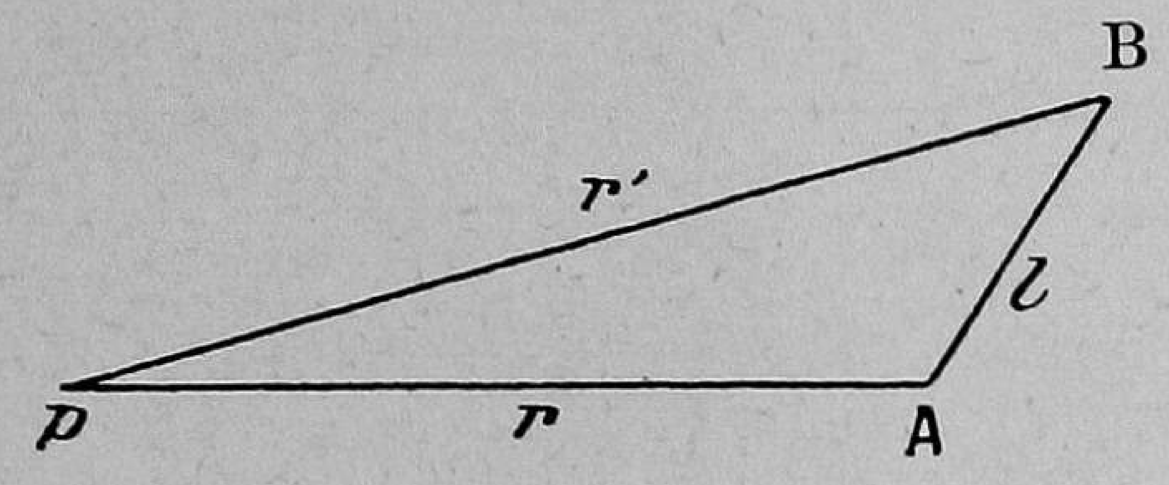
Soit AB l'un des éléments magnétiques que contient l'aimant (*fig.* 28). Le pôle A, de masse $-m$, donnera le potentiel $-\frac{m}{r}$; le pôle B, de masse $+m$, le potentiel $+\frac{m}{r'}$.

La somme de ces deux potentiels sera

$$m\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}\right)=-m\frac{r'-r}{rr'}.$$

Mais la longueur l étant très petite, on aura sensiblement

Fig. 28.



(si le point p n'est pas trop rapproché)

$$r'=r, \qquad r'-r=l\cos lr,$$

de sorte que le potentiel sera sensiblement

$$-\frac{ml\cos lr}{r^2}.$$

Soit maintenant dv un élément de volume de l'aimant. Son potentiel sera la somme

$$-\sum\frac{ml\cos lr}{r^2},$$

étendue aux divers éléments magnétiques qu'il contient. Mais pour ces divers éléments r a sensiblement la même valeur et il en est de même par hypothèse de $\cos lr$. Si donc nous posons

$$\Sigma ml = \mathrm{I}\,dv,$$

le potentiel de dv aura pour valeur approximative

$$-\frac{\mathrm{I}\cos \mathrm{I}r}{r^2}dv,$$

et celui de l'aimant K sera

$$\mathrm{U}=-\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{K}}\frac{\mathrm{I}\cos\mathrm{I}r}{r^2}dv.$$

Le vecteur I qui figure dans cette expression se nomme l'*intensité d'aimantation*. On suppose que ses composantes P, Q, R varient d'une manière continue quand on se déplace dans l'aimant.

L'expression précédente du potentiel U peut être transformée aisément. On a en effet

$$\begin{aligned} -\frac{\mathrm{I}\cos \mathrm{I}r}{r^2} &= -\frac{\mathrm{P}\cos rx + \mathrm{Q}\cos ry + \mathrm{R}\cos rz}{r^2} \\ &= \mathrm{P}\frac{a-x}{r^3} + \mathrm{Q}\frac{b-y}{r^3} + \mathrm{R}\frac{c-z}{r^3} \\ &= \mathrm{P}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \mathrm{Q}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathrm{R}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{P}}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{Q}}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{R}}{r} \\ &\quad - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\right); \end{aligned}$$

U s'obtiendra en intégrant cette expression.

Mais en vertu du théorème d'Ostrogradsky (171), on a, Ω désignant la surface de l'aimant, n la normale extérieure,

$$\begin{aligned} &\int\int\int_{\mathrm{K}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{P}}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{Q}}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{R}}{r}\right) dv \\ &= \int\int_{\Omega} \frac{\mathrm{P}\cos nx + \mathrm{Q}\cos ny + \mathrm{R}\cos nz}{r}\, d\sigma = \int\int_{\Omega} \frac{\mathrm{I}\cos \mathrm{I}n}{r}\, d\sigma. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{U} = \int\int_{\Omega} \frac{\mathrm{I}\cos \mathrm{I}n}{r}\, d\sigma - \int\int\int_{\mathrm{K}} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}\right) dv$$

est la différence d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de volume.

251. Ces potentiels existent, comme on l'a vu, dans tout l'espace et pourraient servir à définir la fonction U dans l'intérieur de l'aimant. Mais dans cette région elle ne pourra

servir au calcul de l'action de l'aimant sur le point p, car les approximations que nous avons faites cessent d'être légitimes pour des éléments magnétiques trop voisins de p.

On serait tenté d'évaluer cette action pour un point p intérieur à l'aimant K en excluant de celui-ci une région infiniment petite k, calculant l'action de $\mathrm{K}-k$ et passant à la limite. Mais on n'arriverait ainsi à rien de déterminé.

Cherchons, par exemple, la composante parallèle à Oz de l'attraction exercée sur p par l'aimant $\mathrm{K}-k$; ω désignant la surface qui limite k, cette composante sera

$$\int\!\!\int_\Omega \mathrm{I}\cos\mathrm{I}n\,\frac{z-c}{r^3}\,d\sigma+\int\!\!\int_\omega \mathrm{I}\cos\mathrm{I}n\,\frac{z-c}{r^3}\,d\sigma$$
$$-\int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{K}-k}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{Q}}{\partial y}+\frac{\partial\mathrm{R}}{\partial z}\right)\frac{z-c}{r^3}\,dv.$$

Le premier terme est une constante; le dernier a une limite déterminée $\int\!\!\int\!\!\int_\mathrm{K}$; mais la limite du second terme dépend de la forme de k. L'exemple suivant suffit à le montrer.

Supposons le vecteur I égal à 1 et dirigé parallèlement à Oz et le point p placé à l'origine des coordonnées.

L'intégrale à considérer devient

$$\int\!\!\int_\omega \frac{z\cos nz}{r^3}\,d\sigma.$$

Prenons pour k un cylindre circulaire droit parallèle à Oz, de rayon R, de hauteur $2h$, ayant son centre à l'origine. Sur sa paroi latérale on a $\cos nz=0$; sur la base inférieure $\cos nz=1$, $z=-h$; sur la base supérieure $\cos nz=-1$, $z=h$. L'intégrale cherchée sera donc

$$-2h\int\!\!\int\frac{d\sigma}{r^3},$$

le champ d'intégration étant réduit à l'une des bases.

Prenons des coordonnées semi-polaires. Cette intégrale

devient

$$-2h\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(\rho^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi h\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+h^2}}\right)_0^R$$
$$=4\pi\left(\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}-1\right).$$

Cette quantité varie évidemment avec le rapport des infiniment petits R, h.

252. *Solénoïdes.* — On donne ce nom à un aimant filiforme où le vecteur I est constamment dirigé suivant la tangente au fil. L'élément de volume dv sera évidemment égal à εds, ds étant l'élément de longueur du fil et ε la section correspondante.

Le potentiel sera donc donné par l'intégrale simple

$$U=-\int\frac{I\varepsilon\cos(r, ds)}{r^2}ds=-\int\frac{I\varepsilon\,dr}{r^2}.$$

Le solénoïde est dit *homogène* si $I\varepsilon$ est constant. Dans ce cas l'intégration peut se faire et donne

$$U=I\varepsilon\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_0}\right),$$

r_0, r_1 étant les valeurs de r aux deux extrémités du solénoïde.

Si celui-ci est fermé, $r_1=r_0$ et le potentiel est nul.

Donc *un solénoïde homogène fermé est sans action sur un pôle magnétique.*

253. *Feuillet magnétique.* — C'est un aimant-surface, compris entre deux surfaces parallèles très voisines Ω et Ω', et où le vecteur I est dirigé suivant la normale n commune aux deux surfaces.

Si ε est l'épaisseur de l'aimant et $d\sigma$ l'élément de Ω, l'élément de volume sera $\varepsilon d\sigma$ et U sera un potentiel de double

couche

$$U = \int\int_{\Omega} - \frac{I\varepsilon \cos nr}{r^2} d\sigma = \int\int_{\Omega} I\varepsilon \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma.$$

Le feuillet sera *homogène* si $I\varepsilon$ est une constante.

Si le feuillet homogène est fermé, l'intégrale $\int\int_{\Omega} \frac{\cos nr}{r^2} d\sigma$ a une valeur constante [égale à o ou à 4π suivant que le point (abc) est extérieur ou intérieur à Ω] (158). Ses dérivées X, Y, Z seront nulles.

Donc *un feuillet magnétique homogène fermé n'exerce aucune action.*

254. Si le feuillet homogène n'est pas fermé, mais bordé par un contour C, les composantes X, Y, Z de l'attraction pourront s'exprimer par des intégrales curvilignes prises sur C.

On a en effet

$$U = I\varepsilon \int\int_{\Omega} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$$

$$= I\varepsilon \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos nz \right) d\sigma,$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial a}$$

$$= I\varepsilon \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial a} \cos nx + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial a} \cos ny + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial a} \cos nz \right) d\sigma.$$

Mais les dérivées de $\frac{1}{r}$ par rapport à a sont égales et contraires à ses dérivées par rapport à x; donc

$$X = - I\varepsilon \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} \cos nx + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos ny + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos nz \right) d\sigma.$$

On pourra appliquer la formule de Stokes si l'on peut

déterminer trois fonctions P, Q, R telles qu'on ait

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x}.$$

Or on satisfait à ces relations en posant

$$P = 0, \qquad Q = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \qquad R = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y},$$

car par cette substitution la première relation se réduit à l'identité $\Delta \frac{1}{r} = 0$ et les deux autres deviennent identiques.

On aura dès lors

$$\begin{aligned} X &= -I\varepsilon \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz \\ &= -I\varepsilon \int_C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} dz \\ &= \quad I\varepsilon \int_C \frac{(z-c)\, dy - (y-b)\, dz}{r^3}. \end{aligned}$$

Une permutation circulaire donnera les valeurs de Y, Z.

255. Si le contour fermé C est parcouru par un courant électrique d'intensité i, un élément $MM' = ds$ de ce courant, joignant les points (xyz), $(x+dx, y+dy, z+dz)$, éprouve de la part du pôle magnétique situé au point $p = (abc)$, une action appliquée au point (xyz) et dont les composantes ξ, η, ζ seront, en vertu de la loi d'Ampère,

$$\xi = \frac{ki}{r^3}[(y-b)\, dz - (z-c)\, dy], \qquad \eta = \ldots, \qquad \zeta = \ldots,$$

k désignant une constante.

Les forces élémentaires ainsi appliquées aux divers éléments de C auront une résultante unique passant par p. Pour l'établir, il suffit de montrer que la somme de leurs moments

par rapport à des parallèles aux axes menées par p est nulle.

Considérons par exemple la parallèle à Ox. Le moment de la force élémentaire par rapport à cette droite sera

$$(y-b)\zeta-(z-c)\eta,$$

soit

$$\begin{aligned}
&\frac{ki}{r^3}\{(y-b)[(x-a)\,dy-(y-b)\,dx]\\
&\qquad-(z-c)[(z-c)\,dx-(x-a)\,dz]\}\\
&=\frac{ki}{r^3}\{(x-a)[r\,dr-(x-a)\,dx]-[r^2-(x-a)^2]\,dx\}\\
&=\frac{ki}{r^2}[(x-a)\,dr-r\,dx]=-ki\,d\frac{x-a}{r}.
\end{aligned}$$

La somme des moments sera donc

$$-ki\int_C d\left(\frac{x-a}{r}\right),$$

et sera nulle, le contour C étant fermé.

La résultante des forces élémentaires aura pour composantes

$$ki\int_C\frac{(y-b)\,dz-(z-c)\,dy}{r^3},\quad \ldots.$$

Réciproquement, les réactions des éléments de courant sur le pôle magnétique auront une résultante directement opposée à celle-là.

La comparaison de ce résultat avec celui du numéro précédent donne ce théorème :

L'action d'un feuillet magnétique homogène sur un pôle magnétique est la même que celle d'un courant électrique parcourant le contour du feuillet.

Le sens de ce courant est celui qu'indique la formule de Stokes ; son intensité i est donnée par la relation

$$ki=\mathrm{I}\varepsilon.$$

CHAPITRE V.

SÉRIES DE FOURIER.

I. — Intégrales de Fourier.

256. Théorème. — *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction de* x, *qui admette, dans un intervalle donné* AB (B > A), *une intégrale finie et déterminée.*

Soit, d'autre part, $f(x)$, *une fonction bornée et non croissante (ou non décroissante) dans le même intervalle.*

L'intégrale de $f(x)\varphi(x)$, *dans l'intervalle* AB, *sera finie et déterminée, et l'on aura*

$$\int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx = f(A+0)\int_A^\xi \varphi(x)\,dx + f(B-0)\int_\xi^B \varphi(x)\,dx,$$

ξ *désignant une quantité comprise dans l'intervalle* AB.

Cette proposition, due à *Ossian Bonnet*, est connue sous le nom de *second théorème de la moyenne.*

Pour l'établir, supposons d'abord A et B finis, et $\varphi(x)$ intégrable dans tout le champ ; $f(x)\varphi(x)$, étant le produit de deux fonctions intégrables, sera intégrable.

Pour obtenir l'intégrale, nous décomposerons le champ par des points de division $x_1 = A, x_2, \ldots, x_{n+1} = B$ en éléments infiniment petits $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$; dans l'intérieur de chacun d'eux, tel que Δx_i, nous prendrons arbitrairement un point ξ_i et nous chercherons la limite de la somme

$$\Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i.$$

Or soient M_i, m_i et $O_i = M_i - m_i$ le maximum, le minimum et l'oscillation de $\varphi(x)$ dans l'élément Δx_i; le facteur $\varphi(\xi_i)\Delta x_i$ sera compris entre $M_i\Delta x_i$ et $m_i\Delta x_i$; il en est de même pour l'intégrale

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx;$$

on aura donc

$$\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx + r_i,$$

$|r_i|$ étant au plus égal à $O_i\Delta x_i$; et, par suite,

$$\Sigma f(\xi_i)\,\varphi(\xi_i)\,\Delta x_i = \Sigma f(\xi_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx + \Sigma r_i f(\xi_i).$$

La première somme du second membre peut évidemment se mettre sous la forme

$$f(\xi_1)\int_{A}^{B} \varphi(x)\,dx + \sum_{2}^{n}[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})]\int_{x_i}^{B} \varphi(x)\,dx.$$

Or les facteurs $f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})$ sont tous de même signe et ont pour somme $f(\xi_n) - f(\xi_1)$.

La somme des termes où ils figurent sera donc de la forme

$$[f(\xi_n) - f(\xi_1)]\mu,$$

μ étant une quantité comprise entre le plus grand et le plus petit des facteurs

$$\int_{x_i}^{B} \varphi(x)\,dx$$

et, *a fortiori*, entre le maximum et le minimum des valeurs que prend l'expression

$$\int_{\xi}^{B} \varphi(x)\,dx,$$

lorsque ξ varie de A à B.

Nous aurons donc

$$\Sigma f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\int_A^B \varphi(x)\,dx + [f(\xi_n) - f(\xi_1)]\mu + \Sigma r_i f(\xi_i).$$

Faisons maintenant décroître indéfiniment les intervalles Δx_i. Le premier membre tendra vers l'intégrale

$$\int_A^B f(x)\,\varphi(x)\,dx;$$

ξ_1 tendra vers A, ξ_n vers B, et par suite $f(\xi_1)$ vers $f(A+0)$, $f(\xi_n)$ vers $f(B-0)$. Enfin $\Sigma r_i f(\xi_i)$ tendra vers zéro; car son module est au plus égal à $L\Sigma O_i \Delta x_i$, L désignant le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle AB; or, $\varphi(x)$ étant intégrable, $\Sigma O_i \Delta x_i$ tend vers zéro. Donc μ tendra aussi vers une limite déterminée μ_0, qui sera comprise, elle aussi, entre le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_\xi^B \varphi(x)\,dx.$$

Mais cette intégrale, étant une fonction continue de ξ, prend toutes les valeurs comprises entre son maximum et son minimum. On peut donc assigner à ξ une valeur telle qu'elle soit égale à μ_0. Donnant à ξ cette valeur, on aura l'équation limite

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)\,\varphi(x)\,dx &= f(A+0)\int_A \varphi(x)\,dx \\ &\quad + [f(B-0) - f(A+0)]\int_\xi^B \varphi(x)\,dx \\ &= f(A+0)\int_A \varphi(x)\,dx + f(B-0)\int_\xi^B \varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

257. Passons au cas où le champ AB, étant encore fini, contient des points singuliers $c, c', \ldots$ aux environs desquels

$\varphi(x)$ cesse d'être intégrable. Décomposons encore le champ en éléments infiniment petits $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

Désignons en général par Δx_i ceux de ces éléments qui ne contiennent pas de point singulier, par Δx_k les autres. Dans chacun des éléments Δx_i, on peut intégrer la fonction $f(x)\varphi(x)$, et si la somme

$$\sum \int_{\Delta x_i} f(x)\varphi(x)\,dx$$

tend vers une limite fixe, ainsi que nous allons le prouver, ce sera la définition de l'intégrale

$$\int_{A}^{B} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Le champ d'intégration D, formé par la somme des éléments Δx_i, se compose évidemment d'une somme d'intervalles $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... d'un seul tenant, séparés les uns des autres par des points singuliers. A une autre décomposition de AB en éléments infiniment petits correspond un champ analogue D′ et nous devons montrer que la différence

$$\int_{D'} f(x)\varphi(x)\,dx - \int_{D} f(x)\varphi(x)\,dx$$

est infiniment petite. Or soit

$$D'' = D + d = D' + d'$$

le champ formé par la réunion de D et de D′. Il suffira de prouver que la différence

$$\int_{D''} - \int_{D} = \int_{d}$$

est infiniment petite ; car la même démonstration étant applicable à $\int_{D''} - \int_{D'}$, $\int_{D'} - \int_{D}$ sera la différence de deux infiniment petits.

258. Le domaine d se compose d'une suite de domaines partiels d_k respectivement contenus dans les éléments Δx_k; chacun de ces derniers, tel que d_k, est lui-même formé par une série de domaines d'un seul tenant, $\alpha_{k1}\beta_{h1}, \ldots, \alpha_{km}\beta_{km}$, séparés les uns des autres par des points singuliers. Appliquant à chacun d'eux le second théorème de la moyenne, il viendra

$$\int_d f(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \sum\left[f(\alpha_{kl}+0)\int_{\alpha_{kl}}^{\xi_{kl}}\varphi(x)\,dx + f(\beta_{kl}-0)\int_{\xi_{kl}}^{\beta_{kl}}\varphi(x)\,dx\right].$$

Soit L le maximum de $|f(x)|$ dans l'intervalle AB. Le module de la somme ci-dessus ne pourra surpasser

$$L\sum\left[\left|\int_{\alpha_{kl}}^{\xi_{kl}}\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_{\xi_{kl}}^{\beta_{kl}}\varphi(x)\,dx\right|\right].$$

Or chacune des deux parties de cette dernière somme est infiniment petite.

En effet, l'intégrale

$$\int_A^B \varphi(x)\,dx$$

étant déterminée, par hypothèse, l'intégrale

$$\int_D \varphi(x)\,dx$$

ne subira plus que des accroissements infiniment petits si l'on subdivise les éléments Δx_k par de nouveaux points de division choisis d'une manière quelconque.

Introduisons tout d'abord comme nouveaux points de division les points extrêmes α_{k1} et β_{km} de chacun des domaines d_k. Le champ d'intégration D pourra se trouver accru de quelques éléments; appelons D_1 ce qu'il devient par cette adjonction.

Soient maintenant $\alpha_{kp}\xi_{kp}$ ceux des intervalles $\alpha\xi$ pour lesquels l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\xi} \varphi(x)\,dx$$

est positive; $\alpha_{kn}\xi_{kn}$ ceux pour lesquels elle est négative. Si nous ajoutons tous les points α_{kp} et ξ_{kp} aux points de division précédents, le champ d'intégration D_1 se trouvera accru des éléments $\alpha_{kp}\xi_{kp}$, et l'intégrale correspondante se trouvera accrue de

$$\sum \int_{\alpha_{kp}}^{\xi_{kp}} f(x)\,dx.$$

Ajoutons encore les nouveaux points de division α_{kn} et ξ_{kn}; nous obtiendrons un accroissement négatif,

$$\sum \int_{\alpha_{kn}}^{\xi_{kn}} f(x)\,dx.$$

Ces deux accroissements sont infiniment petits, par hypothèse. Il en sera de même de leur différence, laquelle est évidemment égale à la somme

$$\sum \left| \int_{\alpha_{kl}}^{\xi_{kl}} f(x)\,dx \right|,$$

étendue à tous les éléments $\alpha\xi$.

En introduisant comme nouveaux points de division d'abord ceux des points β et ξ pour lesquels l'intégrale

$$\int_{\xi}^{\beta} \varphi(x)\,dx$$

est positive, puis ceux pour lesquels elle est négative, on trouvera de même que

$$\sum \left| \int_{\xi_{kl}}^{\beta_{kl}} \varphi(x)\,dx \right|$$

est infiniment petit.

259. Ayant établi, par ce qui précède, que l'intégrale

$$\int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx = \lim \sum \int_{\Delta x_i} f(x)\varphi(x)\,dx$$

est déterminée, il est aisé d'achever la démonstration du théorème.

Appliquant, en effet, à chacune des intégrales partielles le second théorème de la moyenne, la somme du second membre pourra se mettre sous la forme

$$(1)\quad \sum \left[f(x_i + 0) \int_{x_i}^{\xi_i} \varphi(x)\,dx + f(x_{i+1} - 0) \int_{\xi_i}^{x_{i+1}} \varphi(x)\,dx \right].$$

Cette somme n'est étendue qu'aux éléments Δx_i; mais on peut y ajouter, sans altérer sa limite, des termes analogues correspondant aux éléments Δx_k; car la somme des modules de ces termes ne pourra surpasser

$$L \sum \left[\left| \int_{x_k}^{\xi_k} \varphi(x)\,dx \right| + \left| \int_{\xi_k}^{x_{k+1}} \varphi(x)\,dx \right| \right],$$

expression dont les deux termes ont zéro pour limite.

La somme (1) étant maintenant étendue à tous les éléments Δx, remplaçons chacune des intégrales qui y figurent par la différence de deux intégrales ayant B pour limite supérieure; elle prendra la forme suivante

$$\begin{aligned} f(A+0)\int_A^B &+ \sum [f(x_{i+1}-0) - f(x_i+0)] \int_{\xi_i}^B \\ &+ \sum [f(x_i\ +0) - f(x_i - 0) \int_{x_i}^B \\ = f(A+0)\int_A^B &+ [f(B-0) - f(A+0)]\mu, \end{aligned}$$

μ étant intermédiaire entre le maximum et le minimum de

l'intégrale

$$\int_\xi^B \varphi(x)\,dx,$$

et la démonstration s'achèvera comme au n° 256.

260. Supposons enfin le champ infini, du côté des x positifs, par exemple. L'intégrale

$$\int_A^\infty f(x)\varphi(x)\,dx = \lim_{B=\infty}\int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx$$

sera déterminée; en effet, si l'on y change B en C, son accroissement pourra être mis sous la forme

$$\begin{aligned}\int_B^C f(x)\varphi(x)\,dx = \quad & f(B+0)\int_B^\xi \varphi(x)\,dx\\ &+ f(C-0)\int_\xi^C \varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Il est infiniment petit; car les deux intégrales le sont, et $f(B+0)$ et $f(C-0)$ ont un module au plus égal à L.

On aura d'ailleurs, en appliquant le second théorème de la moyenne à l'intégrale prise de A à B,

$$\begin{aligned}\int_A^B f(x)\varphi(x)\,dx = \quad & f(A+0)\int_A^\xi \varphi(x)\,dx\\ &+ f(B-0)\int_\xi^B \varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

On peut ajouter au second membre le terme

$$[f(\infty)-f(B-0)]\int_B^\infty \varphi(x)\,dx,$$

dont la limite pour $B=\infty$ est nulle. Cela posé, le second

membre de l'équation pourra s'écrire

$$f(\mathrm{A}+0)\int_{\mathrm{A}}^{\infty}\varphi(x)\,dx+[f(\mathrm{B}-0)-f(\mathrm{A}+0)]\int_{\xi}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$
$$+[f(\infty)\qquad -f(\mathrm{B}-0)]\int_{\mathrm{B}}^{\infty}\varphi(x)\,dx.$$

La somme des deux derniers termes est le produit de $f(\infty)-f(\mathrm{A}+0)$ par une quantité μ, intermédiaire entre les deux intégrales $\int_{\xi}^{\infty}$ et $\int_{\mathrm{B}}^{\infty}$. Mais, l'intégrale $\int_{\xi}^{\infty}$ étant une fonction continue de sa limite inférieure, on pourra trouver une quantité η intermédiaire entre ξ et B, telle qu'on ait

$$\mu=\int_{\eta}^{\infty}\varphi(x)\,dx,$$

et, par suite,

$$\int_{\mathrm{A}}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx=f(\mathrm{A}+0)\int_{\mathrm{A}}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$
$$+[f(\infty)-f(\mathrm{A}+0)]\int_{\eta}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$
$$=f(\mathrm{A}+0)\int_{\mathrm{A}}^{\eta}\varphi(x)\,dx+f(\infty)\int_{\eta}^{\infty}\varphi(x)\,dx.$$

261. Les théorèmes que nous établirons dans la suite de ce Chapitre sur les fonctions à variation bornée sont d'une nature telle que, s'ils sont vrais pour deux fonctions f_1, f_2, ils le seront évidemment encore pour leur différence. Nous pouvons donc, tout en les énonçant dans leur généralité, admettre dans les démonstrations que la fonction varie toujours dans le même sens, de manière qu'on puisse lui appliquer le théorème précédent.

262. Théorème. — *Soit $f(\alpha)$ une fonction à variation bornée entre* A *et* B.

Soit, d'autre part, $\varphi(\alpha, n)$ une fonction de α et du paramètre n, jouissant des deux propriétés suivantes :

1° *L'intégrale* $\int_A^b \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$, *où b est un nombre quelconque compris dans l'intervalle* AB, *a son module inférieur à une quantité fixe* L, *indépendante de b et de n*;

2° *Si n tend vers* ∞, *cette même intégrale tend uniformément vers une limite fixe* G, *pour les diverses valeurs de b comprises dans un intervalle quelconque contenu dans* AB, *mais dont le point* A *soit exclu*.

Pour ces mêmes valeurs de b l'intégrale

$$\int_A^b f(\alpha)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

tendra uniformément vers $Gf(A \pm 0)$ (*le signe* + *devant être adopté si* $B > A$, *et le signe* — *si* $B < A$).

Les deux cas se traitent exactement de même. La seule différence qui existe entre eux est que, $A + \lambda$ désignant un nombre compris entre A et B, on a

$$\lim_{\lambda=0} f(A + \lambda) = \begin{cases} f(A + 0), & \text{si} \quad B > A, \\ f(A - 0), & \text{si} \quad B < A. \end{cases}$$

Nous pourrons donc nous borner au cas où $B > A$.

Posons

$$f(\alpha) = f(A + 0) + \psi(\alpha).$$

La nouvelle fonction $\psi(\alpha)$ variera toujours dans le même sens, et l'on aura

$$\psi(A + 0) = 0.$$

Cela posé, on a

$$\int_A^b f(\alpha)\varphi\,d\alpha = f(A + 0)\int_A^b \varphi\,d\alpha + \int_A^b \psi(\alpha)\varphi\,d\alpha.$$

Si n tend vers ∞, le premier terme tend uniformément vers $Gf(A + 0)$. Il suffit donc de montrer que le second tend uniformément vers zéro.

Soit $A + \lambda$ un nombre arbitraire compris entre A et B; on

pourra décomposer l'intégrale en deux autres

$$\int_A^b = \int_A^{A+\lambda} + \int_{A+\lambda}^b.$$

Appliquons à chacune d'elles le théorème de la moyenne; il viendra, pour la valeur de l'intégrale cherchée,

$$\psi(A+0)\int_A^{\xi} \varphi\, d\alpha + \psi(A+\lambda-0)\int_{\xi}^{A+\lambda} \varphi\, d\alpha$$
$$+\psi(A+\lambda+0)\int_{A+\lambda}^{\xi_1} \varphi\, d\alpha + \psi(b-0)\int_{\xi_1}^{b} \varphi\, d\alpha,$$

ξ étant compris entre A et $A+\lambda$ et ξ_1 entre $A+\lambda$ et b.

Le premier terme est nul, et chacun des trois autres tendra uniformément vers zéro, si l'on choisit d'abord λ suffisamment petit, puis n suffisamment grand.

En effet, lorsque λ tend vers zéro, $\psi(A+\lambda-0)$ et $\psi(A+\lambda+0)$ tendent vers zéro, et les intégrales qui les multiplient restent finies; car l'intégrale

$$\int_{\xi}^{A+\lambda} \varphi\, d\alpha,$$

par exemple, est la différence de deux intégrales

$$\int_A^{A+\lambda} \varphi\, d\alpha - \int_A^{\xi} \varphi\, d\alpha,$$

dont chacune a son module $< L$, par hypothèse.

D'autre part, $\psi(b-0)$ est fini, et l'intégrale

$$\int_{\xi_1}^{b} \varphi\, d\alpha = \int_A^b \varphi\, d\alpha - \int_A^{\xi_1} \varphi\, d\alpha$$

tend uniformément vers zéro, quels que puissent être b et ξ_1, lorsque, après avoir assigné à λ une valeur déterminée, on fait croître n indéfiniment; car b et ξ_1 étant compris dans l'intervalle de $A+\lambda$ à B, les deux intégrales du second membre tendent uniformément vers la même limite G.

263. *Remarque.* — Si la fonction $f(\alpha)$ dépend d'un paramètre x, la convergence de l'intégrale $\int_A^b f(\alpha)\varphi\,d\alpha$ vers sa limite sera évidemment uniforme par rapport à ce paramètre, si $f(A+\lambda)$ converge uniformément vers sa limite $f(A\pm 0)$, lorsque λ tend vers zéro.

Toutefois, si f, au lieu de varier toujours dans le même sens, comme nous l'avons admis, était la différence de deux fonctions non décroissantes f_1 et f_2, il faudrait, pour la démonstration de ce dernier point, que chacune de ces deux fonctions, prise isolément, convergeât uniformément vers sa limite.

264. Corollaire. — *On aura plus généralement, en désignant par x une quantité comprise entre $A+b-B$ et b,*

$$\lim_{n=\infty}\int_x^b f(\beta)\varphi(\beta+A-x,n)\,d\beta = Gf(x\pm 0),$$

pourvu que la fonction $f(\beta)$ ait une variation bornée entre x et b.

En effet, posons

$$\beta + A - x = \alpha.$$

Cette intégrale deviendra

$$\int_A^{b+A-x} f(\alpha+x-A)\varphi(\alpha,n)\,d\alpha.$$

Or $b+A-x$ est compris entre A et B, d'après les hypothèses précédentes; on aura donc, pour la limite de cette intégrale,

$$Gf(A+x-A\pm 0) = Gf(x\pm 0).$$

D'ailleurs, l'intégrale convergera uniformément vers sa limite lorsque x varie, pourvu qu'il reste en deçà de b et que, dans les limites où il se meut, $f(x)$ reste continue (263).

265. *Applications.* — On satisfera aux conditions du théorème précédent, en supposant $A = 0$, B quelconque, $\varphi(\alpha, n) = \frac{\sin n\alpha}{\alpha}$.

En effet, supposons d'abord B positif. Soient b un nombre quelconque compris entre o et B, $m\pi$ le plus grand multiple de π contenu dans bn; on aura, en posant $n\alpha = \beta$,

$$\int_0^b \frac{\sin n\alpha}{\alpha}\, d\alpha$$

$$= \int_0^{bn} \frac{\sin\beta}{\beta}\, d\beta = \left(\int_0^{\pi} + \ldots + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \ldots + \int_{m\pi}^{bn}\right) \frac{\sin\beta}{\beta}\, d\beta.$$

Ces intégrales partielles successives ont des signes alternatifs ; en effet, le facteur $\sin\beta$ change de signe en passant d'une intégrale à la suivante. De plus, elles vont en décroissant en valeur numérique ; car, si l'on compare entre eux les éléments qui correspondent à la même valeur absolue de $\sin\beta$, l'autre facteur $\frac{1}{\beta}$ décroît d'une intégrale à la suivante. *A fortiori*, la dernière intégrale $\int_{m\pi}^{bn}$, qui ne contient qu'une portion des éléments de l'intégrale $\int_{m\pi}^{(m+1)\pi}$, sera moindre en valeur absolue que celle qui la précède.

L'intégrale $\int_0^{bn}$ aura donc le signe de son premier terme $\int_0^{\pi}$ et un module moindre.

Mais on a

$$\left|\int_0^{\pi} \frac{\sin\beta}{\beta}\, d\beta\right| < \int_0^{\pi} d\beta < \pi;$$

donc

$$\left|\int_0^{bn} \frac{\sin\beta}{\beta}\, d\beta\right| < \pi.$$

D'autre part, si b se meut dans un intervalle compris entre zéro et B, mais d'où le point zéro soit exclu, il ne pourra

s'abaisser au-dessous d'un nombre positif fixe λ. Les diverses intégrales $\int_0^{bn} \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta$, correspondant aux diverses valeurs de b, auront donc leur limite supérieure au moins égale à λn, nombre qui tend vers ∞ avec n ; elles tendront donc vers une limite commune

$$G = \int_0^\infty \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta,$$

si cette intégrale est déterminée. Nous avons vu (**102**) qu'il en est ainsi et qu'on a

$$G = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons supposé B et, par suite, b positifs ; s'ils sont négatifs, on n'aura qu'à changer β en $-\beta$ pour retomber sur l'intégrale précédente, changée de signe. Les conditions du théorème subsisteront encore ; mais on aura

$$G = -\frac{\pi}{2}.$$

266. Théorème. — *Soient a, b deux quantités fixes quelconques et x une quantité variable, telles que l'on ait $a < x < b$; soit enfin $f(x)$ une fonction à variation bornée dans l'intervalle ab ; on aura*

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b f(\beta)\frac{\sin n(\beta - x)}{\beta - x}\,d\beta = \frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

En effet, l'intégrale considérée est la différence des deux suivantes :

$$\int_x^b \quad \text{et} \quad \int_x^a,$$

qui convergent respectivement vers

$$\frac{\pi}{2}f(x+0) \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2}f(x-0) \quad (\mathbf{264}).$$

Tant que $f(x)$ restera continue, cette expression se réduira à $\pi f(x)$. Chacune des deux intégrales partielles, et par suite l'intégrale totale, convergera d'ailleurs vers sa limite d'une manière uniforme (264).

267. La formule précédente reste applicable si l'intervalle ab s'étend de $-\infty$ à $+\infty$. On aura, dans ce cas, pour toute valeur de x,

$$\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \lim_{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\frac{\sin n(\beta-x)}{\beta-x}\,d\beta.$$

Mais on a

$$\frac{\sin n(\beta-x)}{\beta-x} = \int_0^n \cos\mu(\beta-x)\,d\mu.$$

L'intégrale précédente deviendra donc

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_0^n f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\mu \\
&= \lim_{\substack{a=-\infty\\ b=\infty}} \int_a^b d\beta \int_0^n f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\mu \\
&= \lim_{\substack{a=-\infty\\ b=\infty}} \int_0^n d\mu \int_a^b f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\beta \\
&= \int_0^n d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\beta \\
&\quad - \lim_{a=-\infty} \int_0^n a\mu \int_{-\infty}^{a} f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\beta \\
&\quad - \lim_{b=\infty} \int_0^n d\mu \int_b^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta-x)\,d\beta.
\end{aligned}$$

Si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\beta)|\,d\beta$$

est finie et déterminée, les deux termes complémentaires

tendent vers zéro ; car leurs modules sont au plus égaux à

$$\int_0^n d\mu \int_{-\infty}^{a} |f(\beta)|\, d\beta = n \int_{-\infty}^{a} |f(\beta)|\, d\beta$$

et

$$\int_0^n d\mu \int_b^{\infty} |f(\beta)|\, d\beta = n \int_b^{\infty} |f(\beta)|\, d\beta,$$

et pour $a = -\infty$, $b = \infty$, les intégrales du second membre tendent vers zéro.

On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}[f(x+0)+f(x-0)] &= \lim_{n=\infty} \int_0^n d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\beta \\ &= \int_0^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\beta)\cos\mu(\beta - x)\, d\beta.\end{aligned}$$

Cette formule est due à *Fourier*.

268. On peut encore satisfaire aux conditions de l'énoncé du n° 262 en posant $A = 1$, $B = -1$, $\varphi(\alpha, n) = X'_n + X'_{n+1}$, X'_n désignant la dérivée de l'intégrale définie

$$X_n(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\cos\psi)^n\, d\psi,$$

et l'on aura, dans ce cas, $G = -2$.

On a, en effet, d'après cette définition,

$$X_n(1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\psi = 1,$$

$$\begin{aligned}&\int_1^b (X'_n + X'_{n+1})\, d\alpha \\ &= X_n(b) + X_{n+1}(b) - X_n(1) - X_{n+1}(1) \\ &= -2 + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (b + \sqrt{b^2-1}\cos\psi)^n (1 + b + \sqrt{b^2-1}\cos\psi)\, d\psi.\end{aligned}$$

Pour les valeurs de b comprises entre -1 et $+1$, cette dernière intégrale aura pour limite supérieure de son mo-

dule

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [b^2+(1-b^2)\cos^2\psi]^{\frac{n}{2}}[(1+b)^2+(1-b^2)\cos^2\psi]^{\frac{1}{2}}\,d\psi$$

$$=\frac{\sqrt{1+b}}{\pi}\int_0^\pi [1-(1-b^2)\sin^2\psi]^{\frac{n}{2}}(1+\cos^2\psi+b\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}\,d\psi$$

$$<\frac{\sqrt{1+b}}{\pi}\int_0^\pi [1-(1-b^2)\sin^2\psi]^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}\,d\psi.$$

Cette expression est évidemment inférieure, pour toute valeur positive de n, à la quantité finie

$$\frac{\sqrt{1+b}}{\pi}\int_0^\pi \sqrt{2}\,d\psi = \sqrt{2(1+b)} \leqq 2.$$

En outre, elle tend uniformément vers zéro, lorsque n tend vers ∞, pour toutes les valeurs de b comprises entre $1-\lambda$ et -1, quelque petite que soit la constante λ.

En effet, nous allons déterminer pour n une valeur indépendante de b, et à partir de laquelle cette expression soit toujours inférieure à une quantité quelconque ε.

Si $1+b<\frac{\varepsilon^2}{2}$, cette condition sera satisfaite, quel que soit n. Si $1+b>\frac{\varepsilon^2}{2}$, $1-b$ étant d'ailleurs $\geqq\lambda$, et $1+b<2$, l'expression ci-dessus sera plus petite que la suivante :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1-\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\sin^2\psi\right)^{\frac{n}{2}} d\psi.$$

Décomposons le champ d'intégration en trois parties, s'étendant respectivement de 0 à γ, de γ à $\pi-\gamma$ et de $\pi-\gamma$ à π, γ désignant une quantité arbitraire. Négligeons $\sin^2\psi$ dans la première et la troisième intégrale et remplaçons-le dans la seconde par sa valeur minimum $\sin^2\gamma$. Il viendra, pour limite supérieure du module cherché,

$$\frac{2}{\pi}\left[2\gamma+\left(1-\frac{\varepsilon^2\lambda}{2}\sin^2\gamma\right)^{\frac{n}{2}}(\pi-2\gamma)\right].$$

En disposant convenablement de γ, nous pourrons rendre le premier terme inférieur à $\frac{1}{2}\varepsilon$; puis, en prenant n assez grand, rendre le second terme également $< \frac{1}{2}\varepsilon$.

On aura donc, en désignant par $f(\alpha)$ une fonction à variation bornée entre -1 et $+1$,

$$\lim_{n=\infty} \int_1^{-1} f(\alpha)(X'_n + X'_{n+1})\,d\alpha = -2f(1-0).$$

269. L'intégrale X_n, que nous venons de considérer, se réduit, si n est entier, à un polynome entier en α; car, en développant le binome $(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\cos\psi)^n$, on voit que les puissances impaires du radical ne figureront que dans les termes de degré impair en $\cos\psi$. Mais l'intégrale de chacun de ces termes est nulle. En effet, à deux valeurs supplémentaires de l'angle ψ correspondent dans l'intégrale $\int_0^\pi \cos^{2k+1}\psi\,d\psi$ des éléments égaux et contraires qui se détruisent.

Nous verrons plus loin que les polynomes auxquels nous arrivons ici ne sont autre chose que les polynomes X_n de Legendre.

II. — Séries trigonométriques.

270. Soit $f(x)$ une fonction arbitraire de x. Cherchons à la représenter, pour les valeurs de x comprises entre $-\pi$ et $+\pi$, par un développement de la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = A_0 + A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots + A_n\cos nx + \ldots \\ \qquad\qquad + B_1\sin x + B_2\sin 2x + \ldots + B_n\sin nx + \ldots. \end{cases}$$

Le second membre de cette égalité admettant évidemment la période 2π, le développement, supposé exact dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, subsistera pour toute valeur de x, si $f(x)$ admet également la période 2π; dans le cas contraire, il cessera de représenter $f(x)$ en dehors de cet intervalle.

La forme du développement étant assignée *a priori*, le problème se réduit à déterminer les valeurs numériques des coefficients A et B.

Ce calcul repose sur les formules suivantes :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \left(\frac{\sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} = 0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \left(\frac{-\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{\pi} = 0.\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2nx}{4n}\right)_{-\pi}^{\pi} = \pi,\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2nx}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2nx}{4n}\right)_{-\pi}^{\pi} = \pi,\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\sin 2nx\,dx = 0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)x+\cos(m+n)x}{2}\,dx = 0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x}{2}\,dx = 0,\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2}\,dx = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Pour déterminer A_0, intégrons l'équation (1) de $-\pi$ à $+\pi$; chacun des termes du second membre, sauf le premier, donnera une intégrale nulle, en vertu des relations précédentes, et l'on aura simplement

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} A_0\,dx = 2\pi A_0,$$

d'où

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta.$$

Pour déterminer A_n, multiplions l'équation (1) par $\cos nx$ et intégrons de $-\pi$ à $+\pi$; il viendra, en vertu des rela-

tions (2),

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \pi A_n,$$

d'où

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta.$$

On trouvera de même, en multipliant l'équation (1) par $\sin nx$ et intégrant de $-\pi$ à $+\pi$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \pi B_n,$$

d'où

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta.$$

Substituant dans l'équation (1) ces valeurs des coefficients, il viendra

$$(3)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta + \sum_{n=1}^{n=\infty}\cos nx\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta$$
$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty}\sin nx\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta$$

ou, en multipliant par π et réunissant toutes les intégrales en une seule,

$$(4)\qquad \pi f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta\left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty}\cos n(\beta - x)\right].$$

271. Le procédé dont nous nous sommes servi, d'après *Fourier*, pour établir cette formule, donne lieu à de graves critiques :

1° Nous avons intégré le second membre de l'équation (1) en faisant la somme des intégrales de ses termes, ce qui n'est légitime que s'il est uniformément convergent. Nous n'avons donc pas prouvé que, en dehors du système de valeurs que

nous avons déterminé pour les coefficients A et B, il ne puisse en exister d'autres donnant également une représentation de la fonction $f(x)$. Nous pouvons seulement affirmer que, s'il en existe, le développement qu'ils fournissent ne peut être uniformément convergent.

2° Nous avons trouvé la forme que doivent avoir les coefficients du développement de $f(x)$, en supposant que ce développement soit possible ; mais rien ne justifie *a priori* cette hypothèse : l'exactitude de la formule (3) n'est donc aucunement établie.

Cette objection capitale ne peut évidemment être levée qu'en calculant directement la valeur du second membre de la formule, pour vérifier si elle est égale à $\pi f(x)$.

272. A cet effet, nous remarquerons que la série, arrêtée aux termes en $\sin px$ et $\cos px$, aura pour valeur

$$S_p = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\, d\beta \left[\frac{1}{2} + \sum_1^p \cos n(\beta - x) \right].$$

Mais la somme entre parenthèses est égale à

$$\frac{1}{2\sin\frac{\beta - x}{2}} \left[\sin\frac{\beta - x}{2} + \sum_1^p 2\sin\frac{\beta - x}{2} \cos n(\beta - x) \right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\beta - x}{2}} \left\{ \sin\frac{\beta - x}{2} + \sum_1^p \left[\sin\frac{2n+1}{2}(\beta - x) - \sin\frac{2n-1}{2}(\beta - x) \right] \right\}$$

$$= \frac{\sin\frac{2p+1}{2}(\beta - x)}{2\sin\frac{\beta - x}{2}}.$$

On aura donc

$$S_p = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta) \frac{\sin \frac{2p+1}{2}(\beta - x)}{2 \sin \frac{\beta - x}{2}} d\beta,$$

et la somme de la série cherchée sera la limite de S_p lorsque p tend vers ∞.

Cette limite est aisée à trouver lorsque $f(x)$ n'a qu'une variation bornée entre $-\pi$ et $+\pi$. En effet, supposons d'abord $x > -\pi$, mais $< \pi$. Faisant, pour abréger,

$$\frac{2p+1}{2} = n, \qquad f(\beta) \frac{\beta - x}{2 \sin \frac{1}{2}(\beta - x)} = F(\beta),$$

l'intégrale S_p pourra se mettre sous la forme

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\beta) \frac{\sin n(\beta - x)}{\beta - x} d\beta.$$

Or le facteur $\dfrac{\beta - x}{2 \sin \frac{1}{2}(\beta - x)}$ reste fini dans le champ de l'intégration, et n'a qu'une variation bornée, de même que $f(\beta)$; donc $F(\beta)$ n'a qu'une variation bornée, et l'on aura (266)

$$\lim S_p = \frac{\pi}{2}[F(x+0) + F(x-0)] = \frac{\pi}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

car le facteur $\dfrac{\beta - x}{2 \sin \frac{1}{2}(\beta - x)}$ a pour limite l'unité, quand β tend vers x.

Si $f(x)$ est continue, cette expression se réduit à $\pi f(x)$. D'ailleurs, S_p tendant uniformément vers sa limite quand x varie, la série de Fourier sera uniformément convergente.

273. Ces résultats seraient en défaut si x était égal à l'une

des limites $\pm\pi$; car le facteur $\dfrac{\beta - x}{2\sin\frac{1}{2}(\beta - x)}$ deviendrait infini à l'autre limite de l'intégration; mais il est aisé de trouver, dans ce cas, la limite de S_p.

Soit, par exemple, $x = -\pi$. L'intégrale

$$S_p = \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,\frac{\sin\frac{2p+1}{2}(\beta+\pi)}{2\sin\frac{1}{2}(\beta+\pi)}\,d\beta$$

se décompose en deux autres, ayant pour limites $-\pi$ et zéro, zéro et $+\pi$. On trouve, par la méthode précédente, que la première a pour limite $\frac{\pi}{2}f(-\pi+0)$. Pour évaluer la seconde, posons $\beta = \pi - \alpha$. Elle se réduit à

$$\int_0^{\pi} f(\pi-\alpha)\,\frac{\sin\frac{2p+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

$$= \int_0^{\pi} f(\pi-\alpha)\,\frac{\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\sin\frac{2p+1}{2}\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

et aura pour valeur

$$\frac{\pi}{2}\lim_{\varepsilon=0}\left[f(\pi-\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right] = \frac{\pi}{2}f(\pi-0).$$

On aura donc, dans ce cas,

$$\lim S_p = \frac{\pi}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)].$$

Si $x = +\pi$, on arrivera, par un procédé tout semblable, au même résultat.

274. Considérons une fonction $F(x)$ donnée seulement dans une portion de l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$. On pourra la

représenter dans cette étendue par une infinité de séries trigonométriques différentes. Concevons, en effet, une fonction $f(x)$, égale à $F(x)$ dans la région considérée et prenant des valeurs arbitrairement choisies dans le reste de l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$. Développons-la en série de Fourier. Cette série représentera $F(x)$ dans la région où cette fonction est donnée.

Supposons, par exemple, que $F(x)$ soit donnée dans l'intervalle de zéro à π. Soit $f(x)$ une fonction égale à $F(x)$ dans cet intervalle, et définie de zéro à $-\pi$ par la condition $f(-x)=f(x)$. Appliquons la formule (3) à cette fonction. Les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\, d\beta$ s'annuleront, car les éléments correspondant à des valeurs de β égales et de signe contraire se détruisent mutuellement.

Ces éléments s'ajouteront, au contraire, dans les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta, \int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta$, qui se réduiront à

$$2\int_0^{\pi} f(\beta)\,d\beta,\quad 2\int_0^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta$$

ou, comme $f(x)=F(x)$ entre zéro et π, à

$$2\int_0^{\pi} F(\beta)\,d\beta,\quad 2\int_0^{\pi} F(\beta)\cos n\beta\,d\beta.$$

On aura donc, entre zéro et π,

$$(5)\quad F(x)=f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(\beta)\,d\beta + \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi} F(\beta)\cos n\beta\,d\beta.$$

275. Si l'on avait, au contraire, déterminé $f(x)$, pour les

valeurs négatives de x, par la condition

$$f(-x) = -f(x),$$

les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\,d\beta$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\cos n\beta\,d\beta$ se seraient annulées, et les intégrales $\int_{-\pi}^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta$ se seraient réduites à $2\int_0^{\pi} f(\beta)\sin n\beta\,d\beta = 2\int_0^{\pi} F(\beta)\sin n\beta\,d\beta$. La fonction $F(x)$ sera donc représentée, toujours dans l'intervalle de zéro à π, par une série de sinus

$$(6) \qquad F(x) = f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty} \sin nx \int_0^{\pi} F(\beta)\sin n\beta\,d\beta.$$

On remarquera toutefois que, pour la valeur $x = 0$, la fonction $f(x)$, définie par les conditions précédentes, offrira une discontinuité si $F(x)$ ne s'annule pas pour $x = 0$. Aussi, pour $x = 0$, la série aura-t-elle pour valenr, non $F(0)$, mais $\frac{f(+0)+f(-0)}{2}$, c'est-à-dire zéro. Il en est de même pour $x = \pi$.

276. Les développements (3), (5), (6) sont valables, le premier de $-\pi$ à $+\pi$, les deux suivants de zéro à $+\pi$. Mais on en déduit aisément d'autres développements applicables de $-l$ à $+l$ ou de zéro à $+l$, l désignant une quantité quelconque.

Posons, en effet, dans ces formules

$$x = \frac{\pi y}{l}, \qquad \beta = \frac{\pi\alpha}{l},$$

$$f\left(\frac{\pi y}{l}\right) = \varphi(y). \qquad F\left(\frac{\pi y}{l}\right) = \Phi(y);$$

elles deviendront

$$\varphi(y) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\varphi(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos\frac{n\pi y}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$
$$+ \frac{1}{l}\sum_{1}^{\infty}\sin\frac{n\pi y}{l}\int_{-l}^{l}\varphi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

$$\Phi(y) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l}\Phi(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos\frac{n\pi y}{l}\int_{0}^{l}\Phi(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

$$\Phi(y) = \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\sin\frac{n\pi y}{l}\int_{0}^{l}\Phi(\alpha)\sin\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

et seront évidemment applicables, la première de $-l$ à $+l$, les autres de zéro à l, pourvu que $\varphi(y)$ et $\Phi(y)$ aient une variation limitée dans les intervalles ci-dessus. Les séries cesseront d'ailleurs en général de représenter ces fonctions : 1° aux points de discontinuité ; 2° aux limites du champ d'intégration.

III. — Fonctions de Laplace.

277. L'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

admet comme solution un polynome U homogène de degré n en x, y, z et contenant $2n+1$ coefficients arbitraires.

Substituons, en effet, dans le premier membre de l'équation, un polynome de degré n à coefficients indéterminés. En écrivant que le résultat est identiquement nul, nous obtiendrons $\frac{(n-1)n}{2}$ équations de conditions linéaires et homogènes entre les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficients. Il restera donc $2n+1$ arbitraires dans la solution.

Posons

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \rho \cos\theta;$$

il viendra

$$U = \rho^n Y_n,$$

Y_n étant une fonction homogène et de degré n en $\sin\theta \cos\psi$, $\sin\theta \sin\psi$, $\cos\theta$. Ces fonctions Y_n portent le nom de *fonctions de Laplace*. Elles satisfont à une équation différentielle qu'il est aisé de former.

En effet, l'équation (1), transformée en coordonnées polaires, devient (*Calcul différentiel*, n° 139)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0.$$

Substituant pour V la quantité $U = \rho^n Y_n$ et supprimant le facteur commun ρ^{n-2}, il viendra

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial \psi^2} + \cot\theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} + n(n+1) Y_n = 0.$$

278. Soient

x, y, z et x', y', z' les coordonnées rectangulaires de deux points;

ρ, θ, ψ et ρ', θ', ψ' leurs coordonnées polaires;

r leur distance mutuelle;

enfin

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\psi - \psi')$$

le cosinus de l'angle de leurs rayons vecteurs.

La quantité $\frac{1}{r}$, considérée comme fonction de x, y, z, satisfera, comme nous l'avons vu (182), à l'équation (1). Mais on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos\gamma + \rho'^2}},$$

ou, en développant en série suivant les puissances de $\frac{\rho}{\rho'}$ (*Cal-*

cul différentiel, n° 273) et posant, pour abréger,

$$X_n(\cos\gamma) = P_n,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho'}\left(P_0 + P_1\frac{\rho}{\rho'} + \ldots + P_n\frac{\rho^n}{\rho'^n} + \ldots\right).$$

Pour que cette expression satisfasse à l'équation (1) quel que soit ρ', il faudra évidemment que chaque terme y satisfasse séparément. Donc $P_n\rho^n$ est une solution de l'équation (1).

D'ailleurs l'expression

$$P_n = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n}\,\frac{d^n(\cos^2\gamma - 1)^n}{d\cos\gamma^n}$$

montre que P_n est de la forme

$$A_n\cos^n\gamma + A_{n-2}\cos^{n-2}\gamma + \ldots.$$

Remplaçant $\cos\gamma$ par sa valeur $\dfrac{xx'+yy'+zz'}{\rho\rho'}$, puis ρ^2 par sa valeur $x^2+y^2+z^2$, $P_n\rho^n$ deviendra évidemment une fonction entière et homogène de degré n en x, y, z. Donc P_n est une fonction de l'espèce Y_n.

279. Supposons $\rho' < \rho$; le point (x', y', z') sera intérieur à une sphère de rayon ρ ayant pour centre l'origine; et la fonction U étant harmonique et continue, la valeur U' qu'elle prend au point x', y', z' sera donnée (187) par la formule

$$4\pi U' = \mathrm{S}\left(U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\nu}\right)d\sigma,$$

l'intégrale étant prise sur la surface de la sphère, et ν désignant la normale intérieure.

Cela posé, nous aurons en coordonnées polaires

$$U = \rho^n Y_n, \qquad U' = \rho'^n Y'_n$$

(Y'_n désignant la valeur de Y_n au point x', y', z').

Développant, d'autre part, $\frac{1}{r}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{\rho'}{\rho}$, qui est < 1, on aura

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho}\left(P_0 + P_1\frac{\rho'}{\rho} + \ldots + P_n\frac{\rho'^n}{\rho^n} + \ldots\right).$$

Enfin, ν étant directement opposée à ρ, on a

$$\frac{\partial U}{\partial \nu} = -\frac{\partial U}{\partial \rho} = -n\rho^{n-1}Y_n,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho} = \frac{P_0}{\rho^2} + \frac{2P_1}{\rho^3}\rho' + \ldots + \frac{(n+1)P_n}{\rho^{n+2}}\rho'^n + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation, et remplaçant en outre $d\sigma$ par sa valeur $\rho^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi$, il viendra

$$4\pi\rho'^n Y'_n = \mathbf{S}\left[(n+1)P_0 + (n+2)P_1\frac{\rho'}{\rho} + \ldots \right.$$
$$\left. + (2n+1)P_n\frac{\rho'^n}{\rho^n} + \ldots\right] Y_n \rho^n \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Cette égalité contenant l'indéterminée ρ', on aura, en identifiant les coefficients de ses diverses puissances, les relations fondamentales

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{S}\, Y_n P_m \sin\theta \, d\theta \, d\psi = 0, \qquad \text{si } m \gtrless n, \\ &\mathbf{S}\, Y_n P_n \sin\theta \, d\theta \, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n. \end{aligned} \right.$$

280. Soit $f(\theta, \psi)$ une fonction arbitraire des deux angles θ et ψ; proposons-nous de la développer dans l'intervalle de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, et de $\psi = 0$ à $\psi = 2\pi$, en une série de la forme

$$(4) \qquad f(\theta, \psi) = Y_0 + \ldots + Y_n + \ldots.$$

On obtiendra aisément, par ce qui précède, chaque terme du développement.

Multiplions, en effet, par $P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi$ et intégrons dans les limites ci-dessus. Il viendra, en raison des équations (3),

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\psi) P_n \sin\theta\, d\theta\, d\psi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n.$$

Y'_n étant calculé par cette formule, on n'aura qu'à y remplacer θ', ψ' par θ, ψ pour obtenir Y_n.

L'expression ainsi calculée est bien une fonction de Laplace. En effet, P_n est évidemment symétrique en θ, ψ et θ', ψ'. C'est donc une fonction de Laplace par rapport à θ', ψ'. Donc $P_n \rho'^n$ sera une fonction homogène et de degré n en x', y', z', satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z'^2} = 0.$$

Il est clair que, multipliée par la quantité constante $f(\theta,\psi)\sin\theta\, d\theta\, d\psi$, elle y satisfera encore. Chacun des éléments de l'intégrale double, multiplié par ρ'^n, vérifiant ainsi l'équation, leur somme jouira de la même propriété.

281. Il reste à vérifier si la série de fonctions Y_n ainsi calculées est bien égale à $f(\theta,\psi)$ ou, ce qui revient au même, si la série

$$Y'_0 + \ldots + Y'_n + \ldots$$

est égale à $f(\theta', \psi')$ dans tout le champ considéré.

Or on a, d'après l'équation (5),

$$Y'_0 + \ldots + Y'_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta,\psi)\sum_0^n (2k+1) P_k \sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{S}\, f(\theta,\psi)\sum_0^n (2k+1) P_k\, d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface d'une sphère de

rayon 1, définie par les équations

$$x = \sin\theta\cos\psi, \qquad y = \sin\theta\sin\psi, \qquad z = \cos\theta.$$

Il reste à trouver la limite de cette expression pour $n = \infty$.

282. Nous la transformerons d'abord en remplaçant les variables θ, ψ par un autre système de coordonnées polaires λ, μ, choisies de telle sorte que le nouvel axe des z aboutisse au point (θ', ψ').

La fonction $f(\theta, \psi)$ sera transformée en une fonction de λ et de μ, que nous représenterons par $F(\lambda, \mu)$. La fonction $P_n = X_n(\cos\gamma)$ deviendra $X_n(\cos\lambda)$, car γ, distance angulaire du point (θ', ψ') au point variable θ, ψ, n'est évidemment autre chose que λ. L'élément $d\sigma$ sera égal à $\sin\lambda\, d\lambda\, d\mu$. Enfin les limites de l'intégrale seront 0 et π pour λ, 0 et 2π pour μ.

L'intégrale à évaluer deviendra donc

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\lambda, \mu)\sum_0^n (2k+1)X_k(\cos\lambda)\sin\lambda\, d\lambda\, d\mu$$

ou, en posant $\cos\lambda = x$, $F(\lambda, \mu) = \Phi(x, \mu)$,

$$(6) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\Phi(x, \mu)\sum_0^n (2k+1)X_k\, dx\, d\mu.$$

283. La sommation par rapport à k peut être effectuée comme il suit.

On a, par définition,

$$(7) \qquad (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^\infty \alpha^n X_n,$$

et, en prenant les dérivées par rapport à x et par rapport à α,

$$(8) \qquad \alpha(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_0^\infty \alpha^n X'_n,$$

$$(9) \qquad (x - \alpha)(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_0^\infty n\alpha^{n-1} X_n.$$

La comparaison des équations (8) et (9) donne

$$(x-\alpha)\sum_0^\infty \alpha^n X'_n = \alpha\sum_0^\infty n\alpha^{n-1}X_n,$$

d'où, en égalant les termes en α^n,

$$xX_n - X'_{n-1} = nX_n. \tag{10}$$

D'autre part, l'équation (8), multipliée par $1-2\alpha x+\alpha^2$ et comparée à (7), donne

$$\alpha\sum \alpha^n X_n = (1-2\alpha x+\alpha^2)\sum \alpha^n X'_n,$$

et, en égalant les termes en α^{n+1},

$$X_n = X'_{n+1} - 2xX'_n + X'_{n-1}. \tag{11}$$

De (10) et (11) on déduira, par l'élimination de X'_n,

$$(2n+1)X_n = X'_{n+1} - X'_{n-1}.$$

Cette formule subsistera encore pour $n=0$, en y remplaçant X'_{-1} par zéro ; on aura également $X'_0=0$, car X_0 est une constante.

Changeant, dans la formule précédente, n en $n-1$, $n-2$, ..., et ajoutant les résultats, il viendra

$$\sum_0^n (2k+1)X_k = \sum_0^n (X'_{k+1}-X'_{k-1}) = X'_{n+1}+X'_n.$$

284. L'intégrale (6) deviendra donc

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1}\Phi(x,\mu)(X'_{n+1}+X'_n)\,dx\,d\mu. \tag{12}$$

Or, si l'on admet : 1° que, pour chaque valeur de μ prise dans l'intervalle de 0 à 2π, la fonction $\Phi(x,\mu)$ n'ait qu'une variation bornée entre -1 et $+1$; 2° que, pour ces diverses

valeurs de μ, $\Phi(1-\varepsilon, \mu)$ tende uniformément vers sa limite $\Phi(1-0, \mu)$ lorsque la quantité positive ε décroît indéfiniment, on aura (268)

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(x, \mu)(X'_{n+1} + X'_n)\, dx = 2\Phi(1-0, \mu) + R_\mu,$$

R_μ désignant un reste qui tend uniformément vers zéro pour $n = \infty$.

L'intégrale (6) se réduira donc à

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 2[\Phi(1-0, \mu) + R_\mu]\, d\mu,$$

et si n tend vers ∞, R_μ tendant uniformément vers zéro, son intégrale $\int_0^{2\pi} R_\mu\, d\mu$ tendra vers zéro. Il viendra donc

$$Y'_0 + \ldots + Y'_n + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(1-0, \mu)\, d\mu.$$

285. Cela posé, si la fonction $f(\theta, \varphi) = \Phi(x, \mu)$ est continue aux environs du point (θ', φ'), $\Phi(1-\varepsilon, \mu)$, qui représente la valeur de la fonction $f(\theta, \varphi)$ pour un point infiniment voisin de (θ', φ'), convergera uniformément, quel que soit μ, vers la valeur constante $f(\theta', \varphi')$. On aura donc

$$Y'_0 + \ldots + Y'_n + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta', \varphi')\, d\mu = f(\theta', \varphi').$$

On arrive donc à ce résultat :

Le développement (4) *d'une fonction arbitraire $f(\theta, \varphi)$ en série de Laplace est applicable pour tout point de la sphère (θ', φ'), tel : 1° que la fonction f soit continue aux environs de ce point; 2° que sa variation soit bornée le long de tout grand cercle qui passe par ce point.*

D'ailleurs il est clair que ce développement sera unifor-

mément convergent sur toute région de la sphère où ces deux conditions seront satisfaites.

286. Dans le cas particulier où la fonction f ne dépend pas de ψ, la formule (5) deviendra

$$Y'_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n \sin\theta \, d\theta \, d\psi.$$

Or P_n, étant une fonction entière de

$$\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\psi - \psi'),$$

pourra être mis sous la forme

$$k_0 + k_1 \cos(\psi - \psi') + \ldots + k_n \cos n(\psi - \psi'),$$

$k_0, k_1, \ldots, k_n$ étant des fonctions entières de $\cos\theta \cos\theta'$ et $\sin\theta \sin\theta'$. Intégrant par rapport à ψ, tous les termes donneront une intégrale nulle, sauf le premier, dont l'intégrale est $2\pi k_0$. On aura donc

$$Y'_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) k_0 \sin\theta \, d\theta,$$

expression indépendante de ψ'.

Donc Y'_n, qui est une fonction entière et homogène de degré n en $\cos\theta'$, $\sin\theta' \cos\psi'$, $\sin\theta' \sin\psi'$, se réduira à une fonction entière de $\cos\theta'$ seulement, lorsqu'on aura tenu compte de la relation

$$(\sin\theta' \sin\psi')^2 + (\sin\theta' \cos\psi')^2 = 1 - \cos^2\theta'.$$

Cette fonction sera évidemment de la forme

$$a_n \cos^n\theta' + a_{n-2} \cos^{n-2}\theta' + \ldots;$$

par suite, Y_n sera de la forme

$$a_n \cos^n\theta + a_{n-2} \cos^{n-2}\theta + \ldots.$$

Cette fonction doit d'ailleurs satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2 Y_n}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dY_n}{d\theta} + n(n+1) Y_n = 0,$$

qui se déduit de (2) en exprimant que Y_n est indépendant de ψ. Transformons cette équation en prenant pour nouvelle variable la quantité $\cos\theta = x$; il viendra

$$\frac{dY_n}{d\theta} = \frac{dY_n}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dY_n}{dx},$$

$$\frac{d^2 Y_n}{d\theta^2} = -\cos\theta \frac{dY_n}{dx} - \sin\theta \frac{d^2 Y_n}{dx^2}\frac{dx}{d\theta} = -\cos\theta \frac{dY_n}{dx} + \sin^2\theta \frac{d^2 Y_n}{dx^2}.$$

Substituant ces valeurs et remplaçant, en outre, $\cos\theta$, $\sin^2\theta$ par x, $1 - x^2$, il viendra

$$(1 - x^2)\frac{d^2 Y_n}{dx^2} - 2x \frac{dY_n}{dx} + n(n+1) Y_n = 0.$$

Substituons dans cette équation la valeur de Y_n,

$$Y_n = a_n x^n + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots,$$

il viendra, en égalant à zéro le coefficient du terme en x^{n-2k},

$$\begin{aligned}(n - 2k + 2)(n - 2k + 1) a_{n-2k+2} \\ - (n - 2k)(n - 2k - 1) a_{n-2k} \\ - 2(n - 2k) a_{n-2k} + n(n+1) a_{n-2k} = 0.\end{aligned}$$

Cette équation détermine le rapport de deux coefficients successifs a_{n-2k+2} et a_{n-2k}.

Le polynome Y_n, défini par les conditions précédentes, est donc déterminé à un facteur constant près. Or on sait que le polynome $X_n(x) = P_n$ satisfait à ces conditions. On aura donc

$$Y_n = A_n P_n,$$

A_n désignant un facteur constant.

Le développement de la fonction $f(\theta)$ en fonctions de

Laplace prendra donc la forme

$$f(\theta) = A_0 P_0 + A_1 P_1 + \ldots + A_n P_n + \ldots.$$

En prenant x pour variable et posant

$$f(\theta) = F(x),$$

il viendra

$$(13) \qquad F(x) = A_0 X_0 + A_1 X_1 + \ldots + A_u X_n + \ldots,$$

Ce développement sera valable dans l'intervalle de $x = -1$ à $x = 1$, correspondant à l'intervalle de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ (pourvu que la fonction à développer n'ait qu'une variation bornée dans cet intervalle).

287. La nature du développement étant établie par ce qui précède, on obtiendra aisément les coefficients. Multiplions l'équation (13) par X_n et intégrons de -1 à $+1$. On aura, si $m \gtrless n$,

$$\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, dx = 0.$$

Soit, en effet, pour fixer les idées, $n > m$; X_m étant un polynome de degré inférieur à X_n, on sait (**125**) que l'intégrale ci-dessus sera nulle.

L'équation intégrée se réduira donc à

$$\int_{-1}^{+1} F(x) X_n \, dx = A_n \int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx$$

et déterminera le coefficient A_n.

288. On peut aisément calculer, au moyen de l'intégration par parties, la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2 \, dx = \frac{1}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx.$$

Posons en effet, pour abréger, $(x^2-1)^n = u$. On trouvera,

par une suite d'intégrations par parties,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} & u^{(n)} u^{(n)}\, dx \\ &= [u^{(n-1)} u^{(n)} - u^{(n-2)} u^{(n+1)} + \ldots + (-1)^{n-1} u u^{(2n-1)}]_{-1}^{+1} \\ &\quad + (-1)^n \int_{-1}^{+1} u u^{(2n)}\, dx,\end{aligned}$$

et comme chacun des termes intégrés s'annule aux deux limites, il vient simplement

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx &= \frac{1}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2}(-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^n}\, dx \\ &= \frac{(-1)^n\, 1.2.3\ldots 2n}{2^{2n}(1.2\ldots n)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n\, dx.\end{aligned}$$

Mais, si l'on pose

$$x = 2z - 1,$$

il viendra

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n\, dx &= (-1)^n 2^{2n+1} \int_0^1 z^n (1-z)^n\, dz \\ &= (-1)^n 2^{2n+1} \mathrm{B}(n+1, n+1) \\ &= (-1)^n 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \\ &= (-1)^n 2^{2n+1} \frac{(1.2\ldots n)^2}{1.2\ldots(2n+1)},\end{aligned}$$

d'où

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

289. Le développement d'une fonction $F(x)$ suivant les polynomes X_n, auquel nous venons d'arriver, est un cas particulier d'une classe de développements plus générale, qu'on peut obtenir de la manière suivante :

Considérons l'intégrale définie

$$I = \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x - z}.$$

Si l'on développe le dénominateur suivant les puissances décroissantes de x, on obtiendra une expression de la forme

$$\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{x^2}+\ldots+\frac{\alpha_m}{x^m}+\ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$\alpha_m=\int_a^b z^{m-1}f(z)\,dz.$$

Formons les réduites successives du développement de cette expression en fraction continue. Soit

$$Q_n=B_0+B_1x+\ldots+B_nx^n$$

le dénominateur d'une de ces réduites. Les rapports des coefficients B_0, B_1, ..., B_n seront déterminés (*Calcul différentiel*, n° 393) par les équations de condition

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 B_0+\alpha_2 B_1 \quad+\ldots+\alpha_{n+1}B_n=0,\\
&\alpha_2 B_0+\alpha_3 B_1 \quad+\ldots+\alpha_{n+2}B_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha_n B_0+\alpha_{n+1}B_1+\ldots+\alpha_{2n}\; B_n=0,
\end{aligned}$$

et, pour qu'il existe effectivement une réduite dont le dénominateur soit d'ordre n en x, il faut et il suffit que ces équations déterminent complètement lesdits rapports.

Cette condition sera toujours satisfaite si $f(z)$ ne change pas de signe entre a et b. En effet, si nous remplaçons les quantités α par leurs valeurs, les équations précédentes deviennent

$$\begin{aligned}
0&=\int_a^b f(z)\,dz[B_0 \quad+B_1z\;+\ldots+B_nz^n] &&=\int_a^b Q_n(z)f(z)\,dz,\\
0&=\int_a^b f(z)\,dz[B_0z \quad+B_1z^2+\ldots+B_nz^{n+1}] &&=\int_a^b zQ_n(z)f(z)\,dz,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
0&=\int_a^b f(z)\,dz[B_0z^{n-1}+B_1z^n+\ldots+B_nz^{2n-1}]&&=\int_a^b z^{n-1}Q_n(z)f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Ajoutons ensemble ces équations multipliées par des constantes arbitraires, nous obtiendrons la suivante, qui les résume toutes :

$$(14) \qquad 0 = \int_a^b \varpi(z) Q_n(z) f(z)\, dz,$$

$\varpi(z)$ désignant un polynome arbitraire de degré $< n$.

Cela posé, soient Q et Q′ deux polynomes de degré n qui satisfassent à cette condition. Tout polynome $\lambda Q + \lambda' Q'$, où λ et λ' sont des constantes arbitraires, y satisfera également. Or on peut déterminer le rapport $\frac{\lambda'}{\lambda}$ de manière à annuler dans ce polynome le coefficient de z^n. Posant alors en particulier $\varpi(z) = \lambda Q + \lambda' Q'$, il viendra

$$\int_a^b (\lambda Q + \lambda' Q')^2 f(z)\, dz = 0.$$

Or cette intégrale a tous ses éléments de même signe; elle ne peut donc s'annuler que s'ils sont tous nuls, d'où

$$\lambda Q + \lambda' Q' = 0.$$

Les deux polynomes Q et Q′ sont donc égaux à un facteur constant près.

290. L'équation $Q_n(z) = 0$ a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre a et b. En effet, si elle admettait une racine réelle c hors de cet intervalle, ou une racine double α, ou un couple de racines imaginaires $\alpha \pm \beta i$, on aurait

$$Q_n(z) = MN,$$

M désignant un facteur de la forme $z - c$, ou $(z - \alpha)^2$, ou $(z - \alpha)^2 + \beta^2$, et N un polynome de degré $< n$. Posant $\varpi(z) = N$ dans l'équation (14), il viendrait

$$0 = \int_a^b MN^2 f(z)\, dz,$$

résultat absurde, car l'intégrale a tous ses éléments de même signe.

291. Soit maintenant $F(z)$ une fonction quelconque de z; proposons-nous de la développer en une série de la forme

$$F(z) = A_0 Q_0(z) + A_1 Q_1(z) + \ldots + A_n Q_n(z) + \ldots$$

[$Q_0(z)$ désignant une constante, égale à 1, par exemple].

Pour déterminer un coefficient quelconque, tel que A_n, multiplions l'équation précédente par $Q_n(z) f(z)$ et intégrons entre a et b. On aura

$$\int_a^b Q_m(z) Q_n(z) f(z)\, dz = 0 \quad \text{si} \quad (m \gtrless n).$$

En effet, soit, par exemple, $m < n$. Cette équation sera un cas particulier de (14), obtenu en posant

$$\varpi(z) = Q_m(z).$$

L'équation intégrale se réduira donc à

$$\int_a^b Q_n(z) f(z) F(z)\, dz = A_n \int_a^b Q_n^2(z) f(z)\, dz$$

et déterminera A_n.

On doit toutefois remarquer que cette analyse n'établit pas la légitimité du développement, laquelle restera à démontrer dans chaque cas.

292. Si nous posons en particulier $f(x) = 1$, $a = -1$, $b = 1$, l'équation (14) se réduit à

$$\int_{-1}^{1} \varpi(z) Q_n(z)\, dz = 0.$$

Or on sait que les polynomes X_n satisfont à cette équation.

Elle détermine d'ailleurs $Q_n(z)$ à un facteur constant près. On a donc ce résultat :

Les polynomes X_n *sont, à des facteurs constants près, les dénominateurs des réduites de l'intégrale*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dz}{x-z} = \log \frac{x+1}{x-1}.$$

CHAPITRE VI.

INTÉGRALES COMPLEXES.

I. — Intégrales des fonctions monodromes.

293. Soit $f(z)$ une fonction analytique de la variable complexe z. Si cette variable, partant d'une valeur initiale donnée, décrit une ligne rectifiable L, on pourra suivre la variation de $f(z)$ tout le long de cette ligne, pourvu qu'on ne soit pas arrêté par la rencontre d'un point critique.

Nous avons donné, dans ce cas, la définition de l'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ (t. I, n° 195).

Mais cette définition suppose essentiellement l'absence de point critique. On admettait donc que tout le long de la ligne L la fonction $f(z)$ reste continue ainsi que sa dérivée.

Nous continuerons à poser en principe que, sur tout le parcours de la ligne d'intégration (ses extrémités exceptées), il ne doit exister aucun point critique; mais nous admettrons que ses extrémités a et b puissent être critiques.

Soient, dans ce cas, $a+\varepsilon$ un point de la ligne L infiniment voisin du point a; $b-\varepsilon'$ un point de cette ligne infiniment voisin du point b; L_1 la partie de L comprise entre les deux points $a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon'$. Nous définirons l'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ par la formule

$$\int_L f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon=0,\ \varepsilon'=0} \int_{L_1} f(z)\,dz,$$

à la condition que le second membre ait une limite déterminée.

De même, supposons que la ligne L s'étende jusqu'à l'infini. Prenons sur cette ligne un point p, et soit L_1 la portion de L comprise entre a et p. On pourra déterminer, pour chaque position du point p, l'intégrale

$$\int_{L_1} f(z)\,dz,$$

et, si cette expression tend vers une limite déterminée lorsque le point p s'éloigne à l'infini en suivant la ligne L, nous définirons l'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ par l'équation

$$\int_L f(z)\,dz = \lim \int_{L_1} f(z)\,dz.$$

294. Supposons, par exemple, que, la variable z étant assujettie à la seule restriction de rester dans l'intérieur d'un contour C, la fonction $f(z)$ n'admette dans ce domaine qu'un seul point critique b, déterminé de position. Admettons, en outre, que, lorsque z tend vers b, de telle sorte qu'aux environs de ce point l'argument de $z-b$ reste compris entre deux nombres fixes λ_0 et λ_1, on ait constamment

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{|z-b|^\alpha},$$

M désignant une constante et α un exposant positif <1.

Soit L une ligne quelconque intérieure à C et partant d'un point donné a pour aboutir à b, de telle sorte que, dans la portion de cette ligne infiniment voisine de b, l'argument de $z-b$ reste compris entre λ_0 et λ_1. *L'intégrale*

$$\int_L f(z)\,dz$$

aura une valeur déterminée et indépendante de la ligne particulière choisie pour L.

En effet, supposons d'abord que, dans le voisinage de b, on ait pris pour L une ligne droite L_0 faisant l'angle φ_0 avec l'axe des x. On aura sur cette ligne

$$z = b + \rho(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0),$$

φ_0 restant constant et ρ tendant vers zéro.

Soient z_0, z_1 deux points de cette ligne, ρ_0, ρ_1 les deux valeurs correspondantes de ρ. On aura

$$\int_{z_0 z_1} f(z)\,dz = \int_{\rho_0}^{\rho_1} f(z)(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)\,d\rho.$$

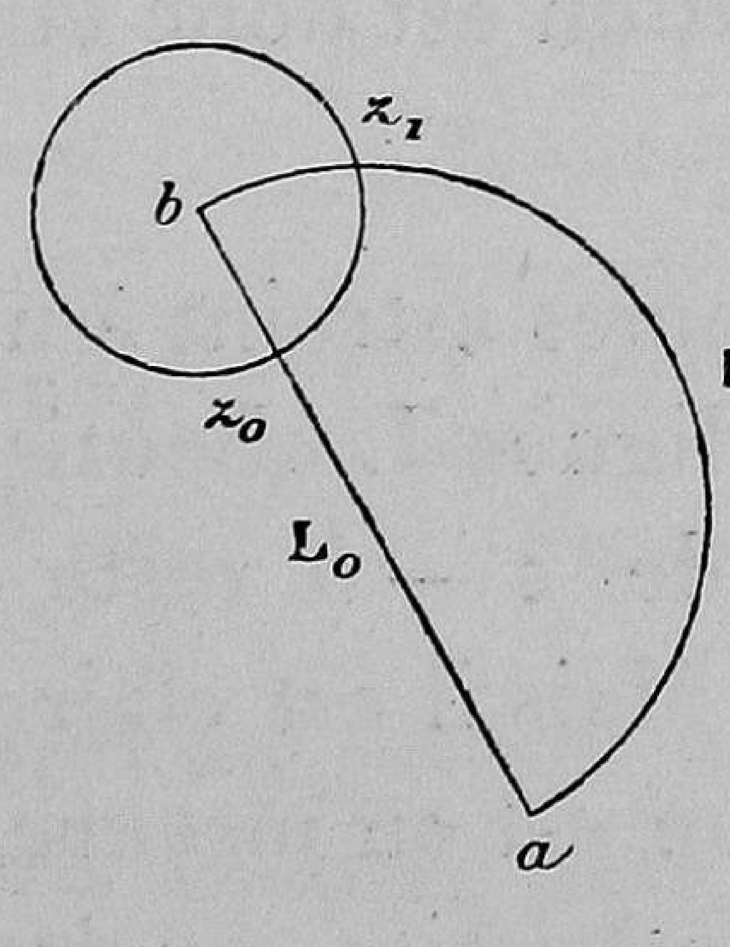
Cette intégrale tend vers zéro avec ρ_0 et ρ_1; car, d'après nos hypothèses, son module ne peut surpasser

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{\mathrm{M}}{\rho^\alpha}\,d\rho = \frac{\mathrm{M}}{1-\alpha}(\rho_1^{1-\alpha} - \rho_0^{1-\alpha}),$$

quantité infiniment petite. Donc $\int_{L_0} f(z)\,dz$ a une valeur déterminée.

Soit maintenant L_1 une autre ligne arbitraire issue de a et aboutissant à b. Traçons autour du point b comme centre

Fig. 29.



un cercle de rayon ρ infiniment petit. Soient $z_0 = (\rho, \varphi_0)$ et $z_1 = (\rho, \varphi_1)$ ses points d'intersection avec L_0 et L_1 (*fig.* 29).

Les deux lignes d'intégration az_0z_1 et az_1 étant évidemment

équivalentes, on aura

$$\int_{az_1} f(z)\,dz = \int_{az_0} f(z)\,dz + \int_{z_0 z_1} f(z)\,dz.$$

Faisons tendre ρ vers zéro. L'intégrale $\int_{az_0}$ aura pour limite $\int_{L_0}$; et l'intégrale suivant l'arc de cercle $z_0 z_1$ tendra vers zéro. On a, en effet, sur cette ligne

$$z = b + \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

ρ étant constant, et φ variant de φ_0 à φ_1. Donc

$$(1) \qquad \int_{z_0 z_1} f(z)\,dz = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(z)\,\rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Le module de cette intégrale a pour limite supérieure

$$\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{M}{\rho^\alpha}\rho\,d\varphi\right| = M\rho^{1-\alpha}|\varphi_1 - \varphi_0| \leqq M\rho^{1-\alpha}(\lambda_1 - \lambda_0),$$

quantité infiniment petite.

Donc l'intégrale $\int_{az_1}$ tend vers une limite déterminée, égale à $\int_{L_0}$. D'ailleurs cette limite représente, par définition, l'intégrale $\int_{L_1}$. Notre proposition est donc établie.

295. Nous nous sommes astreint à ne considérer dans ce qui précède, parmi les lignes L aboutissant au point b, que celles où l'argument de $z - b$ reste compris entre deux nombres fixes λ_0 et λ_1. Mais il est clair que cette restriction pourra être levée si l'on est en mesure d'établir que l'intégrale (1) reste infiniment petite, quels que puissent être φ_0 et φ_1.

Cette circonstance se présentera si la fonction $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = (z-b)^{-\alpha}\psi(z),$$

$\psi(z)$ étant monodrome et bornée dans l'intérieur de C [M désignera, dans ce cas, le maximum de $|\psi(z)|$].

Soit en effet

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2k\pi + r,$$

r étant $< 2\pi$. L'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(z)\,\rho(-\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi$$

peut se décomposer dans la somme des suivantes :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} + \int_{\varphi_0+2\pi}^{\varphi_0+4\pi} + \ldots + \int_{\varphi_0+2k\pi}^{\varphi_0+2k\pi+r}.$$

Or, lorsque z décrit le cercle, $f(z)$ se reproduit, multiplié par le facteur $e^{-2\alpha\pi i}$. Si donc on désigne par I l'intégrale

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2k\pi},$$

on aura

$$\int_{\varphi_0+2\pi}^{\varphi_0+4\pi} = e^{-2\alpha\pi i}\,\mathrm{I}, \quad \ldots, \quad \int_{\varphi_0+2m\pi}^{\varphi_0+2(m+1)\pi} = e^{-2m\alpha\pi i}\,\mathrm{I}, \quad \ldots,$$

et par suite

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} = \mathrm{I}(1 + e^{-2\alpha\pi i} + \ldots + e^{-2(k-1)\alpha\pi i}) + \int_{\varphi_0+2k\pi}^{\varphi_0+2k\pi+r}$$
$$= \frac{e^{-2k\alpha\pi i} - 1}{e^{-2\alpha\pi i} - 1}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} + \int_{\varphi_0+2k\pi}^{\varphi_0+2k\pi+r}.$$

Or les deux intégrales du second membre ont un module moindre que $\mathrm{M}\rho^{1-\alpha}2\pi$. D'autre part $|e^{-2k\alpha\pi i} - 1) \overline{\overline{<}}\, 2$. Donc

$$\left|\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\right| \overline{\overline{<}} \left(\frac{2}{|e^{-2\alpha\pi i} - 1|} + 1\right)\mathrm{M}\rho^{1-\alpha}2\pi,$$

quantité infiniment petite.

296. On peut formuler des propositions toutes semblables aux précédentes pour les intégrales prises suivant des lignes qui s'étendent jusqu'à l'infini.

Soit $f(z)$ une fonction analytique n'ayant aucun point critique dans la région du plan extérieure à un contour donné C, et telle que pour toutes les valeurs de z dont le module est suffisamment grand, et l'argument compris entre deux nombres fixes λ_0 et λ_1, on ait constamment

$$|f(z)| < \frac{M}{|z^\alpha|},$$

M étant une constante et α un exposant positif > 1.

Soit L une ligne quelconque extérieure à C partant d'un point donné a pour aboutir à l'infini, de telle sorte que, lorsque z parcourt cette ligne, son argument finisse par rester compris entre λ_0 et λ_1.

L'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ *aura une valeur déterminée et indépendante du choix de la ligne* L.

Enfin la restriction que l'argument de z reste compris entre deux limites fixes pourra être levée, si l'on a

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{z^\alpha},$$

$\psi(z)$ restant monodrome et bornée à l'extérieur de C.

Soit, en effet, b un point arbitrairement choisi dans l'intérieur de C. Posons $z = \frac{1}{u-b}$. Lorsque z décrit C, la nouvelle variable u décrit un contour correspondant Γ. Lorsque z se meut en dehors de C, u décrit l'intérieur de Γ; il tend vers b lorsque z tend vers ∞; enfin, si l'argument de z est compris entre λ_0 et λ_1, celui de $u-b$, qui lui est égal et contraire, sera compris entre les deux nombres $-\lambda_0$ et $-\lambda_1$.

Cela posé, faisons décrire à z une ligne quelconque L et à u une ligne correspondante Λ; on aura

$$\int_L f(z)\,dz = -\int_\Lambda f\left(\frac{1}{u-b}\right)\frac{du}{(u-b)^2},$$

et la première intégrale tendra vers une valeur déterminée lorsque L s'allonge jusqu'à l'infini, si la seconde tend vers une valeur déterminée lorsque Λ s'allonge de telle sorte que son extrémité se rapproche de b. C'est ce qui aura lieu en effet, en vertu des théorèmes précédemment démontrés, car, si l'on a

$$|f(z)| < \frac{M}{|z^\alpha|}, \qquad \alpha > 1,$$

on en déduit

$$\left| f\left(\frac{1}{u-b}\right)\frac{1}{(u-b)^2}\right| < \frac{M}{|u-b|^{2-\alpha}}, \qquad 2-\alpha < 1,$$

et si

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{z^\alpha}, \qquad \alpha > 1,$$

on aura

$$f\left(\frac{1}{u-b}\right)\frac{1}{(u-b)^2} = \frac{\psi\left(\frac{1}{u-b}\right)}{(u-b)^{2-\alpha}}, \qquad 2-\alpha < 1,$$

ψ étant bornée et monodrome dans Γ.

297. On peut compléter les résultats ci-dessus par la remarque suivante, qui nous sera souvent utile :

Soit $f(z)$ une fonction de z telle que $(z-b)f(z)$ tende uniformément vers une limite fixe M lorsque $z-b$ tend vers zéro (ou vers ∞), pour toutes les valeurs de son argument. L'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise sur un arc de cercle de rayon ρ ayant b pour centre et correspondant à un angle au centre $\varphi_1 - \varphi_0$, tendra vers $i\text{M}(\varphi_1 - \varphi_0)$ lorsque ρ tendra vers zéro (ou vers ∞).

On a en effet, sur le cercle considéré,

$$f(z) = \frac{M+\delta}{z-b},$$

δ étant un infiniment petit ; et d'autre part

$$z - b = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$dz = \rho(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi = i(z-b)\,d\varphi.$$

Donc

$$\int f(z)\,dz = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (\mathrm{M} + \delta) i\,d\varphi.$$

Le premier terme a pour valeur $i\mathrm{M}(\varphi_1 - \varphi_0)$ et le second a pour limite zéro ; car son module ne peut surpasser $\eta\,|\varphi_1 - \varphi_0|$, η étant un infiniment petit, égal au maximum de $|\delta|$.

298. Soit $f(z)$ une fonction monodrome dans tout le plan (ou tout au moins dans la région du plan que nous nous bornerons à considérer). Si elle présente des points critiques, ceux-ci auront une position fixe et resteront critiques quel que soit le chemin suivi pour les atteindre (t. I, n° 351).

Ces points pourront être de nature très variée, comme le montrent les exemples suivants.

Nous donnerons le nom de *pôles* aux points critiques de la fonction $f(z)$ qui sont des points ordinaires pour $\frac{1}{f(z)}$. Tels seraient, par exemple, les points critiques d'une fonction rationnelle de z.

Aux environs d'un semblable point a, $\frac{1}{f(z)}$ est développable par la série de Taylor. En outre, le terme constant doit s'annuler, car autrement le point ne serait pas critique : on aura donc, aux environs de ce point,

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{C}_m(z-a)^m + \mathrm{C}_{m+1}(z-a)^{m+1} + \ldots}$$

et, en effectuant la division,

$$f(z) = \frac{\mathrm{A}_m}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_1}{z-a} + \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une série de puissances entières et positives de $z - a$.

Le nombre m, nécessairement entier, se nomme l'*ordre de multiplicité* du pôle a.

La fonction $f(z)$ devient infinie au pôle $z = a$; mais elle reste évidemment finie et continue, ainsi que sa dérivée, pour toute autre valeur de z suffisamment voisine de a. Les pôles sont donc des points critiques isolés.

299. On donne le nom de *points singuliers essentiels* aux points critiques des fonctions monodromes autres que les pôles.

Pour en donner un exemple, considérons la fonction

$$u = e^{\frac{1}{z-a}}.$$

Elle est toujours finie et déterminée, ainsi que ses dérivées, sauf pour $z = a$. En ce point elle devient indéterminée. En effet, soient u_0 un nombre quelconque autre que zéro, $\log u_0$ un de ses logarithmes choisi à volonté. L'équation

$$e^{\frac{1}{z-a}} = u_0$$

a une infinité de racines, données par la formule

$$\frac{1}{z-a} = \log u_0 + 2k\pi i,$$

$$z = a + \frac{1}{\log u_0 + 2k\pi i}.$$

Comme on peut prendre k aussi grand qu'on veut, on voit qu'il existe des points aussi rapprochés qu'on voudra de a et pour lesquels la fonction prend la valeur donnée u_0 choisie arbitrairement.

Soit d'ailleurs

$$z = a + \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

on aura

$$u = e^{\frac{1}{\rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi)}.$$

Si z tend vers a, ρ tendra vers zéro. Si donc $\cos\varphi$ reste positif et plus grand qu'un nombre fixe λ, le module de u,

$e^{\frac{1}{\rho}\cos\varphi}$, croîtra indéfiniment. Il tendra au contraire vers zéro si $\cos\varphi$ reste $< -\lambda$.

300. Passons à la fonction

$$u = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}.$$

Elle devient infinie pour toute valeur de z de la forme $\frac{1}{k\pi}$, k étant un entier. En outre, elle devient indéterminée pour $z = 0$.

Les points $z = \frac{1}{k\pi}$ sont des pôles. Posons, en effet,

$$z = \frac{1}{k\pi} + h;$$

il viendra

$$\frac{1}{z} = \frac{k\pi}{1 + k\pi h} = k\pi - k^2\pi^2 h + \ldots,$$

$$\frac{1}{u} = \sin\frac{1}{z} = (-1)^{k-1}\sin(k^2\pi^2 h - \ldots),$$

expression développable suivant les puissances entières et positives de la quantité $h = z - \frac{1}{k\pi}$.

Le point critique $z = 0$ est d'une nature toute différente. Soient en effet u_0 un nombre quelconque autre que zéro, v l'une des racines de l'équation

$$\sin v = \frac{1}{u_0}.$$

L'équation

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} = u_0 = \frac{1}{\sin v}$$

aura une infinité de racines, données par les formules

$$z = \frac{1}{v + 2k\pi}, \qquad z = \frac{1}{-v + (2k+1)\pi}.$$

Parmi ces racines, il en existe qui sont plus rapprochées de zéro que toute quantité donnée.

Ce résultat rappelle celui que nous avions trouvé pour le point critique de l'exemple précédent. Mais nous devons signaler ici cette circonstance nouvelle que le point critique n'est plus isolé ; car tout cercle décrit de ce point comme centre renferme toujours une infinité de pôles, quelque petit que soit son rayon.

301. On formerait aisément des fonctions plus complexes, possédant une infinité de points critiques essentiels. Les points limites de cet ensemble seront de nouveaux points critiques essentiels, qui pourront eux-mêmes être en nombre infini, et ainsi de suite. On peut même, ainsi que nous allons le montrer, construire des fonctions douées de lignes critiques, dont tous les points soient critiques.

302. Soit L un arc de courbe continue ayant pour équation

$$z = \varphi(t) + i\psi(t),$$

où le paramètre t varie de t_0 à T.

Supposons que, dans cet intervalle, les fonctions φ et ψ admettent des dérivées, de telle sorte que la courbe ait une tangente en chaque point.

Soit $\frac{p}{q}$ l'une des fractions irréductibles moindres que $T - t_0$; et soit z_{pq} le point de L qui correspond à

$$t = t_0 + \frac{p}{q}.$$

Considérons l'expression

$$f(x) = \sum_{p,q} \frac{c_{pq}}{z_{pq} - z},$$

les coefficients c_{pq} désignant des constantes positives telles

que la série double

$$\Sigma c_{pq} \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty;\ q = 1, 2, \ldots, \infty)$$

ait une somme finie S.

La série $f(z)$ ainsi définie sera convergente et représentera une fonction uniforme de z, synectique aux environs de tout point non situé sur L.

Soient, en effet,

ζ une valeur particulière de z;
Δ la distance du point ζ à la ligne L;
δ une quantité quelconque moindre que Δ.

Pour toutes les valeurs de z, comprises dans un cercle de rayon $\Delta - \delta$ décrit autour de ζ, on aura

$$|z_{pq} - z| \overline{\overline{>}} \delta,$$

et les modules des termes de $f(z)$ seront au plus égaux à ceux de la série convergente

$$\sum \frac{c_{pq}}{\delta}.$$

La série $f(z)$ est donc absolument et uniformément convergente dans le cercle considéré.

Il en est de même de la série dérivée

$$f'(z \qquad \sum \frac{c_{pq}}{(z_{pq} - z)^2};$$

car les modules de ses termes sont moindres que les termes de la série convergente

$$\sum \frac{c_{pq}}{\delta^2}.$$

Donc $f(z)$ est synectique dans le cercle considéré.

Tous les points de L sont critiques pour cette fonction. Chacun d'eux est en effet un point limite de l'ensemble des points z_{pq}. Mais chacun de ceux-ci est critique, car nous

allons montrer que, si z s'approche indéfiniment de l'un de ces points, tel que z_{ik}, en suivant la normale à la ligne L, $f(z)$ tendra vers l'infini.

Supposons, en effet, les termes de la série $f(z)$ rangés dans un ordre déterminé. On pourra décomposer cette série en deux autres

$$\sum \frac{c_{\alpha\beta}}{z_{\alpha\beta} - z} + \sum \frac{c_{\gamma\delta}}{z_{\gamma\delta} - z},$$

la première formée des μ premiers termes de $f(z)$ et la seconde contenant tous les suivants.

L'entier μ est supposé assez grand pour que le terme $\frac{c_{ik}}{z_{ik} - z}$ figure dans la première somme.

Soit ε la distance des points z_{ik} et z. Le module de ce terme sera $\frac{c_{ik}}{\varepsilon}$.

Soit, en second lieu, η la plus courte distance du point z_{ik} aux autres points $z_{\alpha\beta}$; chacune des distances $|z_{\alpha\beta} - z|$ sera au moins égale à

$$|z_{\alpha\beta} - z_{ik}| - |z_{ik} - z| = \eta - \varepsilon.$$

La somme des modules des termes de la première somme, autres que celui considéré le premier, sera donc au plus égale à

$$\sum \frac{c_{\alpha\beta}}{\eta - \varepsilon} < \frac{S}{\eta - \varepsilon}.$$

Enfin chacune des distances $|z_{\gamma\delta} - z|$ sera au moins égale à ε; d'où

$$\left|\sum \frac{c_{\gamma\delta}}{z_{\gamma\delta} - z}\right| \leqq \sum \frac{c_{\gamma\delta}}{\varepsilon}.$$

On aura donc

$$|f(z)| \geqq \frac{c_{ik}}{\varepsilon} - \frac{S}{\eta - \varepsilon} - \sum \frac{c_{\gamma\delta}}{\varepsilon} \geqq \frac{1}{\varepsilon}\left(c_{ik} - \sum c_{\gamma\delta} - \frac{S\varepsilon}{\eta - \varepsilon}\right).$$

On pourra prendre μ assez grand, puis ε assez petit, pour

que $\Sigma c_{\gamma\delta}$, puis $\frac{S\varepsilon}{\eta-\varepsilon}$ deviennent aussi petits qu'on voudra. Le terme entre parenthèses tendra donc vers c_{ik} et $f(z)$ vers ∞ lorsque ε tend vers zéro.

303. Les fonctions non monodromes peuvent offrir des points critiques encore plus variés. Nous nous bornerons à signaler :

1° *Les points critiques algébriques* ou *branchements algébriques*. Ce sont les points a aux environs desquels chaque branche de la fonction est développable en série suivant les puissances entières et croissantes de $(z-a)^{\frac{1}{r}}$, r étant un entier (le développement pouvant d'ailleurs contenir au début des termes à exposants négatifs). Aux diverses valeurs du radical $(z-a)^{\frac{1}{r}}$ correspondront r branches de la fonction, qui forment un cycle et se permutent circulairement lorsque la variable tourne autour du point critique.

2° *Les points critiques logarithmiques* où les branches de la fonction admettent des développements de la forme précédente, mais complétés par l'adjonction d'un terme logarithmique $A\log(z-a)$. Une rotation de z autour du point a accroissant ce terme de la constante $A.2\pi i$, chaque cycle contiendra une infinité de branches.

3° Les points critiques où chaque branche de la fonction admet un développement de la forme

$$(z-a)^{\alpha}[A+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots],$$

α n'étant pas rationnel. Chaque cycle contiendra encore une infinité de branches correspondant aux diverses déterminations de $(z-a)^{\alpha}$.

304. Revenons aux points critiques isolés des fonctions monodromes. Aux environs d'un semblable point, la fonction admet un développement que nous allons établir, en

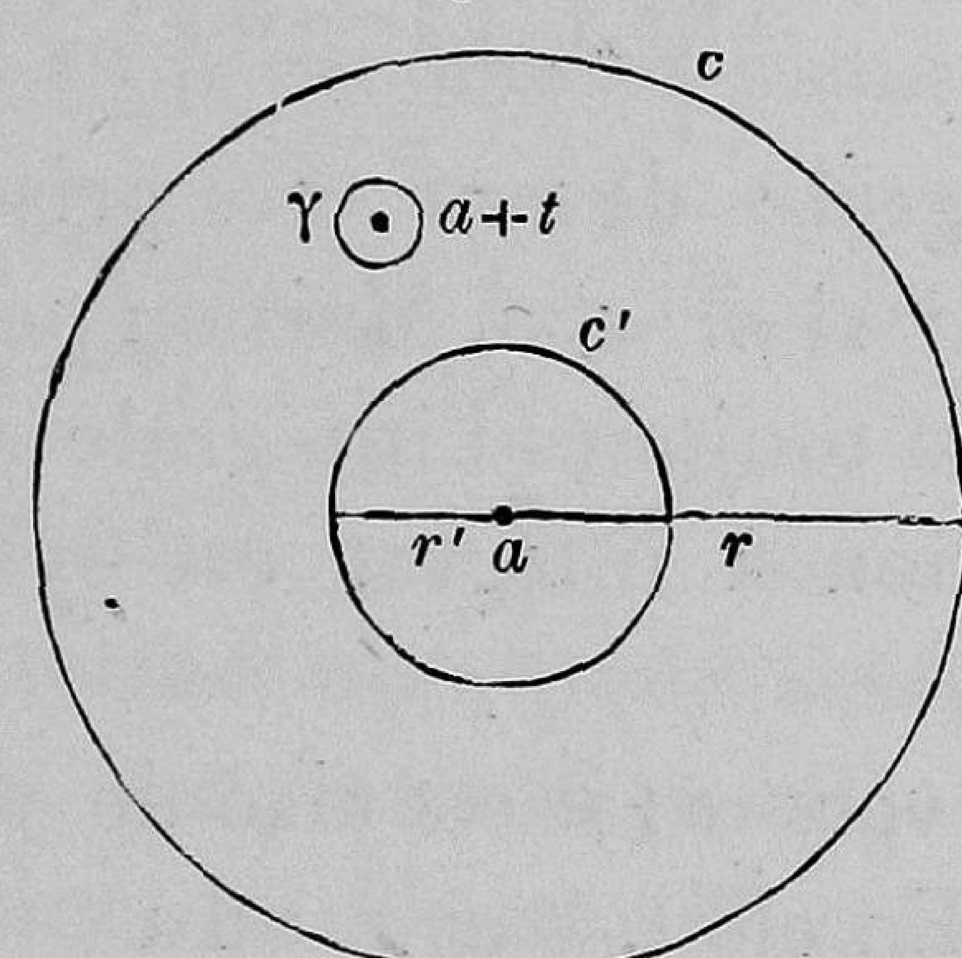
nous appuyant sur le lemme suivant, connu sous le nom de *théorème de Laurent :*

Soit $f(z)$ une fonction synectique dans la couronne circulaire comprise entre deux cercles c, c' de rayons r, r' ayant un centre commun a; et soit $a+t$ un point quelconque intérieur à cette couronne; $f(a+t)$ sera représentée par une série convergente de la forme

$$f(a+t) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \mathrm{A}_m t^m.$$

Soient, en effet, c et c' (*fig.* 30) les deux cercles qui li-

Fig. 30.



mitent la couronne; γ un cercle infiniment petit entourant le point $a+t$. On aura (t. I, n° 206)

$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz$$

ou, comme $f(z)$ est synectique entre les cercles c, c', γ,

$$f(a+t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)\,dz}{z-a-t} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{f(z)}{z-a-t}\,dz.$$

Dans la première intégrale, on peut écrire

$$\frac{1}{z-a-t} = \frac{1}{z-a} + \frac{t}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(z-a)^n} + \frac{t^n}{(z-a)^n(z-a-t)}$$

et, dans la seconde,

$$\frac{1}{z-a-t} = -\frac{1}{t} - \frac{z-a}{t^2} - \cdots - \frac{(z-a)^{n-1}}{t^n} - \frac{(z-a)^n}{t^n(z-a-t)}.$$

Substituant ces valeurs, il viendra

$$f(a+t) = \sum_{-n}^{n-1} \mathrm{A}_m t^m + \mathrm{R}_n + \mathrm{R}'_n,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{t^n f(z)\,dz}{(z-a)^n(z-a-t)}, \quad \mathrm{R}'_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{(z-a)^n f(z)\,dz}{t^n(z-a-t)},$$

$$\mathrm{A}_m = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{m+1}},$$

cette dernière intégrale devant être prise sur le cercle c si $m \geqq 0$, sur le cercle c' si $m < 0$. Mais on peut supprimer cette différence et prendre toujours l'intégrale sur le cercle extérieur c, car la fonction à intégrer est synectique entre les deux cercles.

Faisons tendre n vers ∞; il est aisé de voir que R_n et R'_n tendront vers zéro. En effet, sur c, on a

$$|z-a| = r > |t|,$$

et, en désignant par M le maximum de $|f(z)|$ sur le cercle c,

$$|\mathrm{R}_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{|t|^n \mathrm{M}}{r^n[r-|t|]} 2\pi r,$$

d'où

$$\lim \mathrm{R}_n = 0.$$

On a, au contraire, sur c'

$$|z-a| = r' < |t|,$$

et, en désignant par M' le maximum de $|f(z)|$ sur c',

$$|\mathrm{R}'_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{r'^n \mathrm{M}'}{|t|^n[|t|-r']} 2\pi r',$$

$$\lim \mathrm{R}'_n = 0.$$

On a donc, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$f(a+t)=\sum_{-\infty} A_m t^m.$$

305. Ce développement de $f(a+t)$ en série, suivant les puissances positives et négatives de t, ne peut d'ailleurs s'effectuer que d'une seule manière.

Supposons, en effet, qu'on ait obtenu, par un procédé quelconque, un autre développement

$$f(a+t)=\sum B_m t^m.$$

En le comparant au précédent, il viendra

$$\sum (B_m - A_m) t^m = 0.$$

Divisons cette identité par t^{n+1} et intégrons le long du cercle c. Chaque terme aura pour intégrale indéfinie une fonction rationnelle, qui reprend sa valeur primitive lorsque l'on revient au point de départ. Son intégrale définie est donc nulle. Il y a exception pour le terme en $\frac{1}{t}$, lequel a pour coefficient $B_n - A_n$ et pour intégrale indéfinie $(B_n - A_n)\log t$. Son intégrale le long du cercle sera $(B_n - A_n)\,2\pi i$. On aura donc

$$(B_n - A_n)2\pi i = 0, \qquad \text{d'où} \qquad B_n = A_n.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit n, les deux développements seront identiques.

306. On peut incidemment déduire du théorème de Laurent la conséquence suivante :

Série de Fourier. — *Soit $f(z)$ une fonction de z satisfaisant à la relation*

$$f(z+2\omega)=f(z)$$

et qui n'ait aucun point critique dans la bande comprise entre deux droites parallèles L, L′, *faisant avec l'axe des x un angle égal à l'argument de* 2ω. *On aura dans cette bande*

$$(2)\qquad f(z) = \frac{1}{2\omega}\int_l \left[1 + 2\sum_1^{\infty} \cos\frac{m\pi}{\omega}(\alpha - z)\right] f(\alpha)\,d\alpha,$$

l désignant une droite de longueur 2ω parallèle à L *et* L′, *et située arbitrairement dans la bande.*

Posons, en effet,

$$e^{\frac{\pi i z}{\omega}} = u, \qquad \text{d'où} \qquad z = \frac{\omega}{\pi i}\log u.$$

Lorsque z se déplace sur une parallèle quelconque aux droites L, L′, son affixe croît de la quantité $2\omega t$, t restant réel et variant de $-\infty$ à $+\infty$. Ce changement multiplie u par le facteur $e^{2\pi i t}$, quantité dont le module est 1 et l'argument $2\pi t$. La variable u, ayant son module constant, tonrnera sur un cercle ayant son centre à l'origine, et fera une révolution complète chaque fois que z aura crû de 2ω.

A chaque valeur de z contenue dans la bande située entre L et L′ correspondra évidemment pour u un point de la couronne circulaire comprise entre les cercles C et C′, respectivement correspondants à L et à L′. Chaque point de la couronne correspondra d'ailleurs à une infinité de points z, différant les uns des autres de multiples de 2ω; mais à tous ces points correspond une même valeur de $f(z)$, en vertu de la périodicité admise. Donc $f(z)$, regardé comme fonction de u, sera monodrome dans la couronne considérée. Il est d'ailleurs évident qu'elle n'y a pas de point critique. On aura donc, en appliquant le théorème de Laurent,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m u^m = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{\frac{m\pi i z}{\omega}},$$

A_m désignant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{u^{m+1}}\,du$$

prise le long d'un cercle arbitraire c concentrique à C, C′ et contenu dans la couronne.

Substituant à u sa valeur en z, cette intégrale se transforme évidemment en

$$\frac{1}{2\omega}\int_l f(z)\,e^{-\frac{m\pi i z}{\omega}}\,dz,$$

l représentant un tronçon d'amplitude 2ω pris sur la droite correspondante à c.

On aura donc, en remplaçant la variable de sommation z par une autre lettre α, afin d'éviter la confusion,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\omega}\int_l f(\alpha)\,e^{-\frac{mi\pi\alpha}{\omega}}\,d\alpha\, e^{\frac{mi\pi z}{\omega}} \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_l \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{mi\pi}{\omega}(z-\alpha)}\, f(\alpha)\,d\alpha. \end{aligned}$$

Il ne restera plus, pour obtenir la formule (2), qu'à remplacer les exponentielles par leurs valeurs en sinus et cosinus.

Ce développement d'une fonction en série trigonométrique a déjà été établi au Chapitre V, mais dans des conditions toutes différentes. Il ne s'appliquait alors qu'aux valeurs réelles de la variable; en revanche, il laissait plus de latitude pour la nature de la fonction $f(z)$.

307. Soit maintenant a un point critique isolé d'une fonction monodrome $f(z)$. De a comme centre, on peut décrire un cercle c ne contenant aucun autre point critique. Soit $z = a + t$ un point quelconque autre que a pris dans ce cercle. On pourra tracer un cercle c' concentrique à c et auquel z soit extérieur. Entre ces deux cercles $f(z)$ sera

synectique, et l'on aura, en vertu du théorème de Laurent,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m t^m = \sum_{-\infty}^{\infty} A_m (z-a)^m,$$

ce développement restant convergent dans tout le cercle c (le point a excepté).

Si la série précédente est limitée du côté des puissances négatives, le point a sera un pôle; sinon, ce sera un point critique essentiel. La série peut également être limitée du côté des puissances positives. Dans l'un ou l'autre cas, on pourra généralement déterminer par des procédés directs (notamment par la méthode des coefficients indéterminés) les coefficients de la série, et spécialement celui du terme en $\frac{1}{z-a}$.

Ce dernier coefficient se nomme le *résidu* de $f(z)$ par rapport au point critique a. Il offre une importance particulière, résultant du théorème suivant :

308. Théorème. — *Soient $f(z)$ une fonction monodrome dans une certaine région du plan; k un contour fermé sans point multiple, tracé dans cette région et ne contenant dans son intérieur que des points critiques isolés $a, a', \ldots$. On aura*

$$\int_k f(z)\,dz = 2\pi i (A_{-1} + A'_{-1} + \ldots),$$

$A_{-1}, A'_{-1}, \ldots$ *désignant les résidus relatifs à ces points critiques, et l'intégrale étant prise dans le sens direct.*

Entourons, en effet, ces points critiques par des cercles infiniment petits $c, c', \ldots$. La fonction $f(z)$ étant synectique dans la région comprise entre ces cercles et le contour k, on aura (t. I, n° 205)

$$\int_k f(z)\,dz = \int_c f(z)\,dz + \int_{c'} f(z)\,dz + \ldots$$

Mais on a, aux environs du point a,

$$f(z) = \Sigma A_m (z-a)^m.$$

Intégrons cette série le long du cercle c. Chacun de ses termes aura pour intégrale indéfinie une fonction rationnelle de z et son intégrale définie sera nulle. Il y a exception pour le terme $A_{-1}(z-a)^{-1}$, dont l'intégrale indéfinie sera $A_{-1}\log(z-a)$, et l'intégrale définie $2\pi i A_{-1}$. On a donc

$$\int_c f(z)\,dz = 2\pi i A_{-1}.$$

On trouve de même

$$\int_{c'} f(z)\,dz = 2\pi i A'_{-1}, \qquad \ldots,$$

et, par suite,

$$\int_k f(z)\,dz = 2\pi i (A_{-1} + A'_{-1} + \ldots).$$

309. Ce théorème fournit une méthode féconde pour le calcul ou la transformation des intégrales définies.

Soit, par exemple, $f(z)$ une fonction jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle est monodrome et n'a d'autres points critiques que des pôles dans toute la région du plan située au-dessus de l'axe des x;

2° Si elle a des points critiques b, b', ... situés sur cet axe, ces points seront isolés, et $f(z)$ pourra, aux environs de l'un quelconque d'entre eux, tel que b, se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{B_1}{(z-b)^{\beta_1}} + \frac{B_2}{(z-b)^{\beta_2}} + \ldots + \rho,$$

β_1, β_2, ... étant des constantes réelles au moins égales à 1

et le reste ρ étant tel qu'on ait

$$\lim(z-b)\rho = 0, \qquad \text{pour} \qquad z = b;$$

3° Enfin elle peut également se mettre sous la forme

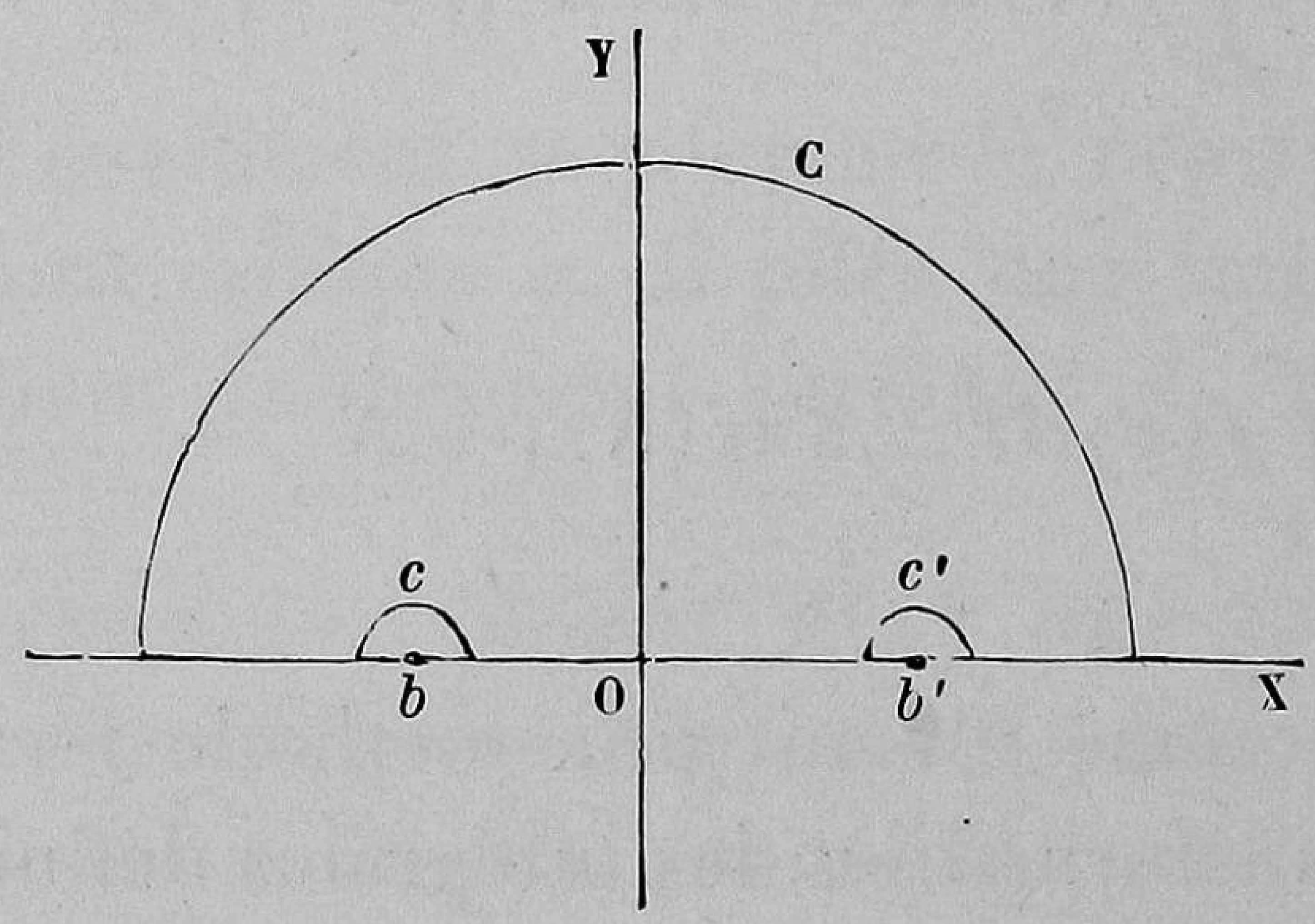
$$M_1 z^{\mu_1} + M_2 z^{\mu_2} + \ldots + \sigma,$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots$ étant au moins égaux à -1, et le reste σ étant tel qu'on ait

$$\lim z\sigma = 0, \qquad \text{pour} \qquad z = \infty.$$

Intégrons cette fonction le long d'un contour formé (*fig.* 31) : 1° d'un demi-cercle C de rayon infini R, ayant

Fig. 31.



pour centre l'origine et pour diamètre inférieur l'axe des x; 2° de ce diamètre, à l'exception des portions avoisinant les points critiques b, b', ... auxquelles on substituera des demi-cercles c, c', ..., décrits de ces points critiques comme centres, avec des rayons infiniment petits r, r', ...

L'intégrale prise suivant ce contour est égale (308) à $2\pi i\Sigma A$, ΣA représentant la somme des résidus relatifs aux points critiques contenus dans le contour.

Or cette intégrale se compose : 1° des intégrales $\int_C$, $\int_c$, $\int_{c'}$, ..., prises suivant les demi-cercles; 2° de l'intégrale $\int_L$, prise suivant les portions rectilignes du contour. On aura

donc

$$\int_L = 2\pi i \sum A - \int_c - \int_{c'} - \ldots - \int_C.$$

Cherchons ce que devient cette équation, lorsque R tend vers ∞ et r, r', ... vers zéro.

L'intégrale $\int_L$ a pour limite, par définition, la valeur principale de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, et, par suite, cette intégrale elle-même, si elle a une valeur définie et déterminée.

La somme ΣA s'étendra à tous les pôles situés au-dessus de l'axe des x. Chacun des termes qui la composent se calculera par un développement en série facile à effectuer.

Enfin les intégrales $\int_c$, $\int_{c'}$, ..., $\int_C$ sont aisées à calculer. On a, par exemple,

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c \left[\frac{B_1}{(z-b)^{\beta_1}} + \frac{B_2}{(z-b)^{\beta_2}} + \ldots + \rho\right] dz.$$

Or on a (297)

$$\int_c \rho\,dz = 0.$$

D'autre part, si $\beta_1 > 1$,

$$\int_c \frac{B_1\,dz}{(z-b)^{\beta_1}} = \left[\frac{B_1}{1-\beta_1}\,\frac{1}{(z-b)^{\beta_1-1}}\right]_{b-r}^{b+r}$$
$$= \frac{B_1}{1-\beta_1}\left(1 - e^{-\pi i(\beta_1-1)}\right)\frac{1}{r^{\beta_1-1}},$$

et si $\beta_1 = 1$,

$$\int_c \frac{B_1\,dz}{z-b} = [B_1 \log(z-b)]_{b-r}^{b+r} = -B_1 \pi i.$$

L'intégrale de ce terme sera donc nulle, si β_1 est un entier impair > 1 (car on aura, dans ce cas, $1 - e^{-\pi i(\beta_1-1)} = 0$); égale à une constante, si $\beta_1 = 1$, et, enfin, de la forme $\frac{K}{r^{\beta_1-1}}$ dans tous les autres cas.

On peut calculer de même l'intégrale de chacun des autres termes $\frac{B_2 dz}{(z-b)^{\beta_2}}, \ldots$. La somme de toutes ces intégrales se réduira à zéro ou à une constante, si toutes les quantités β_1, $\beta_2, \ldots$ sont des entiers impairs. Dans le cas contraire, il est clair que, en faisant tendre r vers zéro, l'intégrale $\int_c f(z)\,dz$ tendra vers ∞, et, par suite, la valeur principale de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ sera elle-même infinie ou indéterminée.

On peut calculer de même chacune des intégrales $\int_{c'}, \ldots$.

On a enfin

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C M_1(z^{\mu_1} + \ldots + \sigma)\,dz.$$

D'ailleurs (297),

$$\int_C \sigma\,dz = 0.$$

D'autre part, si $\mu_1 > -1$,

$$\int_C M_1 z^{\mu_1}\,dz = \left(\frac{M_1}{\mu_1+1} z^{\mu_1+1}\right)_R^{-R} = \frac{M_1}{\mu_1+1}\left(e^{\pi i(\mu_1+1)} - 1\right) R^{\mu_1+1},$$

et si $\mu_1 = -1$,

$$\int_C M_1 \frac{dz}{z} = (M_1 \log z)_R^{-R} = M_1 \pi i.$$

L'intégrale sera donc nulle si μ_1 est un entier impair > -1; constante, si $\mu_1 = -1$; de la forme KR^{μ_1+1}, dans tous les autres cas.

Donc $\int_C f(z)\,dz$ se réduira à zéro ou à une constante si μ_1, $\mu_2, \ldots$ sont des entiers impairs. Dans le cas contraire, elle tendra vers ∞ en même temps que R, et la valeur principale de $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$ sera infinie ou indéterminée.

310. Posons à titre d'exemple

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{1-z},$$

a étant compris entre 0 et 1.

Si

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

on aura par définition

$$z^{a-1} = \rho^{a-1}[\cos(a-1)\varphi + i\sin(a-1)\varphi].$$

Choisissons celle des branches de la fonction où φ est compris entre 0 et π.

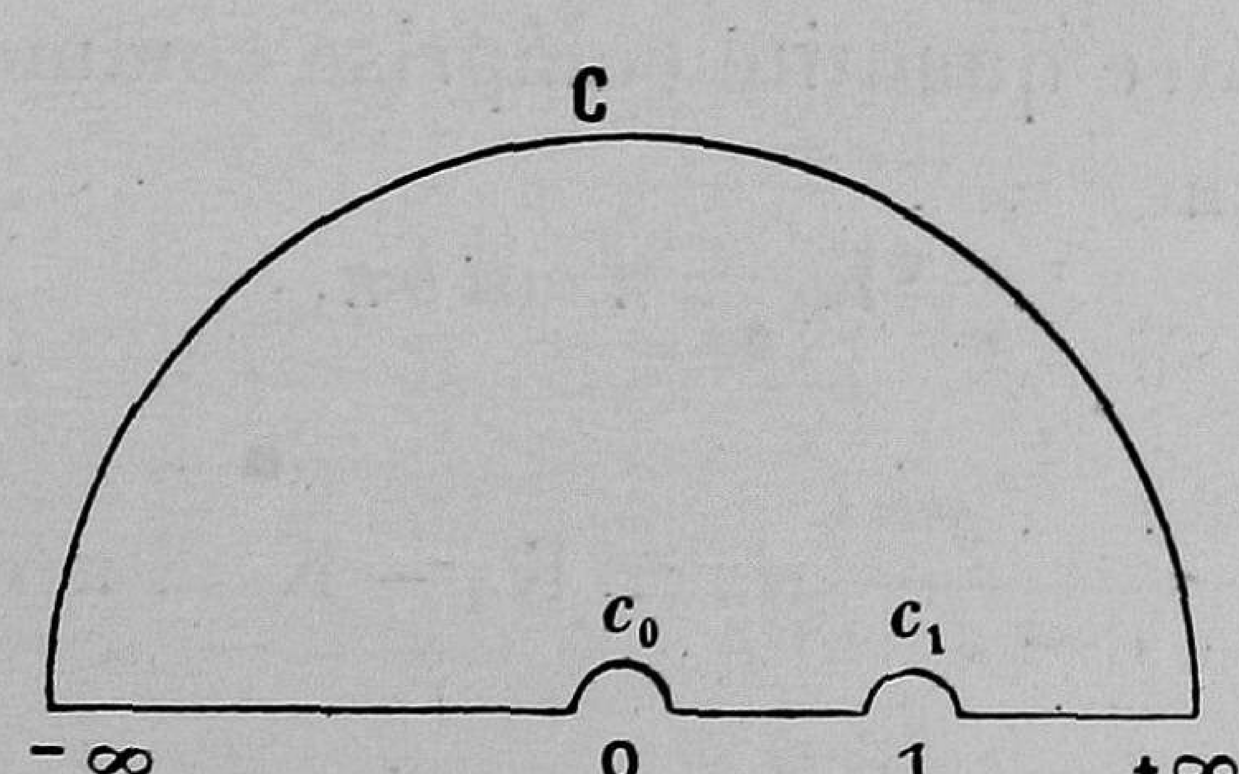
La fonction $f(z)$ ainsi définie satisfait aux conditions du n° 309; elle a deux points critiques, 0 et 1.

On aura donc (*fig.* 32)

$$\text{val. princ.} \int_{-\infty}^{\infty} fz\,dz = \left[\int_C + \int_{c_0} + \int_{c_1}\right] fz\,dz.$$

Or zfz tend vers zéro pour $z = 0$ et $z = \infty$; donc les intégrales suivant C et c_0 sont nulles.

Fig. 32.



Posant d'autre part $z = 1 + h$, on aura

$$fz = \frac{(1+h)^{a-1}}{h} = \frac{1}{h} + a - 1 + \ldots.$$

Donc le point 1 est un pôle, de résidu 1 et l'intégrale suivant c_1 sera $-\pi i$.

D'autre part, l'intégrale du premier membre se décompose en deux autres :

$$\int_{-\infty}^{0} \quad \text{et} \quad \int_{0}^{\infty}.$$

Dans la première, qui a une valeur déterminée, $z = -\rho$, $\varphi = \pi$,

$$\frac{z^{a-1}}{1-z}\,dz = \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho}(\cos a\pi + i \sin a\pi)\,d\rho$$

et ρ varie de $-\infty$ à zéro.

Si donc nous désignons par I l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho}\,d\rho$ et par K_a la valeur principale de la seconde $\int_0^\infty \frac{z^{a-1}}{1-z}\,dz$, laquelle est réelle, on aura

$$-(\cos a\pi + i \sin a\pi) I + K_a = -\pi i,$$

d'où, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires,

$$I = \int_0^\infty \frac{\rho^{a-1}}{1+\rho}\,d\rho = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$K_a = I \cos a\pi = \pi \cot a\pi.$$

Soit b une autre quantité comprise comme a entre 0 et 1. On aura de même

$$K_b = \pi \cot b\pi,$$

d'où

$$\text{val. princ.} \int_0^\infty \frac{z^{a-1} - z^{b-1}}{1-z}\,dz = K_a - K_b = \pi(\cot a\pi - \cot b\pi).$$

D'ailleurs, $z = 1$ n'étant plus un pôle pour la nouvelle fonction $\frac{z^{a-1} - z^{b-1}}{1-z}$, cette valeur principale n'est autre que l'intégrale elle-même. D'où cette nouvelle relation, découverte comme la précédente par *Euler*,

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1} - z^{b-1}}{1-z}\,dz = \pi(\cot a\pi - \cot b\pi).$$

311. Soit, en second lieu, $f(z)$ une fonction qui satisfasse aux conditions du n° 309 et qui, de plus, tende vers zéro pour $z = \infty$.

Considérons l'intégrale $\int e^{iz} f(z)\,dz$, prise suivant le même contour qu'au n° 309. On aura encore

$$\text{val. princ.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz} f(z)\,dz = 2\pi i \sum A - \int_c - \int_{c'} - \ldots - \int_C.$$

Les intégrales $\int_c$, $\int_{c'}$, $\cdots$ pourront se calculer comme tout à l'heure, car la fonction e^{iz} pouvant être développée suivant les puissances croissantes de $z - b$, si $f(z)$ peut être mis sous la forme (3), il en sera évidemment de même de $e^{iz} f(z)$.

Quant à l'intégrale $\int_C$, elle aura pour limite zéro. Soit, en effet, μ le maximum du module de $f(z)$ sur le demi-cercle de rayon R. On aura sur ce demi-cercle

$$z = R(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

φ variant de o à π. On en déduit

$$|e^{iz}| = |e^{iR\cos\varphi - R\sin\varphi}| = e^{-R\sin\varphi}$$

et

$$|dz| = ds = R\,d\varphi;$$

on aura donc

$$\left|\int_C e^{iz} f(z)\,dz\right| \leqq \int_0^{\pi} \mu\, e^{-R\sin\varphi} R\,d\varphi \leqq 2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi} R\,d\varphi.$$

Or, entre o et $\frac{\pi}{2}$, $\sin\varphi \geqq \frac{2\varphi}{\pi}$. Le module cherché sera donc moindre que

$$2\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R\varphi} R\,d\varphi = 2\mu \frac{\pi}{2}(1 - e^{-R}).$$

Or, pour $R = \infty$, μ tend vers zéro, ainsi que e^{-R}; donc cette expression tend vers zéro.

312. Soit, par exemple,

$$f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2}.$$

Cette fonction a un pôle $z = ai$ au-dessus de l'axe des x et n'a aucun point critique sur cet axe. De plus, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2 + x^2} dx$ est finie et déterminée. Elle aura donc pour valeur $2\pi i A$, A désignant le résidu de $\frac{e^{iz}}{a^2 + z^2}$ par rapport au pôle ai. Or, si nous posons $z = ai + h$, cette expression devient

$$\frac{e^{-a}(1 + ih + \ldots)}{2aih + h^2} = \frac{e^{-a}}{2ai} \frac{1}{h} + \ldots.$$

Donc

$$A = \frac{e^{-a}}{2ai}$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

Séparons encore, dans cette équation, la partie réelle de la partie imaginaire; il viendra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{a^2 + x^2} dx = 0.$$

313. *Développement de* $\cot u$. — La fonction $\cot z$ jouit des deux propriétés suivantes :

1° Elle est impaire;

2° Son module ne peut surpasser un nombre fixe μ sur le périmètre d'un carré ABCD (*fig.* 33) ayant pour centre l'origine et pour côté $2p = (2n + 1)\pi$, n étant un entier infini.

On a en effet

$$\cot z = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Sur les côtés horizontaux AB, CD on a

$$z = x \pm pi,$$

d'où

$$\cot z = i\,\frac{e^{\mp p+ix}+e^{\pm p-ix}}{e^{\mp p+ix}-e^{\pm p-ix}},$$

$$|\cot z| \leqq \frac{e^{p}+e^{-p}}{e^{p}-e^{-p}},$$

expression dont la limite est 1 pour $p=\infty$.

Sur les côtés verticaux

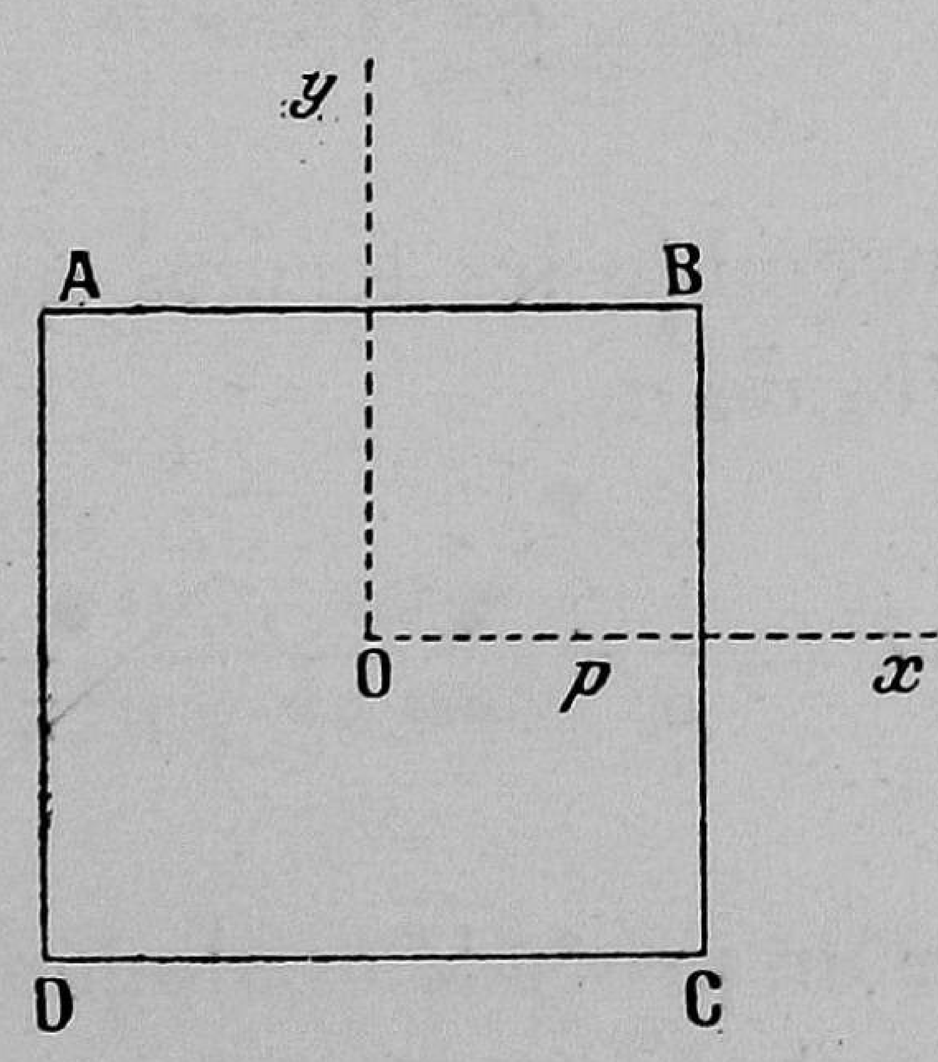
$$z = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi + iy,$$

$$\cot z = \pm\,\mathrm{tang}\,iy = \pm\frac{1}{i}\,\frac{e^{-y}-e^{y}}{e^{-y}+e^{y}},$$

$$|\cot z| \leqq 1.$$

Notre proposition est donc établie, si l'on prend pour μ un nombre quelconque >1.

Fig. 33.



De la combinaison des deux propriétés précédentes on conclut que l'intégrale

$$\int \frac{\cot z}{z-u}\,dz = \int \left[\frac{\cot z}{z} + \frac{u\cot z}{z(z-u)}\right] dz$$

prise sur le contour ABCD est infiniment petite.

En effet l'intégrale du premier terme est rigoureusement nulle; car la fonction $\frac{\cot z}{z}$ étant paire, deux éléments de l'intégrale symétriques par rapport à l'origine se détruisent. D'autre part, sur le contour d'intégration, dont la longueur est $8p$, $|z|$ est au moins égal à p; donc

$$\left|\int \frac{u \cot z}{z(z-u)} dz\right| \overline{\overline{<}} \frac{|u|\mu}{p(p-|u|)} 8p,$$

quantité infiniment petite.

Donc la somme des résidus relatifs aux pôles de $\frac{\cot z}{z-u}$ intérieurs au contour est infiniment petite.

Or ces pôles sont :

1° Le point $z = u$, avec le résidu $\cot u$;

2° Les points $z = n\pi$, n variant de $-m$ à $+m$. Les résidus correspondants sont $\frac{1}{n\pi - u}$.

On aura donc à la limite

$$\cot u + \lim_{m=\infty} \sum_{-m}^{+m} \frac{1}{n\pi - u} = 0,$$

ou, en réunissant ensemble les termes qui correspondent à deux valeurs opposées de n,

$$\cot u = \frac{1}{u} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

On trouverait, par un procédé analogue, le développement de toute expression de la forme $\sin^{2\lambda+1} u \cos^{2\mu} u$, où λ, μ sont des entiers tels que $\lambda + \mu$ soit négatif.

314. *Sommes de Gauss.* — Soit

$$T_s = e^{\frac{2\pi i s^2}{n}},$$

s et n étant des entiers. Cherchons à évaluer la somme

$$S_n = \sum_0^{n-1} T_s.$$

On a

$$T_{n-s} = e^{\frac{2\pi i(n-s)^2}{n}} = e^{2\pi i\left(n-2s+\frac{s^2}{n}\right)} = T_s.$$

On pourra donc écrire

$$S_n = 2\Sigma_n;$$

Σ_n désignant la somme

$$\frac{1}{2}T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + \frac{1}{2}T_{\frac{n}{2}}$$

où le dernier terme doit être supprimé si n est pair.

Formons une fonction admettant pour pôles les nombres entiers s et telle que les résidus correspondants soient $\frac{T_s}{2\pi i}$. La fonction

$$fz = \frac{e^{\frac{2\pi i z^2}{n}}}{e^{2\pi i z} - 1}$$

satisfait à ces conditions; car aux environs du point s on a

$$f(s+h) = \frac{e^{\frac{\pi i(s+h)^2}{n}}}{e^{2\pi i h} - 1} = \frac{e^{\frac{\pi i s^2}{n}+\ldots}}{2\pi i h + \ldots} = \frac{e^{\frac{\pi i s^2}{n}}}{2\pi i}\cdot\frac{1}{h} + \ldots.$$

Intégrons cette fonction le long du contour figuré ci-après, où

$$AH = \frac{n}{2},$$

$$OA = OD = q \qquad \text{(quantité infinie)},$$

BC, FG demi-cercles de rayon infiniment petit ε.

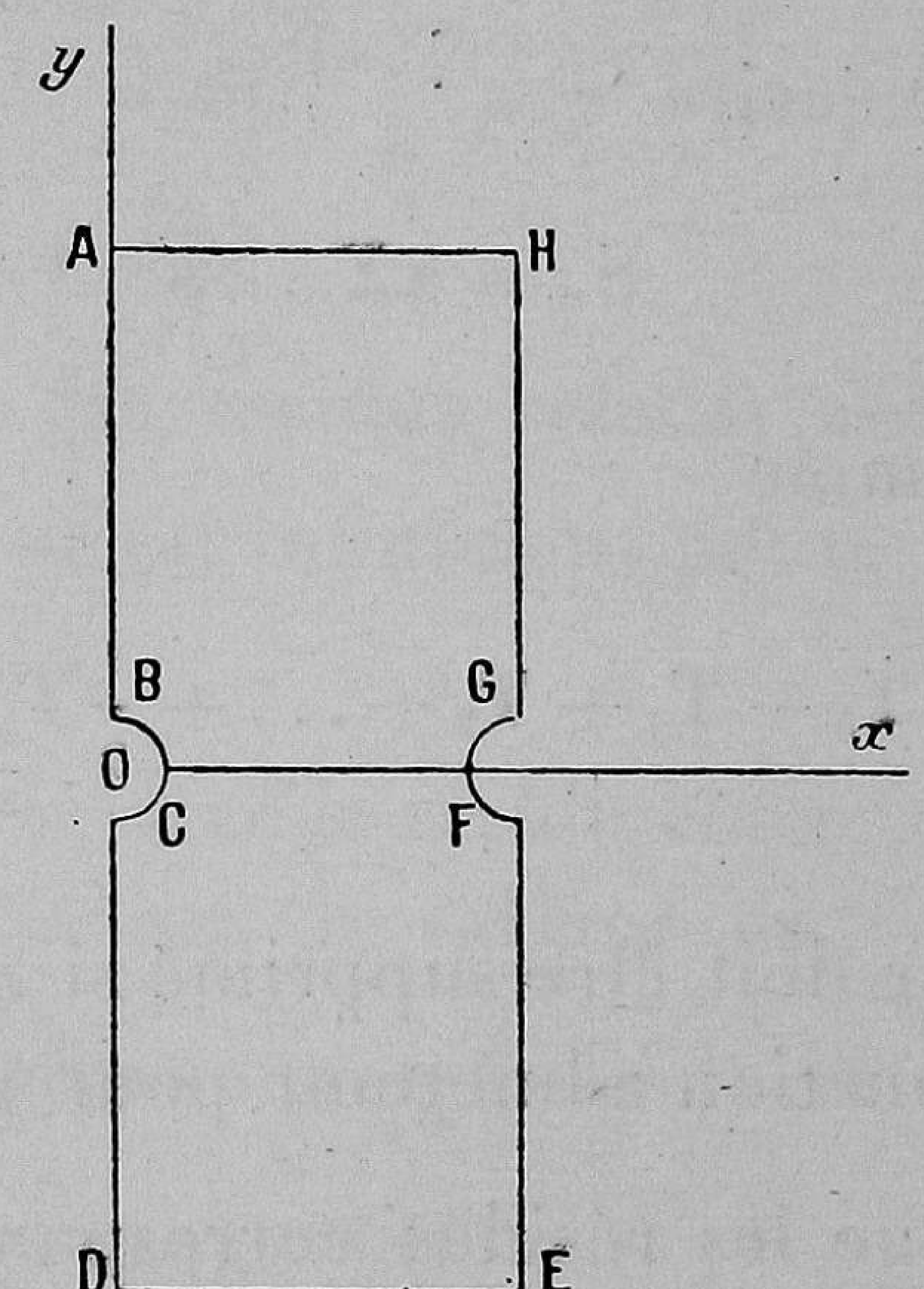
L'intégrale est égale à la somme des résidus relatifs aux

pôles intérieurs au contour, multipliée par $2\pi i$, soit à

$$T_1 + T_2 + \ldots = \Sigma_n - \frac{1}{2} T_0 - \frac{1}{2} T_{\frac{n}{2}}.$$

Mais l'intégrale suivant le demi-cercle BC (dans le sens

Fig. 34.



rétrograde) a pour valeur

$$-\frac{1}{2}\frac{2\pi i T_0}{2\pi i} = -\frac{1}{2} T_0.$$

L'intégrale suivant FG sera de même égale à $-\frac{1}{2} T_{\frac{n}{2}}$.

On aura donc

$$\Sigma_n = I,$$

I désignant la somme des intégrales prises suivant les parties rectilignes du contour.

Or sur l'horizontale HA on a $z = x + qi$, x variant de $\frac{n}{2}$ à zéro. La fonction fz devient

$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}(x+qi)^2}}{e^{2\pi i(x+qi)} - 1}.$$

Le module du numérateur est $e^{-\frac{4\pi q x}{n}}$; celui du dénominateur est au moins égal à la différence entre les modules de ses deux termes, soit $1 - e^{-2\pi q}$. Le module de l'intégrale aura donc pour limite supérieure

$$\int_0^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{4\pi q x}{n}}}{1 - e^{-2\pi q}} dx = \frac{n}{4\pi q},$$

quantité infiniment petite.

Sur l'horizontale DE, $z = x - iq$; x varie de zéro à $\frac{n}{2}$; le module de fz a pour limite supérieure

$$\frac{e^{\frac{4\pi q x}{n}}}{e^{2\pi q} - 1}$$

et celui de l'intégrale a encore la même limite supérieure $\frac{n}{4\pi q}$.

Passons aux côtés verticaux. Sur l'axe des y on a $z = iy$, y variant de q à ε, puis de $-\varepsilon$ à $-q$. L'intégrale sera donc

$$\left[\int_q^\varepsilon + \int_{-\varepsilon}^{-q}\right] \frac{e^{-\frac{2\pi i}{n} y^2}}{e^{-2\pi y} - 1} i\, dy.$$

Intervertissons les limites dans la première intégrale; changeons y en $-y$ dans la seconde et réunissons les deux fonctions à intégrer; il vient

$$-\int_\varepsilon^q e^{-\frac{2\pi i}{n} y^2} i\, dy \left[\frac{1}{e^{-2\pi y} - 1} + \frac{1}{e^{2\pi y} - 1}\right].$$

Or on voit sans peine que la parenthèse se réduit à la constante -1. L'intégrale cherchée se réduira donc à

$$i \int_\varepsilon^q e^{-\frac{2\pi i}{n} y^2} dy$$

et, pour $\varepsilon = 0$, $q = \infty$, à

$$i\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}y^2}\,dy.$$

Enfin, sur le dernier côté du rectangle, $z = \frac{n}{2} + iy$, y variant de $-q$ à $-\varepsilon$, puis de ε à q. D'ailleurs

$$fz\,dz = \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}\left(\frac{n}{2}+iy\right)^2}}{e^{2\pi i\left(\frac{n}{2}+iy\right)} - 1}\,i\,dy,$$

ou, en développant et remarquant que $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$, $e^{\pi i} = -1$,

$$fz\,dz = \frac{i^{n+1}\,e^{-2\pi y}\,e^{-\frac{2\pi i}{n}y^2}\,dy}{(-1)^n e^{-2\pi y} - 1}.$$

Il faut ajouter les deux intégrales prises de $-q$ à $-\varepsilon$ et de ε à q. Pour les ramener aux mêmes limites, changeons dans la première y en $-y$ et intervertissons les limites. La somme cherchée devient

$$i^{n+1}\int_\varepsilon^q e^{-\frac{2\pi i}{n}y^2}\,dy\left[\frac{e^{2\pi y}}{(-1)^n e^{2\pi y} - 1} + \frac{e^{-2\pi y}}{(-1)^n e^{-2\pi y} - 1}\right].$$

ou, en remarquant que la parenthèse se réduit à $(-1)^n = i^{2n}$ et faisant $\varepsilon = 0$, $q = \infty$,

$$i^{3n+1}\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}y^2}\,dy.$$

On a donc finalement

$$S_n = 2\Sigma_n = 2(i + i^{3n+1})\int_0^\infty e^{-\frac{2\pi i}{n}y^2}\,dy,$$

ou, en posant $\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,y = x$,

$$S_n = 2(i + i^{3n+1})\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-ix^2}\,dx,$$

$\sqrt{n}$ étant pris positivement.

Reste à calculer la constante

$$\int_0^\infty e^{-ix^2}\,dx.$$

On y parvient en donnant à n la valeur particulière $n=4$. On a dans ce cas

$$S_4 = 1 + i + i^4 + i^9 = 2(1+i).$$

La formule générale devient

$$2(1+i) = \frac{8i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-ix^2}\,dx,$$

d'où

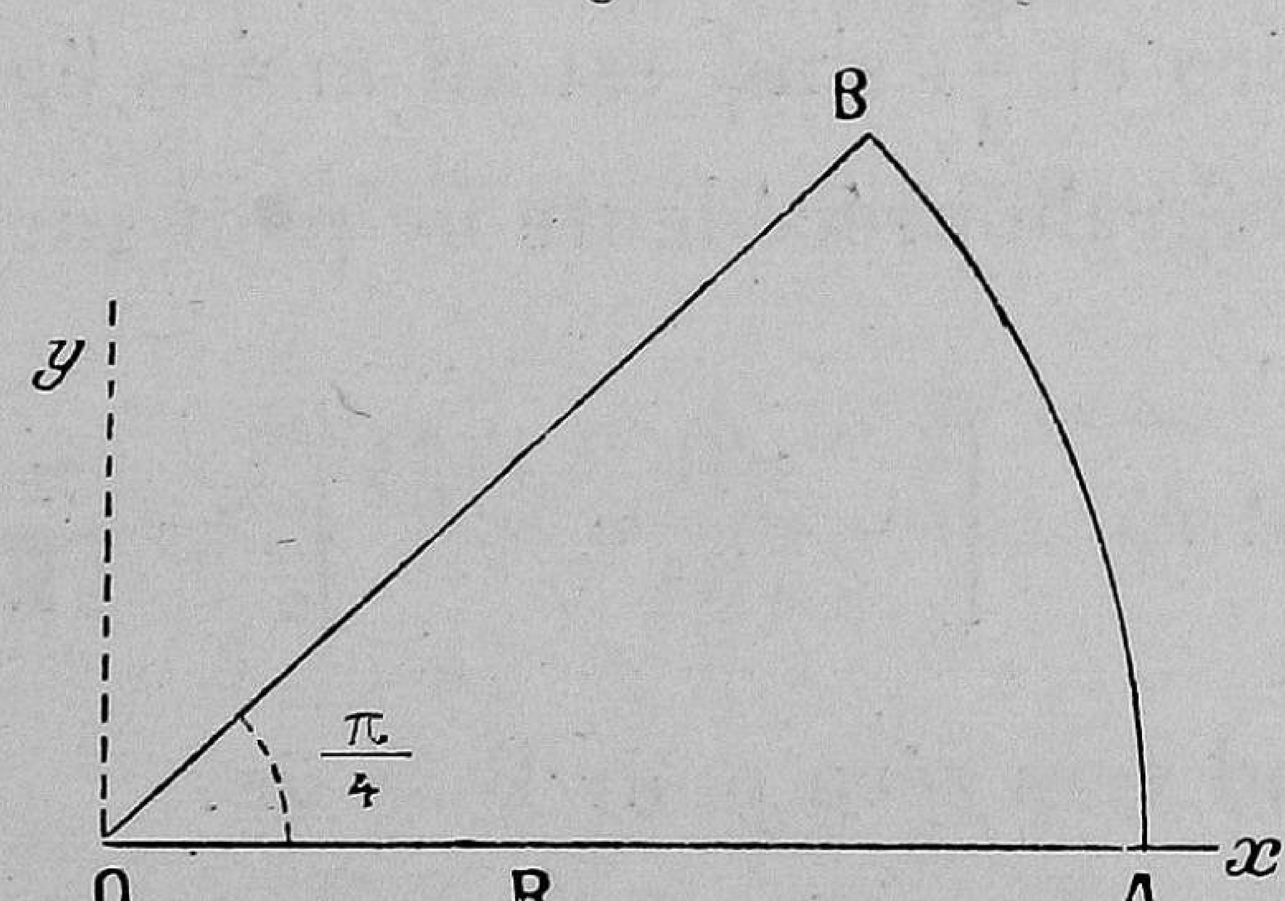
$$\int_0^\infty e^{-ix^2}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i).$$

Substituant cette valeur, on a finalement

$$S_n = \frac{(1+i^{3n})(1+i)}{2}\sqrt{n}.$$

315. La valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-ix^2}\,dx$ pourrait encore s'obtenir de la manière suivante :

Fig. 35.



Intégrons la fonction e^{-z^2} le long du secteur circulaire OAB représenté ci-dessus (*fig.* 35), $OA = R$ étant infini.

La fonction e^{-z^2} n'ayant pas de point critique, l'intégrale

sera nulle et l'on aura

$$\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}=0.$$

Or, sur OA, $z=x$, quantité réelle et l'intégrale est prise de zéro à ∞. Donc

$$\int_{OA}=\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Sur AB, on a $z=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, φ variant de zéro à $\frac{\pi}{4}$. Donc

$$\int_{AB} e^{-z^2}\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)}R(-\sin\varphi+i\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Cette expression est infiniment petite, car son module est au plus égal à

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\varphi}R\,d\varphi$$

ou, en posant $\varphi=\frac{\pi}{4}-\frac{\psi}{2}$, à

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\psi}R\,d\psi.$$

Mais entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, $\sin\psi$ est au moins égal à $\frac{2}{\pi}\psi$. Donc la valeur de l'intégrale précédente ne peut surpasser

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{2}{\pi}\psi}R\,d\psi=\left[-\frac{\pi R}{4R^2}e^{-R^2\frac{2}{\pi}\psi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2}),$$

quantité qui tend vers zéro pour $R=\infty$.

Enfin sur BO on aura $z=\rho\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z^2=i\rho^2$, ρ variant de ∞ à zéro. On aura donc

$$\int_{BO}=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\int_\infty^0 e^{-i\rho^2}\,d\rho.$$

On aura donc

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} + \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\int_{\infty}^{0} e^{-i\rho^2}\,d\rho = 0,$$

ou, en multipliant par $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-i\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

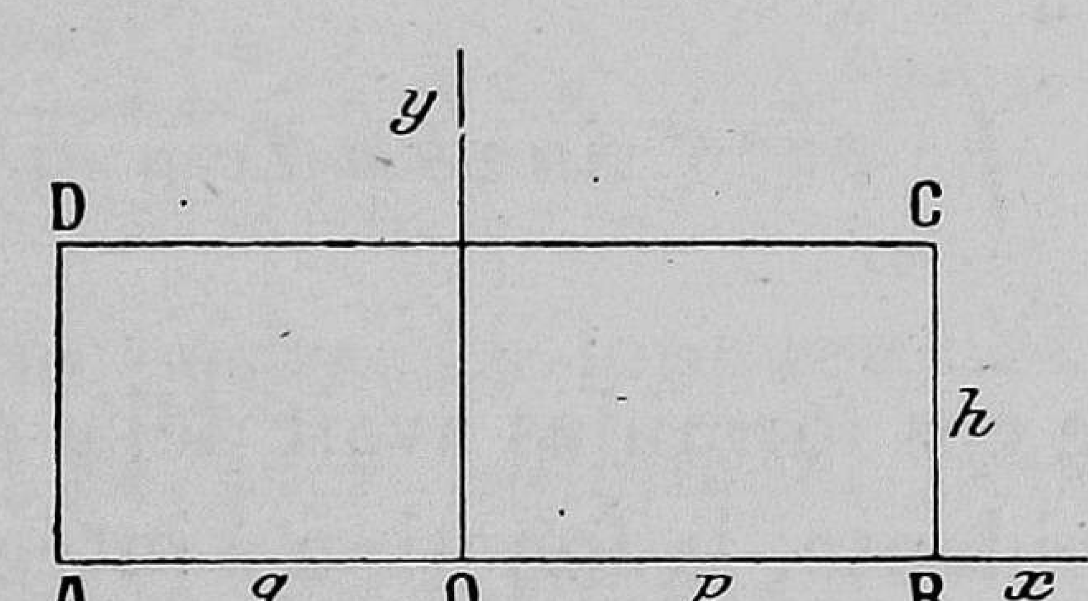
Séparons, dans cette relation, le réel de l'imaginaire; il vient

$$\int_0^{\infty} \cos\rho^2\,d\rho = \int_0^{\infty} \sin\rho^2\,d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

On retrouve ainsi la valeur des intégrales de *Fresnel*.

316. Intégrons la fonction e^{-az^2} (où a est positif) le long du rectangle ABCD (*fig.* 36) de hauteur h et de lon-

Fig. 36.



gueur $p+q$. L'intégrale sera nulle; on aura donc

$$\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA} = 0$$

et, par suite,

$$\int_{DC} + \int_{AD} = \int_{AB} + \int_{BC}.$$

Mais si p et q sont infinis $\int_{BC}$ et $\int_{AD}$ seront infiniment petits. En effet sur BC, par exemple, on aura $z = p + it$, t variant

de zéro à h, d'où

$$|e^{-az^2}| = |e^{-a(p^2+2ipt-t^2)}| \leqq e^{-a(p^2-h^2)},$$

$$\left| \int_{BC} e^{-az^2} dz \right| \leqq e^{-a(p^2-h^2)} h,$$

quantité infiniment petite.

D'autre part, on a sur AB $z = x$ et sur BC $z = x + ih$, x étant réel et variant de $-\infty$ à $+\infty$. La relation précédente se réduit donc à

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ih)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

On en déduit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-2aih} dx = e^{-ah^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Posant $ah = b$ et séparant le réel de l'imaginaire, il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cos 2bx\, dx = e^{-\frac{b^2}{a}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \sin 2bx\, dx = 0.$$

La première de ces formules avait déjà été établie (200). La seconde est évidente, la fonction à intégrer étant impaire.

317. Intégrons la fonction

$$\frac{e^{-\pi a z^2}}{e^{2\pi i z} - 1}$$

le long d'un rectangle ABCD de longueur $p + q$ et de hauteur 2 ayant son centre à l'origine (*fig.* 37).

Les pôles de la fonction sont aux points où z est un entier n; le résidu correspondant sera

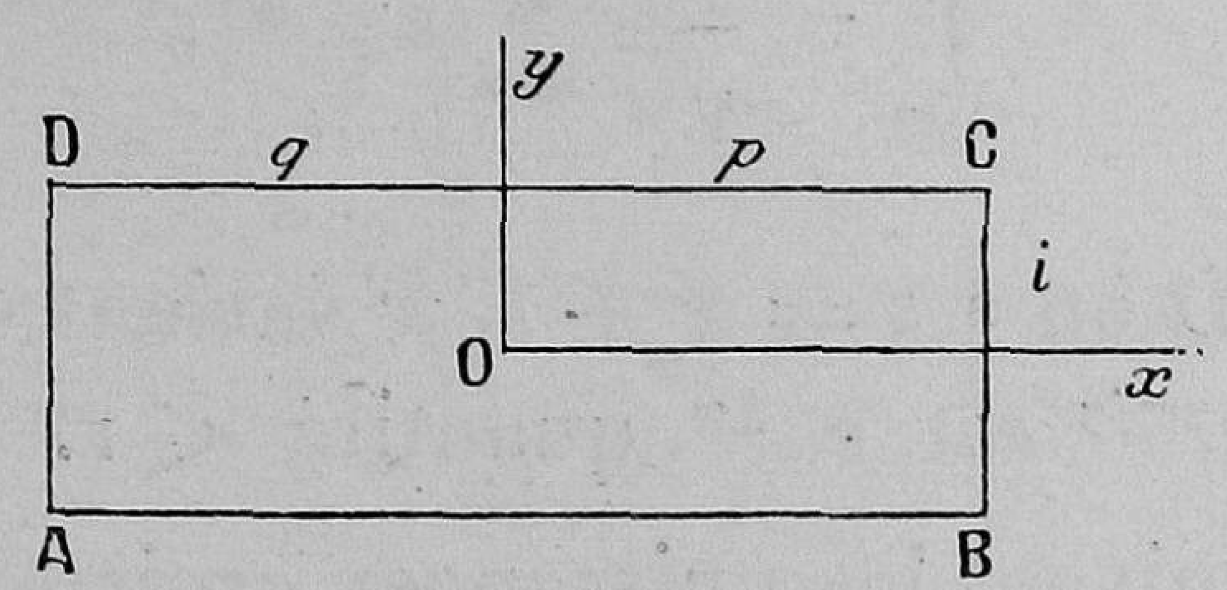
$$\frac{e^{-\pi a n^2}}{2\pi i}.$$

On aura donc

$$\int_{ABCD} \frac{e^{-\pi a z^2}}{e^{2\pi i z} - 1} dz = \Sigma e^{-\pi a n^2},$$

la somme ABCD s'étendant à tous les pôles contenus dans le rectangle.

Fig. 37.



Si l'on suppose $p = m + \frac{1}{2}$, $q = m' + \frac{1}{2}$, m, m' étant des entiers infinis, la somme du second membre s'étendra de $n = -\infty$ à $n = +\infty$.

Calculons, d'autre part, l'intégrale du premier membre.

Sur BC, on a $z = p + iy$, y variant de -1 à $+1$,

$$|e^{\pi i z} - 1| = |i^{2m+1} e^{-\pi y} - 1| > 1,$$

$$\left| \frac{e^{-\pi a z^2}}{e^{\pi i z} - 1} \right| < e^{-\pi a (p^2 - y^2)} < e^{-\pi a (p^2 - 1)},$$

quantité infiniment petite. La longueur BC étant égale à 2, l'intégrale suivant BC sera infiniment petite. Il en sera de même pour l'intégrale suivant DA.

Reste à évaluer les intégrales suivant les côtés horizontaux.

Sur AB, $z = x - i$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$. Le module de $e^{2\pi i z}$ sera $e^{2\pi}$, quantité > 1. On pourra donc développer $\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}$ suivant les puissances décroissantes de $e^{2\pi i z}$; on aura ainsi

$$\int_{AB} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a (x-i)^2} \sum_{-1}^{-\infty} e^{2n\pi i (x-i)} dx$$

$$= \sum_{-1}^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a \left(x - i - \frac{n}{a} i\right)^2} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} dx.$$

Mais, d'après le numéro précédent,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a\left(x-i-\frac{n}{a}i\right)^2} dx$$

a une valeur indépendante de n et égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Donc

$$\int_{AB} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{-1}^{-\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}},$$

Enfin, sur CD on a $z = x + i$, x variant de $+\infty$ à $-\infty$. Le module de $e^{2\pi i z}$ est $e^{-2\pi}$ quantité < 1. On développera donc $\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1}$ suivant les puissances croissantes de $e^{2\pi i z}$. On aura ainsi

$$\frac{1}{e^{2\pi i z} - 1} = -\sum_{0}^{\infty} e^{2n\pi i(x+i)}.$$

Changeant le sens de l'intégration, on supprimera le signe — et l'on aura

$$\int_{CD} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a(x+i)^2} \sum_{0}^{\infty} e^{2n\pi i(x+i)}$$

$$= \sum_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a\left(x+i-\frac{n}{a}i\right)^2} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{0}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

Réunissant ces deux intégrales, il vient

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a n^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}},$$

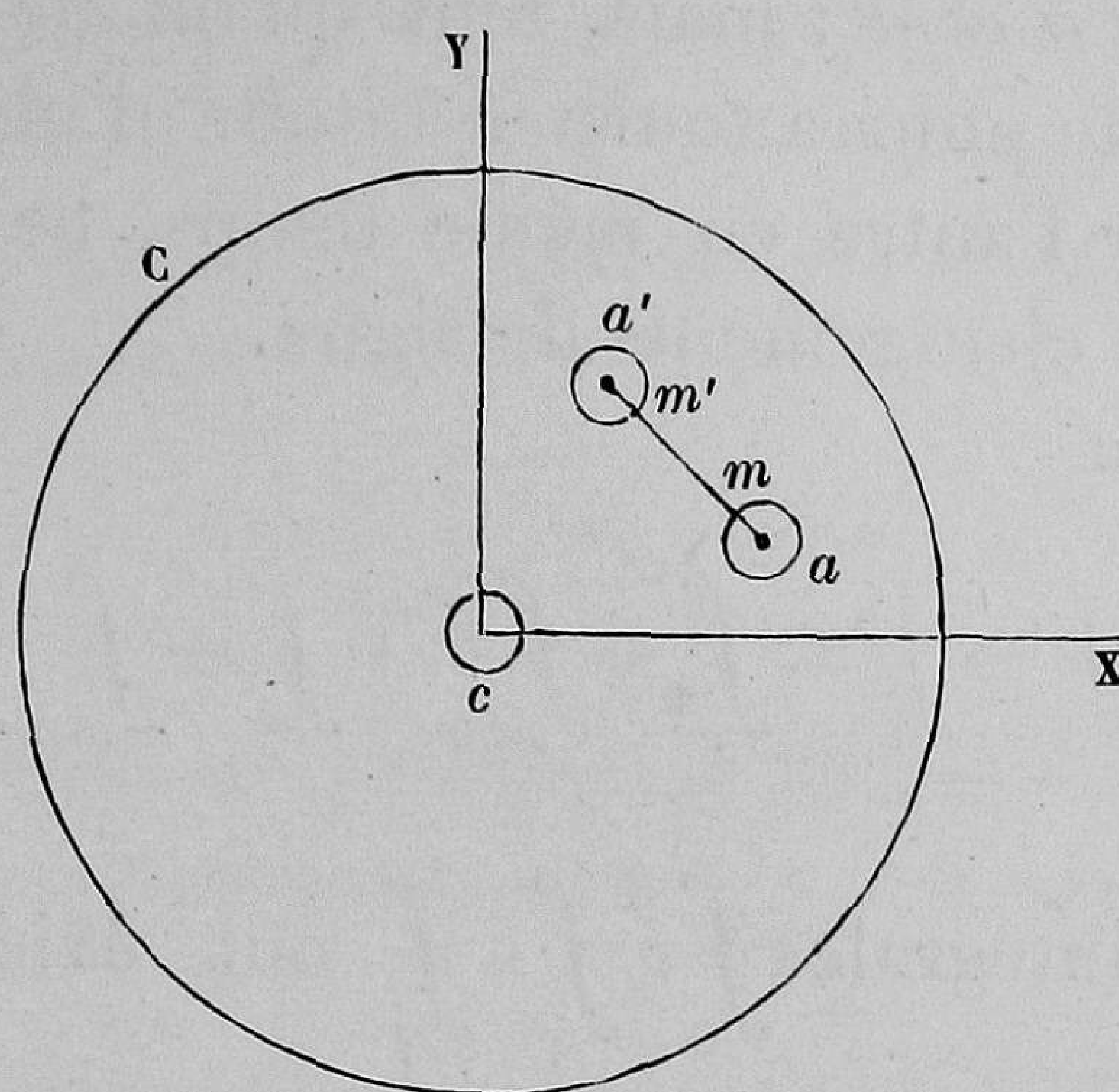
formule intéressante due à *Cauchy*.

318. Considérons, en dernier lieu, la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \quad (n \text{ entier positif}).$$

Intégrons-la le long d'un cercle c (*fig*. 38) de rayon r infiniment petit, décrit autour de l'origine.

Fig. 38.



L'intégrale sera égale au produit de $2\pi i$ par le résidu de la fonction correspondant au pôle $z = 0$. Mais on a, en se tenant à celle des valeurs du radical qui se réduit à 1 pour $z = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + X_1 z + \ldots + X_n z^n + \ldots,$$

$X_1, \ldots, X_n, \ldots$ désignant les polynomes de Legendre (*Calcul différentiel*, 273). Divisant par z^{n+1}, on trouvera évidemment pour résidu X_n. On aura donc

$$X_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

319. Le radical $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$ s'annule pour les deux valeurs de z qui ont pour affixe $a = x + \sqrt{x^2 - 1}$ et $a' = x - \sqrt{x^2 - 1}$. Entourons ces points par des cercles γ et γ' de rayons infiniment petits ρ et ρ'; joignons ces cercles par une droite mm' dirigée suivant la ligne des centres et considérons le contour K formé par la droite mm', le cercle γ', la droite $m'm$ et le cercle γ. Soit, enfin, C un cercle de rayon infini tracé autour de l'origine.

La fonction à intégrer reste monodrome dans l'espace compris entre les contours C, K et c. On sait, en effet, que le radical change de signe lorsqu'on tourne autour d'un des points critiques a et a'; mais, tant qu'on ne traverse pas la ligne mm', on ne pourra tourner autour d'un de ces points sans envelopper l'autre en même temps, ce qui donne un nombre pair de changements de signe.

On aura donc

$$\int_C = \int_c + \int_K = \int_c + \int_{mm'} + \int_{\gamma'} + \int_{m'm} + \int_\gamma.$$

320. Or, les intégrales $\int_C$, $\int_{\gamma'}$, $\int_\gamma$ ont évidemment pour limite zéro (297).

D'autre part, les intégrales $\int_{mm'}$ et $\int_{m'm}$ sont égales; car, aux points correspondants, la fonction à intégrer est la même, sauf le signe, qui est changé par suite de la révolution opérée autour d'un point critique, et la différentielle dz a également changé de signe, le sens de l'intégration étant renversé.

Les points m et m' tendant d'ailleurs vers a et a', ces intégrales ont pour limite commune l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

prise en ligne droite de a à a', le radical devant être pris avec la valeur qu'il possède sur le côté droit de la ligne aa'.

Changeons de variable en posant $z = x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi$. Il est clair que, lorsque z parcourra aa', $\cos\varphi$ variera de $+1$ à -1, et φ de zéro à π. On aura d'ailleurs

$$dz = -\sqrt{x^2 - 1}\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \pm\sqrt{1 - x^2}\sin\varphi.$$

Donc

$$(4)\quad X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c = -\frac{1}{\pi i}\int_{aa'} = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1}\cos\varphi)^{n+1}}.$$

321. Il reste à déterminer le signe à donner à l'intégrale. Faisons l'hypothèse particulière $x = 1$, il viendra

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \ldots,$$

et, par suite, $X_n(1) = 1$. Quant à l'intégrale du second membre, elle devient

$$\pm \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varphi = \pm 1.$$

C'est donc le signe $+$ qu'on devra prendre.

Supposons, au contraire, $x = -1$. On aura

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots.$$

Donc $X_n(-1) = (-1)^n$. L'intégrale définie devient, d'autre part,

$$\pm \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(-1)^{n+1}} = \pm(-1)^{n+1}.$$

Il faudra donc prendre le signe $-$.

On voit donc que le signe à prendre dépend de la valeur de x. Cherchons comment il varie avec x.

Il est tout d'abord évident que ce signe ne peut varier que lorsque x passe par une valeur qui annule les deux membres de l'équation (4), ou rend l'un d'eux discontinu.

Or X_n est continu et ne s'annule que pour des points isolés, qu'on pourra toujours éviter dans le passage d'une valeur de x à une autre. Quant à l'intégrale du second membre, elle ne pourra devenir discontinue que si son dénominateur s'annule dans le champ de l'intégration. Il faut et il suffit pour cela que $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ soit réel et compris entre -1 et $+1$, et, par suite, que $\frac{x^2}{x^2 - 1}$ soit positif et < 1. Cela n'aura lieu que si x^2 est réel et négatif. L'axe Oy sera donc la ligne de démarcation entre les valeurs de x pour lesquelles on doit

prendre le signe $+$, et celles pour lesquelles on doit prendre le signe $-$.

Si x est purement imaginaire, la relation (4) est d'ailleurs illusoire, car la fonction à intégrer devient infinie dans le champ de l'intégration, et de telle sorte que l'intégrale est en réalité indéterminée. Ce défaut de la méthode provient de ce que la droite aa' passant dans ce cas par l'origine des coordonnées, qui est un point critique de la fonction $\dfrac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}}$, il ne saurait être question d'intégrer suivant cette ligne.

322. Si, dans l'expression

$$X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1-2xz+z^2}},$$

nous changeons de variable en posant $z = \dfrac{1}{t}$, d'où $dz = -\dfrac{dt}{t^2}$, il viendra évidemment

$$X_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{-t^n\,dt}{\sqrt{1-2xt+t^2}},$$

C désignant un cercle de rayon infini.

La nouvelle fonction à intégrer restant monodrome entre le cercle C et le contour K, on aura

$$\int_C = \int_K = 2\int_{aa'}.$$

Dans cette dernière intégrale, posons, comme tout à l'heure,

$$t = x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi;$$

il viendra

$$\int_{aa'} \frac{-t^n\,dt}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \pm i\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi$$

et, par suite,

$$X_n = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Pour $x = 1$, il faudra prendre le signe $+$. Ce signe devra d'ailleurs être maintenu, quel que soit x, car les deux membres de l'équation sont toujours continus.

323. L'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}} = \pm \pi X_n,$$

que nous venons de considérer tout à l'heure, nous fournit l'exemple d'une intégrale définie, dépendant d'un paramètre x, et qui change brusquement de valeur lorsque x passe lui-même par une valeur pour laquelle l'intégrale cesse d'être déterminée. C'est là un phénomène très habituel.

C'est ainsi que l'intégrale

$$\int_K \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

où $f(z)$ désigne une fonction synectique dans l'intérieur du contour fermé K, est égale à zéro si le point x est extérieur à K, et à $2\pi i f(x)$ s'il est intérieur; elle est indéterminée si x est sur K.

324. Considérons plus généralement l'intégrale

V. Poincaré Méth. Nouv. t I p. 282 Leçons de M. C. t. II p. 101

$$\int_L \frac{F(z,x)}{G(z,x)}\,dz,$$

où L désigne une ligne continue sans point multiple, F et G des fonctions entières.

Donnons à x une valeur particulière ξ; et soient $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ les racines de l'équation

$$G(z,\xi) = 0. \tag{5}$$

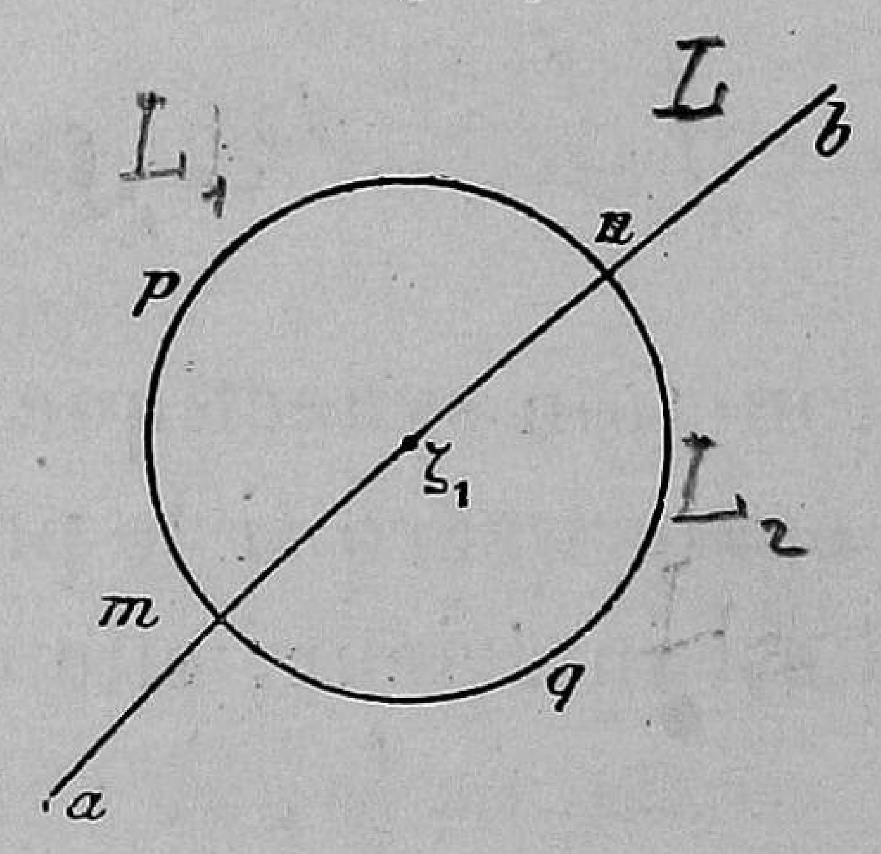
Chacune d'elles variera, comme on sait, d'une façon continue avec ξ. Si aucune d'elles n'est située sur la ligne L, l'intégrale considérée aura pour les valeurs de x voisines de ξ une

valeur déterminée, et représentera une fonction synectique de x, dont les dérivées successives pourront s'obtenir par la dérivation sous le signe $\int$.

325. Supposons au contraire, que, pour $x = \xi$, l'une des racines ζ_1, ζ_2, ..., par exemple ζ_1, soit située sur L. Admettons d'ailleurs que ζ_1 ne coïncide pas avec les extrémités a, b de la ligne L, et que ce soit une racine simple de l'équation (5), de telle sorte qu'on ait $\frac{\partial}{\partial \zeta_1} G(\zeta_1, \xi) \gtrless 0$.

L'intégrale $\int_L$ sera indéterminée ; mais, si l'on remplaçait la partie mn de L voisine de ζ_1 par un arc de courbe peu différent mpn ou mqn (*fig.* 39), on obtiendrait deux nou-

Fig. 39.



velles lignes $ampnb = L_1$, $amqnb = L_2$, le long desquelles l'intégrale aurait une valeur déterminée. Entre ces deux lignes, la fonction $\frac{F(z, \xi)}{G(z, \xi)}$ admet un seul point critique $z = \zeta_1$, aux environs duquel on a

$$F(z, \xi) = F(\zeta_1, \xi) + \frac{\partial F}{\partial \zeta_1}(z - \zeta_1) + \ldots,$$

$$G(z, \xi) = \frac{\partial G}{\partial \zeta_1}(z - \zeta_1) + \ldots.$$

Ce point est donc un pôle, auquel correspond le résidu

$$A = \frac{F(\zeta_1, \xi)}{\frac{\partial}{\partial \zeta_1} G(\zeta_1, \xi)},$$

et l'on aura

$$\int_{L_2} \frac{F(z,\xi)}{G(z,\xi)} dz - \int_{L_1} \frac{F(z,\xi)}{G(z,\xi)} dz = 2\pi i A.$$

D'ailleurs chacune de ces deux intégrales $\int_{L_2}$, $\int_{L_1}$ variera d'une façon continue avec x (aux environs de $x = \xi$).

A chaque valeur de x infiniment voisine de ξ correspond une quantité z_1, racine de l'équation

$$G(z, x) = 0,$$

et infiniment voisine de ζ_1. Supposons que x varie de telle sorte que lorsqu'il franchit la valeur ξ, z_1, qui franchit au même instant la valeur ζ_1, passe de la région mqn à la région mpn. L'intégrale $\int_L$ s'accroîtra brusquement de la quantité $2\pi i A$. Considérons, en effet, deux valeurs x', x'' de x infiniment voisines l'une de l'autre et comprenant entre elles la valeur ξ. Pour $x = x'$, z_1 étant situé dans la région mqn, il n'existe aucun point critique entre les lignes L et L_1 ; on aura donc

$$\int_L \frac{F(z,x')}{G(z,x')} dz = \int_{L_1} \frac{F(z,x')}{G(z,x')} dz,$$

et, à la limite, l'intégrale du second membre variant d'une façon continue,

$$\lim_{x'=\xi} \int_L \frac{F(z,x')}{G(z,x')} dz = \int_{L_1} \frac{F(z,\xi)}{G(z,\xi)} dz.$$

Pour $x = x''$, z_1 étant situé dans la région mpn, ce sont les intégrales suivant L et L_2 qui seront égales, et l'on aura

$$\lim_{x''=\xi} \int_L \frac{F(z,x'')}{G(z,x'')} dz = \int_{L_2} \frac{F(z,\xi)}{G(z,\xi)} dz.$$

L'intégrale $\int_L \frac{F(z,x)}{G(z,x)} dz$ éprouvera donc, d'un côté à l'autre de la valeur $x = \xi$, une discontinuité égale à $2\pi i A$.

326. Remarquons toutefois que $x=\xi$ n'est pas un point critique pour la fonction analytique que représentait l'intégrale. Car si l'on suppose que la ligne L, au lieu de rester fixe, se déforme progressivement au moment où elle serait près d'être atteinte par le point variable z_1, l'intégrale prise suivant cette ligne mobile restera continue, ainsi que ses dérivées. Or on peut toujours éviter la rencontre entre la ligne variable et les points $z_1, z_2, \ldots$, racines de l'équation $G(z,x)=0$, sauf dans les deux cas suivants :

1° L'un des points $z_1, z_2, \ldots$ tend vers l'une des extrémités a, b de la ligne L (lesquelles restent fixes);

2° Deux racines z_1, z_2, situées de part et d'autre de L, tendent à se confondre en une seule racine double.

On voit donc qu'à la condition de déformer à propos la ligne L d'intégration, l'intégrale $\int_L$, considérée comme fonction du paramètre x, ne peut avoir de points critiques que pour les valeurs de x pour lesquelles on a

$$G(a,x)=0 \quad \text{ou} \quad G(b,x)=0,$$

ou simultanément

Si z_1 et z_2 sont de part et d'autre de L

$$G(z,x)=0, \qquad \frac{\partial G(z,x)}{\partial z}=0.$$

II. — Intégrale de Cauchy.

327. Soient $f(z)$ une fonction qui, dans l'intérieur d'un contour fermé K, n'admette d'autres points critiques que des pôles; $\varphi(z)$ une autre fonction synectique dans l'intérieur de ce contour. Nous allons nous proposer d'évaluer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Pour cela, cherchons d'abord à déterminer les points critiques de la fonction $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ situés dans l'intérieur de K.

Soit a un point quelconque intérieur à K; $\varphi(z)$ étant synectique, on aura, aux environs de ce point,

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \varphi'(a)(z-a) + \ldots.$$

D'autre part, si a n'est ni un zéro ni un pôle pour $f(z)$, on aura un développement de la forme

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots \qquad (A_0 \gtrless 0),$$

d'où

$$f'(z) = A_1 + 2A_2(z-a) + \ldots$$

$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = [\varphi(a) + \varphi'(a)(z-a) + \ldots]\frac{A_1 + 2A_2(z-a) + \ldots}{A_0 + A_1(z-a) + \ldots}$$
$$= \lambda_0 + \lambda_1(z-a) + \ldots.$$

Donc a est un point ordinaire pour $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Supposons au contraire que a soit un zéro de $f(z)$, et soit m son ordre de multiplicité; on aura un développement de la forme

$$f(z) = (z-a)^m[A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots],$$

et, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{A_1 + 2A_2(z-a) + \ldots}{A_0 + A_1(z-a) + \ldots}$$
$$= \frac{m}{z-a} + \mu_0 + \mu_1(z-a) + \ldots,$$
$$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m\varphi(a)}{z-a} + \lambda_0 + \lambda_1(z-a) + \ldots.$$

Le point a est donc un pôle pour la fonction $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, et le résidu correspondant est $m\varphi(a)$.

Enfin, si le point a était un pôle de $f(z)$ d'ordre de multiplicité m, on aurait un développement de la forme

$$f(z) = (z-a)^{-m}[A_0 + A_1(z-a) + \ldots],$$

et l'on verrait de même que a est un pôle pour $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, et que le résidu correspondant est $-m\varphi(a)$.

Cela posé, on sait (308) que l'intégrale cherchée est égale à la somme des résidus relatifs aux pôles de $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ contenus dans l'intérieur de K. Si donc la fonction $f(z)$ admet dans l'intérieur de K les zéros $a_1, \ldots, a_i, \ldots$ avec des ordres de multiplicité $m_1, \ldots, m_i, \ldots$ et les pôles $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ avec des ordres de multiplicité $\mu_1, \ldots, \mu_k, \ldots$, on aura

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma m_i\,\varphi(a_i) - \Sigma \mu_k\,\varphi(\alpha_k).$$

Si les zéros et les pôles sont tous simples, on aura

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_K \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma\,\varphi(a_i) - \Sigma\,\varphi(\alpha_k).$$

On peut s'en tenir à cette dernière formule, car la précédente s'en déduit en supposant que plusieurs zéros ou plusieurs pôles, primitivement distincts, viennent à coïncider.

328. Supposons, en particulier, $f(z) = z^\mu$; il viendra

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{z^\mu f'(z)}{f(z)}dz = \Sigma a_i^\mu - \Sigma \alpha_k^\mu.$$

Soit en second lieu $f(z) = 1$. Chacun des termes $\varphi(a_i)$, $\varphi(\alpha_k)$ se réduisant à l'unité, nous aurons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}dz = M - N,$$

M désignant le nombre des zéros a_i et N le nombre des pôles α_k (comptés chacun avec son ordre de multiplicité).

329. *Remarque.* — Soient $z = x + yi$, $f(z) = P + Q_i$; on aura

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \log(P + Qi) + \text{const.}$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}(P^2 + Q^2) + i\,\text{arc tang}\,\frac{Q}{P} + \text{const.}$$

En intégrant suivant le contour K, le logarithme arithmétique reprend la même valeur aux deux limites. D'autre part arc tang $\frac{Q}{P}$ se sera accru de $(k - k')\pi$, k désignant le nombre de fois que $\frac{Q}{P}$ passe du positif au négatif en devenant infini, et k' le nombre des passages inverses du négatif au positif. On aura donc

$$\text{(2)} \qquad M - N = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{k - k'}{2}.$$

330. *Application.* — Soit

$$f(z) = z^n + az^{n-1} + \ldots = 0$$

le premier membre d'une équation algébrique. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

donnera le nombre des racines contenues dans l'intérieur de K, car la fonction $f(z)$ n'a aucun pôle (à distance finie).

Pour obtenir le nombre total des racines, nous prendrons pour K un cercle de rayon infini. L'intégrale sera

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{nz^{n-1} + a(n-1)z^{n-2} + \ldots}{z^n + az^{n-1} + \ldots}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{n\,dz}{z}(1 + \varepsilon),$$

ε étant infiniment petit pour z infini. On aura donc à la limite

$$\int_K \frac{n\varepsilon\,dz}{z} = 0.$$

D'autre part,

$$\int_K \frac{n\,dz}{z} = 2\pi i n.$$

Le nombre des racines est donc égal à n, degré de l'équation.

331. Formule de Lagrange. — *Soient $f(z)$ et $\varphi(z)$ deux fonctions synectiques dans l'intérieur d'un certain contour* K; *x un point intérieur à ce contour; α une constante assez petite pour que la condition*

$$\left|\frac{\alpha f(z)}{z-x}\right| < 1$$

soit satisfaite pour tous les points du contour K.

Ces suppositions admises, l'équation

$$z = x + \alpha f(z)$$

admettra une racine unique a dans l'intérieur du contour, et $\varphi(a)$ sera donné par la série convergente

$$(3) \qquad \varphi(a) = \varphi(x) + \alpha f(x)\varphi'(x) + \ldots + \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f(x)^n\varphi'(x)] + \ldots.$$

La fonction

$$F(z) = z - x - \alpha f(z)$$

n'ayant pas de pôles dans le contour, le nombre des racines a, a_1, ... intérieures au contour sera donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{F'(z)}{F(z)}dz,$$

et, plus généralement, l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z)F'(z)\,dz}{F(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\varphi(z)[1-\alpha f'(z)]}{F(z)}dz$$

sera égale à $\sum\varphi(a)$.

Pour évaluer cette intégrale, dont la première n'est qu'un cas particulier, développons en série le facteur

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z-x-\alpha f(z)} = \sum_0^\infty \frac{[\alpha f(z)]^n}{(z-x)^{n+1}}.$$

Cette progression géométrique étant uniformément convergente sur K, on aura, en intégrant terme à terme,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty \alpha^n \int \frac{\varphi(z)[1-\alpha f'(z)][f(z)]^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz \\
&= \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\{\varphi(x)[f(x)]^n[1-\alpha f'(x)]\} \\
&= \varphi(x) + \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)[f(x)]^n \\
&\quad - \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\varphi(x)[f(x)^{n-1}f'(x)] \\
&= \varphi(x) + \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{d}{dx}\varphi(x)[f(x)]^n - n\varphi(x)[f(x)]^{n-1}f'(x)\right\} \\
&= \varphi(x) + \sum_1^\infty \frac{\alpha^n}{1.2\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[f(x)]^n\varphi'(x).
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où la fonction φ se réduit à l'unité, cette expression se réduit à 1. Il n'y a donc qu'une racine a dans l'intérieur du contour, et l'expression précédente de I donnera la valeur de $\varphi(a)$. Le théorème est donc établi

332. Théorème. — *Soit* $\mathrm{S}(z, u, v, \ldots)$ *un élément de fonction analytique dépendant de plusieurs variables* z, u, v, ... *et tel que l'équation*

$$\mathrm{S}(z, 0, 0, \ldots) = 0$$

admette une racine nulle, de l'ordre n *de multiplicité.*

Pour un système de valeurs infiniment petites donné à u, v, ... : 1° *l'équation*

$$\mathrm{S}(z, u, v, \ldots) = 0$$

admettra n *racines infiniment petites;* 2° *ces racines satisferont à une équation de la forme*

$$\mathrm{F} = z^n + p_1 z^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

où $p_1, \ldots, p_n$ *sont des fonctions de* $u, v, \ldots,$ *synectiques aux environs du point* $(0, 0, \ldots)$*;* 3° *enfin, on aura identiquement*

$$S(z, u, v, \ldots) = FG,$$

G *étant un nouvel élément de fonction analytique qui ne s'annule plus pour* $z = u = v = \ldots = 0$.

Mettons en évidence, parmi ceux des termes de la série S qui sont indépendants de $u, v, \ldots,$ celui dont le degré en z est le moins élevé; on pourra écrire

$$S = az^n + \Sigma A_{\alpha\beta\gamma\ldots} z^\alpha u^\beta v^\gamma \ldots = az^n + T,$$

les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ satisfaisant, dans chacun des termes de la série T, à l'inégalité

$$\alpha + (n+1)(\beta + \gamma + \ldots) \overset{=}{>} n + 1.$$

En effet, dans ceux de ces termes où $\beta, \gamma, \ldots$ sont nuls à la fois, α est au moins égal à $n + 1$.

Soit d'ailleurs ρ une quantité fixe, moindre que le rayon de convergence de l'élément S.

La série S et sa dérivée partielle

$$\frac{\partial S}{\partial z} = naz^{n-1} + \Sigma \alpha A_{\alpha\beta\gamma\ldots} z^{\alpha-1} u^\beta v^\gamma \ldots = naz^{n-1} + \frac{\partial T}{\partial z}$$

étant absolument convergentes pour $z = u = v = \ldots = \rho$, les sommes

$$\sigma = \Sigma |A_{\alpha\beta\gamma\ldots}| \rho^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}, \qquad \sigma' = \Sigma \alpha |A_{\alpha\beta\gamma\ldots}| \rho^{\alpha-1+\beta+\gamma+\ldots}$$

seront finies.

Nous allons établir qu'on peut assigner une quantité fixe λ telle que, pour tous les systèmes de valeurs des variables ε, $u, v, \ldots$ qui satisfont aux inégalités

$$\varepsilon \overset{=}{<} \lambda, \qquad |u| \overset{=}{<} \rho\varepsilon^{n+1}, \qquad |v| \overset{=}{<} \rho\varepsilon^{n+1}, \qquad \ldots :$$

1° l'équation $S(z, u, v, \ldots) = 0$ n'ait aucune racine dont le

module soit $\leqq \rho\lambda$ et $\geqq \rho\varepsilon$; 2° elle ait n racines de module $< \rho\varepsilon$.

Donnons, en effet, à z une valeur quelconque, dont le module $\rho\eta$ soit compris dans l'intervalle de $\rho\lambda$ à $\rho\varepsilon$; le premier terme de $S(z, u, v, \ldots)$ aura pour module

$$|a|\rho^n \eta^n.$$

Quant au module du reste T, il sera au plus égal à

$$\begin{aligned}&\Sigma|A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|(\rho\eta)^\alpha(\rho\varepsilon^{n+1})^{\beta+\gamma+\ldots}\\ \leqq\ &\Sigma|A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|\rho^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\eta^{\alpha+(n+1)(\beta+\gamma+\ldots)}.\end{aligned}$$

Si l'on suppose $\lambda < 1$ (d'où $\eta < 1$), cette quantité sera au plus égale à

$$\Sigma|A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|\rho^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\eta^{n+1} = \sigma\eta^{n+1}.$$

On aura donc

$$|S(z, u, v, \ldots)| \geqq |a|\rho^n\eta^n - \sigma\eta^{n+1} \geqq \eta^n[|a|\rho^n - \sigma\eta].$$

Si donc λ est choisi moindre que $\frac{|a|\rho^n}{\sigma}$, il en sera de même *a fortiori* pour η, et $(z, u, v, \ldots)$ ne sera pas nul.

333. Notre premier point étant ainsi établi, cherchons le nombre des racines de l'équation $S(z, u, v, \ldots) = 0$, dont le module est moindre que $\rho\lambda$ (et, par suite, moindre que $\rho\varepsilon$). Ce nombre est exprimé par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial S}{\partial z}}{S}\,dz,$$

prise suivant un cercle C de rayon $\rho\lambda$ décrit autour de l'origine comme centre. Or, d'après ce qui précède, on a pour tout point de ce cercle

$$|T| \leqq \sigma\lambda^{n+1}$$

et, par suite,

$$S = az^n + T = az^n\left(1 + \frac{T}{az^n}\right) = az^n(1+\theta),$$

θ étant une quantité dont le module est au plus égal à

$$\frac{\sigma\lambda^{n+1}}{|a|(\rho\lambda)^n} = \frac{\sigma\lambda}{|a|\rho^n}.$$

On voit de la même manière qu'on aura

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| &\leqq \Sigma\alpha|A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|(\rho\lambda)^{\alpha-1}(\rho\lambda^{n+1})^{\beta+\gamma+\ldots}\\ &\leqq \Sigma\alpha|A_{\alpha\beta\gamma\ldots}|\rho^{\alpha-1+\beta+\gamma+\ldots}\lambda^{\alpha-1+(n+1)(\beta+\gamma+\ldots)}\\ &\leqq \sigma'\lambda^n\end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial z} = naz^{n-1}\left(1 + \frac{\frac{\partial T}{\partial z}}{naz^{n-1}}\right) = naz^{n-1}(1+\theta'),$$

θ' étant une quantité de module au plus égal à

$$\frac{\sigma'\lambda^n}{n|a|(\rho\lambda)^{n-1}} = \frac{\sigma'\lambda}{n|a|\rho^{n-1}}.$$

L'intégrale à calculer sera donc égale à

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{n\,dz}{z}\,\frac{1+\theta'}{1+\theta} = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{n\,dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\theta'-\theta}{1+\theta}\,\frac{n\,dz}{z}.$$

Le premier terme a pour valeur n. Quant au second, il sera nul, si son module est < 1; car on sait d'avance que la valeur de l'intégrale cherchée est un nombre entier. Or ce module est au plus égal à

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{\dfrac{\sigma'\lambda}{n|a|\rho^{n-1}} + \dfrac{\sigma\lambda}{|a|\rho^n}}{1 - \dfrac{\sigma\lambda}{|a|\rho^n}}\,2\pi n = \frac{(\sigma'\rho + n\sigma)\lambda}{|a|\rho^n - \sigma\lambda},$$

quantité qui sera < 1, si l'on suppose

$$\lambda < \frac{|a|\rho^n}{\sigma'\rho + (n+1)\sigma}.$$

Si nous supposons que $|u|$, $|v|$, ... tendent simultanément vers zéro, on pourra faire décroître en même temps la quantité ε jusqu'à zéro. Les n racines $z_1, \ldots, z_n$ de module $< \rho\varepsilon$, dont nous venons d'établir l'existence, tendront donc vers zéro; les autres racines, au contraire, ayant leur module $> \rho\lambda$, resteront finies.

La première partie du théorème est donc démontrée.

334. Pour établir la seconde, nous remarquerons que la somme s_k des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des racines infiniment petites sera représentée (328) par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^k \frac{\partial S}{\partial z}}{S}\,dz.$$

C'est une fonction de u, v, ... qui a une valeur unique et finie tant que les modules de ces variables ne surpasseront pas $\rho\lambda^{n+1}$. De plus, elle est synectique, car cette intégrale admet des dérivées partielles finies et déterminées, lesquelles peuvent s'obtenir sans difficulté par la dérivation sous le signe $\int$.

Cela posé, les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ de l'équation $F = 0$, qui a pour racines $z_1, \ldots, z_n$ s'expriment comme on sait par des polynomes entiers en $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Ce seront donc des fonctions de u, v, ..., synectiques dans le domaine considéré.

335. Considérons enfin l'intégrale

$$I' = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\frac{\partial S}{\partial z}}{S}\,\frac{dz}{z - z'}.$$

Elle aura une valeur unique et déterminée, ainsi que ses dérivées partielles par rapport à $u, v, \ldots$ et au nouveau paramètre z', tant que $|u|$, $|v|$, ... ne surpasseront pas $\rho\lambda^{n+1}$ et

que $|z'|$ sera $< \rho\lambda$. Ce sera donc une fonction synectique à l'intérieur de ce domaine.

Sa valeur sera d'ailleurs égale à la somme des résidus relatifs aux pôles $z', z_1, \ldots, z_n$ de la fonction à intégrer. Si nous supposons $|u|, |v|, \ldots$ au plus égaux à $\rho\varepsilon^{n+1}$ et $|z'| \overline{\gtrless} \rho\varepsilon$, le pôle z' sera distinct des autres, et le résidu correspondant sera égal à la valeur de $\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z}$ pour $z = z'$.

D'autre part, α_i désignant l'ordre de multiplicité du pôle z_i, le résidu correspondant sera $\frac{\alpha_i}{z_i - z'}$. On aura donc

$$I' = \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{z=z'} + \sum \frac{\alpha_i}{z_i - z'} = \left(\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{z=z'},$$

et, en changeant z' en z et désignant par I ce que devient I' par ce changement,

$$\frac{1}{S}\frac{\partial S}{\partial z} - \frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial z} = I.$$

Intégrant cette équation, par rapport à z, il viendra

$$\log\frac{S}{F} = \int I\,dz,$$

$$S = Fe^{\int I\,dz} = FG,$$

G désignant comme I une fonction de $z, u, v, \ldots$ synectique aux environs de l'origine, et qui d'ailleurs ne s'annule pas en ce point.

Nous avons supposé, dans la démonstration précédente, que la quantité z' (actuellement remplacée par z) a son module $< \rho\lambda$, mais $> \rho\varepsilon$; or ε est arbitraire et peut être choisi aussi petit qu'on veut. L'égalité

$$S = FG$$

subsistera donc pour toutes les valeurs de z dont le module est $< \rho\lambda$, sans être nul. D'ailleurs, étant vraie pour z infiniment petit, elle le sera encore à la limite pour $z = 0$.

III. — Théorèmes généraux sur les fonctions monodromes.

336. On est convenu de dire qu'une fonction analytique $f(z)$ a pour $z=\infty$ un point ordinaire, un pôle, un point singulier esssentiel, etc., suivant que le point $z=0$ est un point ordinaire, un pôle, etc., pour la fonction $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

D'après cette définition, une fonction entière a généralement, pour $z=\infty$, un point singulier essentiel; ce sera un pôle si la fonction se réduit à un polynome entier; un point ordinaire, si elle se réduit à une constante.

337. Théorème. — *Une fonction $f(z)$ uniforme sans points singuliers essentiels, même à l'infini, est une fonction rationnelle.*

En effet, elle ne peut avoir une infinité de pôles; car, ces points étant isolés, il ne peut en exister qu'un nombre borné dans un cercle de rayon donné décrit autour de l'origine. Elle admettrait donc des pôles dont le module surpasserait toute quantité donnée; $f\left(\frac{1}{z}\right)$ admettrait donc des pôles plus voisins de l'origine que toute quantité donnée; le point $z=0$ serait donc un point singulier essentiel, et $z=\infty$ serait un point singulier essentiel pour $f(z)$.

Soient donc a, b, ... les pôles de $f(z)$ en nombre borné. On aura un développement de la forme

$$f(z)=\frac{A_m}{(z-a)^m}+\ldots+\frac{A_1}{z-a}+f_1(z),$$

$f_1(z)$ admettant les mêmes points critiques que $f(z)$, sauf a, qui est devenu un point ordinaire. On pourra poser de même

$$f_1(z)=\frac{B_n}{(z-b)^n}+\ldots+\frac{B_1}{z-b}+f_2(z)$$

et ainsi de suite. On aura finalement

$$f(z) = S + \varphi(z),$$

S désignant une somme de fractions simples et $\varphi(z)$ une fonction entière.

D'ailleurs ∞ est, par hypothèse, un pôle ou un point ordinaire pour $f(z)$. Or c'est évidemment un point ordinaire pour chacun des termes de S; c'est donc un pôle pour $\varphi(z)$, qui devra, par suite, se réduire à un polynome ou à une constante.

338. Théorème. — *Une fonction entière $f(z)$, dont le module reste constamment inférieur à un nombre fixe* M, *est nécessairement une constante.*

En effet, $f(z)$ admet un développement par la série de Maclaurin

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + \ldots + \frac{z^n f^n(0)}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

convergent dans tout le plan. Soit d'ailleurs C un cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre; on aura (t. I, n° 207)

$$f^n(0) = \frac{1.2\ldots n}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

d'où

$$\left| \frac{f^n(0)}{1.2\ldots n} \right| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R \leqq \frac{M}{R^n},$$

et, comme on peut prendre R aussi grand qu'on veut, on aura à la limite

$$\frac{f^n(0)}{1.2\ldots n} = 0,$$

pour toute valeur de n; et, par suite,

$$f(z) = f(0) = \text{const.}$$

339. On peut déduire, de la proposition précédente, une propriété importante des points critiques essentiels.

THÉORÈME. — *Soit a un point critique essentiel de $f(z)$, isolé des autres points essentiels que peut posséder cette fonction, et soit A un nombre quelconque. Il existera aux environs du point a une infinité de valeurs de z pour lesquelles on aura*

$$|z-a|<\varepsilon, \qquad |f(z)-A|<\eta,$$

quelque petits que soient ε et η.

Traçons, en effet, autour de a un cercle C d'un rayon ρ assez petit pour qu'il ne renferme aucun autre point critique essentiel et considérons la fonction

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A}.$$

Ses points critiques dans le cercle seront les suivants :

1° Le point critique essentiel a;

2° Des pôles, aux points où $f(z)=A$.

Si ces pôles sont en nombre infini, ils convergeront vers le point limite a, et l'on aura, pour une infinité de valeurs de z,

$$|z-a|<\varepsilon, \qquad f(z)-A=0.$$

Le théorème sera donc démontré.

Si ces pôles sont en nombre fini, on pourra réduire ρ suffisamment pour que C n'en contienne plus aucun, et $\varphi(z)$, n'ayant plus qu'un seul point critique a dans ce cercle, pourra être développée, d'après la formule de Laurent, en une double série

$$\varphi(z)=\sum_0^\infty A_m(z-a)^m+\sum_1^\infty B_m(z-a)^{-m}.$$

La première série sera convergente dans le cercle C, et si $|z-a|<\rho'$, ρ' étant une quantité moindre que ρ, son module ne pourra surpasser la constante fixe

$$K=\sum_0^\infty |A_m|\rho'^m.$$

La seconde est une fonction entière de $\frac{1}{z-a}$, car elle converge dans tout l'intérieur de C (sauf au point a pour lequel $\frac{1}{z-a}$ est infini) et *a fortiori* en dehors de C, où $\left|\frac{1}{z-a}\right|$ est moindre qu'à l'intérieur. On pourra donc, d'après le théorème précédent, assigner à la variable une valeur telle que son module surpasse un nombre quelconque M.

La valeur correspondante de $|z-a|$ sera $<\rho'$, si M est assez grand, car, lorsque $|z-a|\overline{\gtrless}\rho'$, $|\varphi(z)|$ ne peut surpasser la constante fixe

$$\sum_1^\infty |B_m|\rho'^{-m}.$$

On aura donc à la fois

$$|z-a|<\rho'$$

et

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{1}{f(z)-A}\right|>M-K,$$

d'où

$$|f(z)-A|<\frac{1}{M-K},$$

et, par suite, en prenant ρ' assez petit et M assez grand,

$$|z-a<\varepsilon, \qquad |f(z)-A|<\eta.$$

Ayant trouvé un premier point z qui satisfasse à ces conditions, on pourra trouver de même un second point z_1 satisfaisant aux conditions

$$|z_1-a|<|z-a|, \qquad |f(z_1)-A|<|f(z)-A|,$$

et ainsi de suite.

M. *Picard* a démontré [1] qu'il existe au plus deux valeurs

---

[1] *Mémoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École Normale*, 1880).

(finies ou infinies) de A pour lesquelles les relations

$$|z - a| < \varepsilon, \qquad f(z) - A = 0$$

n'aient pas une infinité de solutions. Nous nous bornerons à énoncer ce résultat.

La proposition que nous venons d'établir s'appliquerait évidemment à tout point critique essentiel qui serait la limite d'une suite de points critiques essentiels de l'espèce que nous avons considérée.

340. Une fonction entière peut ne s'annuler pour aucune valeur de la variable, ou admettre au contraire des zéros simples ou multiples, en nombre fini ou infini. Mais, dans tous les cas, ces zéros forment un système de points isolés (t. I, nº 339).

Réciproquement nous allons établir la proposition suivante :

Théorème de M. Weierstrass. — *Étant donné un système quelconque de points isolés $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, on pourra construire une fonction entière dont ces points soient les zéros.*

Nous supposerons provisoirement que l'origine $z = 0$ ne fasse pas partie de la série des zéros donnés $a_0, a_1, \ldots$. Si le nombre de ceux-ci est fini, le produit

$$\left(1 - \frac{z}{a_0}\right)\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\cdots$$

satisfera à la question. Si ce nombre est infini, le produit ci-dessus, contenant une infinité de facteurs, pourra devenir divergent, ce qui rendrait la solution illusoire. Mais on peut la modifier ainsi qu'il suit :

Remarquons tout d'abord que les points $a_0, a_1, \ldots$ étant isolés, il n'en existe qu'un nombre limité dans une portion finie quelconque du plan, et notamment dans un cercle de rayon donné décrit autour de l'origine. On pourra donc

ordonner les quantités $a_0, a_1, \ldots$ suivant l'ordre de grandeur de leur module. Si plusieurs de ces quantités ont même module ou même sont égales (ce qui arrivera si l'on veut donner des zéros multiples à la fonction), on pourra les disposer dans l'ordre qu'on voudra. En tout cas, on aura évidemment

$$\lim_{n=\infty} |a_n| = \infty.$$

Cela posé, considérons le produit infini

$$P(z) = \prod_0^\infty e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$$

où $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ désignent des polynomes en z.

Nous allons montrer que ces polynomes peuvent toujours être déterminés de telle sorte que le produit ci-dessus soit convergent et représente une fonction entière, satisfaisant aux conditions requises.

On a

$$e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = e^{M_n + \log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right)} = e^{M_n - \int_0^z \frac{dz}{a_n - z}},$$

la ligne L d'intégration entre o et z pouvant être choisie arbitrairement. Mais on a

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{dz}{a_n - z} &= \int_0^z \left[\frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{a_n^n} + \frac{z^n}{a_n^n(a_n - z)}\right] dz\\ &= \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{z^n}{na_n^n} + \int_0^z \frac{z^n\, dz}{a_n^n(a_n - z)}.\end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$M_n = \frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^{n-1}}{na_n^n}, \qquad \psi_n = -\int_0^z \frac{z^n\, dz}{a_n^n(a_n - z)},$$

nous aurons

$$e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = e^{\psi_n}.$$

Les polynomes M_n étant ainsi déterminés, nous aurons satisfait à la question. Considérons en effet l'ensemble des valeurs de z dont le module ne surpasse pas un nombre donné ρ, et soit $|a_\mu|$ le dernier terme de la suite $|a_0|, |a_1|, \ldots$ qui ne surpasse pas ρ. On aura

$$P(z) = \prod_0^\mu e^{M_n}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\sum_{\mu+1}^\infty \psi_n}.$$

Or, dans le domaine considéré, on a $|z| \overline{\overline{<}} \rho$, et pour les valeurs de n plus grandes que μ on a, d'autre part,

$$|a_n| \overline{\overline{>}} |a_{\mu+1}| > \rho,$$

et, par suite,

$$|\psi'_n| = \left| - \frac{z^n}{a_n^n(a_n - z)} \right| \overline{\overline{<}} \frac{\rho^n}{|a_{\mu+1}|^n(|a_{\mu+1}| - \rho)}.$$

Le terme général de la série $\sum \psi'_n$ a donc son module moindre que le terme général d'une progression géométrique convergente et indépendante de z; la série sera donc uniformément convergente dans le domaine considéré. La série $\sum \psi_n$ sera convergente dans ce même domaine, car on a

$$|\psi_n| = \left| \int_0^z \psi'_n \, dz \right| \overline{\overline{<}} \frac{\rho^n}{|a_{\mu+1}|^n(|a_{\mu+1}| - \rho)} l,$$

l désignant la longueur de la ligne d'intégration. Or le second membre est encore le terme général d'une progression géométrique convergente.

La série $\sum_{\mu+1}^\infty \psi_n$ sera donc, dans le domaine considéré, une fonction synectique, ayant pour dérivée $\sum_{\mu+1}^\infty \psi'_n$; il en sera de

même de l'exponentielle

$$e^{\sum\limits_{\mu+1}^{\infty}\psi_n},$$

qui d'ailleurs ne s'annulera pas dans ce domaine.

Mais, d'autre part, l'autre facteur de $P(z)$ est une fonction entière, qui ne s'annule qu'aux points $a_0, \ldots, a_\mu$. Donc $P(z)$ est synectique dans ce domaine et admet les zéros ci-dessus à l'exclusion de tout autre.

Comme on peut faire croître indéfiniment le nombre ρ, on voit que $P(z)$ est bien une fonction entière, dont les zéros sont les points $a_0, \ldots, a_n, \ldots$.

341. Nous avons supposé que le point $z = 0$ ne faisait pas partie de la série des zéros donnés. Si l'on voulait obtenir une fonction pour laquelle ce point fût un zéro d'ordre m, il suffirait de construire, par la méthode précédente, une fonction admettant les autres zéros de la suite et de la multiplier par z^m.

342. Ayant ainsi construit une fonction entière $f(z)$ ayant les zéros demandés, proposons-nous de trouver l'expression générale des fonctions entières qui jouissent de cette propriété.

Soit $f_1(z) = Qf(z)$ l'une d'elles. Le quotient Q n'aura évidemment ni zéro ni point critique à distance finie. Son logarithme n'aura donc pas de points critiques à distance finie et sera une fonction entière. En la désignant par U, on aura

$$f_1(z) = e^U f(z).$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction de la forme ci-dessus jouira de la propriété demandée, le facteur e^U ne pouvant devenir ni nul ni infini.

343. On donne le nom de *fonctions méromorphes* aux fonctions dont tous les points critiques situés à distance finie sont des pôles.

Soient $F(z)$ une semblable fonction; $a_0, a_1, \ldots$ ses pôles; $\mu_0, \mu_1, \ldots$ leurs degrés de multiplicité. On peut construire une fonction entière $f(z)$ ayant ces points pour zéros, avec les mêmes degrés de multiplicité. La fonction $F(z)f(z) = \varphi(z)$, n'ayant plus de point critique à distance finie, sera une fonction entière. La fonction

$$F(z) = \frac{\varphi(z)}{f(z)}$$

sera donc le quotient de deux fonctions entières.

344. Les fonctions entières et les fonctions méromorphes rentrent comme cas particulier dans la catégorie des fonctions monodromes dont tous les points critiques, situés à distance finie, sont isolés. Proposons-nous de déterminer l'expression générale de ces dernières fonctions.

Soient $f(z)$ une semblable fonction; a l'un de ses points critiques. On aura, comme nous avons vu (307), aux environs de ce point

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{-\infty}^{\infty} A_m (z-a)^m \\ &= \sum_{0}^{\infty} A_m (z-a)^m + \sum_{1}^{\infty} A_{-m} (z-a)^{-m} = \varphi(z) + \psi(z). \end{aligned}$$

Chacune des deux séries partielles $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ peut contenir un nombre de termes limité ou illimité; mais, dans ce dernier cas, elle sera convergente aux environs du point a.

La série $\psi(z)$ sera même convergente dans tout le plan (le point a excepté).

D'autre part, il est clair que a n'est plus un point critique pour la fonction $\varphi(z)$. La nature de la singularité que présente la fonction $f(z)$ en ce point est donc caractérisée par la seconde fonction partielle $\psi(z)$.

345. Théorème de M. Mittag-Leffler. — *Étant donnée*

une suite quelconque de points isolés $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *et une série de fonctions correspondantes* $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ *de la forme*

$$\psi_n = \sum_{m=1}^{m=\infty} \mathrm{A}_{m,n}(z - a_n)^{-m},$$

on pourra toujours construire une fonction monodrome $f(z)$ *ayant pour points critiques* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *et telle qu'on ait*

$$f(z) = \varphi_0 + \psi_0 = \ldots = \varphi_n + \psi_n = \ldots,$$

φ_n *étant une fonction pour laquelle* a_n *ne soit plus un point critique.*

On satisfera évidemment à la question en posant

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\psi_n - \mathrm{P}_n),$$

si $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n, \ldots$ désignent des polynomes en z, choisis de telle sorte que la série $f(z)$ et la série dérivée

$$f'(z) = \sum (\psi'_n - \mathrm{P}'_n)$$

soient uniformément convergentes dans toute région finie du plan qui ne contient aucun des points critiques $a_0, \ldots, a_n, \ldots$.

Cherchons à déterminer les polynomes P, de manière à satisfaire à cette condition.

Soient ζ le maximum du module de z dans la région considérée; $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots$ les modules des quantités $a_0, \ldots, a_n, \ldots$; nous les supposerons rangés par ordre de grandeur croissante, de telle sorte qu'on ait

$$\lim \alpha_n = \infty \qquad \text{pour} \qquad n = \infty.$$

Traçons autour de chaque point critique a_n, et dans ses environs, un cercle c_n, dont le rayon R_n ne surpasse pas d'ailleurs une quantité constante, que nous désignerons par ρ.

On pourra assigner à n une valeur finie k, à partir de laquelle on ait constamment $\alpha_n - \rho - \zeta > 1$. Il résulte de cette inégalité que le cercle de rayon ζ, décrit de l'origine comme centre, ne coupe pas le cercle de rayon ρ décrit de a_n comme centre. Mais le premier de ces cercles contient le point z, le second contient le cercle c_n; donc z sera en dehors du cercle c_n (si $n \overline{\geq} k$).

Cela posé, on aura évidemment

$$f(z) = \sum_0^{k-1} (\psi_n - P_n) + \sum_k^\infty (\psi_n - P_n).$$

La première somme ne contient qu'un nombre limité de termes, dont chacun est uniformément convergent dans toute région qui ne contient aucun des points a_0, a_1, ... (car la série ψ_n procédant suivant les puissances entières et positives de la variable $\frac{1}{z - a_n}$, sa convergence est uniforme); donc elle est uniformément convergente, ainsi que sa dérivée, de quelque façon qu'on choisisse les polynomes P.

Passons à l'examen de la seconde somme.

La fonction ψ_n étant convergente dans la couronne comprise entre le cercle c_n et un second cercle C de rayon infini, et le point z étant d'ailleurs dans cette couronne, on aura, comme dans la démonstration du théorème de Laurent,

$$\psi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_n(u)\, du}{u - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{\psi_n(u)}{u - z} du.$$

La fonction $\psi_n(u)$ et, par suite, la fonction $\frac{u\psi_n(u)}{u - z}$ tendant évidemment vers zéro pour $u = \infty$, la première intégrale sera nulle (297), et l'on aura simplement

$$\begin{aligned} \psi_n(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \frac{\psi_n(u)}{u - z} du \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_n} \psi_n(u) du \left[\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \ldots + \frac{z^{\mu-1}}{u^\mu} + \frac{z^\mu}{u^\mu(u - z)} \right], \end{aligned}$$

μ étant un entier que nous nous réservons de déterminer en fonction de n.

Les premiers termes de cette intégrale donnent un polynome en z de degré $\mu - 1$. En le prenant pour P_n, il viendra

$$\psi_n - P_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n} \frac{z^\mu}{u^\mu(u-z)}\psi_n u\, du,$$

$$\psi'_n - P'_n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_n} \left[\frac{\mu z^{\mu-1}}{u^\mu(u-z)} + \frac{z^\mu}{u^\mu(u-z)^2}\right]\psi_n(u)\, du.$$

Le module de u sur le cercle c_n est évidemment $\geqq \alpha_n - \rho$. Soient M_n le maximum du module de $\psi_n(u)$ sur ce même cercle, λ_n un entier positif satisfaisant à l'inégalité

$$(n + 2\lambda_n) M_n \rho < (\alpha_n - \rho)^{\lambda_n}.$$

On rendra les séries

$$\sum(\psi_n - P_n), \quad \sum(\psi'_n - P'_n)$$

convergentes en posant

$$\mu = n + 2\lambda_n.$$

On a, en effet,

$$\sum|\psi_n - P_n| \leqq \sum \frac{1}{2\pi}\,\frac{\zeta^\mu M_n 2\pi\rho}{(\alpha_n - \rho)^\mu(\alpha_n - \rho - \zeta)}$$

$$\leqq \sum \frac{\zeta^n}{(\alpha_n - \rho)^n}\,\frac{K_n}{n + 2\lambda_n},$$

K_n désignant le facteur

$$\left(\frac{\zeta^2}{\alpha_n - \rho}\right)^{\lambda_n}\frac{1}{\alpha_n - \rho - \zeta}$$

et

$$\sum|\psi'_n - P'_n| \leqq \sum \frac{\zeta^n}{(\alpha_n - \rho)^n} K'_n,$$

K'_n désignant le facteur

$$K'_n = K_n\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{(\alpha_n - \rho - \zeta)(n + 2\lambda_n)}\right].$$

Les deux séries ci-dessus sont convergentes; car, si n tend vers ∞, K_n, K'_n, $\dfrac{\zeta}{\alpha_n - \rho}$ tendent vers zéro. La racine $n^{\text{ième}}$ du terme général tend donc vers zéro.

L'uniformité de la convergence résulte d'ailleurs de ce fait que ces dernières séries ont leurs termes indépendants de z.

346. Ayant ainsi construit une fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions demandées, on obtiendra évidemment la fonction la plus générale qui satisfasse à ces mêmes conditions en lui ajoutant une fonction entière quelconque.

347. Théorème. — *Toute fonction u qui a n valeurs pour chaque valeur de z et qui n'offre à distance finie que des points critiques algébriques est racine d'une équation algébrique de degré n, dont les coefficients sont des fonctions méromorphes de z.*

Ces coefficients se réduiront à des fractions rationnelles, si la fonction n'a que des points critiques algébriques, même en tenant compte du point $z = \infty$.

Soient, en effet, u_0, u_1, ..., u_{n-1} les n branches de la fonction. Un point quelconque a deviendra un point ordinaire ou un pôle pour l'une quelconque d'entre elles, telle que u_0, si l'on prend pour variable indépendante une puissance fractionnaire de $z - a$, telle que $(z-a)^{\frac{1}{q}} = Z$. On pourra donc, aux environs de ce point, développer u_0 en série convergente, suivant les puissances entières de Z. Le développement pourra d'ailleurs commencer par des puissances négatives, si le point considéré est un pôle pour u_0.

Soit donc

$$u_0 = AZ^\alpha + BZ^\beta + \dots.$$

Si z tourne $1, 2, \dots, q-1$ fois autour du point a, Z se reproduira, multiplié par les diverses racines $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

En les désignant par θ, θ^2, ..., θ^{q-1}, nous obtiendrons $q-1$ autres branches de la fonction, représentées par les séries

$$\begin{array}{l} u_1 = A\theta^\alpha Z^\alpha + B\theta^\beta Z^\beta + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{q-1} = A\theta^{(q-1)\alpha} Z^\alpha + B\theta^{(q-1)\beta} Z^\beta + \ldots. \end{array}$$

Élevons ces égalités à la puissance k, k étant un entier quelconque, et ajoutons les résultats. Il viendra

$$u_0^k + u_1^k + \ldots + u_{q-1}^k = \mathcal{A} Z^\lambda + \mathcal{B} Z^\mu + \ldots.$$

D'ailleurs le premier membre ne change pas, si l'on y change Z en θZ. Donc il en sera de même du second ; donc les exposants λ, μ, ... seront tous des multiples de q ; donc, enfin, la somme $u_0^k + \ldots + u_{q-1}^k$ sera développable en série convergente, suivant les puissances croissantes de la quantité $Z^q = z - a$.

Tout autre cycle de branches associées u_q, u_{q+1}, ... donnerait évidemment un résultat analogue. Donc la somme S_k des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des diverses branches de la fonction u est une fonction monodrome de z, pour laquelle le point a est un point ordinaire ou un pôle. Ce point a étant d'ailleurs quelconque, S_k sera une fonction méromorphe.

Supposons enfin que $z = \infty$ soit un point ordinaire ou, plus généralement, un point critique algébrique pour la fonction u. Chacune des branches u_0, ..., u_{n-1} sera développable aux environs de ce point, suivant les puissances entières et croissantes d'une puissance fractionnaire de $\frac{1}{z}$, telle que $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{q}} = Z$; et un raisonnement identique au précédent montre que ∞ est un point ordinaire ou un pôle de S_k. Donc S_k, n'ayant pour points critiques que des pôles, sera rationnel en z.

Cela posé, les quantités u_0, ..., u_{n-1} sont les racines de l'équation

$$(u - u_0)\ldots(u - u_{n-1}) = 0,$$

dont les coefficients, s'exprimant en fonction rationnelle et entière des sommes $S_1, \ldots, S_k, \ldots$, seront des fonctions méromorphes (ou des fractions rationnelles) de z en même temps que ces dernières.

348. Théorème. — *Si l'équation en u est irréductible, on pourra, en faisant décrire à la variable z un contour fermé convenable, passer de la branche u_0 à l'une quelconque des autres branches $u_1, \ldots, u_{n-1}$.*

Supposons, en effet, qu'on ne pût passer de la branche u_0 qu'aux branches $u_1, \ldots, u_m$, mais non aux branches suivantes $u_{m+1}, \ldots$; les branches $u_0, u_1, \ldots, u_m$ seraient évidemment permutées exclusivement entre elles, quel que fût le chemin suivi par la variable z. Et l'on verrait, comme tout à l'heure, que les coefficients de l'équation

$$(u - u_0) \ldots (u - u_m) = 0$$

seraient des fonctions méromorphes (ou des fractions rationnelles) de z. L'équation en u admettrait donc un facteur de même forme et de degré moindre.

CHAPITRE VII.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — Des périodes.

349. On dit qu'une fonction $f(u)$ est *périodique* et admet la période 2ω, si elle satisfait à la relation

$$f(u+2\omega)=f(u).$$

Si $f(u)$ admet plusieurs périodes, 2ω, $2\omega'$, ..., $2\omega^n$, elle admettra évidemment pour période toute quantité de la forme

$$2m\omega+2m'\omega'+\ldots,$$

m, m', ... étant des entiers quelconques, positifs ou négatifs.

Si toutes ces quantités sont différentes, on dira que les $n+1$ périodes 2ω, $2\omega'$, ... sont *distinctes*. Dans le cas contraire, ce seront des fonctions linéaires, à coefficients entiers de n nouvelles périodes 2Ω, $2\Omega'$, ..., $2\Omega^{n-1}$.

En effet, il existe entre elles, par hypothèse, une équation linéaire à coefficients entiers

$$(1) \qquad 2a\omega+2a'\omega'+\ldots=0.$$

Soit a le plus petit (en valeur absolue) de ceux des coefficients a, a', ... qui ne sont pas nuls. On aura

$$a'=aq'+r', \qquad a''=aq''+r'', \qquad \ldots,$$

q', q'', ... étant des entiers, et r', r'' des restes inférieurs à a en valeur absolue.

Posons

$$2\omega + 2q'\omega' + 2q''\omega'' + \ldots = 2\omega_1.$$

Il est clair : 1° que $2\omega_1$ est une période; 2° que 2ω, $2\omega'$, ... s'expriment par des fonctions linéaires, à coefficients entiers de $2\omega_1$, $2\omega'$, ... Ces nouvelles périodes sont liées par la relation

$$2a\omega_1 + 2r'\omega' + \ldots = 0,$$

où les coefficients, sauf le premier, sont moindres en valeur absolue que dans l'équation (1). Par une suite d'opérations analogues, on arrivera finalement à un système de périodes 2Ω, $2\Omega'$, ... liées par une équation où tous les coefficients soient nuls, sauf le premier. Celle des nouvelles périodes, $2\Omega^n$ par exemple, qui figure seule dans l'équation, sera donc nulle et disparaîtra des formules, qui donneront 2ω, $2\omega'$, ..., $2\omega^n$ en fonction de 2Ω, $2\Omega'$, ..., $2\Omega^{n-1}$.

350. Théorème. — *Toute fonction admettant plus de deux périodes distinctes, ou deux périodes distinctes dont le rapport soit réel, admet une période de module moindre que toute quantité donnée.*

Supposons d'abord que nous ayons trois périodes distinctes

$$2\omega = \alpha + \beta i, \qquad 2\omega' = \alpha' + \beta' i, \qquad 2\omega'' = \alpha'' + \beta'' i.$$

Nous aurons, quels que soient les entiers m, m', m'', la période

$$\begin{aligned} 2m\omega + 2m'\omega' + 2m''\omega'' = {} & m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'' \\ & + (m\beta + m'\beta' + m''\beta'')i. \end{aligned}$$

Soient M une limite supérieure des modules des quantités α, α', α'', β, β', β'', et k un entier arbitraire. Donnons à chacun des entiers m, m', m'' la suite des valeurs 0, 1, ..., k. Pour chacun de ces systèmes de valeurs, en nombre $(k+1)^3$, on aura

$$|m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha''| \leqq 3Mk,$$
$$|m\beta + m'\beta' + m''\beta''| \leqq 3Mk.$$

Soit n le plus grand entier moindre que $(k+1)^{\frac{3}{2}}$. Partageons l'intervalle de $-3Mk$ à $3Mk$ en n intervalles égaux, d'amplitude $\frac{6Mk}{n}$; chacune des deux quantités

$$m\alpha + m'\alpha' + m''\alpha'', \qquad m\beta + m'\beta' + m''\beta''$$

tombera dans l'un ou l'autre de ces intervalles, et le nombre des hypothèses distinctes qu'on pourra faire à ce sujet sera n^2. Ce nombre étant moindre que $(k+1)^3$, il existera nécessairement deux systèmes différents m_1, m'_1, m''_1 et m_2, m'_2, m''_2, tels que $m_1\alpha + m'_1\alpha' + m''_1\alpha''$ et $m_1\beta + m'_1\beta' + m''_1\beta''$ tombent respectivement dans les mêmes intervalles que $m_2\alpha + m'_2\alpha' + m''_2\alpha''$ et $m_2\beta + m'_2\beta' + m''_2\beta''$. On aura, par suite,

$$|(m_2 - m_1)\alpha + (m'_2 - m'_1)\alpha' + (m''_2 - m''_1)\alpha''| \overline{\overline{<}} \frac{6Mk}{n},$$

$$|(m_2 - m_1)\beta + (m'_2 - m'_1)\beta' + (m''_2 - m''_1)\beta''| \overline{\overline{<}} \frac{6Mk}{n},$$

d'où l'on conclut l'existence d'une période

$$2\Omega = (m_2 - m_1)2\omega + (m'_2 - m'_1)2\omega' + (m''_2 - m''_1)2\omega'',$$

de module moindre que

$$\frac{6Mk}{n}\sqrt{2},$$

expression qu'on peut rendre plus petite que toute quantité donnée en prenant k assez grand, car n est d'ordre $\frac{3}{2}$ par rapport à k.

351. Admettons en second lieu qu'on ait deux périodes distinctes 2ω, $2\omega'$, dont le rapport r soit réel. Il sera incommensurable, puisque les périodes sont distinctes. Posons

V. Laurent T. l'Analyse t. IV p. 218

$$1 = qr + r_1, \qquad r = q_1 r_1 + r_2, \qquad \ldots,$$

$q, q_1, \ldots$ étant des entiers, et $r_1, r_2, \ldots$ une suite illimitée de restes dont chacun soit au plus égal en valeur absolue à

la moitié du précédent. Multipliant ces égalités par 2ω, il viendra

$$2\omega = 2q\omega' + 2r_1\omega, \qquad 2\omega' = q_1 2r_1\omega + 2r_2\omega, \qquad \dots$$

Nous obtiendrons donc une suite de périodes $2r_1\omega, 2r_2\omega, \dots$ dont les modules décroissent indéfiniment.

352. Corollaire. — *Une fonction analytique uniforme ne peut avoir plus de deux périodes distinctes, ni deux périodes distinctes dont le rapport soit réel, à moins de se réduire à une constante.*

Car les points pour lesquels la fonction reprend la même valeur étant isolés (t. I, n° 339), il ne peut y avoir de période infiniment petite.

Dans l'étude que nous allons faire des fonctions à plusieurs périodes, nous supposerons toujours qu'il s'agisse de fonctions analytiques uniformes, et même méromorphes. Elles auront donc deux périodes

$$2\omega_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \qquad 2\omega_2 = \alpha_2 + \beta_2 i,$$

dont le rapport

$$\tau = \frac{\alpha_2 + \beta_2 i}{\alpha_1 + \beta_1 i} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} i$$

sera un nombre complexe. Sa partie imaginaire aura le signe du déterminant $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$.

353. Avant de procéder à cette étude, il nous faut établir quelques propositions relatives aux substitutions linéaires. On donne ce nom à l'opération qui consiste à remplacer $2\omega_1$, $2\omega_2$ par de nouvelles quantités

$$2\omega_1' = 2a\omega_1 + 2b\omega_2, \qquad 2\omega_2' = 2c\omega_1 + 2d\omega_2.$$

Cette opération S se représente par la notation

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Le déterminant $ad - bc = D$ se nomme le *déterminant de la substitution*. On doit le supposer différent de zéro.

Le rapport τ' des nouvelles périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ sera donné par la formule

$$\tau' = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}$$
$$= \frac{(a\alpha_1+b\alpha_2)(c\alpha_1+d\alpha_2)+(a\beta_1+b\beta_2)(c\beta_1+d\beta_2)+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\mathrm{D}i}{(a\alpha_1+b\alpha_2)^2+(a\beta_1+b\beta_2)^2}.$$

Sa partie imaginaire a le même signe que dans τ, ou le signe contraire, suivant que D est positif ou négatif.

On peut passer réciproquement de $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ à $2\omega_1$, $2\omega_2$ par la substitution inverse

$$2\omega_1 = \frac{2d\omega'_1 - 2b\omega'_2}{\mathrm{D}}, \qquad 2\omega_2 = \frac{-2c\omega'_1 + 2a\omega'_2}{\mathrm{D}}$$

de déterminant $\frac{1}{\mathrm{D}}$.

Si a, b, c, d sont entiers et $\mathrm{D} = \pm 1$, la substitution inverse aura aussi ses coefficients entiers, et les deux formules

$$2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2, \qquad 2m'_1\omega'_1 + 2m'_2\omega'_2$$

(m_1, m_2, m'_1, m'_2 entiers) représenteront la même suite de quantités. On dira dans ce cas que les deux systèmes de périodes ($2\omega_1$, $2\omega_2$) et ($2\omega'_1$, $2\omega'_2$) sont *équivalents*. L'équivalence sera *propre* ou *impropre*, suivant que D sera égal à $+1$ ou à -1.

Soient $2\omega''_1$, $2\omega''_2$ un troisième système de périodes liées à $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ par les relations

$$2\omega''_1 = 2a'\omega'_1 + 2b'\omega'_2, \qquad 2\omega''_2 = 2c'\omega'_1 + 2d'\omega'_2.$$

On aura évidemment

$$2\omega''_1 = 2(aa'+cb')\omega_1 + 2(ba'+db')\omega_2,$$
$$2\omega''_2 = 2(ac'+cd')\omega_1 + 2(bc'+dd')\omega_2.$$

Les deux substitutions

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{S}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

auront donc pour résultante la substitution

$$\begin{pmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix},$$

que nous représenterons par SS'.

En général SS' et S'S représenteront, d'après cela, des substitutions différentes; mais on aura

$$SS'S'' = S(S'S'').$$

Nous désignerons naturellement par S^2, S^3, ... les substitutions SS, SSS, ...; par S^{-1} la substitution inverse de S; enfin par 1 la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui laisse les périodes inaltérées.

Dorénavant, nous ne considérerons plus que les substitutions à coefficients entiers.

354. Nous donnerons le nom de *substitutions élémentaires* aux suivantes :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

m, n étant entiers et positifs.

On joint souvent à cette liste la substitution

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Celle-ci s'exprime au moyen des précédentes par la formule

$$B = A_2^{-1} A_1 A_2^{-1}.$$

On a réciproquement

$$A_1 = B A_2^{-1} B^{-1}.$$

Théorème. — *Toute substitution S à coefficients entiers est un produit de substitutions élémentaires.*

Il suffit d'établir ce théorème pour les substitutions

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dont le déterminant D est positif. Car si D était négatif, on aurait immédiatement

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} = LS',$$

S′ ayant pour déterminant — D, qui sera positif.

On peut supposer en outre que a, b, c, d aient pour plus grand commun diviseur l'unité. Car, si m est leur plus grand commun diviseur, soit

$$a = ma', \qquad b = mb', \qquad c = mc', \qquad d = md',$$

on aura

$$S = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = MS',$$

S′ étant une substitution de déterminant $\frac{D}{m^2}$, dont les coefficients n'ont plus de diviseur commun.

Supposons donc $D > 0$, et a, b, c, d sans diviseur commun; on aura

$$(2) \quad \begin{cases} S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b - a\lambda \\ c & d - c\lambda \end{pmatrix} = A_1^\lambda S_1, \\ S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - b\lambda & b \\ c - d\lambda & d \end{pmatrix} = A_2^\lambda S_2 \end{cases}$$

et, d'autre part,

$$(3) \quad \begin{cases} S = \begin{pmatrix} a - c\lambda & b - d\lambda \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_3 A_1^\lambda, \\ S = \begin{pmatrix} a & b \\ c - a\lambda & d - b\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = S_4 A_2^\lambda, \end{cases}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 étant des substitutions de même déterminant que S et dont les coefficients n'ont pas de diviseur commun.

Posons, d'après cela (si c n'est pas nul),

$$\begin{array}{ll} d = c\lambda_1 + d_1, & 0 < d_1 \leqq |c|, \\ c = d_1\mu_1 + c_1, & 0 \leqq c_1 < d_1, \\ d_1 = c_1\lambda_2 + d_2, & 0 < d_2 \leqq c_1, \\ c_1 = d_2\mu_2 + c_2, & 0 \leqq c_2 < d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On aura finalement

$$d_k = d', \qquad c_k = 0,$$

d' désignant le plus grand commun diviseur de c, d; et, d'après les formules (2),

$$S = TS',$$

$T = A_1^{\lambda_1} A_2^{\mu_1} \ldots A_1^{\lambda_k} A_2^{\mu_k}$ étant un produit de substitutions élémentaires, et S' une substitution de même déterminant que S, dont les coefficients n'ont pas de diviseur commun, mais de la forme plus simple

$$S' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Si b' n'est pas divisible par d', posons de même

$$\begin{array}{ll} d' = b'\lambda'_1 + d'_1, & 0 < d'_1 \leqq |b'|, \\ b' = d'_1\mu'_1 + b'_1, & 0 \leqq b'_1 < d'_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

On aura, d'après les formules (3),

$$S' = S''T',$$

$T' = \ldots A_1^{\mu'_1} A_2^{\lambda'_1}$ étant un produit de substitutions élémentaires, et S'' une substitution de la forme

$$\begin{pmatrix} a'' & 0 \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

où d'' étant égal au plus grand commun diviseur de b', d' sera $< d'$.

Si c'' n'est pas divisible par d'', on aura de même

$$S'' = T''S''',$$

T'' étant un produit de puissances de A_1, A_2, et S''' une substitution de la forme

$$S''' = \begin{pmatrix} a''' & b''' \\ 0 & d''' \end{pmatrix},$$

où $d''' < d''$.

En continuant ces opérations, on arrivera nécessairement à une substitution réduite

$$S^i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

où l'un des coefficients β, γ, par exemple γ, sera nul, l'autre étant divisible par δ. Les coefficients n'ayant pas de diviseur commun, α sera premier à δ.

Cela posé, on aura

$$S^i = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

et, comme $\beta - \alpha$ et δ ont pour plus grand commun diviseur l'unité,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha \\ 0 & \delta \end{pmatrix} = \Sigma\Theta,$$

Θ étant un produit de puissances de A_1, A_2 et Σ une substitution de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ \gamma' & 1 \end{pmatrix} = A_2^{\gamma'} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'ailleurs la substitution réduite $\begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, à laquelle nous arrivons, doit avoir le déterminant D; donc $\alpha' = D$.

Nous voyons donc que toute substitution S de déterminant D, et dont les coefficients n'ont pas de facteur commun,

peut être mise sous la forme

$$S = T_1 \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_2,$$

T_1 et T_2 étant des produits de puissances (positives ou négatives) des deux substitutions élémentaires A_1, A_2.

355. Soient

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix};$$

et considérons deux systèmes de périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, liées par les relations

$$(4) \qquad 2\omega'_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c\omega_1 + 2d\omega_2.$$

Posons

$$2\Omega_1 = 2a_1\omega_1 + 2b_1\omega_2, \qquad 2\Omega_2 = 2c_1\omega_1 + 2d_1\omega_2,$$
$$2\Omega'_1 = 2D\Omega_1, \qquad 2\Omega'_2 = 2\Omega_2;$$

nous aurons

$$2\omega'_1 = 2a_2\Omega'_1 + 2b_2\Omega'_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c_2\Omega'_1 + 2d_2\Omega'_2.$$

Les substitutions T_1, T_2 ayant l'unité pour déterminant, $2\Omega_1$, $2\Omega_2$ seront proprement équivalentes à $2\omega_1$, $2\omega_2$, et $2\Omega'_1$, $2\Omega'_2$ le seront à $2\omega'_1$, $2\omega'_2$. Grâce à ce remplacement des périodes initiales par d'autres équivalentes, la relation (4) qui existait entre celles-ci a pris la forme plus simple

$$2\Omega'_1 = 2D\Omega_1, \qquad 2\Omega'_2 = 2\Omega_2.$$

356. On obtiendrait une réduction analogue, quoique moins complète, en conservant les périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ et remplaçant seulement $2\omega_1$, $2\omega_2$ par d'autres périodes équivalentes. Nous avons vu, en effet, au début de la démonstration précédente, qu'on a

$$S = TS',$$

S′ étant de la forme

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Si, au lieu d'appliquer l'algorithme du plus grand diviseur aux coefficients d, c, ainsi que nous l'avons fait, nous avions opéré sur a, b, nous aurions pu faire disparaître le second coefficient au lieu du troisième et mettre S sous la forme TS′, où

$$S' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Cette substitution ayant le déterminant D, nous aurons

$$\alpha\delta = D.$$

En outre, α, γ, δ n'ont pas de facteur commun. Enfin, comme nous avons

$$S' = A_2^\lambda \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma - \delta\lambda & \delta \end{pmatrix}$$

et que le facteur A_2^λ peut être fondu dans T, nous pouvons disposer de λ de manière à obtenir une substitution réduite où γ soit l'un des nombres de la suite $0, 1, \ldots, \delta - 1$ (ou, si on le préfère, un nombre choisi à volonté parmi ceux qui lui sont congrus suivant le module δ).

Soit encore ici

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix};$$

posons

$$2\Omega_1 = 2a_1\omega_1 + 2b_1\omega_2, \qquad 2\Omega_2 = 2c_1\omega_1 + 2d_1\omega_2.$$

La relation entre les périodes $2\Omega_1$, $2\Omega_2$ et $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ deviendra

$$2\omega'_1 = 2\alpha\Omega_1, \qquad 2\omega'_2 = 2\gamma\Omega_1 + 2\delta\Omega_2 \qquad (\alpha\delta = D),$$

ou

$$2D\Omega_1 = 2\delta\omega'_1, \qquad 2D\Omega_2 = -2\gamma\omega'_1 + 2\alpha\omega'_2.$$

357. Il importe de déterminer le nombre des systèmes de valeurs différents que peuvent prendre les nombres α, γ, δ d'après les conditions ci-dessus :

$$\alpha\delta = \text{D}, \qquad 0 \leqq \gamma < \delta;$$
$$\alpha,\ \gamma,\ \delta \text{ sans facteur commun.}$$

Pour cela, décomposons D en facteurs premiers. Soit $\text{D} = p^n p'^{n'} \ldots$ On devra prendre pour δ un diviseur de D, tel que $p^m p'^{m'} \ldots$, et pour α le facteur complémentaire $p^{n-m} p'^{n'-m'} \ldots$.

On sait que chaque nombre de la suite $0, 1, \ldots, p^m p'^{m'} \ldots - 1$ est déterminé sans ambiguïté par les restes r, r', ..., qu'on obtient en le divisant par p^m, par $p'^{m'}$, etc. Mais ce nombre ne pourra être pris pour γ que s'il n'a pas de facteur commun avec δ et α. Pour cela, il faut et il suffit :

1° Que p^m, p^{n-m}, r ne soient pas tous divisibles par p;

2° Que $p'^{m'}$, $p'^{n'-m'}$, r' ne soient pas tous divisibles par p', etc.

Si donc nous désignons par $\varphi(p^n)$ le nombre de systèmes de valeurs de m et de r, telles qu'on ait

$$0 \leqq m \leqq n, \qquad 0 \leqq r < p^m$$

(p^m, p^{n-m}, r sans diviseur commun), le nombre N des solutions cherchées sera

$$\varphi(p^n)\,\varphi(p'^{n'}) \ldots.$$

Or si $m = n$, r pourra prendre toutes les valeurs de 0 à $p^n - 1$, en nombre p^n. Si $0 < m < n$, il ne pourra prendre que les $p^m - p^{m-1}$ valeurs moindres que p^m et non divisibles par p. Enfin, si $m = 0$, il ne peut prendre que la valeur 0. Donc

$$\varphi(p^n) = p^n + \sum_1^{n-1} (p^m - p^{m-1}) + 1 = p^n + p^{n-1} = p^n\left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

et

$$N = p^n\left(1+\frac{1}{p}\right)p'^{n'}\left(1+\frac{1}{p'}\right) = \ldots = D\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p'}\right)\cdots$$

358. Les substitutions

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

de déterminant 1 peuvent être réparties en six classes distinctes, suivant que leurs divers coefficients sont pairs ou impairs. Il résulte, en effet, de la condition $ad - bc = 1$: 1° que l'un au moins des coefficients est pair; 2° que deux coefficients situés sur la même ligne ou la même colonne ne peuvent être pairs à la fois. Les seules hypothèses admissibles sont donc les suivantes :

I..........	a, d	impairs	b, c	pairs
II..........	a, c, d	»	b	pair
III..........	a, b, c	»	d	»
IV..........	a, b, d	»	c	»
V..........	b, c, d	»	a	»
VI..........	b, c	»	a, d	pairs

On a

$$S = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S_1 A_1;$$

et suivant que S appartient à la classe I, II, III, IV, V ou VI, S_1 appartiendra à la classe IV, V, VI, I, II, III.

On a de même

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} A_2 = S_2 A_2,$$

S_2 appartenant à la classe II, I, IV, III, VI ou V.

On pourra donc, suivant la classe à laquelle appartient S, mettre cette substitution sous l'une des six formes

$$T,\quad TA_2,\quad TA_1A_2,\quad TA_1,\quad TA_2A_1,\quad TA_1A_2A_1,$$

T désignant une substitution de la première classe.

Cette substitution T résulte elle-même de la composition des substitutions

$$A_1^2, \quad A_2^2 \qquad \text{et} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit, en effet,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, d \text{ impairs} \\ b, c \text{ pairs} \end{pmatrix}.$$

La relation $ad - bc = 1$ montre qu'on a

$$ad \equiv 1 \pmod{4},$$

d'où

$$a \equiv d \equiv \pm 1 \pmod{4}.$$

Supposons d'abord $a \equiv 1 \pmod 4$. On pourra déterminer sans ambiguïté une suite d'entiers pairs 2λ, 2μ, ... par les relations

$$\begin{aligned} b &= 2\lambda a + b_1, & |b_1| &< |a|, \\ a &= 2\mu b_1 + a_1, & |a_1| &< |b_1|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Posons de même

$$\begin{aligned} d &= 2\lambda c + d_1, \\ c &= 2\mu d_1 + c_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les entiers b, b_1, .., c, c_1, ... seront tous pairs, et les entiers a, a_1, ..., d, d_1, ... congrus à $1 \pmod 4$. Comme b, b_1, ... décroissent en valeur absolue, on aura finalement une quantité $b_{k+1} = 0$; et l'on aura évidemment

$$T = A_1^{2\lambda} A_2^{2\mu} \ldots A_1^{2\lambda_k} \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_{k+1} \end{pmatrix}.$$

D'ailleurs

$$a_k d_{k+1} = 1, \qquad a_k \equiv d_{k+1} \equiv 1 \pmod{4},$$

d'où

$$a_k = d_{k+1} = 1.$$

Enfin c_k est un nombre pair; en le représentant par $2\mu_k$, on aura

$$\begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_{k+1} \end{pmatrix} = A_2^{2\mu_k}.$$

Si $a \equiv -1 \pmod 4$, on aura

$$T = B^2 \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = B^2 T',$$

et la méthode ci-dessus permettra d'exprimer T' par un produit de puissances de A_1^2 et de A_2^2.

359. Le réseau des périodes

$$2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

dérivé des deux périodes fondamentales

$$2\omega_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \qquad 2\omega_2 = \alpha_2 + \beta_2 i,$$

peut se représenter géométriquement comme il suit :

A partir d'un point quelconque A, portons bout à bout deux droites représentant $2\omega_1$ et $2\omega_2$ en grandeur et en direction. Sur ces deux droites, construisons un parallélogramme, dit *parallélogramme des périodes*. Les diverses périodes seront représentées en grandeur et en direction par les vecteurs menés du point A aux points

$$A + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Ces points sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes égaux.

Nous dirons que deux nombres a, a' sont *équivalents* si la différence $a' - a$ est une période; et nous représenterons cette relation par la notation suivante

$$a' \equiv a,$$

analogue à celle usitée en Arithmétique

$$b' \equiv b \pmod m,$$

pour exprimer que la différence de deux entiers b, b' est un multiple de m et qui s'énonce, comme on sait, en disant que b, b' sont *congrus* suivant le *module* m.

L'aire du parallélogramme des périodes est

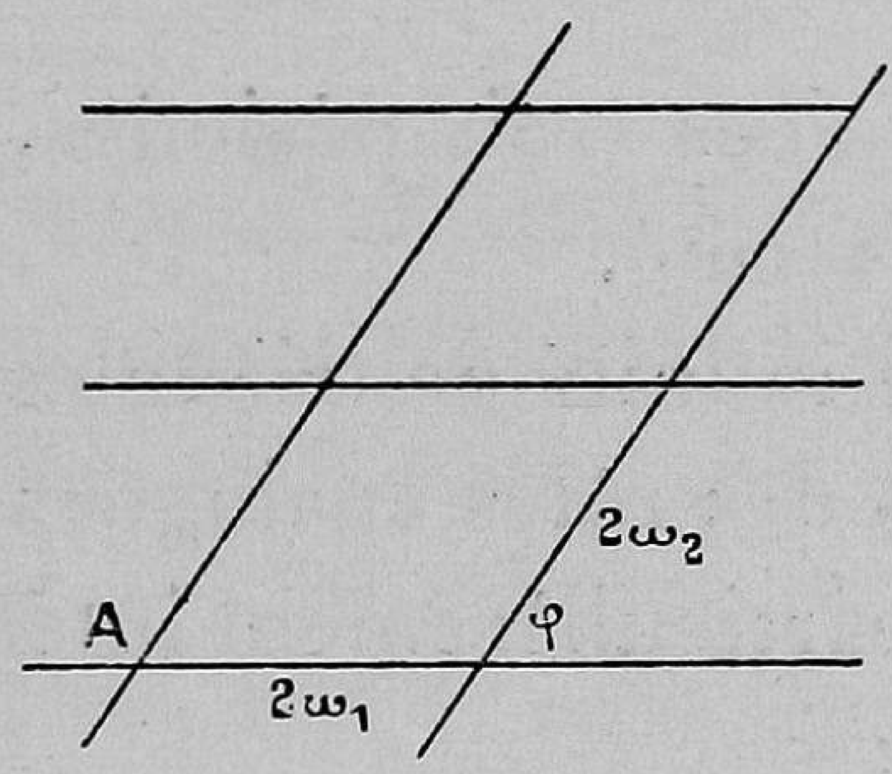
$$|\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|.$$

L'angle extérieur φ (*fig.* 40) représente l'argument du rapport

$$\tau = \frac{2\omega_2}{2\omega_1}.$$

S'il est $< \pi$, la partie imaginaire de τ sera positive; sinon elle sera négative. Dans le premier cas, si l'on fait le tour du

Fig. 40.



parallélogramme en s'éloignant du point A suivant la ligne $2\omega_1$, la rotation aura lieu dans le sens direct; dans le second cas, le sens sera rétrograde.

Les sommets du réseau resteront les mêmes, si l'on remplace $2\omega_1$, $2\omega_2$ par un système de périodes équivalentes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$. Il existe une infinité de semblables systèmes.

Appelons, en effet, *période primitive* toute période

$$2\omega'_1 = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2,$$

où m_1, m_2 sont premiers entre eux. On pourra déterminer (d'une infinité de manières) deux nouveaux entiers n_1, n_2 premiers entre eux et satisfaisant à la relation

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1.$$

On aura ainsi une seconde période primitive

$$2\omega'_2 = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2,$$

et le couple $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ sera équivalent au couple $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Le parallélogramme formé sur $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ a pour aire

$$|(m_1n_2 - m_2n_1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)| = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|;$$

il est donc équivalent au parallélogramme initial.

360. Par une raison de symétrie, que la suite de cette étude mettra en évidence, il convient de considérer, conjointement avec $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, une troisième période primitive $2\omega'_3$, définie par la relation

$$2\omega'_1 + 2\omega'_2 + 2\omega'_3 = 0,$$

laquelle exprime que ces trois périodes, mises bout à bout, forment un triangle fermé.

Il existe donc une infinité de triangles de périodes primitives. Il jouent tous des rôles analogues dans la théorie. Il en est un toutefois particulièrement intéressant; il peut s'obtenir comme il suit :

Prenons pour point de départ un triangle quelconque de périodes primitives, par exemple le triangle ABC formé par les périodes

$$AB = 2\omega_1, \qquad BC = 2\omega_2, \qquad CA = 2\omega_3.$$

Supposons qu'il ait un angle obtus, en B par exemple. Complétons le parallélogramme ABCD et menons sa diagonale BD; ABD sera un nouveau triangle de périodes primitives, de périmètre moindre que ABC.

Si ABD a un angle obtus, on en déduira un nouveau triangle de périmètre moindre, et ainsi de suite. Cette série d'opérations ne peut se prolonger indéfiniment, car les sommets du réseau $A + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ étant isolés, il n'en existe qu'un nombre borné dans un cercle de rayon donné

décrit de A comme centre. Il n'existe donc qu'un nombre borné de périodes de module moindre que le périmètre ABC et *a fortiori* un nombre limité de triangles de périmètre moindre que ABC.

On arrivera donc nécessairement à un triangle MNP sans angle obtus (*fig.* 41). Un semblable triangle se nomme *triangle principal;* ses côtés

$$MN = 2\Omega_1, \qquad NP = 2\Omega_2, \qquad PM = 2\Omega_3$$

seront dits *périodes principales.*

Le triangle $MN'P'$, symétrique de MNP par rapport à l'un de ses sommets M, a pour côtés

$$-2\Omega_1, \qquad -2\Omega_2, \qquad -2\Omega_3.$$

C'est évidemment un second triangle principal.

361. Il n'en existe pas d'autre (si MNP n'est pas rectangle). Nous allons montrer, en effet, que les périodes $\pm 2\Omega_1$, $\pm 2\Omega_2$, $\pm 2\Omega_3$ sont parmi les périodes primitives, celles dont le module est minimum, ce qui les caractérise complètement; et MNP, $MN'P'$ sont les seuls triangles qu'on puisse construire avec ces six périodes.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que $|2\Omega_1|$ soit au plus égal à $|2\Omega_2|$ et à $|2\Omega_3|$.

Les angles en M et en N étant aigus et au moins égaux à l'angle en P, seront au moins égaux à $\frac{\pi}{4}$. La hauteur PH du triangle, étant égale à

$$|2\Omega_2|\sin N = |2\Omega_3|\sin M,$$

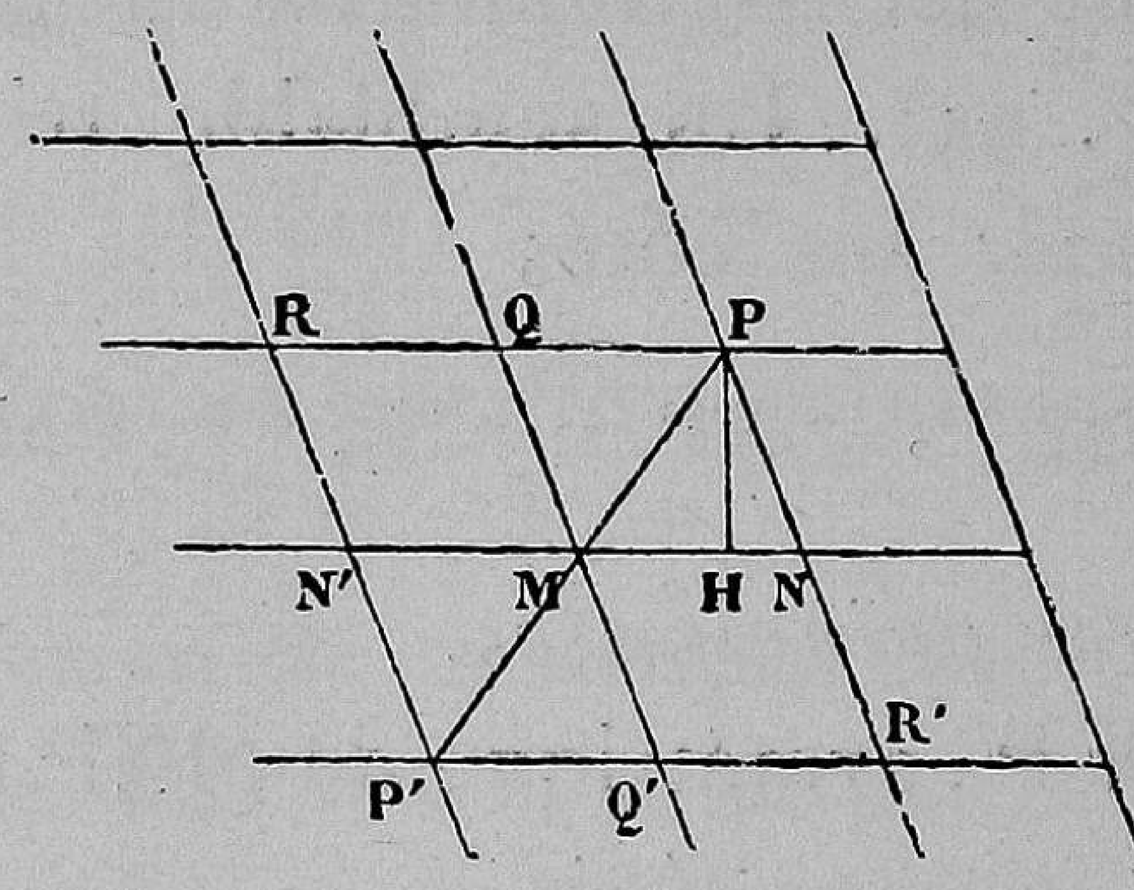
sera au moins égale à $\frac{|2\Omega_2|}{\sqrt{2}}$ et à $\frac{|2\Omega_3|}{\sqrt{2}}$.

Cela posé, construisons (*fig.* 41) le réseau de parallélogrammes qui a pour sommets les points $M + 2m_1\Omega_1 + 2m_2\Omega_2$.

Les modules des diverses périodes seront représentés par les distances de M aux sommets du réseau.

Or, parmi les sommets situés sur MN, deux seulement, N et N′, correspondent à des périodes primitives, $2\Omega_1$ et $-2\Omega_1$. Quant aux sommets situés sur PQ, la perpendiculaire abaissée

Fig. 41.



de M sur cette droite ayant son pied situé entre P et Q, ces deux points seront ceux qui donnent les périodes de module minimum

$$MP = -2\Omega_3 \quad \text{et} \quad MQ = 2\Omega_2.$$

Les sommets situés sur P′Q′ donneront de nouvelles périodes, parmi lesquelles celles du module minimum seront

$$MP' = 2\Omega_3 \quad \text{et} \quad MQ' = -2\Omega_2.$$

Quant aux autres sommets du réseau, ils donneront des périodes dont le module est au moins égal à 2 PH, quantité plus grande que $|2\Omega_2|$ et $|2\Omega_3|$, et *a fortiori* plus grande que $|2\Omega_1|$.

Notre proposition est donc établie.

Il nous reste à examiner le cas où le triangle MNP serait rectangle, en N par exemple. Dans ce cas, MQ étant perpendiculaire à PQ, la période

$$MR = 2\Omega_2 - 2\Omega_1$$

et son opposée MR′ auraient le même module que MP, de sorte qu'on aurait deux nouveaux triangles principaux, MQR, MQ′R′.

362. On a souvent intérêt à choisir les périodes primi-

tives $2\omega'_1$, $2\omega'_2$, génératrices du réseau, de telle sorte que leur rapport τ' ait le coefficient s de sa partie imaginaire positif, et le plus grand possible.

Soit

$$2\omega'_1 = \alpha'_1 + \beta'_1 i, \qquad 2\omega'_2 = \alpha'_2 + \beta'_2 i.$$

Ce coefficient est égal (352) à

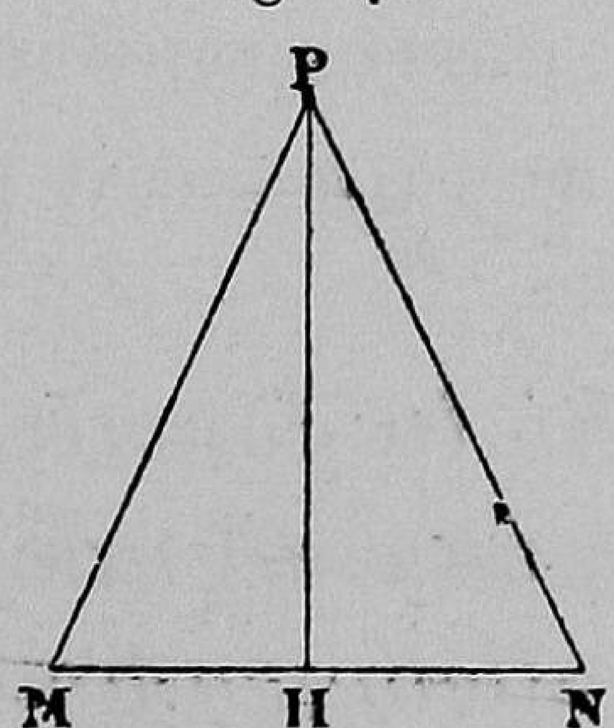
$$\frac{\alpha'_1\beta'_2 - \alpha'_2\beta'_1}{\alpha'^2_1 + \beta'^2_1} = \frac{\pm S}{|2\omega'_1|^2},$$

S désignant l'aire du parallélogramme $(2\omega'_1, 2\omega'_2)$, Cette aire étant indépendante du choix des périodes fondamentales (359), on voit qu'on devra prendre pour $2\omega'_1$ la période de module minimum ; nous avons vu le moyen de la déterminer, connaissant les périodes initiales $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Il existe une infinité de périodes qui, associées à $2\omega'_1$, forment un système équivalent à $(2\omega_1, 2\omega_2)$; elles sont deux à deux égales et de signe contraire. On pourra prendre celle d'entre elles qu'on voudra pour $2\omega'_2$, en choisissant son signe de telle sorte que s soit positif.

Prenons, par exemple, pour $2\omega'_2$, la seconde période NP du triangle principal MNP (*fig.* 42). L'aire de ce triangle

Fig. 42.



est $\frac{1}{2}$ S; d'ailleurs MN étant son plus petit côté, P sera son plus petit angle; l'un au moins des angles M, N, par exemple N, sera au moins égal à $\frac{\pi}{3}$. On aura donc

$$s = \frac{S}{\overline{MN}^2} = \frac{PH}{MN} = \frac{PN}{MN} \sin N \overset{=}{>} \sin\frac{\pi}{3}.$$

II. — Théorèmes généraux sur les fonctions elliptiques.

363. Nous appellerons, pour abréger, *fonctions elliptiques*, les fonctions méromorphes à deux périodes.

Théorème. *Une fonction elliptique entière se réduit nécessairement à une constante.*

Car son module reste borné dans un parallélogramme des périodes, et, à cause de la périodicité, dans tout le plan.

Théorème. — *La somme des résidus d'une fonction elliptique $f(u)$ par rapport aux pôles situés dans un parallélogramme des périodes est nulle.*

Car cette somme est égale à l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int f(u)\,du$, prise dans le sens direct autour du parallélogramme. Or cette intégrale est nulle, car deux éléments correspondants pris sur deux côtés opposés sont égaux et de signe contraire.

On nomme *ordre* de la fonction $f(u)$ le nombre des pôles qu'elle possède dans le parallélogramme, comptés chacun avec son degré de multiplicité.

Cet ordre est au moins égal à 2 ; car si l'on n'avait qu'un pôle simple, le résidu correspondant A étant différent de zéro, la somme des résidus ne serait pas nulle.

364. Théorème. — *Si la fonction $f(u)$ est d'ordre l : 1° l'équation $f(u) = c$, où c est une constante quelconque, admettra dans le parallélogramme l racines, égales ou inégales ; 2° la somme de ces racines est équivalente à celle des pôles.*

Soient, en effet, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les pôles de $f(u)$; $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les racines de $f(u) - c = 0$ dans le parallélogramme :

1° On aura

$$k - l = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(u)}{f(u) - c}\,du,$$

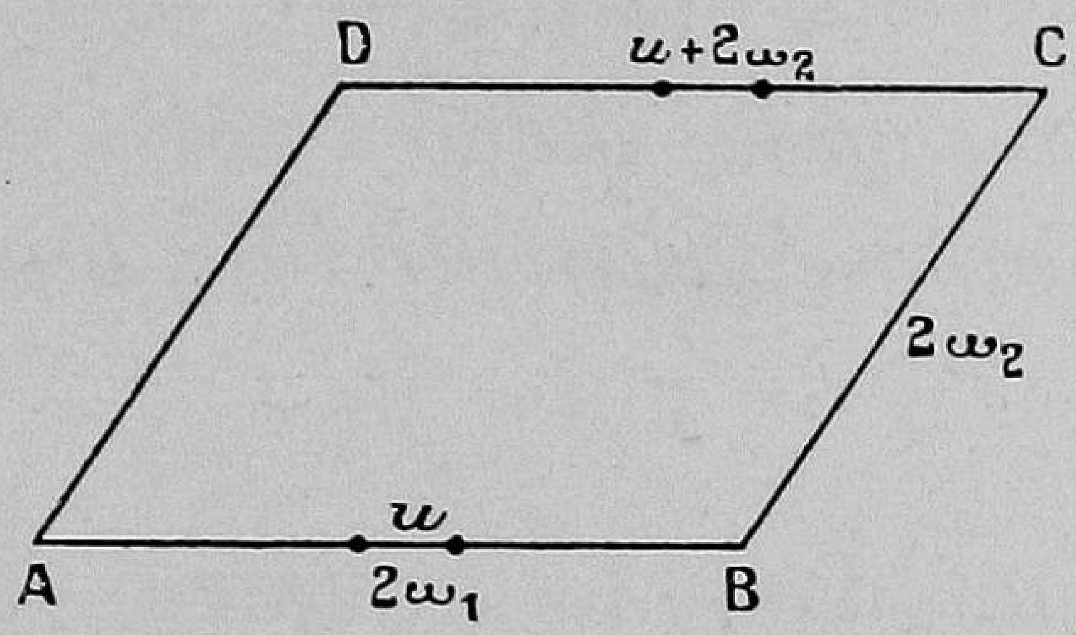
l'intégrale étant prise autour du parallélogramme; or, $\frac{f'(u)}{f(u)-c}$ étant évidemment doublement périodique comme $f(u)$, cette intégrale est nulle;

2° On a, d'autre part,

$$\Sigma\gamma - \Sigma\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{u f'(u)}{f(u)-c}\,du.$$

Deux éléments correspondants de l'intégrale pris sur les

Fig. 43.



côtés opposés AB et CD (*fig.* 43) auront pour valeur respective

$$\frac{u f'(u)}{f(u)-c}\,du$$

et

$$(u+2\omega_2)\frac{f'(u+2\omega_2)}{f(u+2\omega_2)-c}(-du) = -(u+2\omega_2)\frac{f'(u)}{f(u)-c}\,du.$$

Leur somme sera

$$-2\omega_2\frac{f'(u)}{f(u)-c}\,du.$$

La somme des intégrales suivant les côtés AB et CD sera donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{A}^{A+2\omega_1}\left[-2\omega_2\frac{f'(u)}{f(u)-c}\,du\right] + \frac{-2\omega_2}{2\pi i}\Big[\log(f(u)-c)\Big]_{A}^{A+2\omega_1}.$$

Or $f(u)-c$ reprend la même valeur aux deux limites. L'accroissement de son logarithme ne peut donc être qu'un multiple de $2\pi i$, tel que $-2m_2\pi i$. La somme des deux intégrales sera donc $2m_2\omega_2$.

De même, la somme des intégrales suivant BC et DA sera de la forme $2m_1\omega_1$. On aura donc

$$\Sigma\gamma - \Sigma\alpha = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

365. Théorème. — 1° *Si deux fonctions $f(u)$, $\varphi(u)$ aux mêmes périodes ont les mêmes pôles dans le parallélogramme, et si la partie infinie de leur développement aux environs de chacun d'eux est la même, leur différence est une constante;*

2° *Si deux fonctions $f(u)$, $\varphi(u)$, aux mêmes périodes, ont les mêmes zéros et les mêmes pôles dans le parallélogramme (avec la même multiplicité), leur rapport est une constante.*

Car $f(u) - \varphi(u)$ dans le premier cas, $\dfrac{f(u)}{\varphi(u)}$ dans le second, sera une fonction elliptique entière. C'est donc une constante.

366. Théorème. — *Pour que deux fonctions elliptiques $f(u)$ et $\varphi(u)$, admettant respectivement les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et $2\omega_1'$, $2\omega_2'$, soient liées par une équation algébrique, il faut et il suffit que les quatre périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ se réduisent à deux périodes distinctes.*

Supposons, en effet, qu'on ait la relation algébrique

$$0 = F(f, \varphi) = A f^\lambda + A_1 f^{\lambda-1} + \ldots + A_\lambda,$$

$A, A_1, \ldots$ étant des polynomes en φ. Changeons dans cette identité u en $u + 2m_1'\omega_1'$, m_1' étant un entier. Ce changement n'altérant pas φ, il viendra

$$0 = A f^\lambda(u + 2m_1'\omega_1') + A_1 f^{\lambda-1}(u + 2m_1'\omega_1') + \ldots.$$

D'ailleurs, f ne change pas si l'on augmente u de $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Posant donc

$$2m_1'\omega_1' + 2m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = \delta,$$

nous aurons

$$\begin{aligned} o &= A f^\lambda(u+\delta) + A_1 f^{\lambda-1}(u+\delta) + \dots \\ &= F[f(u+\delta), \varphi u] \\ &= F + f' \frac{\partial F}{\partial f}\delta + \left(f'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial f^2} + f'' \frac{\partial F}{\partial f}\right)\frac{\delta^2}{1.2} + \dots . \end{aligned}$$

Si les trois périodes $2\omega'_1$, $2\omega_1$, $2\omega_2$ étaient distinctes, on pourrait choisir les entiers m_1, m_2, m'_1 de telle sorte que δ devînt plus petit que toute quantité donnée. Les coefficients de chaque puissance de δ seront donc nuls séparément; on en déduit

$$F = o, \qquad \frac{\partial F}{\partial f} = o, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial f^2} = o, \qquad \dots,$$

d'où

$$A = A_1 = \dots = o.$$

Donc $\varphi(u)$, satisfaisant à des équations algébriques à coefficients constants, se réduirait à une constante.

On a donc nécessairement entre les périodes une relation de la forme

$$(1) \qquad 2m'_1\omega'_1 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 = o.$$

On démontrera de même l'existence d'une autre relation

$$(2) \qquad 2n'_2\omega'_2 + 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2 = o.$$

Les quatre périodes données se réduiront donc à des fonctions linéaires de deux périodes distinctes.

367. Réciproquement, supposons l'existence de deux relations telles que (1) et (2); les deux fonctions f et φ seront liées par une équation algébrique. En effet, elles admettent un couple de périodes communes

$$\begin{aligned} 2\Omega_1 &= -2m'_1\omega'_1 = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2, \\ 2\Omega_2 &= -2n'_2\omega'_2 = 2n_1\omega_1 + 2n_2\omega_2. \end{aligned}$$

Sur ces deux périodes, formons un parallélogramme et soient respectivement μ, ν le nombre des pôles de f et de φ

qui s'y trouvent contenus. A chaque valeur particulière f_0 donnée à f correspondent μ classes de valeurs de u, de la forme

$$u_1+2m_1\Omega_1+2m_2\Omega_2,\quad \ldots,\quad u_\mu+2m_1\Omega_1+2m_2\Omega_2,$$

et à chacune de ces classes une seule valeur de φ. Ainsi, à chaque valeur de f répondent μ valeurs de φ et de même, à chaque valeur de φ, ν valeurs de f.

D'ailleurs, φ considéré comme fonction de f n'a que des points critiques algébriques. Soient, en effet, f_0, u_0, φ_0 trois valeurs correspondantes de f, u, φ. Aux environs de la valeur $u=u_0$, les fonctions méromorphes f et φ admettront des développements de la forme

$$f-f_0=\mathrm{M}(u-u_0)^\alpha+\mathrm{M}_1(u-u_0)^{\alpha+1}+\ldots,$$
$$\varphi-\varphi_0=\mathrm{N}(u-u_0)^\beta+\mathrm{N}_1(u-u_0)^{\beta+1}+\ldots,$$

α et β étant des entiers positifs : si f_0, φ_0, sont finis; dans le cas contraire, on aurait des développements analogues pour $\frac{1}{f}$ ou $\frac{1}{\varphi}$ et la conséquence serait la même.

La première équation, résolue par rapport à $u-u_0$, donnera son expression par une série de puissances fractionnaires de $f-f_0$. En la substituant dans la seconde équation, on obtiendra une expression analogue pour $\varphi-\varphi_0$.

Donc f et φ seront liées par une équation algébrique (347). Celle-ci sera en général de degré μ par rapport à φ, et de degré ν par rapport à f. Ce degré peut toutefois s'abaisser dans certains cas particuliers. Supposons, par exemple, que f et φ soient des fonctions paires de u. Les diverses classes de valeurs de f qui correspondent à une même valeur de u se répartissent en couples, tels que le suivant

$$u_1+2m_1\Omega_1+2m_2\Omega_2,\qquad -u_1+2m_1\Omega_1+2m_2\Omega_2.$$

Or, à toutes les valeurs d'un même couple correspond une valeur unique de φ, de sorte que le degré de l'équation en φ sera réduit de moitié. Il en est évidemment de même de son degré en f.

368. Corollaire. — *Toute fonction elliptique $f(u)$ est liée à sa dérivée par une équation algébrique.*

En effet $f'(u)$ admet évidemment les mêmes périodes que $f(u)$.

Cherchons le degré de cette équation. Soient $u_1, \ldots, u_i$ les pôles de $f(u)$ dans un parallélogramme; $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ leurs ordres de multiplicité. Aux environs de l'un d'eux, u_k, on aura un développement de la forme

$$f(u) = A(u - u_k)^{-\alpha_k} + A_1(u - u_k)^{-\alpha_k+1} + \ldots,$$

d'où

$$f'(u) = -\alpha_k A(u - u_k)^{-\alpha_k-1} + \ldots.$$

Le nombre des classes de valeurs de u qui correspondent à une même valeur de f sera égal à $\Sigma\alpha_k$, et le nombre de celles qui correspondent à une même valeur de f' sera

$$\Sigma(\alpha_k + 1) = \Sigma\alpha_k + i.$$

L'équation sera donc du degré $\Sigma\alpha_k$ en f' et du degré $\Sigma\alpha_k + i$ en f.

369. Nous venons d'établir quelques propriétés générales des fonctions elliptiques; mais il reste à prouver l'existence effective de semblables fonctions et à les construire. Ce sera l'objet de la Section suivante.

III. — Les fonctions pu, ζu, σu.

370. Posons

$$(1)\qquad \sigma u = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}},$$

$$(2)\qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right),$$

$$(3)\qquad pu = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - w)^2} - \frac{1}{w^2}\right],$$

sommes et produit s'étendant à toutes les valeurs de w qui sont de la forme $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ (le système $m_1 = m_2 = 0$ excepté, ce que rappellera l'accent dont les symboles $\prod$ et $\sum$ ont été affectés.

Ces expressions sont absolument et uniformément convergentes dans tout domaine borné R qui ne contient aucun sommet du réseau des périodes. En effet, le terme général de pu, par exemple, peut s'écrire

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2uw - u^2}{w^2(u-w)^2} = \frac{A}{w^3},$$

A tendant pour $w = \infty$ vers la limite $2u$, dont le module reste borné dans R. Or on a vu que la série $\sum \frac{1}{w^3}$ est absolument convergente (t. I, n° 319).

La même démonstration s'applique aux séries ζu et $\log \sigma u$.

On a évidemment

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{du}\log \sigma u = \dfrac{\sigma' u}{\sigma u} = \zeta u, \\ \zeta' u = -pu, \\ p' u = -\dfrac{2}{u^3} - \sum' \dfrac{2}{(u-w)^3} = -2\sum \dfrac{1}{(u-w)^3}. \end{cases}$$

Considérées comme fonctions des trois variables u, $2\omega_1$, $2\omega_2$, les fonctions σ, ζ, p sont homogènes, de degré 1, -1, -2 respectivement.

Considérées comme fonctions de $2\omega_1$, $2\omega_2$ seulement, elles restent invariables par toute transformation linéaire de déterminant ± 1. Car ce changement n'altère pas le réseau des périodes w.

Considérées comme fonctions de u seul, pu est une fonction paire, ζu et σu des fonctions impaires. Car les valeurs de w étant deux à deux égales et de signe contraire, on peut changer w en $-w$ dans les sommations. Si l'on change simultanément u en $-u$, pu reprend sa forme primitive, tandis que ζu et σu changent de signe.

371. Les pôles de $\wp u$ sont les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ils sont doubles. Aux environs de $u = 0$ on a

$$\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} = \frac{2u}{w^3} + \frac{3u^2}{w^4} + \frac{4u^3}{w^5} + \ldots.$$

Faisons la sommation, remarquons que les puissances impaires de u doivent se détruire; enfin, posons, pour abréger,

$$(5) \qquad c_1 = 3\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad c_2 = 5\sum{}' \frac{1}{w^6}, \qquad \ldots;$$

nous obtiendrons le développement

$$(6) \qquad \wp u = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots.$$

La fonction ζu a pour pôles les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces pôles sont simples et les résidus correspondants sont égaux à 1.

Comme ζu a pour dérivée $-\wp u$ et que $\zeta u - \frac{1}{u}$ s'annule pour $u = 0$, l'intégration de l'équation (6) donnera

$$(7) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} - c_1\frac{u^3}{3} - c_2\frac{u^5}{5} - \ldots.$$

Intégrant de nouveau et remarquant que, pour $u = 0$, $\log \sigma u - \log u$ s'annule, il vient

$$(8) \quad \begin{cases} \log \sigma u = \log u - c_1 \dfrac{u^4}{3.4} - c_2 \dfrac{u^6}{5.6} - \ldots, \\[2ex] \sigma u = u\, e^{-c_1\frac{u^4}{3.4} - c_2\frac{u^6}{5.6} - \ldots} = u(1 + d_1 u^4 + d_2 u^6 + \ldots), \end{cases}$$

$d_1, d_2, \ldots$ étant des polynomes entiers en $c_1, c_2, \ldots$.

D'ailleurs, σu est une fonction entière, dont les zéros sont les points $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Ces zéros sont simples.

372. Soit

$$2\omega = 2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2$$

une période quelconque du réseau. Le changement de u en $u + 2\omega$ ne fait que permuter les uns dans les autres les termes du développement

$$p'u = -2\sum \frac{1}{(u-w)^3}.$$

Étant absolument convergent, il restera inaltéré. Donc

$$p'(u + 2\omega) = p'u.$$

Intégrons, il viendra

$$p(u + 2\omega) = pu + C.$$

Pour déterminer la constante, posons $u = -\omega$; il viendra

$$p\omega = p(-\omega) + C = p(\omega) + C.$$

Donc C est nul, et pu sera doublement périodique, comme sa dérivée.

Comme on sait, en outre, qu'elle est paire, l'équation

$$pu = pu_0$$

admettra les racines

$$u = \pm u_0 + \text{période}.$$

Mais elle n'en admettra pas d'autre, car pu, n'ayant qu'un pôle double dans chaque parallélogramme, ne pourra y avoir plus de deux zéros.

Intégrons l'équation

$$p(u + 2\omega) = pu, \tag{9}$$

nous trouverons

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + C.$$

Posons encore $u = -\omega$, il vient

$$\zeta\omega = \zeta(-\omega) + C = -\zeta\omega + C,$$
$$C = 2\zeta\omega.$$

Posons

$$\eta_1 = \zeta\omega_1, \qquad \eta_2 = \zeta\omega_2. \tag{10}$$

Nous aurons, en particulier,

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta u + 2\eta_1,$$

$$\zeta(u + 2\omega_2) = \zeta u + 2\eta_2,$$

et, plus généralement, en posant

$$2\omega = 2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2,$$

$$2\eta = 2\mu_1\eta_1 + 2\mu_2\eta_2 = 2\zeta\omega,$$

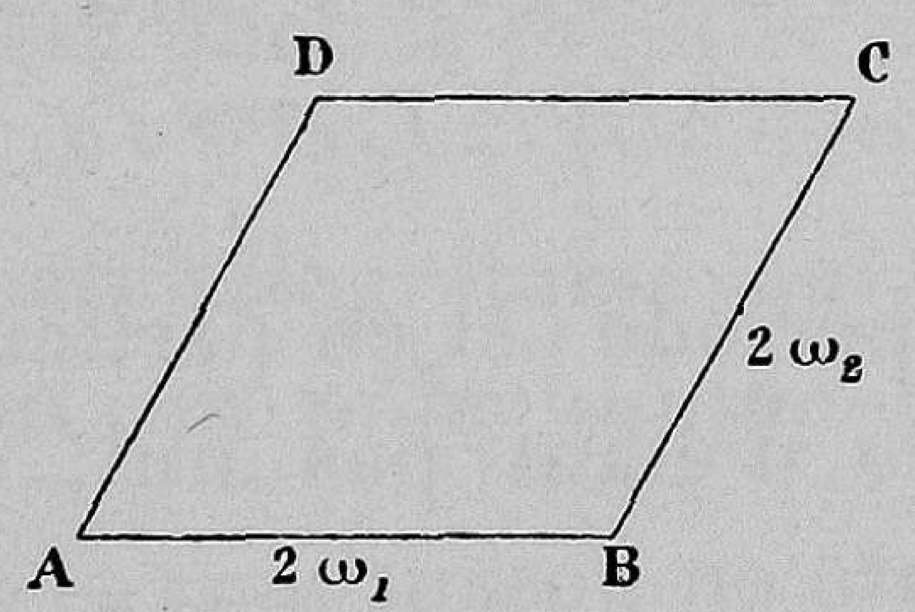
$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + 2\eta. \tag{11}$$

373. Les quatre constantes ω_1, ω_2, η_1, η_2 sont liées par une relation importante. Pour l'obtenir, calculons l'intégrale

$$\int \zeta u\, du$$

autour d'un parallélogramme de périodes ABCD (*fig.* 44).

Fig. 44.



Considérons deux éléments correspondants des deux intégrales suivant AB et CD. Ils sont respectivement égaux à

$$\zeta u\, du, \qquad -\zeta(u + 2\omega_2)\, du = -(\zeta u + 2\eta_2)\, du.$$

Leur somme sera $-2\eta_2\, du$. On aura donc, pour la somme des deux intégrales,

$$\int_{AB} -2\eta_2\, du = -4\eta_2\omega_1.$$

Sur les côtés BC et DA, les éléments correspondants seront

$$\zeta u\, du, \qquad -\zeta(u-2\omega_1)\, du = -(\zeta u - 2\eta_1)\, du,$$

et la somme des deux intégrales sera $4\omega_2\eta_1$.

L'intégrale cherchée sera donc $4(\omega_2\eta_1 - \eta_2\omega_1)$. Mais elle est égale au produit de $2\pi i$ par la somme des résidus relatifs aux pôles contenus dans le parallélogramme, si l'on a tourné dans le sens direct (c'est-à-dire si $\tau = \frac{2\omega_2}{2\omega_1}$ a sa partie réelle positive); au même produit changé de signe, dans le cas contraire. D'ailleurs ζu n'a dans le parallélogramme qu'un seul pôle, dont le résidu est 1.

Comparant les deux expressions obtenues, nous aurons

$$(12) \qquad \omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = \varepsilon\frac{\pi i}{2},$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1, suivant que τ a sa partie imaginaire positive ou négative.

374. Intégrons l'équation (11), il viendra

$$\log\sigma(u+2\omega) = \log\sigma u + 2\eta u = \text{const.},$$
$$\sigma(u+2\omega) = C\, e^{2\eta u}\sigma u.$$

Si ω n'est pas une période (et en particulier si 2ω est une période primitive), $\sigma\omega$ n'étant pas nul, on pourra encore déterminer la constante en posant $u = -\omega$. On trouve ainsi

$$\sigma\omega = C\, e^{-2\eta\omega}\sigma(-\omega) = -C\, e^{-2\eta\omega}\sigma\omega,$$

d'où

$$C = -e^{2\eta\omega}$$

et

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u.$$

Dans le cas le plus général, 2ω sera un multiple d'une période primitive $2\omega'$. Soit

$$2\omega = \lambda.2\omega', \qquad 2\eta = \lambda.2\eta'.$$

La formule précédente donnera

$$\begin{aligned}\sigma(u+2\omega) &= \sigma[u+(\lambda-1)2\omega'+2\omega')\\ &= -e^{2\eta'[u+(2\lambda-1)\omega']}\sigma[u+(\lambda-1)2\omega']\\ &= (-1)^\lambda e^{2\eta'[\lambda u+(2\lambda-1)\omega'+(2\lambda-3)\omega'+\ldots]}\sigma u\\ &= (-1)^\lambda e^{2\eta'(\lambda u+\lambda^2\omega')}\sigma u\\ &= (-1)^\lambda e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u.\end{aligned}$$

Cette formule ne diffère de la précédente que par le changement du facteur -1 en $(-1)^\lambda$, qui sera égal à $+1$ lorsque ω est une période.

Ces résultats peuvent se condenser dans la formule suivante :

$$(13)\quad \begin{cases}\sigma(u+2\omega)=(-1)^{\mu_1+\mu_2+\mu_1\mu_2}e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u\\ (\omega=\mu_1\omega_1+\mu_2\omega_2,\ \eta=\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2).\end{cases}$$

375. Cherchons l'équation algébrique qui lie $p'u$ à pu (368).

A cet effet, formons un polynome en pu et $p'u$ qui, dans un parallélogramme donné, n'admette plus de pôles. Ce sera une fonction elliptique entière et, par suite, une constante. Si, de plus, il s'annule pour une valeur de u, il sera identiquement nul; ce sera donc le premier membre de l'équation cherchée.

Choisissons un parallélogramme qui contienne l'origine; pu et $p'u$ y auront un pôle unique $u=0$, aux environs duquel on a

$$\begin{aligned}p\,u &= \frac{1}{u^2}+3\sum{}'\frac{1}{w^4}u^2+5\sum{}'\frac{1}{w^6}u^4+\ldots,\\ p'u &= \frac{-2}{u^3}+6\sum{}'\frac{1}{w^4}u+20\sum{}'\frac{1}{w^6}u^3+\ldots,\\ p'^2u &= \frac{4}{u^6}-24\sum{}'\frac{1}{w^4}\frac{1}{u^2}-80\sum{}'\frac{1}{w^6}+\ldots,\\ p^3u &= \frac{1}{u^6}+9\sum{}'\frac{1}{w^4}\frac{1}{u^2}+15\sum{}'\frac{1}{w^6}+\ldots,\\ p'^2u-4p^3u &= \quad -60\sum{}'\frac{1}{w^4}\frac{1}{u^2}-140\sum{}'\frac{1}{w^6}+\ldots.\end{aligned}$$

Posant donc, pour abréger,

$$(14)\qquad g_2 = 60\sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140\sum{}' \frac{1}{w^6},$$

le polynome $p'^2 u - 4p^3 u + g_2 pu + g_3$, non seulement n'aura plus de pôle, mais s'annulera pour $u = 0$, L'équation cherchée est donc

$$(15)\qquad p'^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3.$$

376. Dérivons cette équation et supprimons le facteur commun $2p'$. Il viendra

$$(16)\qquad p'' = 6p^2 - \frac{1}{2} g_2.$$

Substituons dans cette équation le développement

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \dots.$$

L'identification des termes en u^{2n-2} donnera

$$2n(2n-1)c_n = 6(c_n + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-2}c_1 + c_n),$$

d'où

$$(17)\qquad c_n = \frac{6}{2n(2n-1)-12}(c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-2}c_1).$$

Cette formule récurrente permet d'exprimer $c_3, c_4, \dots$ par des polynomes entiers en c_1, c_2. Mais

$$(18)\qquad c_1 = 3\sum{}' \frac{1}{w^4} = \frac{1}{20} g_2, \qquad c_2 = 5\sum{}' \frac{1}{w^6} = \frac{1}{28} g_3.$$

Tous les coefficients $c_1, c_2, c_3, \dots$ sont donc des polynomes entiers en g_2, g_3. De même pour les coefficients $d_1, d_2, \dots$ du développement (8) de σu.

Les quantités g_2, g_3 sont, d'après leur définition, homogènes d'ordre -4 et -6 en ω_1, ω_2. D'autre part, pu, σu sont homogènes d'ordre -2 et 1 en u, ω_1, ω_2. D'après cela,

le polynome c_n ne devra contenir que des termes $M\, g_2^\lambda g_3^\mu$, où les exposants satisfassent à la condition

$$-4\lambda - 6\mu + 2n = -2.$$

On aura, par suite,

$$c_3 = \alpha g_2^2, \qquad c_4 = \beta g_2 g_3, \qquad c_5 = \gamma g_2^3 + \delta g_3^2, \qquad \ldots,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ étant numériques.

La même observation s'applique aux polynomes d_n.

377. Prenons les dérivées successives de l'équation (16), en remplaçant, à mesure qu'elles s'introduisent, les quantités p'^2 et p'' par leurs valeurs en p; on trouvera

$$(19)\quad \begin{cases} p'' = 6p^2 - \dfrac{1}{2} g_2, \\ p''' = 12 p p', \\ p^{\text{IV}} = 12(p'^2 + p p'') = 12(10 p^3 - \frac{3}{2} g_2 p - g_3), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

et, généralement,

$$(20)\qquad p^{(2n)} = P_{n+1}, \qquad p^{(2n+1)} = Q_n p',$$

P_{n+1} et Q_n étant des polynomes entiers en $p u$, dont le degré est marqué par leur indice, et dont les coefficients sont des polynomes en g_2 et g_3, le premier étant purement numérique.

Soit

$$A p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots$$

un de ces polynomes. Il doit être homogène de degré $-2m$ en u, ω_1, ω_2; ses coefficients auront donc la forme

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = a g_2, \qquad A_3 = b g_3, \qquad A_4 = c g_2^2,$$
$$A_5 = d g_2 g_3, \qquad A_6 = e g_2^3 + f g_3^2, \qquad \ldots,$$

$a, b, \ldots, f$ étant numériques.

Les équations (19), (20) résolues par rapport à p^2, pp', p^3, ... donneront réciproquement

$$(21)\quad \begin{cases} p^2 = \frac{1}{6}p'' + \frac{1}{12}g_2, \qquad pp' = \frac{1}{12}p''', \\ p^3 = \frac{1}{10}\left(\frac{p^{\text{IV}}}{12} + \frac{3}{2}g_2 p + g_2\right), \qquad \ldots \end{cases}$$

et, généralement,

$$(22)\quad \begin{cases} p^n = B p^{(2n-2)} + B_1 p^{(2n-4)} + \ldots + B_{n-1} p + B_n, \\ p^n p' = C p^{(2n+1)} + C_1 p^{(2n-1)} + \ldots + C_n p', \end{cases}$$

où B, C sont des constantes, et $B_1, \ldots, B_n$, $C_1, \ldots, C_n$ des polynomes en g_2, g_3, dont l'homogénéité permettra d'écrire de suite la partie littérale. On aura en particulier $B_1 = 0$, $C_1 = 0$.

378. Posons

$$p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3.$$

Ces trois quantités sont distinctes, car ni les sommes, ni les différences des quantités ω_1, ω_2, ω_3 ne sont des périodes.

Ce sont d'ailleurs les racines de l'équation du troisième degré

$$4p^3 - g_2 p - g_3 = 0.$$

En effet, le premier membre de cette équation est égal à $p'^2 u$. Or $p'u$ étant doublement périodique et impaire, on aura

$$p'\omega_1 = p'(\omega_1 - 2\omega_1) = p'(-\omega_1) = -p'\omega_1 = 0.$$

On voit de même que $p'\omega_2 = 0$, $p'\omega_3 = 0$.

L'équation sera donc satisfaite pour $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$, d'où $pu = e_1, e_2, e_3$.

Les quantités e_1, e_2, e_3 sont, d'après leur définition,

homogènes de degré -2; elles satisfont aux relations

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$
$$e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\frac{1}{4} g_2,$$
$$e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3.$$

Les constantes g_2, g_3 se nomment les *invariants* du réseau $2m_1\omega_1, + 2m_2\omega_2$; elles ne dépendent pas, en effet, du choix des périodes fondamentales.

Nous aurons à considérer deux autres invariants :

1° Le *discriminant*

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = g_2^3 - 27 g_3^2,$$

Il est d'ordre -12 en ω_1, ω_2; nous avons vu qu'il est toujours différent de zéro;

2° L'*invariant absolu*

$$J = \frac{g_2^3}{\Delta}.$$

il est d'ordre zéro et, par suite, ne dépend que du rapport τ des périodes. Il reste invariable si l'on change τ en $\frac{n_1 + n_2 \tau}{m_1 + m_2 \tau}$, ce qui revient à changer le système des périodes fondamentales.

379. Jusqu'à présent, prenant pour point de départ deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, dont le rapport ne soit pas réel, nous avons défini pu, g_2, g_3 et établi les relations

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 \gtrless 0,$$
$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 4p^3 - g_2 p - g_3.$$

Suivons maintenant la marche inverse. Donnons-nous *a priori* deux constantes g_2, g_3 satisfaisant à l'inégalité $\Delta \lessgtr 0$.

Nous étudierons l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3;$$

nous montrerons qu'elle admet comme solution une fonction pu, dont nous déterminerons les périodes en fonction de g_2, g_3.

L'équation

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

a trois racines inégales e_1, e_2, e_3. Pour fixer les idées, nous les supposerons numérotées dans l'ordre où on les rencontre en tournant dans le sens direct autour du triangle $e_1 e_2 e_3$.

Soit z_0 un point quelconque différent de e_1, e_2, e_3. Il conviendra, pour plus de symétrie, de le supposer situé à l'intérieur du triangle $e_1 e_2 e_3$. En ce point, le radical $\sqrt{Z}$ aura deux valeurs égales et opposées; nous désignerons par $\sqrt{Z_0}$ l'une d'elles, choisie à volonté; l'autre sera $-\sqrt{Z_0}$.

Soit enfin u_0 une constante choisie à volonté.

D'après une proposition fondamentale que nous établirons dans la théorie des équations différentielles, il existe une fonction analytique z de la variable u qui satisfait à l'équation différentielle, et qui, pour la valeur initiale $u = u_0$, se réduit à z_0, le radical $\sqrt{Z}$ prenant en même temps la détermination $\sqrt{Z_0}$. En suivant de proche en proche la variation de cette fonction, on ne pourra rencontrer de point critique que lorsqu'elle deviendra infinie ou prendra l'une des valeurs e_1, e_2, e_3 qui sont critiques pour $\sqrt{Z}$, considéré comme fonction de z.

380. 1° Supposons que, pour une certaine valeur de u, telle que u_1, z devienne égal à l'une des racines e_1, e_2, e_3, par exemple à e_1. Le point u_1 ne sera pas critique. Posons, en effet, $z = e_1 + t^2$; l'équation différentielle

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{Z} = \sqrt{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}$$

sera transformée en

$$\frac{dt}{du} = \sqrt{(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)}.$$

La valeur $t=0$ n'étant pas un point critique pour le nouveau radical, $u=u_1$ sera un point ordinaire pour la fonction t et aussi pour $z=e_1+t^2$.

2° Supposons maintenant que, pour $u=u_1$, z devienne infini. Ce point sera un pôle. Posons, en effet, $z=\frac{1}{t^2}$. L'équation différentielle deviendra

$$\frac{-2\,dt}{t^3\,du}=\frac{1}{t^3}\sqrt{4-g_2t^4-g_3t^6}$$

ou

$$du=\pm\left(1-\frac{g_2t^4+g_3t^6}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}dt=\pm(1+\alpha_2t^4+\alpha_3t^6+\ldots)\,dt.$$

Intégrons à partir des valeurs initiales simultanées $t=0$, $u=u_1$, il viendra

$$u-u_1=\pm t\left(1+\frac{\alpha_2}{5}t^4+\ldots\right),$$

et, en résolvant par rapport à t,

$$t=\pm(u-u_1)[1+\beta_2(u-u_0)^4+\ldots],$$

$$z=\frac{1}{t^2}=\frac{1}{(u-u_1)^2}+\gamma_1(u-u_1)^2+\ \ldots$$

La fonction z est donc méromorphe, et aux environs de chacun de ses pôles, tel que u_1, la partie de son développement qui ne s'annule pas se réduit à $\frac{1}{(u-u_1)^2}$.

381. Cherchons à déterminer les valeurs de u pour lesquelles z prend une valeur déterminée z'. L'équation différentielle peut s'écrire

$$du=\frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

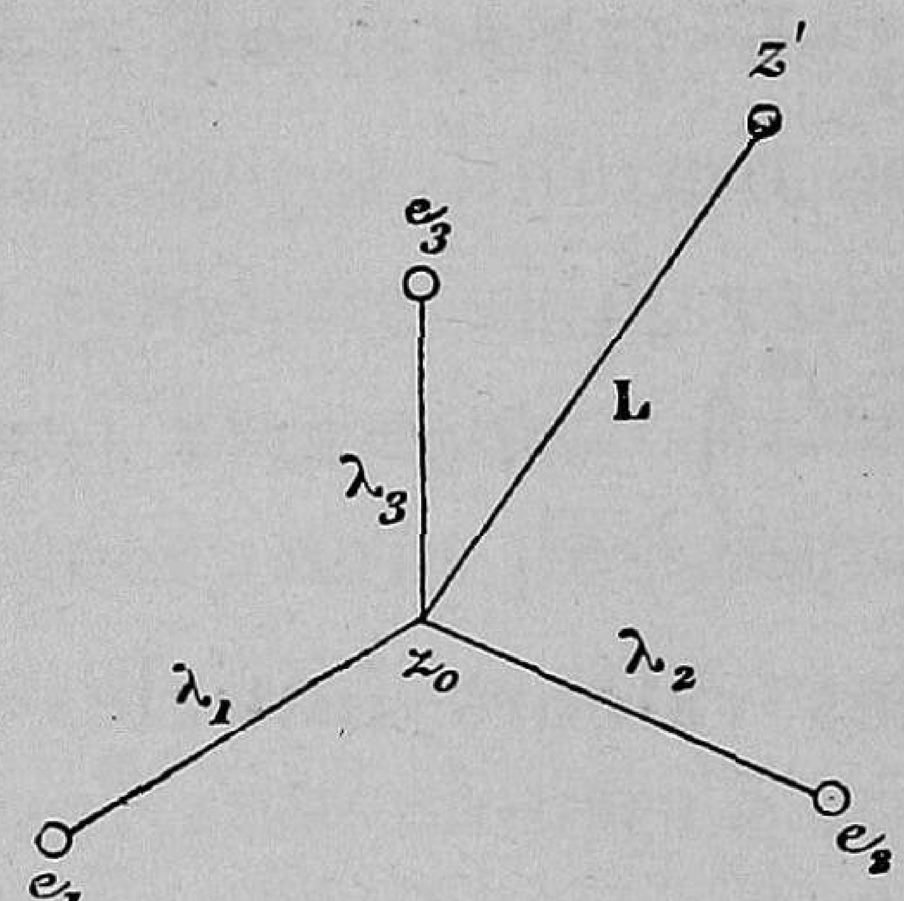
et en intégrant de z_0 à z'

$$u=u_0+\int_{z_0}^{z'}\frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Le signe de $\sqrt{Z}$ est d'ailleurs fixé par la condition que, pour la valeur initiale $z = z_0$, il se réduit à $\sqrt{Z_0}$.

Nous avons à chercher les diverses valeurs que peut prendre cette expression lorsqu'on fait varier la ligne d'intégration suivie de z_0 à z'. A cet effet, menons une ligne déterminée L (*fig.* 45) entre z_0 et z'; joignons d'autre part z_0 aux

Fig. 45.



points e_1, e_2, e_3 par des lacets L_1, L_2, L_3 respectivement formés par des lignes λ_1, λ_2, λ_3 intérieures au triangle, et par des cercles infiniment petits c_1, c_2, c_3.

On sait que tout chemin tracé de z_0 à z' est équivalent à une combinaison de lacets, suivie de la ligne L (t. I, n° 229). Deux chemins équivalents donnent d'ailleurs la même valeur à l'intégrale (t. I, n° 198).

L'intégrale suivant le lacet L_1 se compose des intégrales suivant λ_1, suivant c_1 et suivant la ligne de retour λ_1^{-1}. Celle-ci est égale à la première, car leurs éléments correspondants sont les mêmes, ne différant l'un de l'autre que par un double changement de signe, celui de du, et celui de $\sqrt{Z}$ produit par la rotation faite autour du point critique e_1. D'ailleurs, si le rayon du cercle tend vers zéro, l'intégrale suivant c_1 tendra vers zéro (297) et celle suivant λ_1 vers une limite déterminée (295) que nous désignerons par A_1.

Ce résultat est indépendant du sens dans lequel le lacet a été décrit; nous aurons donc

$$\int_{L_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \int_{L_1^{-1}} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 2 \int_{z_0}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 2 A_1,$$

On doit toutefois remarquer que si l'on avait décrit, avant le lacet considéré, d'autres lacets en nombre μ, cette opération aurait multiplié $\sqrt{Z}$ par $(-1)^\mu$, de sorte que l'intégrale serait dans ce cas égale à $(-1)^\mu 2A_1$.

Les intégrales suivant les lacets L_2, L_2^{-1}, L_3, L_3^{-1} seront de même égales à

$$\pm 2\int_{z_0}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \pm 2A_2, \qquad \pm 2\int_{z_0}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \pm 2A_3.$$

Enfin, la valeur de l'intégrale suivant L étant désignée par I, cette valeur deviendra égale à $-$I, si L a été précédé d'un nombre impair de lacets.

Les valeurs cherchées de u sont donc données par la formule générale

$$u = u_0 + 2n_1A_1 + 2n_2A_2 + 2n_3A_3 + (-1)^{n_1+n_2+n_3}I,$$

n_1, n_2, n_3 étant des entiers positifs ou négatifs, dont la somme est égale à 0 ou à 1, suivant que le nombre des lacets est pair ou impair.

382. Posons $n_1 = m_2$, $n_2 = -m_1$, d'où $n_3 = m_1 - m_2$ ou $m_1 - m_2 + 1$; et

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} A_3 - A_2 &= \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_1,\\ A_1 - A_3 &= \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_2,\\ A_2 - A_1 &= \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}} = \omega_3.\end{aligned}\right.$$

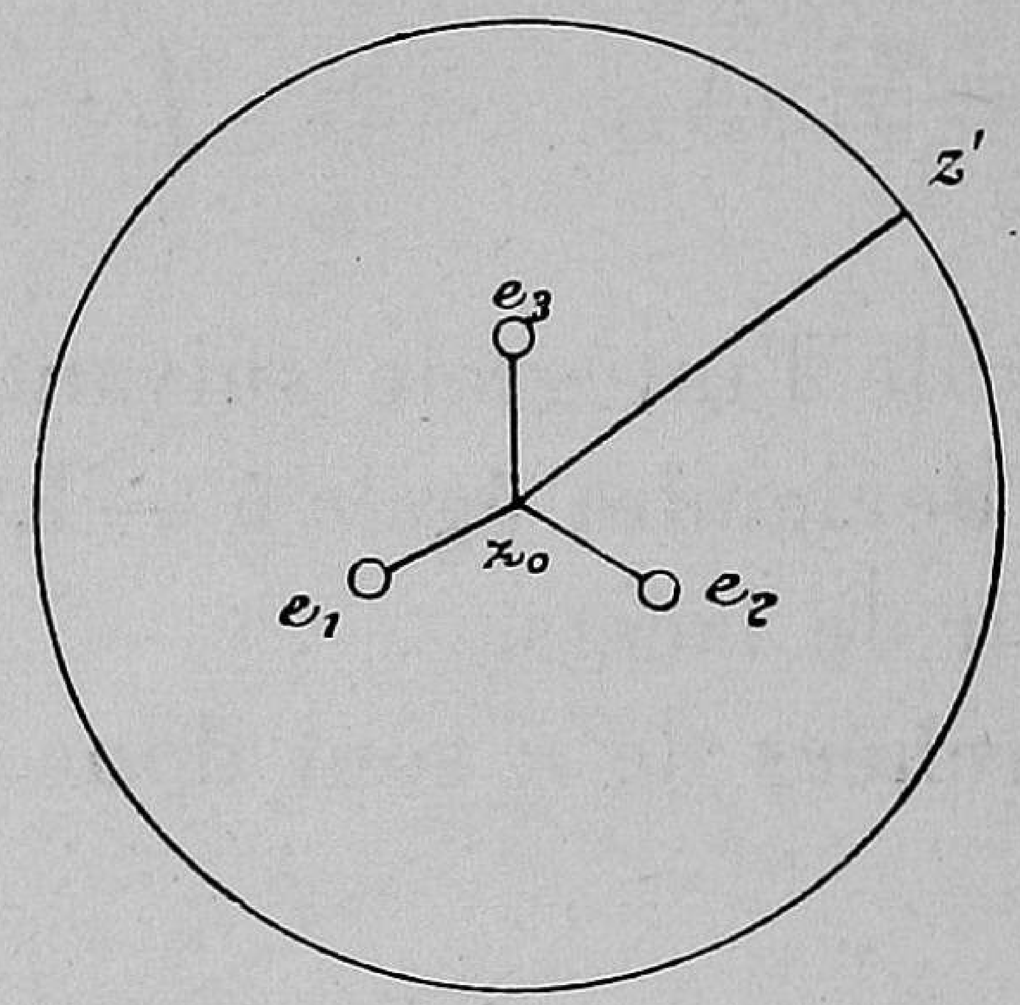
La formule ci-dessus se décomposera dans les deux suivantes

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + I + u_0,$$
$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + 2A_3 - I + u_0.$$

Donc z est une fonction elliptique d'ordre 2, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Ses pôles étant doubles, il n'y en aura qu'un dans chaque parallélogramme. Pour déterminer leur situation, concevons que le point z' s'éloigne à l'infini, et intégrons $\frac{dz}{\sqrt{Z}}$ le long d'un contour formé (*fig.* 46) :

Fig. 46.



1° Par la ligne $z_0 z'$; 2° un cercle C de rayon infini passant par z', décrit dans le sens rétrograde; 3° la ligne $z' z_0$; 4° les lacets L_3, L_1, L_2. Ce contour ne renfermant pas de point critique, l'intégrale sera nulle.

L'intégrale suivant C est nulle (297). Mais, en décrivant ce cercle qui entoure les trois points critiques, on a changé le signe de $\sqrt{Z}$. L'intégrale $\int_{z' z_0}$ sera donc égale à $\int_{z_0 z'}$; les intégrales suivant les lacets seront $-2A_3$, $+2A_1$, $-2A_2$. On aura donc

$$2\int_{z_0 z'} - 2A_3 + 2A_1 - 2A_2 = 0,$$

d'où

$$\int_{z_0 z'} = A_3 - A_1 + A_2.$$

Mais $u_0 + \int_{z_0 z'}$ est l'une des valeurs de u qui correspondent à $z = \infty$; donc $u_0 + A_3 - A_1 + A_2$ est l'un des pôles cherchés, et leur formule générale sera

$$u = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2 + u_0 + A_3 - A_1 + A_2.$$

Donnons à la constante u_0 la valeur particulière

$$-A_3+A_1-A_2,$$

z ne sera autre chose que la fonction pu construite sur les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$, car ces deux fonctions ont les mêmes pôles, et leurs développements aux environs de chacun d'eux ont non seulement même partie infinie, mais même terme constant, à savoir zéro.

On aura d'ailleurs

$$p\omega_1=e_1, \qquad p\omega_2=e_2, \qquad p\omega_3=e_3.$$

Posons, en effet, $z'=e_1$ et prenons pour L la ligne λ_1, pour laquelle $I=A_1$. La formule

$$u=2m_1\omega_1+2m_2\omega_2+I+u_0,$$

qui donne les valeurs correspondantes de u, deviendra

$$\begin{aligned} u &= 2m_1\omega_1+2m_2\omega_2-A_3+2A_1-A_2 \\ &= 2m_1\omega_1+2m_2\omega_1+2\omega_2+\omega_1 \end{aligned}$$

et se réduira à ω_1 en prenant $m_1=0$, $m_2=-1$.

Pour $z=e_2$, $I=A_2$, $m_1=m_2=0$, on aura de même

$$u=\omega_2,$$

et pour $z=e_3$, $I=A_3$, $m_1=m_2=-1$, on aura

$$u=\omega_3.$$

383. Les constantes η_1, η_2, η_3 peuvent être exprimées, comme les demi-périodes ω_1, ω_2, ω_3, par des intégrales définies. On a, en effet,

$$\zeta' u=-pu,$$

et, en intégrant de u à $u+2\omega_1$,

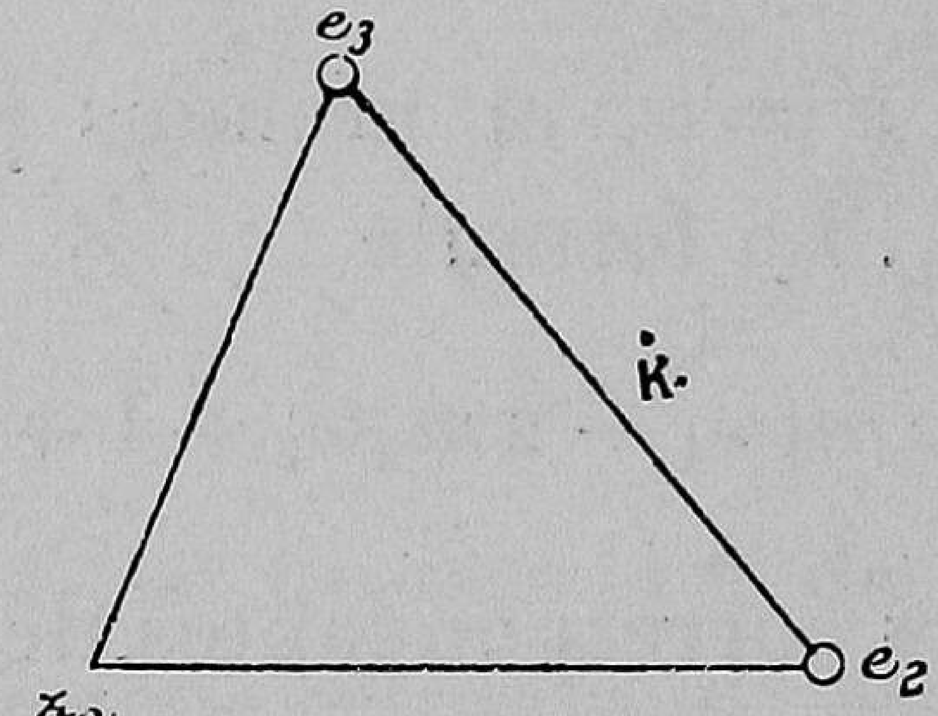
$$2\eta_1=\zeta(u+2\omega_1)-\zeta u=-\int_u^{u+2\omega_1} pu\,du.$$

Posons

$$pu = z, \qquad \text{d'où} \qquad du = \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

La différentielle à intégrer deviendra $\frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}$; on devra l'intégrer suivant une ligne telle qu'en la parcourant u croisse de $2\omega_1$. On pourra, par exemple, prendre le contour formé par les deux lacets L_3, L_2, ou le contour équivalent K formé par la ligne $e_2 e_3$ (*fig.* 47), le cercle c_3, la ligne $e_3 e_2$ et le cercle c_2.

Fig. 47.



Or les intégrales suivant les petits cercles sont nulles, et l'intégrale suivant $e_3 e_2$ est égale à l'intégrale suivant $e_2 e_3$. On a donc

$$2\eta_1 = -2\int_{e_2 e_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}.$$

On peut calculer de même η_2, η_3; donc

$$(24)\qquad \begin{cases} \eta_1 = -\displaystyle\int_{e_2}^{e_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}, \\ \eta_2 = -\displaystyle\int_{e_3}^{e_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}, \\ \eta_3 = -\displaystyle\int_{e_1}^{c_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}. \end{cases}$$

Tout le système des quantités ω_1, ω_2, ω_3, η_1, η_2, η_3 n'est défini qu'au signe près par les formules ci-dessus, car si l'on remplaçait $\sqrt{Z_0}$ par son opposée $-\sqrt{Z_0}$, le radical $\sqrt{Z}$ changerait de signe tout le long des lignes d'intégration.

384. Les intégrales ω_1, ω_2, ω_3, η_1, η_2, η_3 sont des fonctions continues de g_2, g_3, tant que ces paramètres ne franchiront pas un système de valeurs tel que e_1, e_2, e_3 soient en ligne droite.

On a, en effet, comme nous venons de le voir,

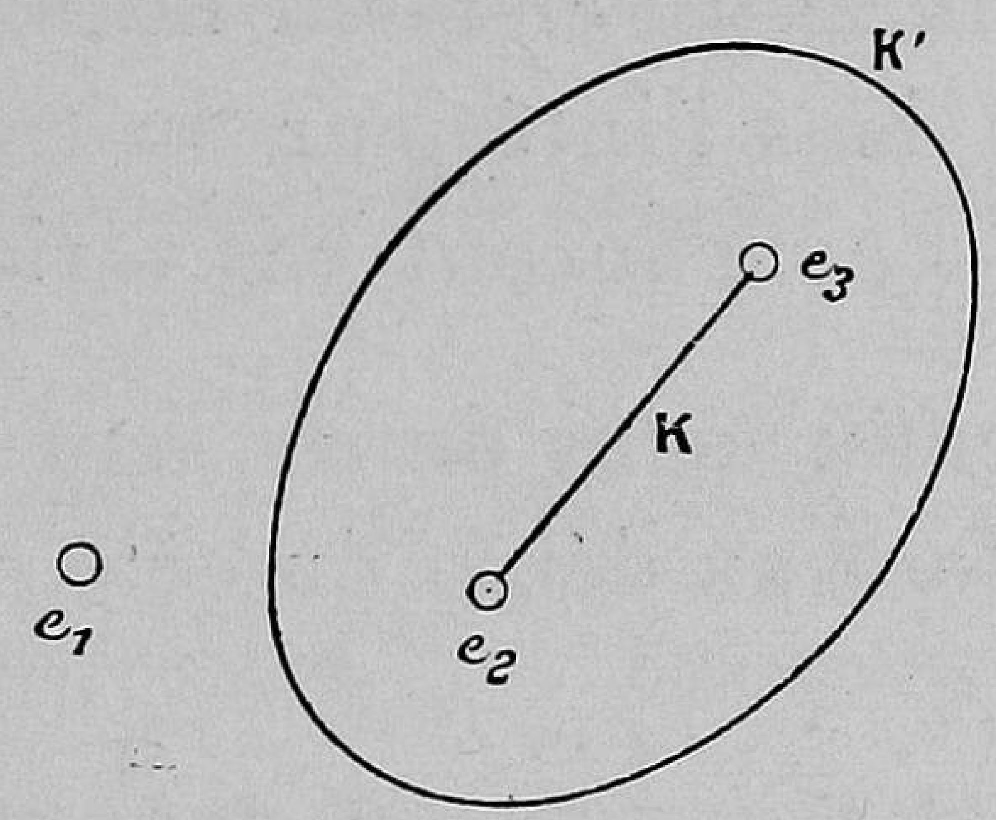
$$2\eta_1 = -\int_K \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}},$$

et de même

$$2\omega_1 = \int_K \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Soit K′ un contour fermé enveloppant K, mais laissant le point e_1 à son extérieur (*fig.* 48). Le radical $\sqrt{Z}$ étant synec-

Fig. 48.



tique entre K et K′, on pourra remplacer les intégrales suivant K par des intégrales suivant K′. Celles-ci, pouvant être dérivées sans difficulté par rapport à chacun des paramètres g_2 et g_3, seront continues.

385. Théorème. — *Les périodes* $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ *forment un triangle principal; et les rapports* $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, $\frac{\omega_3}{\omega_2}$, $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ *auront leur partie imaginaire positive.*

Cherchons, en effet, comment varie l'argument a du rapport

$$\frac{dz}{\sqrt{Z}} = \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

lorsqu'on suit le bord intérieur du contour du triangle $e_1 e_2 e_3$.

Soit a_0 la valeur de cet argument au commencement du côté e_2e_3. Lorsque z décrit ce côté, les arguments de dz, $z-e_2$, $z-e_3$ ne changent pas. Celui de $z-e_1$ s'accroît de $\widehat{e_1}$, angle au sommet e_1 du triangle. Donc, sur le côté considéré, a décroîtra de a_0 à $a_0-\frac{1}{2}\widehat{e_1}$.

L'intégrale ω_1 étant la limite d'une somme d'éléments dont les arguments sont compris entre ces deux valeurs extrêmes, son argument sera compris dans le même intervalle (t. I, n° 186). On aura donc

$$\arg\omega_1 = a_0 - \theta_1\frac{1}{2}\widehat{e_1}, \qquad 0<\theta_1<1.$$

Si maintenant z passe d'un élément infiniment voisin de e_3 et situé sur e_2e_3 à un autre élément infiniment voisin situé sur e_3e_1 (en restant dans l'intérieur du triangle) les arguments de $z-e_1$, $z-e_2$ n'auront pas varié; celui de $z-e_3$ aura décru de $\widehat{e_3}$; enfin celui de dz sera accru de $\pi-\widehat{e_3}$. L'argument a aura donc au début du côté e_3e_1 la valeur

$$a_0-\frac{1}{2}\widehat{e_1}+\pi-\frac{1}{2}\widehat{e_3} = a_0+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\widehat{e_2}.$$

Le long de ce côté, il décroîtra de $\frac{1}{2}\widehat{e_2}$; on aura donc

$$\arg\omega_2 = a_0+\frac{\pi}{2}+\theta_2\frac{1}{2}\widehat{e_2}, \qquad 0<\theta_2<1,$$

et, par suite,

$$\arg\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\pi}{2}+\theta_1\frac{1}{2}\widehat{e_1}+\theta_2\frac{1}{2}\widehat{e_2}.$$

Cette expression est comprise entre $\frac{\pi}{2}$ et π. Donc $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ a sa partie imaginaire positive. D'ailleurs, soit ABC le triangle formé sur $AB=2\omega_1$, $BC=2\omega_2$, $CA=2\omega_3$. L'argument de $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ représente évidemment le supplément de l'angle intérieur B. Celui-ci est donc aigu.

Comme on peut, dans le raisonnement ci-dessus, permuter circulairement les indices 1, 2, 3 on voit que le triangle ABC est acutangle. C'est donc l'un des deux triangles principaux.

386. Quelques cas particuliers intéressants sont à signaler :

1° Le triangle $e_1 e_2 e_3$ est infiniment aplati; et les trois points e_1, e_2, e_3 sont en ligne droite. Dans ce cas limite, le triangle ABC sera rectangle. (Si, pour fixer les idées, on suppose e_3 compris entre e_1 et e_2, les angles $\widehat{e_1}$ et $\widehat{e_2}$ seront nuls, et $2\omega_2$ perpendiculaire à $2\omega_1$.)

En vertu de l'égalité

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

la droite $e_1 e_2 e_3$ passera par l'origine; soit λ son argument : on pourra poser

$$e_1 = \mathrm{E}_1 e^{i\lambda}, \qquad e_2 = \mathrm{E}_2 e^{i\lambda}, \qquad e_3 = \mathrm{E}_3 e^{i\lambda},$$
$$g_2 = \mathrm{G}_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = \mathrm{G}_3 e^{3i\lambda},$$

E_1, E_2, E_3, G_2, G_3 étant réels.

Puisque e_1, e_2, e_3 sont les racines de l'équation

$$0 = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4z^3 - \mathrm{G}_2 e^{2i\lambda} z - \mathrm{G}_3 e^{3i\lambda},$$

E_1, E_2, E_3 seront les racines de l'équation

$$4t^3 - \mathrm{G}_2 t - \mathrm{G}_3 = 0.$$

Elles sont réelles; donc on aura

$$\mathrm{G}_2^3 - 27\mathrm{G}_3^2 > 0,$$

et l'invariant absolu

$$\mathrm{J} = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = \frac{\mathrm{G}_2^3}{\mathrm{G}_2^3 - 27\mathrm{G}_3^2}$$

sera réel et > 1.

Cette dernière condition est suffisante pour caractériser

ce cas. Car, J étant réel, $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ le sera. On pourra donc poser

$$g_2 = G_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = G_3 e^{3i\lambda},$$

G_2 et G_3 étant réels, puis

$$e_1 = E_1 e^{i\lambda}, \qquad e_2 = E_2 e^{i\lambda}, \qquad e_3 = E_3 e^{i\lambda};$$

E_1, E_2, E_3 seront les racines de l'équation

$$4t^3 - G_2 t - G_3 = 0.$$

On a d'ailleurs

$$J = \frac{G_2^3}{G_2^3 - 27 G_3^2},$$

quantité qui ne peut être > 1 que si son dénominateur est positif. Donc E_1, E_2, E_3 seront réels, et les points e_1, e_2, e_3 en ligne droite.

387. 2° Si J est réel, mais < 1, $G_2^3 - 27G_3^2$ sera négatif, et l'équation en t aura une racine réelle E_3 et deux racines imaginaires conjuguées

$$E_1 = He^{i\alpha}, \qquad E_2 = He^{-i\alpha}, \qquad (\text{H réel}).$$

On aura donc

$$e_1 = He^{i(\lambda+\alpha)}, \qquad e_2 = He^{i(\lambda-\alpha)}, \qquad e_3 = E_3 e^{i\lambda},$$

et, les quantités

$$e_3 - e_2 = e^{i\lambda}(E_3 - He^{-i\alpha}),$$
$$e_3 - e_1 = e^{i\lambda}(E_3 - He^{i\alpha})$$

ayant le même module, le triangle $e_1 e_2 e_3$ sera isoscèle.

Réciproquement, si les deux côtés $e_2 e_3$, $e_3 e_1$ sont égaux, leur bissectrice passera par l'origine, qui (en vertu de l'équation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$) est le centre de gravité du triangle. En désignant par λ son argument, on pourra mettre e_1, e_2, e_3 sous la forme

$$e_1 = He^{i(\lambda+\alpha)}, \qquad e_2 = He^{i(\lambda-\alpha)}, \qquad e_3 = E_3 e^{i\lambda},$$

H et E_3 étant réels. On en déduit

$$g_2 = G_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = G_3 e^{3i\lambda}, \qquad J = \frac{G_2^3}{G_2^3 - 27 G_3^2},$$

G_2 et G_3 étant réels.

D'ailleurs, l'équation

$$4t^3 - G_2 t - G_3 = 0$$

ayant pour racines les quantités

$$He^{i\alpha}, \quad He^{-i\alpha}, \quad E_3,$$

dont une seule est réelle, on aura

$$G_2^3 - 27 G_3^2 < 0 \qquad \text{et} \qquad J < 1.$$

388. Ce cas peut encore être caractérisé par la condition que le triangle ABC des périodes soit isoscèle.

Soient, en effet, l la longueur commune des deux côtés $e_3 e_1$, $e_3 e_2$; μ l'angle qu'ils forment avec la bissectrice; on aura

$$e_2 = e_3 + le^{i(\lambda+\mu)}, \qquad e_1 = e_3 + le^{i(\lambda-\mu)}.$$

Posant donc

$$z = e_3 + te^{i(\lambda+\mu)},$$

l'intégrale

$$\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

deviendra

$$e^{-\frac{i\lambda}{2}} \int_l^0 \frac{dt}{\sqrt{4(te^{i\mu} - le^{-i\mu})(t-l)t}}.$$

Si, dans l'intégrale

$$-\omega_2 = \int_{e_1}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

nous posons de même

$$z = e_3 + te^{i(\lambda-\mu)}.$$

nous aurons une transformée identique, sauf le changement du signe de μ.

Donc

$$e^{\frac{i\lambda}{2}}\omega_1 \quad \text{et} \quad -e^{\frac{i\lambda}{2}}\omega_2$$

seront des quantités conjuguées et auront même module. Donc $|\omega_1| = |\omega_2|$ et le triangle ABC est isoscèle.

Réciproquement, supposons qu'on ait $|\omega_1| = |\omega_2|$. Appelant $\frac{\rho}{2}$ cette quantité, nous pourrons choisir deux nouvelles quantités λ et μ, telles qu'on ait

$$2\omega_1 = \rho e^{i\left(-\frac{\lambda}{2}+\mu\right)}, \qquad 2\omega_2 = \rho e^{i\left(-\frac{\lambda}{2}-\mu\right)}.$$

Substituons ces valeurs dans les expressions

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4}, \qquad g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6},$$

il viendra

$$g_2 = \frac{60}{\rho^4}\, e^{2i\lambda} \sum{}' \frac{1}{(m_1 e^{i\mu} + m_2 e^{-i\mu})^4},$$

$$g_3 = \frac{140}{\rho^6}\, e^{3i\lambda} \sum{}' \frac{1}{(m_1 e^{i\mu} + m_2 e^{-i\mu})^6}.$$

Les sommes qui figurent dans ces expressions sont réelles, car les termes où $m_1 = m_2$ sont réels, et les autres sont conjugués deux à deux, si l'on associe ceux qui se déduisent l'un de l'autre en échangeant m_1 avec m_2. On aura donc

$$g_2 = G_2 e^{2i\lambda}, \qquad g_3 = G_3 e^{3i\lambda},$$

G_2 et G_3 étant réels. Donc J sera réel; mais il sera < 1; car, lorsque $J > 1$, nous avons vu que ABC n'est pas isoscèle, mais rectangle.

389. Deux cas plus particuliers encore méritent d'être signalés.

3° Si $J = 1$, d'où $g_3 = 0$, l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

aura une racine nulle et deux racines égales et opposées. Le triangle $e_1 e_2 e_3$ sera à la fois isoscèle et infiniment aplati, et le triangle ABC sera à la fois isoscèle et rectangle.

4° Si $J = 0$, d'où $g_2 = 0$, l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0$$

se réduira à la forme binome et l'on aura

$$e_1 : e_2 : e_3 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

$$e_3 - e_2 : e_1 - e_3 : e_2 - e_1 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}}.$$

Les triangles $e_1 e_2 e_3$ et ABC seront équilatéraux.

Réciproquement, si ABC est équilatéral, g_2 sera nul; on aura en effet

$$\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \omega_1.$$

Substituant cette valeur dans l'expression

$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4},$$

elle se réduira, à un facteur commun près, à la somme

$$S = \sum{}' \frac{1}{\left(m_1 + m_2 e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^4}.$$

Or on a

$$S = e^{-\frac{8\pi i}{3}} \sum{}' \frac{1}{\left(m_1 e^{-\frac{2\pi i}{3}} + m_2\right)^4}$$

$$= e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sum{}' \frac{1}{\left[-m_1\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) + m_2\right]^4},$$

ou, en posant $-m_1 + m_2 = m'_1$, $-m_1 = m'_2$,

$$S = e^{-\frac{2\pi i}{3}} \sum{}' \frac{1}{\left(m'_1 + m'_2 e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^4} = e^{-\frac{2\pi i}{3}} S.$$

Donc $S = 0$ et $g_2 = 0$, $J = 0$.

390. Il résulte de l'examen de ces cas particuliers qu'en général, si le triangle $e_1 e_2 e_3$ a deux côtés inégaux $e_2 e_3$ et $e_3 e_1$, les modules des périodes correspondantes $2\omega_1$, $2\omega_2$ seront inégaux.

Soit, pour fixer les idées, $e_2 e_3 < e_3 e_1$; on aura

$$|2\omega_1| < |2\omega_2|.$$

En effet si nous déformons le triangle $e_1 e_2 e_3$ d'une manière quelconque, de telle sorte que $e_2 e_3$ reste $< e_3 e_1$, la différence $|2\omega_2| - |2\omega_1|$, ne pouvant s'annuler, conservera un signe constant. Pour reconnaître qu'elle est positive, il nous suffira de considérer un cas particulier.

Soit, par exemple,

$$e_2 = -a - h, \qquad e_3 = -a + h, \qquad e_1 = 2a,$$

a et h étant positifs, et h infiniment petit. On aura

$$Z = 4(z - 2a)[(z + a)^2 - h^2],$$

$$2\omega_1 = 2\int_{-a-h}^{-a+h} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad 2\omega_2 = 2\int_{-a+h}^{2a} \frac{dz}{\sqrt{Z}}.$$

Posons

$$z = -a + ht;$$

ces intégrales deviendront

$$2\omega_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(-3a + ht)(t^2 - 1)}},$$

$$2\omega_2 = \int_{1}^{\frac{3a}{h}} \frac{dt}{\sqrt{(-3a + ht)(t^2 - 1)}}.$$

La première a ses éléments réels et son module a pour limite la quantité finie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{3a(1 - t^2)}}.$$

La seconde a ses éléments purement imaginaires et de

même signe, et son module est plus grand que l'intégrale

$$\int_1^k \frac{dt}{\sqrt{(3a-ht)(t^2-1)}},$$

k désignant un nombre positif arbitraire, moindre que $\frac{3a}{h}$. Si nous supposons h infiniment petit, cette dernière intégrale aura pour limite la suivante

$$\int_1^k \frac{dt}{\sqrt{3a(t^2-1)}},$$

laquelle tend vers ∞ si k croît indéfiniment. Donc $|2\omega_2|$ aura pour limite ∞, et l'on aura bien

$$|2\omega_2| > |2\omega_1|.$$

391. Une fonction elliptique $f(u)$, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ peut s'exprimer de trois manières différentes par les fonctions σu, ζu, $p u$.

1° *Par un quotient de fonctions* σ. — Ce procédé demande qu'on ait déterminé les zéros et les pôles de $f(u)$. Les zéros de $p u$ formeront un certain nombre de classes, en réunissant ensemble ceux qui sont équivalents (d'après la définition du n° 359). Soient n le nombre de ces classes; a_1, a_2, ..., a_n des zéros déterminés choisis respectivement dans chacune d'elles. Nous supposerons que tous ces zéros sont simples; s'il y en avait de multiples, nous n'aurions qu'à poser $a_1 = a_2 = \ldots$ dans la formule que nous allons obtenir.

Les pôles formeront également n classes; nous en choisirons un dans chacune d'elles; nous obtiendrons ainsi n pôles $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

On a la relation

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \text{période}.$$

Car, si nous considérons un parallélogramme quelconque de périodes, il contiendra n zéros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et n pôles

$\beta_1, \ldots, \beta_n$ entre lesquels existe une relation de ce genre et qui ne diffèrent respectivement de $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ que par des périodes.

En remplaçant a_n, par exemple, par un autre zéro de la même classe convenablement choisi, on fera disparaître la période, de manière qu'on ait simplement

$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Cela posé, la fonction

$$\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_n)}$$

a mêmes pôles et mêmes zéros que fu. Elle a d'ailleurs les mêmes périodes, car si l'on change u en $u+2\omega_1$, par exemple, elle se reproduit multipliée par le facteur

$$\frac{(-1)^n e^{2\eta_1 \Sigma(u-a+\omega_1)}}{(-1)^n e^{2\eta_1 \Sigma(u-b+\omega_1)}} = 1.$$

On aura donc

$$fu = C\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_n)}, \tag{25}$$

C désignant une constante. Pour la déterminer, on donnera à u une valeur particulière, pour laquelle on exprimera que les deux membres sont égaux (ou ont même valeur principale, s'ils sont nuls ou infinis).

392. 2° *Par ζ et ses dérivées.* — Soient $a, b, \ldots$ les pôles distincts que possède fu dans un parallélogramme des périodes (ou des pôles quelconques équivalents à ceux-ci). Soient respectivement $\lambda, \mu, \ldots$ leurs ordres de multiplicité; enfin soient respectivement

$$\frac{A_\lambda}{(u-a)^\lambda} + \ldots + \frac{A_1}{u-a} + \ldots,$$

$$\frac{B_\mu}{(u-b)^\mu} + \ldots + \frac{B_1}{u-b} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les développements de $f(u)$ aux environs de ces pôles; on aura

$$(26)\quad \begin{aligned} fu = {} & A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{\lambda-1}A_\lambda}{(\lambda-1)!}\zeta^{\lambda-1}(u-a), \\ & + B_1\zeta(u-b) - B_2\zeta'(u-b) + \ldots + \frac{(-1)^{\mu-1}B_\mu}{(\mu-1)!}\zeta^{\mu-1}(u-b), \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ & + C, \end{aligned}$$

C désignant une constante.

Soit en effet Fu le second membre de cette formule. Si l'on accroît u d'une période 2ω, ζu s'accroît de 2η, et ses dérivées restent invariables; Fu s'accroît donc de

$$2\eta(A_1 + B_1 + \ldots).$$

Mais la somme des résidus $A_1 + B_1 + \ldots$ est nulle (363). Donc Fu est une fonction elliptique.

D'ailleurs $\zeta(u-a)$ n'a (aux périodes près) qu'un seul pôle a, aux environs duquel on a le développement

$$\zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \varphi(u-a),$$

φ désignant une série de puissances entières et positives. On en déduit

$$\zeta'(u-a) = \frac{-1}{(u-a)^2} + \varphi'(u-a),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\zeta^{\lambda-1}(u-a) = \frac{(-1)^{\lambda-1}(\lambda-1)!}{(u-a)^\lambda} + \varphi^{\lambda-1}(u-a).$$

Les développements de Fu et de fu aux environs du pôle a ont donc même partie infinie. De même pour les autres pôles $b, \ldots$. Donc $Fu - fu$ est une constante. En donnant à u une valeur particulière, on déterminera C de telle sorte que cette différence s'annule.

Cette décomposition d'une fonction elliptique en une

somme d'éléments simples est due à M. *Hermite*. Elle peut être assimilée à la décomposition des fractions rationnelles. Elle présente les mêmes avantages au point de vue de l'intégration, car, ζu étant la dérivée de $\log \sigma u$, tous les termes du second membre sont les dérivées de fonctions connues.

393. 3° *Par* pu *et* $p'u$. — Supposons d'abord que fu soit une fonction paire.

Soient α l'un de ses zéros; λ son ordre de multiplicité; fu admettra le zéro $-\alpha$ avec le même ordre de multiplicité. Ces deux zéros seront distincts (aux périodes près) si α n'est pas une demi-période.

Si α est une demi-période, telle que ω, on aura

$$f(\omega - h) = f(h - \omega) = f(\omega + h).$$

Le développement de $f(\omega + h)$ commencera donc par une puissance paire de h, telle que $h^{2\lambda'}$; donc l'ordre de multiplicité du zéro ω sera un nombre pair $2\lambda'$ et l'on pourra considérer la fonction fu comme ayant deux zéros ω et $-\omega$ (coïncidents aux périodes près) chacun d'eux étant d'ordre λ' de multiplicité.

La même observation s'applique aux pôles de fu.

Cela posé, soient

$$\pm \alpha_1 + \text{période}, \quad \pm \alpha_2 + \text{période}, \quad \ldots$$

ceux des zéros de fu qui ne sont pas des périodes; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ leurs ordres de multiplicité. Soient de même

$$\pm \beta_1 + \text{période}, \quad \pm \beta_2 + \text{période}, \quad \ldots$$

ceux de ses pôles qui ne sont pas des périodes; $\mu_1, \mu_2, \ldots$ leurs ordres de multiplicité. On aura

$$fu = C \frac{(pu - p\alpha_1)^{\lambda_1}(pu - p\alpha_2)^{\lambda_2}\ldots}{(pu - p\beta_1)^{\mu_1}(pu - p\beta_2)^{\mu_2}\ldots}, \tag{27}$$

C désignant une constante.

Soit, en effet, Fu le second membre de cette équation. Le quotient $\frac{fu}{Fu}$ est une fonction elliptique qui n'admet ni

zéro ni pôle, en dehors des périodes. Mais une période ne peut être à la fois zéro et pôle. La fonction manquera donc de zéro ou de pôle, et se réduira à une constante. En donnant à u une valeur particulière, on déterminera C.

Supposons maintenant fu quelconque; posons

$$\frac{fu+f(-u)}{2}=\varphi u,$$

$$\frac{fu-\;(-u)}{2\wp' u}=\varphi_1 u,$$

d'où

$$fu=\varphi u+\varphi_1 u\,\wp' u. \tag{28}$$

Les deux fonctions φu, $\varphi_1 u$, étant évidemment paires, pourront, d'après ce qui précède, s'exprimer rationnellement au moyen de $\wp u$.

394. Les formules essentielles de la théorie des fonctions σu, ζu, $\wp u$ s'obtiennent avee la plus grande facilité en comparant entre eux les trois modes de représentation ci-dessus pour une même fonction elliptique.

Cherchons, par exemple, l'expression de $\wp' u$ par les fonctions σ. La fonction $\wp' u$ admet (aux périodes près) le pôle triple $u=0$, et les zéros ω_1, ω_2, ω_3, dont la somme est nulle. Donc

$$\wp' u=\mathrm{C}\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma^3 u}.$$

Posons $u=0$. Les deux membres auront pour valeurs principales

$$\frac{-2}{u^3}\quad\text{et}\quad\frac{-\mathrm{C}\sigma\omega_1\sigma\omega_2\sigma\omega_3}{u^3},$$

donc

$$\mathrm{C}=\frac{2}{\sigma\omega_1\sigma\omega_2\sigma\omega_3}$$

et

$$\wp' u=2\,\frac{\sigma(u-\omega_1)\,\sigma(u-\omega_2)\,\sigma(u-\omega_3)}{\sigma\omega_1\sigma\omega_2\sigma\omega_3\sigma^3 u}. \tag{29}$$

395. Cherchons l'expression de $\wp u - \wp v$. Cette fonction admet, aux périodes près, les deux pôles $\pm v$ et le zéro double o. Elle sera donc de la forme

$$C \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u}.$$

L'identification des valeurs principales pour u infiniment petit donne

$$\frac{1}{u^2} = -\frac{C\sigma^2 v}{u^2},$$

donc

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}. \tag{30}$$

396. On a l'identité

$$(A-B)(C-D) + (A-C)(D-B) + (A-D)(B-C) = 0.$$

Posons $A = \wp a$, $B = \wp b$, $C = \wp c$, $D = \wp d$. Remplaçons les différences $\wp a - \wp b, \ldots$ par leurs valeurs données par la formule ci-dessus, et supprimons le dénominateur commun : nous obtiendrons l'*identité à trois termes*

$$\begin{aligned} &\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)\,\sigma(c+d)\,\sigma(c-d) \\ &+ \sigma(a+c)\,\sigma(a-c)\,\sigma(d+b)\,\sigma(d-b) \\ &+ \sigma(a+d)\,\sigma(a-d)\,\sigma(b+c)\,\sigma(b-c) = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

397. Prenons la dérivée logarithmique de l'équation (30), il viendra

$$\frac{\wp' u}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta u \tag{32}$$

et, en échangeant u, v,

$$\frac{-\wp' v}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) - \zeta(u-v) - 2\zeta v. \tag{33}$$

Ajoutons et divisons par 2,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v. \tag{34}$$

Dérivons encore, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{p''u}{pu - pv} - \frac{1}{2}\frac{p'u(p'u - p'v)}{(pu - pv)^2} = -p(u+v) + pu,$$

et en permutant u et v

$$-\frac{1}{2}\frac{p''v}{pu - pv} + \frac{1}{2}\frac{p'v(p'u - p'v)}{(pu - pv)^2} = -p(u+v) + pv.$$

Ajoutons : il viendra

$$(35)\quad \frac{1}{2}\frac{p''u - p''v}{pu - pv} - \frac{1}{2}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = -2p(u+v) + pu + pv.$$

Remplaçons $p''u$, $p''v$ par leurs valeurs

$$6p^2u - \frac{1}{2}g_2, \quad 6p^2v - \frac{1}{2}g_2.$$

Il vient

$$\frac{1}{2}\frac{p''u - p''v}{pu - pv} = 3\frac{p^2u - p^2v}{pu - pv} = 3(pu + pv),$$

de sorte que l'équation (35) devient

$$(36)\qquad p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2.$$

La formule deviendra tout à fait symétrique par l'introduction d'un troisième argument w, défini par le relation

$$u + v + w = 0.$$

Le premier membre deviendra $pu + pv + pw$, et sera symétrique en u, v, w, ainsi que la relation entre ces variables. On aura donc

$$(37)\quad pu + pv + pw = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{p'v - p'w}{pv - pw}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{p'w - p'u}{pw - pu}\right)^2$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$(38)\qquad \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{p'v - p'w}{pv - pw} = \frac{p'w - p'u}{pw - pu}.$$

Pour s'assurer que le signe des racines a été correctement choisi, il suffit de remarquer que deux quelconques de ces quantités ont même valeur principale, lorsque l'argument qui leur est commun tend vers zéro.

398. Faisons tendre v vers u dans la formule (36); elle devient

$$(39) \qquad p\,2u + 2\,p\,u = \frac{1}{4}\frac{p''^2 u}{p'^2 u} = \frac{1}{4}\frac{\left(6p^2 u - \frac{1}{2}g_2\right)^2}{4p^3 u - g_2 p u - g_3}.$$

Une dérivation donnera $p'2u$. Posant ensuite successivement $v = 2u, 3u, \ldots$, on obtiendrait les formules pour la multiplication de l'argument. Nous y parviendrons tout à l'heure par une voie plus facile.

399. La formule (30) peut être généralisée comme il suit : Soient $u_1, u_2, \ldots, u_n$, n arguments indépendants; considérons le déterminant

$$(40) \qquad D_n = \begin{vmatrix} 1 & p u_1 & p' u_1 & \ldots & p^{(n-2)} u_1 \\ 1 & p u_2 & p' u_2 & \ldots & p^{(n-2)} u_2 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & p u_n & p' u_n & \ldots & p^{(n-2)} u_n \end{vmatrix}.$$

Considéré comme fonction de u_n, D_n admet (aux périodes près) un seul pôle, o, de multiplicité n, aux environs duquel sa valeur principale est

$$\frac{(-1)^{n-2}(n-1)!}{u_n^n} D_{n-1},$$

D_{n-1} désignant le mineur relatif au dernier terme $p^{(n-2)} u_n$. On connaît, d'autre part, $n-1$ zéros, $u_1, \ldots, u_{n-1}$. La somme des zéros étant égale à celle des pôles, qui est nulle, le dernier zéro sera $-(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1})$. Donc D_n sera proportionnel à

$$\frac{\sigma(u_n - u_1)\,\sigma(u_n - u_2)\ldots\sigma(u_n + u_1 + \ldots + u_{n-1})}{\sigma^n u_n}.$$

Pour u_n infiniment petit, cette dernière expression a pour valeur principale

$$\frac{(-1)^{n-1}\sigma u_1 \sigma u_2 \ldots \sigma u_{n-1} \sigma(u_1+u_2+\ldots+u_{n-1})}{u_n^n},$$

ce qui permet de déterminer le facteur de proportionnalité. On trouve ainsi

$$D_n = \frac{-(n-1)!\,D_{n-1}}{\sigma u_1 \ldots \sigma u_{n-1} \sigma(u_1+\ldots+u_{n-1})} \frac{\sigma(u_n-u_1)\ldots\sigma(u_n-u_{n-1})\sigma(u_1+\ldots+u_n)}{\sigma^n u_n}.$$

Changeons n en $n-1$, $n-2$, ..., 2 et multiplions les égalités obtenues. Il viendra

$$(41)\quad D_n = A \frac{\sigma(u_1+\ldots+u_n)\Pi\sigma(u_i-u_k)}{\sigma^n u_1 \sigma^n u_2 \ldots \sigma^n u_n} \quad \begin{pmatrix} i=2, & \ldots, n \\ k=1, 2, & \ldots, i-1 \end{pmatrix},$$

A désignant la constante $(-1)^{n-1}(n-1)!\,(n-2)!\ldots 2!$

400. Posons dans cette égalité

$$u_1 = u, \qquad u_2 = u+h_2, \qquad \ldots, \qquad u_n = u+h_n,$$

$h_2, \ldots, h_n$ étant des infiniment petits.

Le coefficient du terme en $h_2 h_3^2 \ldots h_n^{n-1}$ dans le développement du premier membre sera évidemment

$$\frac{1}{2!\,3!\ldots(n-1)!}\begin{vmatrix} 1 & pu & \ldots & p^{(n-2)}u \\ 0 & p'u & \ldots & p^{(n-1)}u \\ 0 & p''u & \ldots & p^{(n)}u \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & p^{(n-1)}u & \ldots & p^{(2n-3)}u \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2!\,3!\ldots(n-1)!}\begin{vmatrix} p'u & \ldots & p^{(n-1)}u \\ p''u & \ldots & p^{(n)}u \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p^{(n-1)}u & \ldots & p^{(2n-3)}u \end{vmatrix}.$$

Dans le développement du second membre, les termes de moindre degré par rapport à $h_2, \ldots, h_n$ seront ceux du

produit

$$A\frac{\sigma nu}{(\sigma u)^{n^2}}h_2\ldots h_n\Pi(h_i-h_k)\qquad \begin{pmatrix} i=3,\ldots,n\\ k=2,\ldots,i-1\end{pmatrix}$$

et celui que nous cherchons a pour coefficient

$$A\frac{\sigma nu}{(\sigma u)^{n^2}}.$$

En posant, pour abréger,

$$B=(-1)^{n-1}[2!\,3!\ldots(n-1)!]^2$$

et

$$\psi_n u=\frac{\sigma nu}{(\sigma u)^{n^2}}, \tag{42}$$

on aura donc (pour n entier positif) la relation

$$\psi_n u=\frac{1}{B}\begin{vmatrix} p'u & p''u & \ldots & p^{(n-1)}u\\ p''u & p'''u & \ldots & p^{(n)}u\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ p^{(n-1)}u & p^{(n)}u & \ldots & p^{(2n-3)}u\end{vmatrix}. \tag{43}$$

401. On voit par cette expression que, si n est entier positif, $\psi_n u$ est une fonction elliptique. Cette propriété subsistera pour n entier négatif, car on a évidemment

$$\psi_{-n}=-\psi_n.$$

Il est aisé de la démontrer directement. Changeons, en effet, u en $u+2\omega$, 2ω désignant une période primitive; σnu sera changé en

$$\sigma(nu+2n\omega)=(-1)^n e^{2n\eta(nu+n\omega)}\sigma nu$$

et $(\sigma u)^{n^2}$ en

$$(-1)^{n^2}e^{2n^2\eta(u+\omega)}(\sigma u)^{n^2}.$$

D'ailleurs $n^2\equiv n \pmod 2$. Donc le quotient ψ_n ne sera pas changé.

402. La fonction ψ_n n'a (aux périodes près) qu'un seul

pôle, $u=0$, d'ordre n^2-1; elle est paire si n est impair, impaire si n est pair. On aura donc

$$(44)\quad \begin{cases} \text{pour } n \text{ impair} \ldots\ldots & \psi_n = P_1, \\ \text{pour } n \text{ pair} \ldots\ldots\ldots & \psi_n = P_2 \wp' u, \\ \text{dans tous les cas} \ldots & \psi_n^2 = P, \end{cases}$$

P_1, P_2, P désignant des polynomes en u, d'ordre $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2-4}{2}$, n^2-1 respectivement.

Soient donc

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha \wp^{\frac{n^2-1}{2}} + \alpha_1 \wp^{\frac{n^2-1}{2}-1} + \ldots, \\ P_2 &= \beta \wp^{\frac{n^2-4}{2}} + \beta_1 \wp^{\frac{n^2-4}{2}-1} + \ldots, \\ P &= \gamma \wp^{n^2-1} + \gamma_1 \wp^{n^2-2} + \ldots. \end{aligned}$$

Les coefficients $\alpha, \alpha_1, \ldots; \beta, \beta_1, \ldots; \gamma, \gamma_1, \ldots$ pourront s'obtenir par la méthode des coefficients indéterminés, en identifiant les deux membres des équations (44) développés suivant les puissances de u au moyen des formules

$$\begin{aligned} \wp u &= \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots, \\ \wp' u &= \frac{-2}{u^3} + 2 c_1 u + 4 c_2 u^3 + \ldots, \\ \sigma u &= u(1 + d_1 u^4 + \ldots), \\ \sigma n u &= n u (1 + d_1 n^4 u^4 + \ldots). \end{aligned}$$

On obtient ainsi une suite d'équations linéaires qui déterminent successivement les coefficients inconnus. Ces équations ont pour coefficients des polynomes entiers en c_1, c_2, ..., d_1, d_2, ... qui sont eux-mêmes des polynomes entiers en g_2, g_3. D'ailleurs chacun des coefficients est affecté, dans l'équation qui le détermine, d'un coefficient purement numérique (1 pour les coefficients α, α_1, ..., γ, γ_1, ...; -2 pour β, β_1, ...). Tous ces coefficients sont donc des polynomes entiers en g_2, g_3. D'ailleurs le premier est purement numérique et le second est nul. Car l'identifi-

cation des deux premiers termes donne, pour les déterminer, les équations

$$n = \alpha, \qquad n = -2\beta, \qquad n^2 = \gamma,$$
$$0 = \alpha_1, \qquad 0 = -2\beta_1, \qquad 0 = \gamma_1.$$

403. Il est aisé d'opérer la décomposition en facteurs des polynomes P_1, P_2, P.

En effet, le numérateur σnu de ψ_n admet un zéro simple en tous les points pour lesquels nu est une période; mais ceux de ces points pour lesquels u est lui-même une période sont des zéros d'ordre n^2 pour le dénominateur. Donc $\psi_n u$ aura (aux périodes près) les $n^2 - 1$ zéros

$$\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n},$$

m_1, m_2 parcourant chacun la suite des valeurs de 0 à $n-1$, le système $m_1 = m_2 = 0$ excepté.

1° Si n est impair, les $n^2 - 1$ systèmes restants peuvent se répartir en couples (m'_1, m'_2), (m''_1, m''_2), liés par les relations

$$m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m'_2 + m''_2 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} n),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{2m''_1\omega_1 + 2m''_2\omega_2}{n} = -\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n} + \text{période}.$$

Choisissons à volonté dans chaque couple un des deux systèmes qui le composent, tel que (m'_1, m'_2), en excluant l'autre; nous aurons

$$(45) \qquad \psi_n = P_1 = n\Pi\left(pu - p\,\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n}\right),$$

car les deux membres ont les mêmes zéros

$$u = \pm\frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n} + \text{période},$$

les mêmes pôles, d'ordre $n^2 - 1$,

$$u = \text{période},$$

et la même valeur principale pour $u = 0$.

2° Si n est pair, on devra mettre à part les trois systèmes $\left(\frac{n}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{n}{2}\right)$, $\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$, pour lesquels $\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$ se réduit respectivement à ω_1, ω_2 et à $\omega_1 + \omega_2 = -\omega_3 = \omega_3 +$ période. Les $n^2 - 4$ systèmes restants se répartissent, comme tout à l'heure, en couples (m'_1, m'_2), (m''_1, m''_2); et, si l'on remarque que $\wp' u$ a pour zéros les points ω_1, ω_2, ω_3 et pour pôle le point $u = 0$ avec la valeur principale $\frac{-2}{u^3}$, on aura

$$(46)\qquad \psi_n = P_2 \wp' u = -\frac{n}{2} \Pi \left(\wp u - \wp \frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n}\right) \wp' u.$$

Les formules précédentes subsistent si l'on y remplace chaque système (m'_1, m'_2) par son associé (m''_1, m''_2). Multipliant les deux expressions de $\psi_n u$ ainsi obtenues, et remarquant d'ailleurs qu'on a

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - \wp\omega_1)(\wp u - \wp\omega_2)[\wp u - \wp(\omega_1 + \omega_2)],$$

il viendra dans tous les cas

$$(47)\qquad \psi_n^2 = P = n^2 \prod \left(\wp u - \wp \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right).$$

404. Les polynomes P_1, P_2, P ayant, comme nous l'avons vu, leurs coefficients entiers en g_2, g_3, les fonctions symétriques entières (ou les fonctions symétriques rationnelles) des quantités $\wp \frac{2m'_1\omega_1 + 2m'_2\omega_2}{n}$, racines de P_1 ou de P_2, et celle des quantités $\wp \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$, racines de P, s'exprimeront par des polynomes entiers (par des fractions rationnelles) en g_2, g_3.

Les polynomes P_1, P_2, P manquant de second terme, on

aura en particulier

$$(48)\qquad \sum \wp\,\frac{2m'_1\omega_1+2m'_2\omega_2}{n}=0,\qquad \sum \wp\,\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}=0.$$

405. On a, d'après la formule (30),

$$\wp nu-\wp mu=-\frac{\sigma(n+m)u\,\sigma(n-m)u}{\sigma^2 nu\,\sigma^2 mu}.$$

Remplaçons σnu, ... par leurs valeurs $\psi_n u\,(\sigma u)^{n^3}$, ..., σu disparaît et il reste

$$(49)\qquad \wp nu-\wp mu=-\frac{\psi_{n+m}\,\psi_{n-m}}{\psi_n^2\,\psi_n^2}.$$

De l'identité

$$(\wp lu-\wp mu)+(\wp mu-\wp nu)+(\wp nu-\wp lu)=0$$

on déduira

$$\frac{\psi_{l+m}\,\psi_{l-m}}{\psi_l^2\,\psi_m^2}+\frac{\psi_{m+n}\,\psi_{m-n}}{\psi_m^2\,\psi_n^2}+\frac{\psi_{n+l}\,\psi_{n-l}}{\psi_n^2\,\psi_l^2}=0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$(50)\qquad \psi_{l+m}\psi_{l-m}\psi_n^2+\psi_{m+n}\psi_{m-n}\psi_l^2+\psi_{n+l}\psi_{n-l}\psi_m^2=0.$$

Posant en particulier $l=1$, $m=n+1$ et remarquant qu'on a $\psi_1=1$, $\psi_{-n}=-\psi_n$, on trouvera

$$(51)\qquad \psi_{2n+1}=\psi_{n+2}\psi_n^3-\psi_{n-1}\psi_{n+1}^3.$$

Posons encore $l=1$, $m=n+1$, mais changeons n en $n-1$ et remarquons que $\psi_2=-\wp' u$; il vient

$$(52)\qquad \wp' u\,\psi_{2n}=\psi_n\,(\psi_{n-2}\psi_{n+1}^2-\psi_{n+2}\psi_{n-1}^2).$$

Ces formules récurrentes sont commodes pour le calcul des fonctions ψ.

Posons enfin $m=1$ dans la formule (49); il viendra

$$(53)\qquad \wp nu-\wp u=-\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2},$$

ce qui donne $\wp nu$ en fonction rationnelle de $\wp u$; car $\wp' u$ ne figure au second membre que par son carré (au dénominateur ou au numérateur, suivant que n est pair ou impair).

406. On obtient de nouvelles formules de multiplication en décomposant $\wp nu$ en éléments simples.

Les pôles de cette fonction sont (aux périodes près) le point o et les points $\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$, que nous représenterons d'une manière plus abrégée par $\frac{w}{n}$. Posons $u = h$ ou $u = \frac{w}{n} + h$, h étant infiniment petit; on aura

$$\wp nu = \wp nh = \frac{1}{n^2 h^2} + c_1 n^2 h^2 + \ldots.$$

La formule générale de décomposition donnera donc

$$\wp nu = -\frac{1}{n^2}\zeta' u - \frac{1}{n^2}\sum \zeta'\left(u - \frac{w}{n}\right) + \text{const.}$$

$$n^2 \wp nu = \wp u + \sum \wp\left(u - \frac{w}{n}\right) + \text{C}.$$

L'identification des termes constants dans le développement suivant les puissances de u donnera

$$\sum \wp\left(\frac{w}{n}\right) + \text{C} = 0.$$

Intégrons : il viendra

$$n\zeta nu = \zeta u + \sum \zeta\left(u - \frac{w}{n}\right) - \text{C}u + \text{C}',$$

et l'identification des termes constants donnera

$$-\sum \zeta \frac{w}{n} + \text{C}' = 0.$$

D'autre part, si nous changeons u en $u + 2\omega_1$, nu s'accroissant de $2n\omega_1$, le premier membre s'accroîtra de $n.2n\eta_1$

et le second de $n^2 . 2\eta_1 - 2\omega_1 C$; donc $C = -\sum p \frac{w}{n}$ est nul, résultat déjà trouvé par une autre voie (404).

Intégrons encore, nous trouverons

$$\log \sigma nu = \log \sigma u + \sum \log \sigma\left(u - \frac{w}{n}\right) + C' u + \text{const.}$$

$$\sigma nu = C'' \sigma u \prod \sigma\left(u - \frac{w}{n}\right) e^{C'u}.$$

Identifions les valeurs principales pour $u = 0$; il viendra

$$n = C'' \prod \sigma\left(-\frac{w}{n}\right).$$

Enfin, si u s'accroît de $2\omega_1$, nu de $2n\omega_1$, σnu sera multiplié par

$$(-1)^n e^{2n\eta_1(nu+n\omega_1)},$$

et le second membre par

$$(-1)^{n^2} e^{2\eta_1\left[u+\omega_1+\sum\left(u-\frac{w}{n}+\omega_1\right)\right]+2C'\omega_1}.$$

Nous aurons donc en identifiant

$$-2\eta_1 \sum \frac{w}{n} + 2C'\omega_1 = 2\mu_1 \pi i,$$

et de même

$$-2\eta_2 \sum \frac{w}{n} + 2C'\omega_2 = 2\mu_2 \pi i,$$

μ_1 et μ_2 étant des entiers. En se rappelant que

$$\omega_2 \eta_1 - \omega_1 \eta_2 = \frac{\varepsilon \pi i}{2} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

on en déduit

$$C' = 2\varepsilon(\mu_2 \eta_1 - \mu_1 \eta_2), \qquad \sum \frac{w}{n} = 2\varepsilon(\mu_2 \omega_1 - \mu_1 \omega_2).$$

Mais on a, d'autre part,

$$\sum \frac{w}{n} = \sum \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} = n \sum_{m_1} \frac{2m_1\omega_1}{n} + n \sum_{m_2} \frac{2m_2\omega_2}{n}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}(2\omega_1 + 2\omega_2) = -n(n-1)\omega_3.$$

Donc

$$\varepsilon\mu_2 = -\varepsilon\mu_1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

et

$$C' = n(n-1)(\eta_1 + \eta_2) = -n(n-1)\eta_3$$

et l'on a les formules

$$(54)\qquad n^2 \wp\, nu = \wp u + \sum \wp\left(u - \frac{w}{n}\right),$$

$$(55)\qquad n\zeta nu = \zeta u + \sum \zeta\left(u - \frac{w}{n}\right) - n(n-1)\eta_3,$$

$$(56)\qquad \sigma nu = n\sigma u \prod \frac{\sigma\left(u - \frac{w}{u}\right)}{\sigma\left(-\frac{w}{u}\right)} e^{-n(n-1)\eta_3 u},$$

$$(57)\qquad \sum \wp \frac{w}{n} = 0, \qquad \sum \zeta \frac{w}{n} = -n(n-1)\eta_3.$$

407. Développons les deux membres de (54) suivant les puissances de u, il viendra

$$\begin{aligned} n^2\left(\frac{1}{n^2 u^2} + \frac{g_2}{20} n^2 u^2 + \frac{g_3}{28} n^4 u^4 + \ldots\right) &= \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots \\ &+ \sum \wp \frac{w}{n} - u \sum \wp' \frac{w}{n} + \frac{u^2}{2} \sum \wp'' \frac{w}{n} + \ldots . \end{aligned}$$

Identifiant, on voit que les expressions

$$\sum \wp' \frac{w}{n}, \qquad \sum \wp''' \frac{w}{n}, \qquad \ldots$$

sont nulles et que

$$\sum \wp'' \frac{w}{n}, \qquad \sum \wp^{\text{IV}} \frac{w}{n}, \qquad \ldots$$

sont des polynomes entiers en g_2 et g_3.

Il en sera de même, d'après la formule (22), pour les

sommes

$$\sum \wp^2\frac{w}{n}, \qquad \sum \wp^3\frac{w}{n}, \qquad \ldots$$

et, plus généralement, pour les fonctions symétriques entières des quantités $\wp\frac{w}{n}$; résultat déjà trouvé (404).

408. D'après la formule d'addition, la formule (54) peut s'écrire ainsi

$$n^2\wp nu = \wp u + \sum\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u + \wp'\frac{w}{n}}{\wp u - \wp\frac{w}{n}}\right)^2 - \wp u - \wp\frac{w}{n}\right],$$

ou, comme la partie impaire en u s'annule évidemment, ainsi que la somme $\sum \wp\frac{w}{n}$,

$$n^2\wp nu = \wp u + \sum\left[\frac{1}{4}\frac{\wp'^2 u + \wp'^2\frac{w}{n}}{\left(\wp u - \wp\frac{w}{n}\right)^2} - \wp u\right].$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\wp'^2 u + \wp'^2\frac{w}{n} &= \wp'^2 u - \wp'^2\frac{w}{n} + 2\wp'^2\frac{w}{n}\\
&= 4\left(\wp^3 u - \wp^3\frac{w}{n}\right) - g_2\left(\wp u - \wp\frac{w}{n}\right) + 2\wp'^2\frac{w}{n}\\
&= 4\left(\wp^2 u + \wp u\wp\frac{w}{n} + \wp^2\frac{w}{n} - \frac{1}{4}g_2\right)\\
&\quad\times\left(\wp u - \wp\frac{w}{n}\right) + 2\wp'^2\frac{w}{n},
\end{aligned}$$

$$\wp^2 u + \wp u\wp\frac{w}{n} + \wp^2\frac{w}{n} = \left(\wp u + 2\wp\frac{w}{n}\right)\left(\wp u - \wp\frac{w}{n}\right) + 3\wp^2\frac{w}{n}.$$

En substituant, et supprimant le terme $\sum 2\wp\frac{w}{n}$, qui s'annule, on obtient l'expression de $n^2\wp nu$ par une somme de fractions simples

$$(58)\qquad n^2\wp nu = \wp u + \sum\frac{3\wp^2\frac{w}{n} - \frac{1}{4}g_2}{\wp u - \wp\frac{w}{n}} + \sum\frac{\frac{1}{2}\wp'^2\frac{w}{n}}{\left(\wp u - \wp\frac{w}{n}\right)^2}.$$

IV. — Les fonctions $\sigma_\alpha u$, $f_\alpha u$.

409. Soient $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ un triangle quelconque de périodes primitives de pu; posons, comme précédemment,

$$p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3,$$
$$\zeta\omega_1 = \eta_1, \qquad \zeta\omega_2 = \eta_1, \qquad \zeta\omega_3 = \eta_3,$$

et représentons par α, β, γ les indices 1, 2, 3 écrits dans un ordre quelconque.

Dans la formule (30) de la section précédente, posons $v = \omega_\alpha$: il viendra

$$pu - e_\alpha = -\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma^2 u\, \sigma^2\omega_\alpha}.$$

Mais

$$\sigma(u-\omega_\alpha) = \sigma(u+\omega_\alpha - 2\omega_\alpha) = -e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha-\omega_\alpha)}\sigma(u+\omega_\alpha),$$

d'où

$$pu - e_\alpha = e^{-2\eta_\alpha u}\frac{\sigma^2(u+\omega_\alpha)}{\sigma^2 u\, \sigma^2\omega_\alpha}, \tag{1}$$

$$\sqrt{pu - e_\alpha} = e^{-\eta_\alpha u}\frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma u\, \sigma\omega_\alpha}, \tag{2}$$

Le radical $\sqrt{pu-e_\alpha}$ est donc une fonction uniforme de u. Celle de ses déterminations que fournit l'équation précédente est celle qui, pour $u=0$, a, comme le second membre, la valeur principale $\frac{+1}{u}$.

410. Changeons dans la formule (1) u en $u+\omega_\alpha$; elle devient

$$p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha = e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\frac{\sigma^2(u+2\omega_\alpha)}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\sigma^2\omega_\alpha}$$
$$= e^{-2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}e^{2.2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\frac{\sigma^2 u}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\sigma^2\omega_\alpha}$$
$$= e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\frac{\sigma^2 u}{\sigma^2(u+\omega_\alpha)\sigma^2\omega_\alpha}.$$

Multipliant par l'équation (1) et posant, pour abréger,

$$(3) \qquad e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha \omega_\alpha} \sigma\omega_\alpha = U_\alpha,$$

il viendra

$$(4) \qquad [p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha](pu - e_\alpha) = \frac{1}{U_\alpha^4},$$

et, pour la valeur particulière $u = \omega_\gamma$,

$$(5) \qquad (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha) = \frac{1}{U_\alpha^4}.$$

Posons encore, dans l'équation (1), $u = \omega_\beta$; on aura

$$e_\beta - e_\alpha = e^{-2\eta_\alpha\omega_\beta} \frac{\sigma^2\omega_\gamma}{\sigma^2\omega_\beta\,\sigma^2\omega_\alpha} = e^{-2\eta_\alpha\omega_\beta + \eta_\gamma\omega_\gamma - \eta_\alpha\omega_\alpha - \eta_\beta\omega_\beta} \frac{U_\gamma^2}{U_\alpha^2 U_\beta^2}.$$

Mais on a

$$\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0, \qquad \eta_\alpha + \eta_\beta + \eta_\gamma = 0.$$

L'exposant de e sera donc égal à

$$\begin{aligned} -2\eta_\alpha\omega_\beta + (\eta_\alpha + \eta_\beta)(\omega_\alpha + \omega_\beta) - \eta_\alpha\omega_\alpha - \eta_\beta\omega_\beta \\ = \eta_\beta\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_\beta = -[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}, \end{aligned}$$

$[\alpha\beta] = [\beta\gamma] = [\gamma\alpha] = -[\beta\alpha] = -[\gamma\beta] = -[\alpha\gamma]$ étant égal à $+1$ ou à -1, selon que les périodes $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$, $2\omega_\gamma$ se suivent dans le sens direct ou dans le sens rétrograde autour du triangle des périodes.

On aura donc

$$(6) \qquad e_\beta - e_\alpha = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} \frac{U_\gamma^2}{U_\alpha^2 U_\beta^2} = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} \frac{U_\gamma^4}{U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2}.$$

Permutons circulairement les indices α, β, γ et ajoutons les équations ainsi obtenues; il viendra

$$(7) \qquad U_\alpha^4 + U_\beta^4 + U_\gamma^4 = 0.$$

D'autre part, la somme $e_1+e_2+e_3$ étant nulle, on aura

$$3\,e_\alpha = e_\alpha - e_\beta + (e_\alpha - e_\gamma)$$

et, par suite,

$$(8)\qquad e_\alpha = \frac{1}{3} e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} \frac{U_\beta^4 - U_\gamma^4}{U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2}.$$

411. Soit $2\,\omega'_1$, $2\,\omega'_2$, $2\,\omega'_3$ un nouveau triangle de périodes primitives : posons

$$p\omega'_1 = e'_1,\qquad p\omega'_2 = e'_2,\qquad p\omega'_3 = e'_3,$$
$$\zeta\omega'_1 = \eta'_1,\qquad \zeta\omega'_2 = \eta'_2,\qquad \zeta\omega'_3 = \eta'_3.$$

Les quantités e'_1, e'_2, e'_3 reproduiront à l'ordre près les quantités e_1, e_2, e_3; car les unes et les autres sont les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0.$$

Désignons par $2\,\omega'_\alpha$ celle des nouvelles périodes pour laquelle on a

$$p\omega'_\alpha = e_\alpha;$$

posons

$$e^{-\frac{1}{2}\eta'_\alpha \omega'_\alpha}\,\sigma\omega'_\alpha = U'_\alpha,$$

et désignons enfin par $[\alpha\beta]'$ une unité positive ou négative, selon que les périodes $2\,\omega'_\alpha$, $2\,\omega'_\beta$, $2\,\omega'_\gamma$ se suivent dans le sens direct ou dans le sens rétrograde autour du nouveau triangle. Toutes les formules précédentes subsisteront évidemment si l'on y accentue les quantités

$$\omega_\alpha,\quad \omega_\beta,\quad \omega_\gamma,\qquad \eta_\alpha,\quad \eta_\beta,\quad \eta_\gamma,\qquad U_\alpha,\quad U_\beta,\quad U_\gamma\qquad [\alpha\beta].$$

On aura en particulier, d'après la formule (5),

$$\frac{1}{U'^4_\alpha} = (e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha) = \frac{1}{U_\alpha^4}.$$

Donc U'_α ne diffère de U_α que par un facteur i^{λ_α}, racine quatrième de l'unité.

La liaison entre les deux systèmes de périodes considérés étant supposée donnée, ce facteur se détermine aisément. Soit, en effet,

$$2\omega'_\alpha = 2m\omega_\alpha + 2n\omega_\beta,$$

l'expression de $2\omega'_\alpha$ en fonction de $2\omega_\alpha$, $2\omega_\beta$.

Puisque, par hypothèse, on a

$$p\omega'_\alpha = p\omega_\alpha,$$

$\omega'_\alpha - \omega_\alpha$ sera une période; donc m sera un nombre impair, tel que $2m'+1$ et n un nombre pair, tel que $2n'$.

Posons, pour abréger,

$$\omega = m'\omega_\alpha + n'\omega_\beta,$$
$$\eta = m'\eta_\alpha + n'\eta_\beta;$$

nous aurons

$$\begin{aligned} U'_\alpha &= e^{-\frac{1}{2}(\eta_\alpha+2\eta)(\omega_\alpha+2\omega)}\sigma(\omega_\alpha+2\omega) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\eta_\alpha+2\eta)(\omega_\alpha+2\omega)}(-1)^{m'+n'+m'n'}e^{2\eta(\omega_\alpha+\omega)}\sigma\omega_\alpha \\ &= (-1)^{m'+n'+m'n'}e^{\eta\omega_\alpha-\eta_\alpha\omega}U_\alpha. \end{aligned}$$

Or on a

$$\eta\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega = n'(\eta_\beta\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_\beta) = -n'[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2},$$

d'où l'expression du facteur cherché

$$\frac{U'_\alpha}{U_\alpha} = (-1)^{m'+n'+m'n'}i^{-n'[\alpha\beta]} = i^{\lambda_\alpha}. \tag{9}$$

Remplaçant -1 par i^2 et remarquant qu'on a

$$2-[\alpha\beta] \equiv [\alpha\beta] \pmod 4,$$

il vient

$$\lambda_\alpha = 2m'(n'+1) + [\alpha\beta]n'.$$

On déterminera de même les facteurs

$$\frac{U'_\beta}{U_\beta} = i^{\lambda_\beta}, \qquad \frac{U'_\gamma}{U_\gamma} = i^{\lambda_\gamma}.$$

En choisissant convenablement les nouvelles périodes, on peut donner aux exposants λ_α, λ_β, λ_γ tous les systèmes de valeurs possibles (mod 4).

Considérons en effet la substitution particulière de déterminant 1

$$\omega'_\alpha = \omega_\alpha + 2n'\omega_\beta, \qquad \omega'_\beta = \omega_\beta, \qquad \omega'_\gamma = \omega_\gamma - 2n'\omega_\beta.$$

Les multiplicateurs correspondants seront

$$i^{[\alpha\beta]n'}, \quad 1, \quad i^{[\alpha\beta]n'}$$

et pourront être rendus égaux à i^μ, 1, i^μ; μ désignant un entier quelconque, en choisissant convenablement n'.

Une substitution analogue

$$\omega'_\alpha = \omega_\alpha, \qquad \omega'_\beta = \omega_\beta - 2n'\omega_\alpha, \qquad \omega'_\gamma = \omega_\gamma + 2n'\omega_\alpha,$$

donnerait les multiplicateurs 1, i^ν, i^ν, ν étant quelconque.

Combinant ces deux transformations, on obtiendra les multiplicateurs

$$i^\mu, \quad i^\nu, \quad i^{\mu+\nu}.$$

La substitution

$$\omega'_\alpha = -\omega_\alpha, \qquad \omega'_\beta = -\omega_\beta, \qquad \omega'_\gamma = -\omega_\gamma,$$

également de déterminant 1, donnerait les multiplicateurs i^2, i^2, i^2. En la combinant aux précédentes on aurait les multiplicateurs

$$i^{\mu+2}, \quad i^{\nu+2}, \quad i^{\mu+\nu+2}.$$

Nous avons ainsi obtenu toutes les combinaisons de multiplicateurs i^{λ_α}, i^{λ_β}, i^{λ_γ} où la somme des exposants est paire.

On n'en obtiendra pas d'autres, tant qu'on se bornera à combiner des substitutions de déterminant 1, car on a, en vertu de la formule (6),

$$e_\beta - e_\alpha = \frac{i^{-[\alpha\beta]}\,U_\gamma^4}{U_\alpha^2 U_\beta^2 U_\gamma^2}$$

et nos substitutions n'altérant pas e_α, e_β, e_γ devront laisser

le second membre invariable, d'où la condition

$$[\alpha\beta]' \equiv [\alpha\beta] + 2\lambda_\alpha + 2\lambda_\beta + 2\lambda_\gamma \pmod 4.$$

Or pour une substitution de déterminant 1, $[\alpha\beta]' = [\alpha\beta]$ (353). Donc $\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma$ est nécessairement pair.

Si cette somme est impaire, il existera une substitution de déterminant 1 pour laquelle les exposants des multiplicateurs sont $\lambda_\alpha - 2$, λ_β, $\lambda_\gamma - [\alpha\beta]$ car la somme de ces nouveaux exposants est paire. Combinons-la avec la substitution

$$\omega'_\alpha = -\omega_\alpha, \qquad \omega'_\beta = \omega_\beta, \qquad \omega'_\gamma = \omega_\gamma + 2\omega_\alpha$$

pour laquelle les multiplicateurs sont

$$i^2, \quad 1, \quad i^{[\alpha\beta]}.$$

La substitution résultante aura pour multiplicateurs

$$i^{\lambda_\alpha}, \quad i^{\lambda_\beta}, \quad i^{\lambda_\gamma}.$$

412. Supposons la fonction $p(u)$ définie non plus par ses périodes, mais par ses invariants g_2, g_3 et proposons-nous de déterminer les quantités U en partant de ces données.

Soient e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

numérotées de telle sorte que e_1, e_2, e_3 se succèdent dans le sens direct autour du triangle $e_1 e_2 e_3$. Nous avons obtenu (382) un système de périodes principales $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, définies par les intégrales

$$\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \omega_2 = \int_{e_3}^{e_1} \frac{dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \omega_3 = \int_{e_1}^{e_2} \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

et telles qu'on ait

$$p\omega_1 = e_1, \qquad p\omega_2 = e_2, \qquad p\omega_3 = e_3.$$

Les η correspondants sont donnés par les intégrales ana-

logues

$$\eta_1 = -\int_{e_2}^{e_3} \frac{z\,dz}{\sqrt{Z}}, \qquad \ldots$$

et les U correspondants par les formules

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{\sqrt[4]{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ U_3 &= \frac{1}{\sqrt[4]{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}}. \end{aligned}\right.$$

Mais ces dernières formules renferment des radicaux; il en résulte une ambiguïté que nous allons lever en déterminant avec précision la valeur des arguments de U_1, U_2, U_3.

413. Désignons par $\widehat{e_1}$, $\widehat{e_2}$, $\widehat{e_3}$ les angles du triangle $e_1 e_2 e_3$; par φ l'angle du côté $e_2 e_3$ avec l'axe des x; on aura

$$\left.\begin{aligned} \arg(e_3-e_2) &\equiv \varphi\\ \arg(e_2-e_3) &\equiv \varphi+\pi\\ \arg(e_1-e_3) &\equiv \varphi+\pi-\widehat{e_3}\\ \arg(e_3-e_1) &\equiv \varphi-\widehat{e_3}\\ \arg(e_2-e_1) &\equiv \varphi+\widehat{e_2}+\pi\\ \arg(e_1-e_2) &\equiv \varphi+\widehat{e_2} \end{aligned}\right\} \bmod 2\pi,$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} \arg U_1 &\equiv -\frac{\varphi}{2}-\frac{\widehat{e_2}+\pi-\widehat{e_3}}{4}+\lambda_1\frac{\pi}{2}\\ \arg U_2 &\equiv -\frac{\varphi}{2}-\frac{\widehat{e_2}}{4}+\lambda_2\frac{\pi}{2}\\ \arg U_3 &\equiv -\frac{\varphi}{2}+\frac{\widehat{e_3}}{4}+\lambda_3\frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \bmod 2\pi,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant des entiers à déterminer.

Or, si l'on fait varier g_2 et g_3, les racines e_1, e_2, e_3 et les intégrales ω_1, ω_2, ω_3, η_1, η_2, η_3 variant d'une manière continue, il en sera de même des deux membres des égalités (10). Les entiers λ_1, λ_2, λ_3 conserveront donc une valeur constante, et il suffira de les déterminer dans un cas particulier.

Supposons e_1, e_2, e_3 réels, et $e_2 < e_3 < e_1$. On aura

$$\varphi = \widehat{e_2} = \widehat{e_1} = 0, \qquad \widehat{e_3} = \pi;$$

d'où

$$\arg U_1 = \lambda_1 \frac{\pi}{2}, \qquad \arg U_2 = \lambda_2 \frac{\pi}{2}.$$

Déterminons directement ces arguments. Le radical $\sqrt{Z}$ étant réel entre e_2 et e_3, imaginaire entre e_3 et e_1, ω_1, η_1 seront réels et ω_2, η_2 purement imaginaires. Leur signe dépend de la détermination qu'on voudra adopter pour le radical; prenons, pour fixer les idées, ω_1 positif; ω_2 sera une imaginaire positive; $e^{-\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}$, $e^{-\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}$ seront réels et positifs.

Il en est de même pour $\frac{\sigma\omega_1}{\omega_1}$ et $\frac{\sigma\omega_2}{\omega_2}$. On a, en effet, par définition

$$\frac{\sigma\omega_1}{\omega_1} = \prod{}' \left(1 - \frac{\omega_1}{w}\right) e^{\frac{\omega_1}{w} + \frac{\omega_1^2}{2w^2}} \qquad (w = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2).$$

Or, les facteurs pour lesquels $m_2 = 0$ sont réels et positifs; et les autres sont conjugués deux à deux, en associant ceux pour lesquels m_1 a la même valeur et m_2 des valeurs opposées.

De même, dans $\frac{\sigma\omega_2}{\omega_2}$, les facteurs où $m_1 = 0$ sont réels et positifs, et les autres conjugués deux à deux.

On aura donc

$$\arg U_1 = \arg \omega_1 = 0, \qquad \arg U_2 = \arg \omega_2 = \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 1.$$

Pour déterminer λ_3, nous remarquerons qu'on a généralement

$$\arg U_3 - \arg U_2 = \frac{\widehat{e_3} + \widehat{e_2}}{4} + (\lambda_3 - \lambda_2)\frac{\pi}{2}.$$

Supposons e_1, e_2, e_3 réels et tels qu'on ait $e_3 < e_1 < e_2$, $\widehat{e_2}$ et $\widehat{e_3}$ seront nuls, et l'on aura simplement

$$\arg U_3 - \arg U_2 = (\lambda_3 - \lambda_2)\frac{\pi}{2}.$$

Mais dans ce cas ω_2 est réel, ω_3 purement imaginaire, et l'on a

$$\arg U_3 - \arg U_2 = \arg \omega_3 - \arg \omega_2 = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$\lambda_3 - \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 2$$

et l'on a définitivement

$$(11)\quad \begin{cases} \arg U_1 = -\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\widehat{e_2} + \pi - \widehat{e_3}}{4}, \\[2ex] \arg U_2 = -\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\widehat{e_2}}{4} + \dfrac{\pi}{2}, \\[2ex] \arg U_3 = -\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\widehat{e_3}}{4} + \pi. \end{cases}$$

Ayant déterminé ainsi sans ambiguïté les quantités U_1, U_2, U_3 correspondantes aux périodes principales, on en déduira par la formule (9) la valeur de U'_α pour une autre période quelconque ω'_α.

414. Considérons, conjointement avec la fonction $\sigma(u)$, les trois fonctions

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma_\alpha u = \dfrac{e^{-\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = \dfrac{e^{-\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}\sigma(u+\omega_\alpha)}{U_\alpha} \\ \qquad (\alpha = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Elles se réduisent à l'unité pour $u = 0$. En outre, elles sont paires, car on a

$$\sigma_\alpha(-u) = \frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(-u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = -\frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(u-\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha}$$

$$= -\frac{e^{\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha-2\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha} = \frac{e^{\eta_\alpha u}e^{-2\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha}$$

$$= \sigma_\alpha u.$$

Enfin $\sigma_\alpha u$ s'annule lorsque $u = \omega_\alpha +$ période.

415. On a, en vertu de la définition précédente,

$$\sigma(u+\omega_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}\sigma_\alpha u. \tag{13}$$

On sait d'ailleurs que

$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u. \tag{14}$$

Les nouvelles fonctions $\sigma_\alpha(u)$ jouissent de propriétés analogues :

1° On a, en effet,

$$\sigma_\alpha(u+\omega_\alpha) = \frac{e^{-\eta_\alpha\left(u+3\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}\sigma(u+2\omega_\alpha)}{\mathrm{U}_\alpha},$$

d'où

$$\sigma_\alpha(u+\omega_\alpha) = -\frac{1}{\mathrm{U}_\alpha}e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}\right)}\sigma u; \tag{15}$$

2° En second lieu, changeons u en $u + 2\omega_\alpha$;

$$e^{-\eta_\alpha u}\sigma(u+\omega_\alpha)$$

se reproduira, multiplié par le facteur

$$-e^{-2\eta_\alpha\omega_\alpha+2\eta_\alpha(u+2\omega_\alpha)} = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}.$$

Donc

$$\sigma_\alpha(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma_\alpha u; \tag{16}$$

3° Changeons u en $u + \omega_\beta$, β étant différent de α; on

aura

$$\sigma_\alpha(u+\omega_\beta) = \frac{1}{U_\alpha} e^{-\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}+\omega_\beta\right)} \sigma(u+\omega_\alpha+\omega_\beta).$$

Or

$$\sigma(u+\omega_\alpha+\omega_\beta) = \sigma(u-\omega_\gamma) = -e^{-2\eta_\gamma u}\sigma(u+\omega_\gamma)$$
$$= -e^{-2\eta_\gamma u} e^{\eta_\gamma\left(u+\frac{\omega_\gamma}{2}\right)} U_\gamma \sigma_\gamma u.$$

Enfin, si nous remplaçons ω_α, η_α par leurs valeurs

$$-\omega_\beta-\omega_\gamma, \quad -\eta_\beta-\eta_\gamma,$$

l'exposant

$$-\eta_\alpha\left(u+\frac{\omega_\alpha}{2}+\omega_\beta\right) - 2\eta_\gamma u + \eta_\gamma\left(u+\frac{\omega_\gamma}{2}\right)$$

se transformera en

$$\eta_\beta\left(u+\frac{\omega_\beta}{2}\right) - \frac{(\eta_\beta\omega_\gamma-\eta_\gamma\omega_\beta)}{2} = \eta_\beta\left(u+\frac{\omega_\beta}{2}\right) - [\beta\gamma]\frac{\pi i}{4}.$$

D'ailleurs $[\beta\gamma] = [\alpha\beta]$. On a donc finalement

$$(17) \qquad \sigma_\alpha(u+\omega_\beta) = -e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \frac{U_\gamma}{U_\alpha} e^{\eta_\beta\left(u+\frac{\omega_\beta}{2}\right)} \sigma_\gamma u;$$

4° Changeons enfin u en $u+2\omega_\beta$; $e^{-\eta_\alpha u}$ sera multiplié par $e^{-2\eta_\alpha\omega_\beta}$, et $\sigma(u+\omega_\alpha)$ par $-e^{2\eta_\beta(u+\omega_\alpha+\omega_\beta)}$. D'ailleurs

$$e^{2\eta_\beta\omega_\alpha-2\eta_\alpha\omega_\beta} = e^{-[\alpha\beta]\pi i} = -1;$$

donc

$$(18) \qquad \sigma_\alpha(u+2\omega_\beta) = e^{2\eta_\beta(u+\omega_\beta)}\sigma_\alpha u.$$

416. Considérons les fonctions

$$f_\alpha u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \sqrt{pu-e_\alpha}.$$

Elles sont infinies pour $u=0$ et ont pour valeur principale $\frac{1}{u}$. Elles sont impaires.

Les zéros de $f_\alpha u$ sont ceux de $\sigma_\alpha u$, c'est-à-dire les points $\omega_\alpha +$ période. On a en outre, d'après les propriétés de σu et $\sigma_\alpha u$,

$$(19)\quad f_\alpha(u+2\omega_\alpha)=f_\alpha u,\quad f_\alpha(u+2\omega_\beta)=-f_\alpha u,\quad \text{si } \beta \gtrless \alpha.$$

Donc f_α est une fonction elliptique nouvelle ayant pour périodes fondamentales $2\omega_\alpha$ et $4\omega_\beta$.

Les trois fonctions f admettent pour périodes communes $4\omega_\alpha$, $4\omega_\beta$, $4\omega_\gamma$.

En ajoutant à l'argument une demi-période on obtient les formules

$$(20)\qquad f_\alpha(u+\omega_\alpha) = -\frac{f_\alpha\omega_\beta f_\alpha\omega_\gamma}{f_\alpha u},$$

$$(21)\qquad f_\alpha(u+\omega_\beta) = f_\alpha\omega_\beta \frac{f_\gamma u}{f_\beta u}.$$

Car les deux membres de ces égalités sont des fonctions elliptiques ayant mêmes zéros, mêmes pôles, et ils sont égaux pour $u=\omega_\beta$ ou pour $u=0$.

417. On a la formule d'addition

$$(22)\qquad f_\alpha(u+v) = \frac{f_\alpha^2\omega_\beta f_\alpha^2\omega_\gamma - f_\alpha^2 u f_\alpha^2 v}{f_\alpha u f'_\alpha v + f'_\alpha u f_\alpha v}.$$

Pour l'établir nous remarquerons : 1° que les deux membres ont les périodes communes $2\omega_\alpha$, $4\omega_\beta$; 2° que le numérateur du second membre a, aux périodes près, un seul pôle double $u=0$, et par suite deux zéros, qui sont $-v+\omega_\alpha$ et $v+\omega_\alpha$; 3° que le dénominateur a aussi le pôle double $u=0$ et deux zéros, à savoir $-v$ et $v+\omega_\alpha$; car en dérivant par rapport à v la relation

$$f v f(v+\omega_\alpha) = -f_\alpha\omega_\beta f_\alpha\omega_\gamma,$$

on trouve

$$f_\alpha(v+\omega_\alpha) f'_\alpha v + f'_\alpha(v+\omega_\alpha) f_\alpha v = 0.$$

Le quotient a donc comme le premier membre un seul

pôle simple $-v$ et un zéro simple $-v+\omega_\alpha$. Enfin pour $u=0$ ils ont la même valeur $f_\alpha v$.

418. Il est aisé de déterminer les constantes $f_\alpha \omega_\beta$ qui figurent dans les formules précédentes.

Posons en effet $u=\omega_\beta$ dans la formule

$$f_\alpha^2 u = \mathrm{p}u - e_\alpha$$

il viendra

$$f_\alpha^2 \omega_\beta = e_\beta - e_\alpha. \tag{23}$$

Mais cette formule ne fixe pas le signe de $f_\alpha \omega_\beta$. Pour le déterminer, partons de cette autre définition

$$f_\alpha u = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = e^{-\eta_\alpha u} \frac{\sigma(u+\omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha \sigma u};$$

il viendra

$$f_\alpha \omega_\beta = e^{-\eta_\alpha \omega_\beta} \frac{\sigma(\omega_\beta + \omega_\alpha)}{\sigma\omega_\alpha \sigma\omega_\beta} = - e^{-\eta_\alpha \omega_\beta} \frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha \sigma\omega_\beta}$$

$$= - e^{-\eta_\alpha \omega_\beta + \frac{1}{2}\eta_\gamma \omega_\gamma - \frac{1}{2}\eta_\alpha \omega_\alpha - \frac{1}{2}\eta_\beta \omega_\beta} \frac{\mathrm{U}_\gamma}{\mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta}.$$

Mais en remplaçant $\eta_\gamma \omega_\gamma$ par $(\eta_\alpha + \eta_\beta)(\omega_\alpha + \omega_\beta)$ l'exposant de e se réduira à

$$\frac{1}{2}(\eta_\beta \omega_\alpha - \eta_\alpha \omega_\beta) = -[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}.$$

donc

$$f_\alpha \omega_\beta = - e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \frac{\mathrm{U}_\gamma}{\mathrm{U}_\alpha \mathrm{U}_\beta}. \tag{24}$$

419. Les constantes $f_\alpha \omega_\beta$ se nomment les *multiplicateurs* du réseau des périodes. Elles sont au nombre de 12. Car si l'on change de périodes fondamentales, de manière à permuter ensemble de toutes les manières possibles e_α, e_β, e_γ, on trouve six valeurs différentes pour $e_\beta - e_\alpha = f_\alpha^2 \omega_\beta$. Et si d'autre part on change le signe de la période ω_β, on change le signe de $f_\alpha \omega_\beta$.

Ces multiplicateurs sont liés par les relations suivantes :

$$\frac{f_\alpha \omega_\beta}{f_\beta \omega_\alpha} = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4} + [\beta\alpha]\frac{\pi i}{4}} = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{2}} = i^{-[\alpha\beta]},$$

$$\frac{f_\alpha \omega_\beta}{f_\alpha \omega_\gamma} = e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4} + [\alpha\gamma]\frac{\pi i}{4}} \frac{U_\gamma^2}{U_\beta^2} = i^{-[\alpha\beta]} \frac{U_\gamma^2}{U_\beta^2}.$$

Les constantes

$$(25) \qquad k_{\beta\gamma} = \frac{f_\alpha \omega_\beta}{f_\alpha \omega_\gamma} = \sqrt{\frac{e_\beta - e_\alpha}{e_\gamma - e_\alpha}}$$

se nomment les *modules* du réseau. Ils sont également au nombre de 12. Car leurs carrés ont six valeurs distinctes et, d'autre part, en changeant ω_α, ω_β, ω_γ en $\omega_\alpha + 2\omega_\beta$, ω_β, $\omega_\gamma - 2\omega_\beta$, $[\alpha\beta]$ et U_β resteront inaltérés, mais U_γ^2, et par suite $k_{\beta\gamma}$, changera de signe.

Ces modules sont d'ailleurs liés entre eux par les relations évidentes

$$(26) \qquad \begin{cases} k_{\beta\gamma} k_{\gamma\beta} = 1, \\ k_{\beta\gamma}^2 + k_{\beta\alpha}^2 = 1, \end{cases}$$

qui permettent de les exprimer au moyen d'un seul d'entre eux, tel que $k_{\beta\gamma} = k$.

Les douze modules seront en effet

$$\pm k_{\beta\gamma}, \qquad \pm k_{\gamma\beta} = \pm \frac{1}{k_{\beta\gamma}},$$

$$\pm k_{\beta\alpha} = \pm \sqrt{1 - k_{\beta\gamma}^2}, \qquad \pm k_{\alpha\beta} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - k_{\beta\gamma}^2}},$$

$$\pm k_{\gamma\alpha} = \pm \sqrt{1 - k_{\gamma\beta}^2} = \pm \frac{k_{\beta\gamma}}{\sqrt{k_{\beta\gamma}^2 - 1}}, \qquad \pm k_{\alpha\gamma} = \pm \frac{\sqrt{k_{\beta\gamma}^2 - 1}}{k_{\beta\gamma}}.$$

Remarquons enfin que les racines carrées des modules

$$\pm \sqrt{k_{\beta\gamma}} = \pm e^{-[\alpha\beta]\frac{\pi i}{4}} \frac{U_\gamma}{U_\beta} = \pm \sqrt[4]{\frac{e_\beta - e_\alpha}{e_\gamma - e_\alpha}},$$

au nombre de 24, sont encore des fonctions uniformes des périodes et se permutent les unes dans les autres quand on change les périodes fondamentales.

420. On a

$$\mathfrak{p}'^2 = 4(\mathfrak{p}u - e_\alpha)(\mathfrak{p}u - e_\beta)(\mathfrak{p}u - e_\gamma) = 4f_\alpha^2 u f_\beta^2 u f_\gamma^2 u,$$

et en extrayant la racine carrée

$$(27) \qquad \mathfrak{p}'u = -2f_\alpha u f_\beta u f_\gamma u.$$

(On doit prendre le signe — pour que les deux membres aient pour $u = 0$ la même valeur principale $-\frac{2}{u^3}$.)

Mais on a d'autre part

$$f_\alpha^2 u = \mathfrak{p}u - e_\alpha.$$

Dérivant, remplaçant $\mathfrak{p}'u$ par sa valeur précédente et supprimant le facteur $2f_\alpha u$, il vient

$$(28) \qquad f'_\alpha u = -f_\beta u f_\gamma u \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Ces trois équations différentielles, jointes aux conditions initiales

$$f_\alpha u - \frac{1}{u} = 0 \qquad \text{pour} \qquad u = 0,$$

suffiraient à définir le système des fonctions f.

Élevons l'une d'elles au carré, et éliminons $f_\beta^2 u$, $f_\gamma^2 u$ au moyen des équations

$$(29) \qquad f_\alpha^2 u + e_\alpha = f_\beta^2 u + e_\beta = f_\gamma^2 u + e_\gamma = \mathfrak{p}u,$$

on obtient l'équation

$$(30) \qquad f'^2_\alpha u = (f_\alpha^2 u + e_\alpha - e_\beta)(f_\alpha^2 u + e_\alpha - e_\gamma),$$

qui définit isolément $f_\alpha u$.

421. Les fonctions f peuvent remplacer avec avantage les anciennes fonctions elliptiques introduites par Abel et Jacobi, et dont voici la définition :

Posons, pour abréger l'écriture,

$$f_\beta \omega_\alpha = \mathrm{M}, \qquad f_\beta \omega_\gamma = \mathrm{M}k, \qquad f_\gamma \omega_\alpha = \mathrm{M}k',$$

d'où

$$f_\alpha\omega_\beta = i^{-[\alpha\beta]}\mathrm{M}, \qquad f_\gamma\omega_\beta = i^{[\alpha\beta]}\mathrm{M}k, \qquad f_\alpha\omega_\gamma = i^{[\alpha\beta]}\mathrm{M}k'.$$

Les deux modules k, k' sont dits *complémentaires* et satisfont à la relation

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Posons encore

$$\mathrm{M}\omega_\alpha = \Omega_\alpha, \qquad \mathrm{M}\omega_\beta = \Omega_\beta, \qquad \mathrm{M}\omega_\gamma = \Omega_\gamma,$$

et enfin

$$(31) \qquad \operatorname{sn} u = \frac{\mathrm{M}}{f_\beta \frac{u}{\mathrm{M}}}, \qquad \operatorname{cn} u = \frac{f_\alpha \frac{u}{\mathrm{M}}}{f_\beta \frac{u}{\mathrm{M}}}, \qquad \operatorname{dn} u = \frac{f_\gamma \frac{u}{\mathrm{M}}}{f_\beta \frac{u}{\mathrm{M}}},$$

d'où

$$(32) \qquad \begin{cases} f_\beta \frac{u}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}}{\operatorname{sn} u}, & f'_\beta \frac{u}{\mathrm{M}} = -\frac{\mathrm{M}^2 \operatorname{sn}' u}{\operatorname{sn}^2 u}, \\ f_\alpha \frac{u}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M} \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, & f_\gamma \frac{u}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M} \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}. \end{cases}$$

422. On a évidemment d'après ces définitions

$$(33) \qquad \operatorname{sn} u = 0, \qquad \operatorname{sn}' u = \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = 1 \qquad \text{pour} \qquad u = 0,$$

$$(34) \qquad \operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \qquad \operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u,$$

$$(35) \qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(u + 2\Omega_\beta) = \operatorname{sn} u, & \operatorname{sn}(u + 2\Omega_\alpha) = \operatorname{sn}(u + 2\Omega_\gamma) = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u + 2\Omega_\gamma) = \operatorname{cn} u, & \operatorname{cn}(u + 2\Omega_\alpha) = \operatorname{cn}(u + 2\Omega_\beta) = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u + 2\Omega_\alpha) = \operatorname{dn} u, & \operatorname{dn}(u + 2\Omega_\beta) = \operatorname{dn}(u + 2\Omega_\gamma) = -\operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Les trois fonctions sn, cn, dn sont donc doublement périodiques. Leurs périodes fondamentales seront

Pour $\operatorname{sn} u$..... $2\Omega_\beta$ et $4\Omega_\gamma$ ou $4\Omega_\alpha$,
Pour $\operatorname{cn} u$..... $2\Omega_\gamma$ et $4\Omega_\alpha$ ou $4\Omega_\beta$,
Pour $\operatorname{dn} u$..... $2\Omega_\alpha$ et $4\Omega_\beta$ ou $4\Omega_\gamma$.

Leurs zéros sont simples et situés aux points suivants :

Pour $\operatorname{sn} u$..... $2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta$,
Pour $\operatorname{cn} u$..... $2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta + \Omega_\alpha$,
Pour $\operatorname{dn} u$..... $2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta + \Omega_\gamma$.

Ces trois fonctions admettent les pôles simples

$$2m\Omega_\alpha + 2m'\Omega_\beta + \Omega_\beta.$$

Si dans les formules relatives aux fonctions f on change u, v en $\frac{u}{M}$, $\frac{v}{M}$ et si l'on substitue pour $f_\beta \frac{u}{M}$, $f'_\beta \frac{u}{M}$, $\ldots$ leurs valeurs (32) on obtiendra les relations suivantes

$$\text{(36)} \qquad \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{sn}^2 u = \operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1,$$

$$\text{(37)} \qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}' u &= \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{cn}' u &= -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ \operatorname{dn}' u &= -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \end{aligned}\right.$$

$$\text{(38)} \qquad \operatorname{sn}'^2 u = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

$$\text{(39)} \qquad \left\{\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(u+\Omega_\alpha) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{sn}(u+\Omega_\beta) = -\frac{1}{k \operatorname{sn} u}, \\
&\operatorname{sn}(u+\Omega_\gamma) = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u}, \\
&\operatorname{cn}(u+\Omega_\alpha) = -\frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{cn}(u+\Omega_\beta) = \frac{i^{[\alpha\beta]} \operatorname{dn} u}{k \operatorname{sn} u}, \\
&\operatorname{cn}(u+\Omega_\gamma) = \frac{i^{[\alpha\beta]} k'}{k \operatorname{cn} u}, \\
&\operatorname{dn}(u+\Omega_\alpha) = \frac{k'}{\operatorname{dn} u}, \qquad \operatorname{dn}(u+\Omega_\beta) = -\frac{i^{[\alpha\beta]} \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \\
&\operatorname{dn}(u+\Omega_\gamma) = -\frac{i^{[\alpha\beta]} k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u},
\end{aligned}\right.$$

On aura enfin les formules d'addition

$$\text{(40)} \qquad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sn}(u+v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{D}, \\
\operatorname{cn}(u+v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{D}, \\
\operatorname{dn}(u+v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{D},
\end{aligned}\right.$$

en posant pour abréger

$$D = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v.$$

La première de ces formules se tire immédiatement de celle qui donne $f_\beta(u+v)$.

On en déduit

$$\begin{aligned}\text{cn}^2(u+v) &= 1 - \text{sn}^2(u+v)\\ &= \frac{D^2 - (\text{sn}\,u\,\text{cn}\,v\,\text{dn}\,v + \text{sn}\,v\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u)^2}{D}.\end{aligned}$$

Or on a

$$D = \text{cn}^2 u + \text{sn}^2 u\,\text{dn}^2 v = \text{cn}^2 v + \text{sn}^2 v\,\text{dn}^2 u.$$

Remplaçant donc au numérateur D^2 par

$$(\text{cn}^2 u + \text{sn}^2 u\,\text{dn}^2 v)(\text{cn}^2 v + \text{sn}^2 v\,\text{dn}^2 u),$$

il prendra la forme

$$(\text{cn}\,u\,\text{cn}\,v - \text{sn}\,u\,\text{dn}\,u\,\text{sn}\,v\,\text{dn}\,v)^2.$$

On aura donc en extrayant la racine carrée

$$\text{cn}(u+v) = \pm\frac{\text{cn}\,u\,\text{cn}\,v - \text{sn}\,u\,\text{dn}\,u\,\text{sn}\,v\,\text{dn}\,v}{D}.$$

Pour fixer le signe on posera $v = 0$. Le premier membre se réduisant alors à $\text{cn}\,u$, on doit prendre le signe $+$.

L'expression de $\text{dn}(u+v)$ se vérifie de même.

Les fonctions $\text{sn}\,u$, $\text{cn}\,u$, $\text{dn}\,u$ ne dépendent plus que du seul paramètre $k^2 = \frac{e_\alpha - e_\beta}{e_\gamma - e_\beta}$.

Ce paramètre pouvant prendre six valeurs distinctes par un changement de périodes fondamentales, on voit qu'à un même réseau de périodes correspondent six systèmes de fonctions sn, cn, dn, tandis qu'il n'existe pour ce réseau qu'une seule fonction $\wp u$ et un seul système de fonctions f.

Enfin, la symétrie entre les périodes étant détruite par l'introduction des fonctions sn, cn, dn, les formules correspondantes sont plus nombreuses et moins simples que celles des fonctions f.

V. — Les fonctions. θv, $\theta_\alpha v$.

423. Jusqu'à présent, nous avons désigné par $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ trois périodes quelconques formant un triangle primitif. Dorénavant nous les supposerons, pour plus de simplicité, numérotées dans l'ordre où elles se succèdent lorsqu'on tourne dans le sens direct autour du triangle, de telle sorte que le rapport $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ait sa partie imaginaire positive et que, par suite, on ait $[12] = +1$.

424. Si l'on change u en $u + 2\omega_1$, chacune des fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ se reproduit (**415**) multipliée par un facteur égal au signe près à $e^{2\eta_1(u+\omega_1)}$. La fonction $e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$ se reproduit aussi, multipliée par cette même exponentielle. Chacune des quatre fonctions

$$\frac{e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma u}{2\omega_1}, \quad e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_1 u, \quad \ldots, \quad e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_3 u$$

se reproduira donc au signe près.

Ces expressions sont d'ailleurs homogènes et de degré zéro en u, ω_1, ω_2 (car $\eta_1 = \zeta\omega_1$ est homogène de degré -1). Elle ne dépendent donc, en réalité, que des deux rapports

$$(1) \qquad v = \frac{u}{2\omega_1}, \qquad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(2) \qquad e^{\pi i v} = z, \qquad e^{\pi i \tau} = q$$

$\left(\text{et, plus généralement, } e^{\frac{\pi i \tau}{m}} = q^{\frac{1}{m}}\right)$; nous pourrons écrire

$$\frac{e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma u}{2\omega_1} = \mathrm{F}(v, \tau) = \mathfrak{F}(z, q),$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\sigma_\alpha u = \mathrm{F}_\alpha(v, \tau) = \mathfrak{F}_\alpha(z, q).$$

425. Les nouvelles fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\alpha$ ainsi introduites sont des fonctions uniformes de la variable z (q étant considéré comme un paramètre constant). Car à une valeur z_0 de z correspondent des valeurs de v données par la formule $v_0 + 2m$ (m entier); les valeurs correspondantes de u seront $u_0 + 4m\omega_1$ et donneront les mêmes valeurs à chacune des fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\alpha$, puisque le changement de u en $u + 2\omega_1$ les reproduit au signe près.

En outre, F, F_α sont des fonctions entières de v, qui, lui-même, considéré comme fonction de z, n'a d'autre point critique que $z = 0$. Donc les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\alpha$ n'ont que ce seul point critique et seront développables par la formule de Laurent en séries convergentes, procédant suivant les puissances entières positives et négatives de z.

Si u croît de $2\omega_1$, v se changera en $v + 1$, et z en $-z$. L'exponentielle $e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$ se reproduira, multipliée par $e^{-2\eta_1(u+\omega_1)}$; σu, $\sigma_1 u$ seront multipliés par $-e^{2\eta_1(u+\omega_1)}$, et $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ par ce même facteur changé de signe (415); nous aurons donc

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{llll} \mathfrak{F}(-z, q) = & -\mathfrak{F}(z, q), & \mathfrak{F}_1(-z, q) = & -\mathfrak{F}_1(-z, q), \\ \mathfrak{F}_2(-z, q) = & \mathfrak{F}_2(z, q), & \mathfrak{F}_3(-z, q) = & \mathfrak{F}_3(-z, q). \end{array}\right.$$

Enfin, si u croît de $2\omega_2$, v se changera en $v + \tau$, et z en qz. L'exponentielle $e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}$ se reproduira, multipliée par

$$e^{-\frac{2\eta_1\omega_2}{\omega_1}(u+\omega_2)}$$

ou, en remplaçant $\eta_1\omega_2$ par la valeur tirée de l'équation

$$\omega_2\eta_1 - \omega_1\eta_2 = \frac{\pi i}{2}$$

par

$$e^{-\frac{\pi i + 2\omega_1\eta_2}{\omega_1}(u+\omega_2)} = q^{-1}z^{-2}e^{-2\eta_2(u+\omega_2)}.$$

D'ailleurs σu, $\sigma_2 u$ se reproduisent, multipliés par $-e^{2\eta_2(u+\omega_2)}$ et $\sigma_1 u$, $\sigma_3 u$ se reproduisent, multipliés par le même facteur,

changé de signe. Nous aurons donc

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(qz, q) = -q^{-1}z^{-2}\,\mathfrak{F}(z, q), & \mathfrak{F}_1(qz, q) = q^{-1}z^{-2}\,\mathfrak{F}_1(z, q), \\ \mathfrak{F}_2(qz, q) = -q^{-1}z^{-2}\,\mathfrak{F}_2(z, q), & \mathfrak{F}_3(qz, q) = q^{-1}z^{-2}\,\mathfrak{F}_3(z, q). \end{cases}$$

426. Les propriétés (3) et (4) (jointes à la condition d'être uniformes et de n'avoir de point critique que pour $z = 0$) suffisent à définir les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_3$ à des facteurs constants près :

1° En effet, considérons d'abord la fonction $\mathfrak{F}(z, q)$. D'après les relations (3), elle sera impaire en z; son développement en série sera donc de la forme

$$\mathfrak{F}(z, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^{2n+1}.$$

Substituons ce développement dans la première des formules (4); il vient

$$\sum A_n q^{2n+1} z^{2n+1} = -\sum A_n q^{-1} z^{2n-1},$$

et, en identifiant les termes en z^{2n-1},

$$\begin{aligned} A_n &= -q^{2n} A_{n-1} = (-1)^{n-1} q^{2n+2(n-1)+\dots} A_1 \\ &= (-1)^{n-1} q^{n(n+1)} A_1 = \frac{(-1)^n}{i}\, q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \frac{q^{-\frac{1}{4}} A_1}{i}. \end{aligned}$$

Si donc nous posons

$$\frac{q^{-\frac{1}{4}} A_1}{i} = A,$$

nous aurons

$$\mathfrak{F}(z, q) = A\,\theta(v, \tau),$$

$\theta(v, \tau)$ désignant la série

$$(5)\quad \begin{aligned} \theta(v, \tau) &= \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1} \\ &= \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i v}. \end{aligned}$$

A chaque valeur positive ou nulle de l'indice n est associée une autre valeur négative $-n-1$, à laquelle correspond le terme

$$\frac{1}{i}(-1)^{-n-1}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{-(2n+1)\pi i v}.$$

Réunissant les termes associés, nous obtiendrons cette nouvelle expression

$$(5\ bis)\qquad \theta(v,\tau)=2\sum_0^\infty(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\pi v,$$

où l'imaginaire i a cessé de figurer.

2° Passons à la fonction $\mathfrak{F}_1$. D'après les relations (3), elle sera impaire en z, et de la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty}B_n z^{2n+1}.$$

Substituons ce développement dans la seconde des relations (4); il viendra

$$\sum B_n q^{2n+1}z^{2n+1}=\sum B_n q^{-1}z^{2n-1};$$

d'où

$$B_n=q^{2n}B_{n-1}=q^{n(n+1)}B_1=q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}q^{-\frac{1}{4}}B_1.$$

Posant donc

$$q^{-\frac{1}{4}}B_1=B,$$

nous aurons

$$\mathfrak{F}_1(z,q)=B\,\theta_1(v,\tau),$$

$\theta_1(v,\tau)$ désignant la série

$$(6)\qquad \begin{cases}\theta_1(v,\tau)=\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}z^{2n+1}=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)\pi i v}\\[2ex] \qquad\qquad =2\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\pi v.\end{cases}$$

3° La fonction $\mathfrak{F}_2$ sera paire en z et de la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n z^{2n}.$$

Substituons ce développement dans la troisième relation (4), il vient

$$\sum C_n q^{2n} z^{2n} = -\sum C_n q^{-1} z^{2n-2},$$

et, en identifiant les termes en z^{2n-2},

$$\begin{aligned} C_n &= -q^{2n-1} C_{n-1} \\ &= (-1)^n q^{(2n-1)+(2n-3)\dots} C_0 = (-1)^n q^{n^2} C_0. \end{aligned}$$

Posant donc $C_0 = C$, nous aurons

$$\mathfrak{F}_2 = C\theta_2(v, \tau),$$

$\theta_2(v, \tau)$ représentant la série

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \theta_2(v, \tau) &= \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi i v} \\ &= 1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi v. \end{aligned} \right.$$

4° Enfin la fonction $\mathfrak{F}_3$ sera paire en z, et d'après la dernière relation (4), on aura

$$\mathfrak{F}_3 = D\theta_3(v, \tau),$$

$\theta_3(v, \tau)$ désignant la série

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \theta_3(v, \tau) &= \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi i v} \\ &= 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi v. \end{aligned} \right.$$

427. Les séries θ, θ_1, θ_2, θ_3, définies au numéro précédent, ont été introduites dans l'Analyse par *Jacobi;* mais la notation qui doit servir pour les représenter n'est pas encore bien fixée. M. *Weierstrass*, suivi par M. *Halphen*, les désigne respectivement par ϑ_1, ϑ_2, ϑ_0, ϑ_3. Par le changement d'indices que nous avons pris la liberté de faire, on rétablit le parallélisme des notations entre ces fonctions et les σ correspondants.

428. Si nous remplaçons q par sa valeur $e^{\pi i\tau}$, chacun des termes des séries θ, θ_α sera de la forme

$$\mathrm{T} = a e^{\pi i(\lambda^2\tau+2\lambda v)},$$

a et λ étant des constantes. On aura évidemment

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tau} = \pi i \lambda^2 \mathrm{T}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial v^2} = (2\pi i\lambda)^2 \mathrm{T};$$

d'où

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \tau}.$$

Les séries θ, θ_α, étant des sommes de termes de ce genre. satisferont évidemment à cette même équation aux dérivées partielles; et leurs dérivées y satisferont aussi.

429. Lorsque nous n'aurons pas à faire varier le paramètre τ, nous pourrons le supprimer dans l'écriture et désigner les séries ci-dessus par θv, ..., $\theta_\alpha v$, et leurs dérivées (relatives à v) par $\theta' v$, $\theta'' v$, ..., $\theta'_\alpha v$, ... Dans le cas exceptionnel où τ sera variable, les dérivées relatives à τ seront représentées suivant l'usage par $\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$, ...

D'après les expressions données ci-dessus pour θ, ..., θ_α,

ou aura évidemment pour $v = 0$, d'où $z = 1$,

$$
(10)\quad
\begin{cases}
\theta_1 0 = 2\sum_0^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} = \sum_{-\infty}^\infty q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2},\\
\theta_2 0 = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} = \sum_{-\infty}^\infty (-1)^n q^{n^2},\\
\theta_3 0 = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} = \sum_{-\infty}^\infty q^{n^2},\\
\theta\, 0 = 0,\\
\theta' 0 = 2\pi \sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} (2n+1),\\
\theta'' 0 = 0,\\
\theta''' 0 = -2\pi^3 \sum_0^\infty (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} (2n+1)^3.
\end{cases}
$$

430. Si l'on fait croître u de ω_1, ω_2, ω_3, v croîtra respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\tau$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau$, et z sera respectivement multiplié par i, $q^{\frac{1}{2}}$, $-iq^{-\frac{1}{2}}$. Ces divers changements permuteront les unes dans les autres les quatre fonctions θ, à des facteurs exponentiels près, comme l'indique le Tableau suivant :

$$
(11)\quad
\begin{cases}
\theta\left(v+\frac{1}{2}\right) = \theta_1 v, & \theta_1\left(v+\frac{1}{2}\right) = -\theta v,\\
\theta_2\left(v+\frac{1}{2}\right) = \theta_3 v, & \theta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) = \theta_2 v,
\end{cases}
$$

$$
(12)\quad
\begin{cases}
\theta\left(v+\frac{1}{2}\tau\right) = iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1}\theta_2 v, & \theta_1\left(v+\frac{1}{2}\tau\right) = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1}\theta_3 v,\\
\theta_2\left(v+\frac{1}{2}\tau\right) = iq^{-\frac{1}{4}} z^{-1}\theta v, & \theta_3\left(v+\frac{1}{2}\tau\right) = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1}\theta_1 v,
\end{cases}
$$

$$
(13)\quad
\begin{cases}
\theta\left(v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau\right) = -q^{-\frac{1}{4}} z\theta_3 v, & \theta_1\left(v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau\right) = -iq^{-\frac{1}{4}} z\theta_2 v,\\
\theta_2\left(v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau\right) = q^{-\frac{1}{4}} z\theta_1 v, & \theta_3\left(v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau\right) = -iq^{-\frac{1}{4}} z\theta v.
\end{cases}
$$

On a, en effet,

$$\theta\left(v+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{i}\sum(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}(iz)^{2n+1}$$
$$=\sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} z^{2n+1}=\theta_1 v.$$

D'autre part,

$$\theta\left(v+\frac{1}{2}\tau\right)=\frac{1}{i}\sum(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(q^{\frac{1}{2}}z\right)^{2n+1}$$
$$=i\sum(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2-\frac{1}{4}} z^{2n+1}$$
$$=iq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum(-1)^{n+1}q^{(n+1)^2}z^{2n+2},$$

expression qui se réduit à $iq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\theta_2 v$ lorsqu'on y change l'indice de sommation n en $n-1$.

On a encore

$$\theta\left(v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau\right)=\frac{1}{i}\sum(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\left(-iq^{-\frac{1}{2}}z\right)^{2n+1}$$
$$=-\sum q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2n+1}{2}} z^{2n+1}$$
$$=-q^{-\frac{1}{4}}z\sum q^{n^2}z^{2n}=-q^{-\frac{1}{4}}z\theta_3 v.$$

Les autres formules se vérifient avec la même facilité.

431. En ajoutant une seconde fois à la variable l'une ou l'autre des quantités $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\tau$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau$, on obtient les formules

$$(14)\quad \begin{cases} \theta\,(v+1)=-\theta v, & \theta_1(v+1)=-\theta_1 v, \\ \theta_2(v+1)=\theta_2 v, & \theta_3(v+1)=\theta_3 v; \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \theta\,(v+\tau)=-q^{-1}z^{-2}\theta v, & \theta_1(v+\tau)=q^{-1}z^{-2}\theta_1 v, \\ \theta_2(v+\tau)=-q^{-1}z^{-2}\theta_2 v, & \theta_3(v+\tau)=q^{-1}z^{-2}\theta_3 v; \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{cases} \theta\,(v-1-\tau)=q^{-1}z^2\theta v, & \theta_1(v-1-\tau)=-q^{-1}z^2\theta_1 v, \\ \theta_2(v-1-\tau)=-q^{-1}z^2\theta_2 v, & \theta_3(v-1-\tau)=q^{-1}z^2\theta_3 v. \end{cases}$$

432. On a, d'après le n° **424**,

$$\frac{e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma u}{2\omega_1} = \mathfrak{F}(z, q) = A\theta v,$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma_1 u = \mathfrak{F}_1(z, q) = B\theta_1 v,$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma_2 u = \mathfrak{F}_2(z, q) = C\theta_2 v,$$

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \sigma_3 u = \mathfrak{F}_3(z, q) = D\theta_3 v.$$

Il reste à déterminer les constantes A, B, C, D. Pour cela, posons dans les trois dernières équations $v = 0$, d'où $u = 0$; elles deviendront

$$1 = B\theta_1(0), \qquad 1 = C\theta_2(0), \qquad 1 = D\theta_3(0).$$

La première équation devient identique pour $v = 0$. Mais supposons v infiniment petit, et calculons les deux premiers termes du développement des deux membres suivant les puissances de v; nous aurons

$$e^{-\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} = e^{-2\eta_1\omega_1 v^2} = 1 - 2\eta_1\omega_1 v^2 + \ldots,$$

$$\frac{\sigma u}{2\omega_1} = \frac{\sigma 2\omega_1 v}{2\omega_1} = v + \alpha v^5 + \ldots.$$

Le développement du premier membre sera donc

$$v - 2\eta_1\omega_1 v^3 + \ldots.$$

Celui du second membre sera

$$A\left[v\theta'(0) + \frac{v^3\theta'''(0)}{6} + \ldots\right],$$

et l'identification donnera

$$1 = A\theta'(0), \qquad 2\eta_1\omega_1 = -A\frac{\theta'''(0)}{6}.$$

Nous aurons donc finalement

$$(17) \qquad \sigma u = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta(v)}{\theta'(0)},$$

$$(18) \qquad \sigma_\alpha u = e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(0)},$$

la constante $2\eta_1\omega_1$ étant donnée elle-même en fonction de q par la formule

$$(19) \qquad 2\eta_1\omega_1 = -\frac{1}{6}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}.$$

Par ces formules σu, $\sigma_\alpha u$ seront donc exprimées en fonction des trois variables ω_1, $q^{\frac{1}{4}}$, v, qui elles-mêmes sont liées à ω_1, ω_2, u par les relations

$$(20) \qquad q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \omega_2}{4\omega_1}}, \qquad v = \frac{u}{2\omega_1}.$$

433. On aura ensuite

$$(21) \quad \zeta u = \frac{d\log\sigma u}{du} = \frac{1}{2\omega_1}\frac{d\log\sigma u}{dv} = \frac{1}{2\omega_1}\left[4\eta_1\omega_1 v + \frac{\theta'(v)}{\theta(v)}\right],$$

$$(22) \quad pu = -\frac{d\zeta u}{du} = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - \frac{\theta(v)\theta''(v) - \theta'^2(v)}{\theta^2(v)}\right].$$

D'autre part

$$\sqrt{pu - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u} = \frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(0)\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(0)\theta(v)},$$

d'où cette nouvelle expression de pu

$$(23) \qquad pu = e_\alpha + \left[\frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(0)\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(0)\theta(v)}\right]^2.$$

434. Développons cette expression suivant les puissances croissantes de v. La fonction $\theta(v)$ étant impaire, et la fonction $\theta_\alpha(v)$ paire, on aura

$$\frac{\theta(v)}{\theta'(0)} = v + \frac{v^3}{6}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} + \ldots, \qquad \frac{\theta_\alpha(v)}{\theta_\alpha(0)} = 1 + \frac{v^2}{2}\frac{\theta''_\alpha(0)}{\theta_\alpha(0)} + \ldots.$$

Le terme indépendant de v dans le développement sera donc

$$e_\alpha + \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{\theta''_\alpha(0)}{\theta_\alpha(0)} - \frac{1}{3}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)}\right],$$

et, comme on sait qu'il doit disparaître, on aura

$$(24) \qquad e_\alpha = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{1}{3}\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} - \frac{\theta''_\alpha(0)}{\theta'_a(0)}\right] = 0.$$

435. Posons dans cette équation $\alpha = 1, 2, 3$ et ajoutons les résultats ; nous obtiendrons l'identité

$$\frac{\theta'''(0)}{\theta'(0)} - \sum \frac{\theta''_\alpha(0)}{\theta_\alpha(0)} = 0.$$

On a d'ailleurs (428)

$$\theta'''(v) = \frac{\partial^2 \theta'(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta'(v)}{d\tau}, \qquad \theta''_\alpha(v) = 4\pi i \frac{\partial \theta_\alpha(v)}{\partial \tau},$$

et, en faisant $v = 0$, on aura en particulier

$$\theta'''(0) = 4\pi i \frac{d\theta'(0)}{d\tau}, \qquad \theta''_\alpha(0) = 4\pi i \frac{d\theta_\alpha(0)}{d\tau}.$$

L'identité précédente peut donc s'écrire

$$0 = \frac{\frac{d\theta'(0)}{d\tau}}{\theta'(0)} - \sum \frac{\frac{d\theta_\alpha(0)}{d\tau}}{\theta_\alpha(0)} = \frac{d}{d\tau} \log \frac{\theta'(0)}{\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0)}.$$

Le quotient de $\theta'(0)$ par $\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0)$ est donc une constante. Pour la déterminer, supposons q infiniment petit; on aura, d'après les formules (10),

$$\theta'(0) = 2\pi\left(q^{\frac{1}{4}} + \ldots\right), \qquad \theta_1(0) = 2q^{\frac{1}{4}} + \ldots;$$
$$\theta_2(0) = 1 + \ldots, \qquad \theta_3(0) = 1 + \ldots.$$

Le rapport cherché sera donc égal à π, et l'on aura l'identité

$$(25) \qquad \theta'(0) = \pi\theta_1(0)\theta_2(0)\theta_3(0).$$

436. On a

$$U_\alpha = e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha \omega_\alpha} \sigma\omega_\alpha = e^{-\frac{1}{2}\eta_\alpha \omega_\alpha} 2\omega_1 e^{\frac{\eta_1 \omega_\alpha^2}{2\omega_1}} \frac{\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right)}{\theta'(0)}$$

$$= 2\omega_1 e^{\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}(\eta_1\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_1)} \frac{\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right)}{\theta'(0)}.$$

Si $\alpha = 1$, le facteur exponentiel se réduit à l'unité; d'autre part [formules (11)]

$$\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right) = \theta\left(\frac{1}{2}\right) = \theta_1(0).$$

Donc

$$(26) \qquad U_1 = 2\omega_1 \frac{\theta_1(0)}{\theta'(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{1}{\theta_2(0)\,\theta_3(0)}.$$

Si $\alpha = 2$, $\eta_1\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$ et l'exponentielle se réduit à

$$e^{\frac{\pi i \tau}{4}} = q^{\frac{1}{4}};$$

d'autre part [formules (12)]

$$\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right) = \theta\left(\frac{\tau}{2}\right) = i q^{-\frac{1}{4}} \theta_2(0).$$

Donc

$$(27) \qquad U_2 = 2\omega_1 i \frac{\theta_2(0)}{\theta'(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{i}{\theta_1(0)\,\theta_3(0)}.$$

Enfin, si $\alpha = 3$, $\eta_1\omega_\alpha - \eta_\alpha\omega_1 = -\frac{\pi i}{2}$, $\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1} = -\frac{1+\tau}{2}$, l'exponentielle se réduit à

$$e^{(1+\tau)\frac{\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{4}} q^{\frac{1}{4}}.$$

D'autre part [formules (13)]

$$\theta\left(\frac{\omega_\alpha}{2\omega_1}\right) = \theta\left(-\frac{1+\tau}{2}\right) = -q^{-\frac{1}{4}} \theta_3(0)$$

et, par suite,

$$(28)\qquad U_3 = -2\omega_1 e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\theta_3(0)}{\theta'(0)} = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{-e^{\frac{\pi i}{4}}}{\theta_1(0)\theta_2(0)}.$$

437. On a (410)

$$U_1^4 + U_2^4 + U_3^4 = 0.$$

Substituant dans cette relation les valeurs ci-dessus de U_1, U_2, U_3, nous obtiendrons une nouvelle identité

$$(29)\qquad \theta_1^4(0) + \theta_2^4(0) - \theta_3^4(0) = 0.$$

Les formules (6) du même numéro donneront de même

$$(30)\qquad \begin{cases} e_3 - e_2 = \dfrac{-iU_1^2}{U_2^2 U_3^2} = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_1^4(0), \\ e_1 - e_3 = \dfrac{-iU_2^2}{U_3^2 U_1^2} = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_2^4(0), \\ e_2 - e_1 = \dfrac{-iU_3^2}{U_1^2 U_2^2} = -\left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0); \end{cases}$$

puis ces nouvelles expressions de e_1, e_2, e_3,

$$(31)\qquad \begin{cases} 3e_1 = e_1 - e_3 - (e_2 - e_1) = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\quad \theta_2^4(0) + \theta_3^4(0)], \\ 3e_2 = e_2 - e_1 - (e_3 - e_2) = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [-\theta_3^4(0) - \theta_1^4(0)]. \\ 3e_3 = e_3 - e_2 - (e_1 - e_3) = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 [\quad \theta_1^4(0) - \theta_2^4(0)]. \end{cases}$$

Ajoutons les carrés des équations (30), il viendra

$$\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4 [\theta_1^8(0) + \theta_2^8(0) + \theta_3^8(0)] = (e_3 - e_2)^2 + (e_1 - e_3)^2 + (e_2 - e_1)^2$$
$$= 2(e_1 + e_2 + e_3)^2 - 6(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = \frac{3}{2} g_2;$$

d'où

$$(32)\qquad g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4 [\theta_1^8(0) + \theta_2^8(0) + \theta_3^8(0)].$$

Le second invariant $g_3 = 4 e_1 e_2 e_3$ s'obtiendra par la multiplication des équations (31).

Le discriminant Δ sera donné par la formule

$$(33)\quad \Delta = 16(e_3 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_1)^2$$
$$= 16\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^{12} \theta_1^8(0)\,\theta_2^8(0)\,\theta_3^8(0) = \frac{16\pi^4}{(2\omega_1)^{12}}\theta'^8(0).$$

On aura enfin

$$(34)\qquad J = \frac{g_2^3}{\Delta} = \frac{\pi^8}{54}\,\frac{[\theta_1^8(0) + \theta_2^8(0) + \theta_3^8(0)]^3}{\theta'^8(0)}.$$

438. Les formules précédentes donnent le moyen pratique d'exécuter les calculs relatifs aux fonctions elliptiques, en les supposant définies soit par leur périodes, soit par leurs invariants.

Supposons d'abord le réseau des périodes donné. Nous y choisirons à volonté un couple de périodes primitives $2\omega_1$, $2\omega_2$ telles que le rapport $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = r + si$ ait sa partie imaginaire positive ; $q^{\frac{1}{4}}$ sera déterminé par l'équation

$$q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \tau}{4}}.$$

Il importe, pour rendre plus grande la convergence des développements à employer, que la quantité $|q| = e^{-\pi s}$ soit la plus petite possible. Il faudra donc rendre s maximum et, par suite, choisir pour $2\omega_1$ la période de module minimum. On aura, dans ce cas (362),

$$s \overline{\overline{>}} \sin\frac{\pi}{3},$$

d'où

$$|q| \overline{\overline{<}} e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}} < \frac{1}{9}.$$

On pourra choisir pour $2\omega_2$ la seconde période du triangle principal. Si celui-ci est rectangle, on aura ainsi l'avantage de trouver pour q une valeur réelle et positive. De plus elle sera au plus égale à $e^{-\pi}$.

Connaissant ainsi ω_1, ω_2 et $q^{\frac{1}{4}}$, on calculera η_1 par la formule (19), puis η_2, η_3, ω_3 par les formules

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2},$$

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0, \qquad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

Les autres constantes U_1, U_2, U_3, e_1, e_2, e_3, g_2, g_3 Δ, J se calculeront par les formules des nos 436 et 437.

439. Réciproquement, supposons donnés g_2 et g_3 et cherchons à calculer les périodes principales $2\omega_1$, $2\omega_2$, et la quantité auxiliaire $q^{\frac{1}{4}}$.

Nous déterminerons d'abord les racines e_1, e_2, e_3 de l'équation

$$4z^3 - g_2 z - g_3 = 0,$$

en les numérotant de telle sorte que $e_2 e_3$ soit le plus petit côté du triangle, et que $e_3 e_1$ lui succède dans le sens direct.

On aura ensuite

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)}}, \qquad \ldots,$$

les déterminations des radicaux étant précisées comme au no 413.

Pour obtenir q, divisons membre à membre les équations (28) et (27) et posons, pour abréger,

$$\frac{U_3}{ie^{\frac{\pi i}{4}} U_2} = a;$$

il viendra

$$a = \frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)} = \frac{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \ldots}$$

ou

$$\frac{1}{2}\,\frac{a-1}{a+1} = \frac{q + q^9 + \ldots}{1 + 2q^4 + \ldots} = q\left(\frac{1 + q^8 + \ldots}{1 + 2q^4 + \ldots}\right).$$

Il nous faut calculer, parmi les racines de cette équation, celle dont le module est minimum. Nous savons que ce module est $< \frac{1}{9}$. Le facteur entre parenthèses est donc très voisin de l'unité ; en le négligeant, nous aurons

$$q = \frac{1}{2}\frac{a-1}{a+1},$$

avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{3000}$. Si l'on veut une approximation plus grande, on mettra l'équation précédente sous la forme

$$q + q^9 + \ldots = \alpha(1 + 2q^4 + \ldots),$$

et l'on développera q suivant les puissances croissantes de α. On trouve ainsi

$$q = \alpha + 2\alpha^5 + 15\alpha^9 + \ldots.$$

Connaissant q, on obtiendra $2\omega_1$ par l'une ou l'autre des équations (27) ou (28), puis $2\omega_2$ par la formule

$$e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}} = q,$$

d'où l'on tire, en désignant par $\operatorname{Log} q$ l'un des logarithmes de q choisi à volonté,

$$2\omega_2 = \frac{2\omega_1}{\pi i}\operatorname{Log} q + 4m_1\omega_1,$$

m_1 étant un entier positif ou négatif; nous le choisirons de manière à rendre $|2\omega_2|$ minimum, ce qui achèvera de préciser cette seconde période. Nous aurons enfin

$$q^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{\pi i \omega_2}{4\omega_1}}.$$

Nous pourrons donc, quelles que soient les données initiales, déterminer toutes les constantes qui figurent dans les expressions de σu, $\sigma_\alpha u$, ζu, $\wp u$ et, par suite, calculer les valeurs de ces fonctions pour une valeur donnée de u.

440. Réciproquement, supposons $\wp u$ donné et proposons-nous de calculer les valeurs de u.

Soit u_0 l'une d'elles; elles auront pour formule générale,

$$\pm u_0 + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2.$$

Les valeurs correspondantes de la quantité $z^2 = e^{2\pi i v}$ seront de la forme

$$q^{2m_2} e^{\pm \frac{\pi i u_0}{\omega_1}};$$

elles constituent deux progressions géométriques de raison q^2 et sont réciproques deux à deux. Il existera donc deux valeurs de z^2, réciproques l'une de l'autre et de module compris entre $|q|$ et $\left|\frac{1}{q}\right|$; et le module de leur somme ne pourra surpasser $|q| + \left|\frac{1}{q}\right|$; $|q|$ étant d'ailleurs $< \frac{1}{9}$, ce module sera moindre que $\left(1 + \frac{1}{81}\right)\left|\frac{1}{q}\right|$.

Pour déterminer ces deux valeurs de z^2, nous pourrons partir des deux équations

$$\wp u - e_2 = \left[\frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(v)}{\theta(v)}\right]^2,$$

$$\wp u - e_3 = \left[\frac{1}{2\omega_1}\frac{\theta'(0)}{\theta_3(0)}\frac{\theta_3(v)}{\theta(v)}\right]^2.$$

Divisons-les membre à membre et posons, pour abréger,

$$\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}\frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3} = b^2;$$

il viendra, en extrayant la racine carrée,

$$\pm b = \frac{\theta_2(v)}{\theta_3(v)} = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} z^{2n}}{\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^{2n}}$$

ou

$$\frac{1 \mp b}{1 \pm b} = \frac{q\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + q^9\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + \ldots}{1 + q^4\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + \ldots}.$$

D'après les limites entre lesquelles sont compris les modules de z^2 et de q, le second membre peut être remplacé, avec une faible erreur relative, par $q\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$. Les valeurs cherchées de z^2 différeront donc peu des racines de l'équation

$$q\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1 \mp b}{1 \pm b},$$

dont la somme est

$$\frac{1}{q}\,\frac{1 \mp b}{1 \pm b},$$

et a son module moindre que $\left|\frac{1}{q}\right|$ si nous déterminons le signe de la quantité ambiguë $\pm b$ de telle sorte que sa partie réelle soit positive.

Si l'on veut une approximation plus grande, on pourra opérer comme il suit :

Posons

$$\frac{1 \mp b}{1 \pm b} = a, \qquad U_n = z^{2n} + z^{-2n}.$$

L'équation pourra s'écrire ainsi

$$a(1 + q^4 U_2 + \ldots) = q U_1 + q^9 U_3 + \ldots.$$

Mais on a la formule récurrente

$$U_{n+1} = U_n U_1 - U_{n-1},$$

d'où

$$U_2 = U_1^2 - 2,$$
$$U_3 = (U_1^2 - 2)U_1 - U_1 = U_1^3 - 3U_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

L'équation devient donc

$$qU_1 + q^9(U_1^3 - 3U_1) + \ldots = a[1 + q^4(U_1^2 - 2) + \ldots],$$

ou, en posant $U_1 = \frac{x}{q}$,

$$x + q^6 x^3 - 3q^8 x + \ldots = a(1 + q^2 x^2 - 2q^4 + \ldots).$$

Or q^2 étant très petit, l'équation a une racine voisine de a dont le module est < 1; on pourra donc sans crainte négliger dans le calcul les termes que nous n'avons pas écrits. On a ainsi pour calculer x une équation du troisième degré. On peut obtenir sa racine par un développement en série. Posons en effet dans l'équation

$$x = \lambda_0 + \lambda_1 q^2 + \lambda_2 q^4 + \ldots.$$

L'identification donnera

$$\begin{aligned}
&\lambda_0 = a,\\
&\lambda_1 = a\lambda_0^2 = a^3,\\
&\lambda_2 = a(2\lambda_0\lambda_1 - 2) = 2a^5 - 2a,\\
&\lambda_3 = -\lambda_0^3 + a(\lambda_1^2 + 2\lambda_0\lambda_2) = 5a^7 - 5a^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ayant ainsi calculé x et $U_1 = \frac{x}{q}$, z^2 sera donné par une équation du second degré

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = U_1,$$

et enfin u par l'équation

$$z^2 = e^{\frac{2\pi i u}{2\omega_1}}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{\omega_1}{\pi i}\log z^2.$$

441. Pour obtenir l'expression des fonctions θv, $\theta_\alpha v$ par des produits infinis, considérons le produit

$$P(z) = \frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}}(z - z^{-1}) \prod_1^\infty (1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2}).$$

Il est évidemment convergent ($|q|$ étant < 1), sauf pour $z = 0$, et représente une fonction uniforme n'ayant pas d'autre point critique.

On a évidemment

$$P(-z) = -P(z).$$

D'autre part, si l'on change z en qz, chacun des facteurs $1 - q^{2n}z^2$ se change dans le suivant, et chacun des facteurs $1 - q^{2n}z^{-2}$ dans le précédent, sauf le premier $1 - q^2 z^{-2}$, qui se change en $1 - z^{-2}$; on aura donc

$$P(qz) = P(z)\frac{qz - q^{-1}z^{-1}}{z - z^{-1}}\,\frac{1 - z^{-2}}{1 - q^2 z^2} = -q^{-1}z^{-2}P(z).$$

Donc $P(z)$ ne diffère de θv que par un facteur constant (**426**), et l'on a

$$(35)\quad \begin{aligned} \theta(v) = \mathcal{A}\,P(z) &= \frac{\mathcal{A}}{i}\,q^{\frac{1}{4}}(z - z^{-1})\prod_1^\infty (1 - q^{2n}z^2)(1 - q^{2n}z^{-2}) \\ &= 2\mathcal{A}\,q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\prod_1^\infty (1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}). \end{aligned}$$

On en déduit (**430**)

$$(36)\quad \begin{aligned} \theta_1 v = \theta\left(v + \frac{1}{2}\right) &= \mathcal{A}\,P(iz) \\ &= \mathcal{A}\,q^{\frac{1}{4}}(z + z^{-1})\prod_1^\infty (1 + q^{2n}z^2)(1 + q^{2n}z^{-2}) \\ &= 2\mathcal{A}\,q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_1^\infty (1 + 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}), \end{aligned}$$

$$(37)\quad \begin{aligned} \theta_2 v = -iq^{\frac{1}{4}}z\,\theta\left(v + \frac{1}{2}\tau\right) &= -\mathcal{A}\,iq^{\frac{1}{4}}z\,P\left(q^{\frac{1}{2}}z\right) \\ &= -\mathcal{A}\,q^{\frac{1}{2}}z\left(q^{\frac{1}{2}}z - q^{-\frac{1}{2}}z^{-1}\right)\prod_1^\infty (1 - q^{2n+1}z^2)(1 - q^{2n-1}z^{-2}) \\ &= \mathcal{A}(1 - qz^2)\prod_1^\infty (1 - q^{2n+1}z^2)\prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}z^{-2}) \\ &= \mathcal{A}\prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}z^2)(1 - q^{2n-1}z^{-2}) \\ &= \mathcal{A}\prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2}), \end{aligned}$$

et

$$(38)\qquad \theta_3 v = \theta_2\left(v + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1} z^2)(1 + q^{2n-1} z^{-2})$$

$$= \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 + 2 q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}).$$

442. Il reste à déterminer la constante $\mathcal{A}$. Pour cela, posons $v = 0$ dans la dérivée de l'équation (35) et dans les équations (36) à (38); il viendra

$$(39)\quad \begin{cases} \theta'(0) = 2\mathcal{A} q^{\frac{1}{4}} \pi \prod_1^\infty (1 - q^{2n})^2, \\ \theta_1(0) = 2\mathcal{A} q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 + q^{2n})^2, \\ \theta_2(0) = \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1})^2, \\ \theta_3(0) = \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1})^2. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans l'identité

$$\theta'(0) = \pi\, \theta_1(0)\, \theta_2(0)\, \theta_3(0),$$

on trouvera

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2n})^2 = \mathcal{A}^2 \prod_1^\infty [(1 + q^{2n})(1 + q^{2n-1})(1 - q^{2n-1})]^2.$$

Mais le coefficient de $\mathcal{A}^2$ se réduit à l'unité, car on a évidemment

$$\prod_1^\infty (1 + q^{2n})(1 + q^{2n-1})$$

$$= \prod_1^\infty (1 + q^n) = \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n}}{1 - q^n} = \prod_1^\infty \frac{1}{1 - q^{2n-1}}.$$

On aura donc

$$\mathcal{A} = \pm \prod_1^\infty (1 - q^{2n}).$$

D'ailleurs, en supposant q infiniment petit dans l'équation (38) on voit que $\mathcal{A}$ a pour valeur principale $+1$. Donc

$$(40) \qquad \mathcal{A} = \prod_1^\infty (1 - q^{2n}).$$

On obtient aisément le développement de ce produit en série. A cet effet, partons de la relation

$$\theta_2(v) = \mathcal{A} \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1} z^2)(1 - q^{2n-1} z^{-2})$$

ou

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} = \prod_1^\infty (1 - q^{2n})(1 - q^{2n-1} z^2)(1 - q^{2n-1} z^{-2}).$$

Dans cette identité, remplaçons z^2, q par q, q^3 ; il viendra

$$(41) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{3n^2+n} = \prod_1^\infty (1 - q^{6n})(1 - q^{6n-2})(1 - q^{6n-4})$$

$$= \prod_1^\infty (1 - q^{2n}) = \mathcal{A}.$$

443. Substituons la valeur (40) de $\mathcal{A}$ dans les formules (39), et posons, pour abréger,

$$(42) \qquad \begin{cases} \varphi(\tau) = q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n}), \\ \varphi_1(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1 + q^{2n}), \\ \varphi_2(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1}), \\ \varphi_3(\tau) = e^{-\frac{\pi i}{8}} q^{-\frac{1}{24}} \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1}); \end{cases}$$

il viendra

$$(43)\quad \begin{cases} \theta'(0) = 2\pi\,\varphi^3(\tau), \\ \theta_1(0) = \quad \varphi\,(\tau)\,\varphi_1^2(\tau), \\ \theta_2(0) = \quad \varphi\,(\tau)\,\varphi_2^2(\tau), \\ \theta_3(0) = e^{\frac{\pi i}{4}}\,\varphi(\tau)\,\varphi_3^2(\tau). \end{cases}$$

Ces valeurs, substituées dans les identités (25), (29) et dans les autres formules du n° **437**, donneront

$$(44)\qquad \varphi_1\varphi_2\varphi_3 = e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt{2},$$

$$(45)\qquad \varphi_1^8 + \varphi_2^8 + \varphi_3^8 = 0;$$

$$(46)\quad \begin{cases} e_3 - e_2 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4\,\varphi_1^8, \\ e_1 - e_3 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4\,\varphi_2^8, \\ e_2 - e_1 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4\,\varphi_3^8; \end{cases}$$

$$(47)\quad \begin{cases} 3e_1 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4(\varphi_2^8 - \varphi_3^8), \\ 3e_2 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4(\varphi_3^8 - \varphi_1^8), \\ 3e_3 = \left(\dfrac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4(\varphi_1^8 - \varphi_2^8); \end{cases}$$

$$(48)\quad g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4 \varphi^8(\varphi_1^{16} + \varphi_2^{16} + \varphi_3^{16}),$$

$$(49)\quad g_3 = \frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 \varphi^{12}(\varphi_2^8 - \varphi_3^8)(\varphi_3^8 - \varphi_1^8)(\varphi_1^8 - \varphi_2^8),$$

$$(50)\quad \Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} \varphi^{24},$$

$$(51)\quad J = \frac{1}{3^3 \cdot 2^9}(\varphi_1^{16} + \varphi_2^{16} + \varphi_3^{16})^3.$$

De la combinaison de ces formules, on peut encore

déduire les suivantes :

$$(52)\qquad J - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta} = \frac{1}{3^3 . 2^8} (\varphi_2^8 - \varphi_3^8)^2 (\varphi_3^8 - \varphi_1^8)^2 (\varphi_1^8 - \varphi_2^8)^2,$$

$$(53)\qquad \frac{16 (e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)} = \varphi_\alpha^{24},$$

$$(54)\qquad k_{\alpha\beta}^2 = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\beta - e_\gamma} = - \frac{\varphi_\beta^8}{\varphi_\alpha^8}.$$

444. Aux développements en produits, que nous venons d'obtenir pour les fonctions θ, correspondent, pour les fonctions

$$\zeta u = \frac{1}{2\omega_1} \frac{d \log \sigma u}{dv} = \frac{1}{2\omega_1} \left[4 \eta_1 \omega_1 v + \frac{d \log \theta(v)}{dv} \right],$$

$$p u = - \frac{1}{2\omega_1} \frac{d\zeta u}{dv} = \left(\frac{1}{2\omega_1} \right)^2 \left[- 4 \eta_1 \omega_1 - \frac{d^2 \log \theta(v)}{dv^2} \right],$$

les développements en séries simples

$$(55)\qquad \zeta u = \frac{1}{2\omega_1} \left(4 \eta_1 \omega_1 v + \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_1^\infty \frac{q^{2n} \sin 2\pi v}{1 - 2 q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}} \right),$$

$$(56)\qquad p u = \left(\frac{1}{2\omega_1} \right)^2 \left[- 4 \eta_1 \omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi v} - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n} (1 + q^{4n}) \cos 2\pi v - 2 q^{4n}}{(1 - 2 q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n})^2} \right].$$

Les fonctions

$$p(u + \omega_\alpha) = - \frac{d^2}{du^2} \log \sigma(u + \omega_\alpha) = - \frac{d^2}{du^2} \log U_\alpha e^{\eta_\alpha \left(u + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)} \sigma_\alpha u$$
$$= - \frac{d^2}{du^2} \log \sigma_\alpha u = \left(\frac{1}{2\omega_1} \right)^2 \left(- 4 \eta_1 \omega_1 - \frac{d^2 \log \theta_\alpha v}{dv^2} \right)$$

admettent des développements analogues. On aura notam-

ment

$$(57)\quad \mathrm{p}(u+\omega_2) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}(1+q^{4n-2})\cos 2\pi v - 2q^{4n-2}}{(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})^2}\right].$$

L'identification des termes indépendants de v dans les formules (56) et (57) donnera

$$(58)\quad 4\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2},$$

$$(59)\quad e_2 = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right].$$

Posons dans les mêmes formules $u = \omega_1$ d'où $v = \frac{1}{2}$;

$$(60)\quad e_1 = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 + \pi^2 + 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right],$$

$$(61)\quad e_3 = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 \qquad + 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}\right].$$

Enfin, en substituant ces valeurs dans la relation

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

on trouve l'identité

$$(62)\quad \sum_1^\infty \frac{q^n}{(1+q^n)^2} = \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - 3\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

445. Les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ dépendent non seulement de u, mais des périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. De même les fonctions θv, $\theta_\alpha v$ dépendent non seulement de v, mais du rapport τ des périodes. Mettant ces paramètres en évidence, les formules

(17) et (18) deviendront

$$\sigma\ (u, \omega_1, \omega_2) = 2\,\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\theta(v,\tau)}{\theta'(0,\tau)},$$

$$\sigma_\alpha(u, \omega_1, \omega_2) = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\theta_\alpha(v,\tau)}{\theta_\alpha(0,\tau)}.$$

Remplaçons $2\omega_1$, $2\omega_2$ par un autre couple de périodes proprement équivalentes

$$(63)\qquad 2\omega'_1 = 2a\omega_1 + 2b\omega_2, \qquad 2\omega'_2 = 2c\omega_1 + 2d\omega_2.$$

et posons

$$\eta'_1 = a\eta_1 + b\eta_2,$$

$$v' = \frac{u}{2\omega'_1} = \frac{v}{a+b\tau}, \qquad \tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{c+d\tau}{a+b\tau}.$$

Nous aurons évidemment

$$\sigma\ (u, \omega'_1, \omega'_2) = 2\,\omega'_1 e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2}\frac{\theta(v',\tau')}{\theta'(0,\tau')},$$

$$\sigma_\alpha(u, \omega'_1, \omega'_2) = e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2}\frac{\theta_\alpha(v',\tau')}{\theta_\alpha(0,\tau')}.$$

Mais ce changement de périodes n'altère pas σu et opère sur les fonctions $\sigma_\alpha u$ une simple permutation, dépendant de la classe à laquelle appartient la substitution (63). Nous aurons donc

$$(64)\qquad 2\,\omega'_1 e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2}\frac{\theta(v',\tau')}{\theta'(0,\tau')} = 2\,\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\theta(v,\tau)}{\theta'(0,\tau)},$$

$$(65)\qquad e^{2\eta'_1\omega'_1 v'^2}\frac{\theta_{\alpha'}(v',\tau')}{\theta_{\alpha'}(0,\tau')} = e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\theta_\alpha(v,\tau)}{\theta_\alpha(0,\tau)};$$

l'indice α' prenant à l'ordre près les mêmes valeurs 1, 2, 3 que l'indice α.

Or on a

$$\omega'_1 = \omega_1(a+b\tau),$$

$$\begin{aligned}2\eta'_1\omega'_1 v'^2 - 2\eta_1\omega_1 v^2 &= \frac{u^2}{2}\left(\frac{\eta'_1}{\omega'_1} - \frac{\eta_1}{\omega_1}\right)\\ &= \frac{u^2}{2}\,\frac{(a\eta_1+b\eta_2)\omega_1 - (a\omega_1+b\omega_2)\eta_1}{(a\omega_1+b\omega_2)\omega_1}\\ &= -\frac{u^2 b\pi i}{4\omega_1^2(a+b\tau)} = -\frac{b\pi i v^2}{a+b\tau}.\end{aligned}$$

Donc

$$\theta(v',\tau') = \frac{1}{a+b\tau}\,\frac{\theta'(0,\tau')}{\theta'(0,\tau)}\,e^{\frac{b\pi i v^2}{a+b\tau}}\theta(v,\tau),$$

$$\theta_{\alpha'}(v',\tau') = \frac{\theta_{\alpha'}(0,\tau')}{\theta_\alpha(0,\tau)}\,e^{\frac{b\pi i v^2}{a+b\tau}}\theta_\alpha(v,\tau).$$

446. Les constantes

$$\frac{1}{a+b\tau}\,\frac{\theta'(0,\tau')}{\theta'(0,\tau)},\quad \frac{\theta_{\alpha'}(0,\tau')}{\theta_\alpha(0,\tau)}$$

sont respectivement égales, d'après les formules (43), à

$$\frac{1}{a+b\tau}\,\frac{\varphi^3(\tau')}{\varphi^3(\tau)},\quad e^{(\lambda_{\alpha'}-\lambda_\alpha)\frac{\pi i}{4}}\frac{\varphi(\tau')\,\varphi^2_{\alpha'}(\tau')}{\varphi(\tau)\,\varphi^2_\alpha(\tau)},$$

λ_α, $\lambda_{\alpha'}$ étant égaux à 1 ou à 0, suivant que leur indice est égal à 3 ou < 3.

Elles seront donc déterminées si l'on connaît la valeur des quotients

$$\frac{\varphi(\tau')}{\varphi(\tau)},\quad \frac{\varphi_{\alpha'}(\tau')}{\varphi_\alpha(\tau)}.$$

Renvoyant à plus tard cette recherche, nous nous bornerons pour le moment à établir que les constantes cherchées sont des racines huitièmes de $(a+b\tau)^4$.

On a, en effet [formules (33) et (30)],

$$\theta'^8(0,\tau) = \frac{(2\omega_1)^{12}\Delta}{16\pi^4},$$

$$\theta_\alpha^8(0,\tau) = \left(\frac{2\omega_1}{\pi}\right)^4(e_\beta - e_\gamma)^2.$$

On a de même

$$\theta'^8(0, \tau') = \frac{(2\omega_1')^{12}}{16\pi^4}\Delta,$$

$$\theta_{\alpha'}^8(0, \tau') = \left(\frac{2\omega_1'}{\pi}\right)^4 (e_{\beta'}' - e_{\gamma'}')^2,$$

$e_{\alpha'}'$, $e_{\beta'}'$, $e_{\gamma'}'$ étant égaux, à l'ordre près, à e_α, e_β, e_{γ}.

D'ailleurs, le changement des périodes n'altère pas σu, $\wp u$ et, par hypothèse, il change

$$\sigma_\alpha(u, \omega_1, \omega_2)$$

en

$$\sigma_{\alpha'}(u, \omega_1', \omega_2').$$

En vertu des égalités

$$\wp u - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2(u, \omega_1, \omega_2)}{\sigma^2 u},$$

$$\wp u - e_{\alpha'}' = \frac{\sigma_{\alpha'}^2(u, \omega_1', \omega_2')}{\sigma^2 u},$$

on aura donc

$$e_{\alpha'}' = e_\alpha$$

et, par suite,

$$(e_{\beta'}' - e_{\gamma'}')^2 = (e_\beta - e_\gamma)^2.$$

Donc

$$\frac{\theta'^8(0, \tau')}{\theta'^8(0, \tau)} = \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)^{12} = (a + b\tau)^{12},$$

$$\frac{\theta_{\alpha'}^8(0, \tau')}{\theta_\alpha^8(0, \tau)} = \left(\frac{\omega_1'}{\omega_1}\right)^4 = (a + b\tau)^4,$$

et enfin

$$\left[\frac{1}{a + b\tau}\frac{\theta'(0, \tau')}{\theta'(0, \tau)}\right]^8 = \left[\frac{\theta_{\alpha'}(0, \tau')}{\theta_\alpha(0, \tau)}\right]^8 = (a + b\tau)^4.$$

VI. — Fonctions périodiques de deuxième et de troisième espèce.

447. Nous appellerons, avec M. *Hermite*, fonctions *doublement périodiques de troisième espèce* les fonctions

méromorphes qui satisfont à des relations de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(u+2\omega_1) = e^{A_1 u + B_1}\varphi(u), \\ \varphi(u+2\omega_2) = e^{A_2 u + B_2}\varphi(u), \end{cases}$$

A_1, B_1, A_2, B_2 étant des constantes.

On en déduit évidemment

$$\varphi(u+2m_1\omega_1+2m_2\omega_2) = e^{Au+B}\varphi(u),$$

A, B étant de nouvelles constantes.

Si $A_1 = A_2 = 0$, la fonction sera de *seconde espèce*. Si B_1 et B_2 s'annulent également, ce sera une fonction elliptique.

Les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$ nous ont déjà fourni des exemples de fonctions de troisième espèce; leurs quotients $f_\alpha u$ sont de seconde espèce. Proposons-nous de faire l'étude de ces fonctions en général.

Il résulte évidemment des équations (1) que les zéros et les pôles de $\varphi(u)$ sont distribués périodiquement dans le plan.

On en déduit d'ailleurs

$$\log\varphi(u+2\omega_1) = \log\varphi(u) + A_1 u + B_1 + 2m_1\pi i,$$
$$\log\varphi(u+2\omega_2) = \log\varphi(u) + A_2 u + B_2 + 2m_2\pi i.$$

448. Soient $a_1, \ldots, a_\mu$ ceux des zéros de $\varphi(u)$ et $b_1, \ldots, b_\nu$ ceux de ses pôles qui sont situés dans le parallélogramme des périodes tracé à partir d'un point donné u_0; on aura, comme on sait,

$$2\pi i(\mu - \nu) = \int d\log\varphi(u),$$

$$2\pi i(\Sigma a - \Sigma b) = \int u\, d\log\varphi(u),$$

les intégrales étant prises dans le sens direct autour du parallélogramme.

Or il est aisé de les évaluer. En effet, supposons, pour

fixer les idées, que τ ait sa partie réelle positive; on aura

$$\int d\log\varphi(u) = \left(\int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} + \int_{u+2\omega_1}^{u_0+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{u_0+2\omega_1+2\omega_2}^{u_0+2\omega_2} + \int_{u+2\omega_2}^{u_0}\right) d\log\varphi(u)$$

ou, en réunissant les intégrales prises suivant les côtés opposés,

$$\begin{aligned}\int d\log\varphi(u) &= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} d[\log\varphi(u) - \log\varphi(u+2\omega_2)] \\ &\quad + \int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} d[\log\varphi(u+2\omega_1) - \log\varphi(u)] \\ &= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} -A_2\,du + \int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} A_1\,du \\ &= 2\omega_2 A_1 - 2\omega_1 A_2.\end{aligned}$$

On aura de même

$$\begin{aligned}\int u\,d\log\varphi(u) &= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} u\,d\log\varphi(u) - (u+2\omega_2)\,d\log\varphi(u+2\omega_2) \\ &\quad + \int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} (u+2\omega_1)\,d\log\varphi(u+2\omega_1) - u\,d\log\varphi(u) \\ &= \int_{u_0}^{u_0+2\omega_1} -A_2 u\,du - 2\omega_2\,d\log\varphi(u+2\omega_2) \\ &\quad + \int_{u_0}^{u_0+2\omega_2} A_1 u\,du + 2\omega_1\,d\log\varphi(u+2\omega_1) \\ &= -A_2\frac{(u_0+2\omega_1)^2 - u_0^2}{2} \\ &\quad - 2\omega_2[\log\varphi(u_0+2\omega_1+2\omega_2) - \log\varphi(u_0+2\omega_2)] \\ &\quad + A_1\frac{(u_0+2\omega_2)^2 - u_0^2}{2} \\ &\quad + 2\omega_1[\log\varphi(u_0+2\omega_1+2\omega_2) - \log\varphi(u_0+2\omega_1)] \\ &= -2\omega_1 A_2(u_0+\omega_1) - 2\omega_2[A_1(u_0+2\omega_2) + B_1 + 2m_1\pi i] \\ &\quad + 2\omega_2 A_1(u_0+\omega_2) + 2\omega_1[A_2(u_0+2\omega_1) + B_2 + 2m_2\pi i] \\ &= 2\omega_1(A_2\omega_1 + B_2 + 2m_2\pi i) - 2\omega_2(A_1\omega_2 + B_1 + 2m_1\pi i).\end{aligned}$$

Nous obtenons donc les deux relations fondamentales

$$(2)\qquad 2\omega_2 A_1 - 2\omega_1 A_2 = 2\pi i(\mu - \nu),$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\omega_1(A_2\omega_1 + B_2 + 2m_2\pi i)\\ &-2\omega_2(A_1\omega_2 + B_1 + 2m_1\pi i) = 2\pi i[\Sigma a - \Sigma b].\end{aligned}\right.$$

449. Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, on pourra construire une fonction admettant les zéros, les pôles et les multiplicateurs donnés. Posons, en effet,

$$\varphi(u) = e^{\alpha u^2 + \beta u}\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_\mu)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_\nu)}.$$

C'est une fonction de troisième espèce, ayant les zéros et les pôles demandés, et ses multiplicateurs seront $e^{M_1 u_1 + N_1}$, $e^{M_2 u_2 + N_2}$, en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} M_1 u + N_1 = {} & (4\omega_1 u + 4\omega_1^2)\alpha + 2\omega_1\beta\\ & + \sum_1^\mu[2\eta_1(u - a_k + \omega_1) - \pi i]\\ & - \sum_1^\nu[2\eta_1(u - b_k + \omega_1) - \pi i],\\ M_2 u + N_2 = {} & (4\omega_2 u + 4\omega_2^2)\alpha + 2\omega_2\beta + \ldots.\end{aligned}$$

Ces multiplicateurs seront respectivement égaux à $e^{A_1 u_1 + B_1}$, $e^{A_2 u_2 + B_2}$, si l'on détermine α, β de manière à satisfaire aux équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &4\omega_1\alpha + 2\eta_1(\mu - \nu) = A_1,\\ &4\omega_1^2\alpha + 2\omega_1\beta - 2\eta_1(\Sigma a - \Sigma b)\\ &\qquad + (2\eta_1\omega_1 - \pi i)(\mu - \nu) = B_1 + 2m_1\pi i,\\ &4\omega_2\alpha + 2\eta_2(\mu - \nu) = A_2,\\ &4\omega_2^2\alpha + 2\omega_2\beta - 2\eta_2(\Sigma a - \Sigma b)\\ &\qquad + (2\eta_2\omega_2 + \pi i)(\mu - \nu) = B_2 + 2m_2\pi i.\end{aligned}\right.$$

Pour que ces équations soient compatibles, deux conditions sont nécessaires; on les obtiendra en éliminant α, β.

En tenant compte de la relation $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$, on retombe ainsi sur les équations (2) et (3), qui sont vérifiées, par hypothèse.

Toute autre fonction $\varphi_1(u)$ admettant les mêmes zéros, les mêmes pôles et les mêmes multiplicateurs que $\varphi(u)$ sera de la forme $C\varphi(u)$, C étant une constante; car le quotient $\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}$ est une fonction elliptique qui n'a pas de pôle.

450. Il résulte de ce qui précède qu'une fonction de troisième espèce qui n'a ni zéro, ni pôle est de la forme

$$Ce^{\alpha u^2+\beta u}.$$

Pour une fonction $\varphi(u)$ de seconde espèce, on a

$$A_1 = A_2 = 0,$$

et en vertu de l'équation (2)

$$\mu = \nu.$$

Les équations (4) donneront ensuite

$$\alpha = 0.$$

Les fonctions de seconde espèce ont donc autant de zéros que de pôles, et leur expression générale est

$$(5) \qquad Ce^{\beta u}\frac{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_\mu)}{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_\mu)}.$$

451. On obtient de nouvelles expressions des fonctions de deuxième et de troisième espèce par les considérations suivantes :

Soit $\varphi(u)$ une semblable fonction, ayant pour multiplicateurs $e^{A_1u+B_1}$, $e^{A_2u+B_2}$.

Posons

$$\varphi(u) = e^{\alpha u^2+\beta u}\varphi_1(u),$$

les constantes α, β étant déterminées par les relations

$$4\omega_1\alpha = A_1, \qquad 4\omega_1^2\alpha + 2\omega_1\beta = B_1;$$

$\varphi_1(u)$ sera une fonction analogue à $\varphi(u)$, ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles, mais dont le premier multiplicateur se réduit à l'unité. Soit e^{Au+B} son second multiplicateur.

Si $A = 0$, $\varphi_1(u)$ sera de seconde espèce. Laissons provisoirement ce cas de côté et posons

$$u = 2\omega_1 v - \frac{B}{A}, \qquad 2\omega_1 A = -2m\pi i, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau;$$

$\varphi_1(u)$ se changera en une fonction $\Psi(v)$ et les relations

$$\varphi_1(u + 2\omega_1) = \varphi_1 u, \qquad \varphi_1(u + 2\omega_2) = e^{Au+B}\varphi_1 u$$

deviendront

$$(6) \qquad \Psi(v+1) = \Psi v, \qquad \Psi(v+\tau) = e^{-2m\pi i v}\Psi v.$$

Nous donnerons à ces fonctions particulières $\Psi(v)$ le nom de *fonctions réduites*. Le nombre m se nomme l'*ordre* de la fonction; c'est un entier (positif ou négatif), car la formule (2), appliquée à ce cas particulier, donne

$$m = \mu - \nu.$$

452. Ces fonctions réduites ont été construites par M. *Appell* de la manière suivante :

Posons, comme précédemment,

$$e^{\pi i v} = z, \qquad e^{\pi i \tau} = q;$$

$\Psi(v)$ se changera en une fonction de z. Cette nouvelle fonction $f(z)$ sera uniforme, car, en vertu de l'équation

$$\Psi(v+1) = \Psi(v),$$

à toutes les valeurs de v, qui correspondent à une même valeur de z, répond une même valeur de la fonction. De plus,

$v = \frac{1}{\pi i}\log z$ n'admettant qu'un seul point critique $z = 0$, $f(z)$ n'aura pour points critiques que des pôles correspondant à ceux de $\Psi(v)$ et le point essentiel $z = 0$.

Enfin les équations (6) se transformeront dans les suivantes

$$(7) \qquad f(-z) = f(z), \qquad f(qz) = z^{-2m} f(z).$$

Il s'agit de construire les fonctions $f(z)$ qui satisfont à ces relations.

453. Supposons en premier lieu m positif, et admettons, en outre, que la fonction $\Psi(v)$ soit entière; $f(z)$, n'ayant d'autre point critique que $z = 0$, sera développable par la formule de Laurent; mais elle est paire; le développement sera donc de la forme

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^{2n}.$$

En le substituant dans l'équation

$$f(qz) = z^{-2m} f(z),$$

il viendra

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n q^{2n} z^{2n} = z^{-2m} \sum_{-\infty}^{\infty} A_n z^{2n},$$

ce qui donne, pour déterminer les coefficients A_n, la formule récurrente

$$A_{n+m} = A_n q^{2n}.$$

Les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ restent indéterminés. Soit A_r l'un d'entre eux; on aura

$$A_{r+m} = A_r q^{2r}, \qquad \ldots,$$

$$A_{r+mn} = A_r q^{2r+2(r+m)+\ldots+2[r+(n-1)m]}$$

$$= A_r q^{2rn+mn(n-1)}.$$

Si donc nous supposons

$$(8)\quad \begin{cases} \Theta_r(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{2rn+mn(n-1)} z^{2(r+mn)} \\ \qquad = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} (q^{2n} z^2)^r, \end{cases}$$

la forme générale des fonctions cherchées sera

$$(9)\quad f(z) = \sum_{0}^{m-1} A_r \Theta_r(z),$$

ou, en revenant à la variable primitive v et désignant par $T_r(v)$ ce que devient alors $\Theta_r(z)$,

$$(10)\quad \Psi(v) = \sum_{0}^{m-1} A_r T_r(v).$$

Si, au lieu de grouper ensemble les termes de $f(z)$ qui correspondent à une même valeur de r, nous groupons ceux pour lesquels n a la même valeur, nous trouverons

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} P(q^{2n} z^2),$$

$$\Psi(v) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} e^{2mn\pi iv} P(q^{2n} e^{2\pi iv}),$$

$P(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{m-1} z^{m-1}$ désignant un polynome arbitraire de degré $m - 1$.

454. Les fonctions réduites $\Psi(v)$ d'ordre positif m ayant ν pôles $b_1, \ldots, b_\nu$ et $m + \nu$ zéros $a_1, \ldots, a_{m+\nu}$ admettent une représentation analogue, où le polynome $P(z)$ est remplacé par une fonction rationnelle $R(z)$ ayant pour numérateur un polynome $P_1(z)$ de degré $m + \nu - 1$ et pour dénomina-

teur le produit

$$(z - e^{2\pi i b_1}) \dots (z - e^{2\pi i b_\nu}).$$

Posons, en effet,

$$\Psi_1 v = f_1 z = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} R(q^{2n} z^2):$$

1° Cette série sera convergente, sauf pour les valeurs de z qui rendent infini l'un de ses termes. En effet, $|q|$ étant < 1 et $m > 0$, la racine $n^{\text{ième}}$ du terme général tend vers zéro si n tend vers $+\infty$, et il en est de même pour la racine $-n^{\text{ième}}$ si n tend vers $-\infty$.

2° C'est une fonction paire de z. D'autre part, si l'on change z en qz, chaque terme se change dans le suivant, multiplié par z^{-2m}; donc

$$f_1(-z) = f_1(z), \qquad f_1(qz) = z^{-2m} f_1(z)$$

et $\Psi_1(v)$ est une fonction réduite d'ordre m.

3° Ses pôles sont aux points pour lesquels on a

$$q^{2n} z^2 = e^{2\pi i b_1}, \qquad \dots, \qquad q^{2n} z^2 = e^{2\pi i b_\nu}$$

ou

$$e^{2n\pi i \tau + 2\pi i v} = e^{2\pi i b_1}, \qquad \dots,$$

d'où

$$v = b_1 - n\tau + n', \qquad \dots, \qquad v = b_\nu - n\tau + n',$$

n, n' étant entiers. Ce sont les pôles de $\Psi(v)$.

4° C'est une fonction linéaire et homogène des $m + \nu$ coefficients, encore indéterminés, du numérateur $P_1(z)$. On peut déterminer les rapports de ces coefficients de telle sorte que $\Psi_1(v)$ s'annule pour $v = a_1, a_2, \dots, a_{m+\nu-1}$.

Cela fait, le quotient $\dfrac{\Psi(v)}{\Psi_1(v)}$ sera une fonction elliptique n'ayant pas plus d'un zéro; ce sera donc une constante. Mais $\Psi_1(v)$ contient encore en facteur une constante arbitraire; on pourra la choisir de telle sorte qu'on ait $\Psi_1(v) = \Psi(v)$.

455. Posons, en particulier,

$$R(z) = \frac{2\pi i e^{2\pi i w}}{z - e^{2\pi i w}},$$

w étant un point intérieur au parallélogramme.

La fonction réduite

$$(11) \qquad \Psi(v, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} e^{2mn\pi i v} \frac{2\pi i e^{2\pi i w}}{q^{2n} e^{2\pi i v} - e^{2\pi i w}},$$

formée avec $R(z)$, n'aura dans le parallélogramme qu'un pôle simple w, et l'on vérifie immédiatement que le résidu correspondant est égal à 1.

En dérivant les équations

$$\Psi(v+1, w) = \Psi(v, w), \qquad \Psi(v+\tau, w) = e^{-2m\pi i v} \Psi(v, w)$$

par rapport au paramètre w, on voit que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial w}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial w^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{1.2\ldots k} \frac{\partial^k \Psi}{\partial w^k}$$

sont également des fonctions réduites; d'ailleurs, elles admettent le seul pôle w et la partie infinie de leur développement aux environs de ce point sera respectivement

$$\frac{1}{(v-w)^2}, \quad \frac{1}{(v-w)^3}, \quad \ldots.$$

Cette remarque fournit une décomposition des fonctions réduites en éléments simples. Soit, en effet, $\Phi(v)$ une fonction réduite d'ordre m, admettant les pôles $w_1, w_2, \ldots$ avec des ordres de multiplicité $k, l, \ldots$ et soient respectivement

$$\frac{A}{v-w_1} + \frac{A_2}{(v-w_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(v-w_1)^k},$$

$$\frac{B}{v-w_2} + \frac{B_2}{(v-w_2)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(v-w_2)^l},$$

. . . .

les parties infinies de son développement aux environs de ces pôles. Posons

$$\Phi v = A_1 \Psi(v, w_1) + A_2 \frac{\partial \Psi(v, w_1)}{\partial w_1} + \ldots$$
$$+ \frac{A_k}{1.2\ldots(k-1)} \frac{\partial^{k-1} \Psi(v, w_1)}{\partial w_1^{k-1}}$$
$$+ B_1 \Psi(v, w_2) + B_2 \frac{\partial \Psi(v, w_2)}{\partial w_2} + \ldots + \Psi_1 v.$$

Le reste $\Psi_1(v)$ sera évidemment une fonction réduite entière d'ordre m et pourra se mettre sous la forme

$$C_0 T_0(v) + C_1 T_1(v) + \ldots + C_{m-1} T_{m-1}(v).$$

456. La fonction $\Psi(v, w)$, qui nous a conduits au résultat ci-dessus, va également nous servir à construire les fonctions réduites où m est négatif. Pour cela, il nous faut considérer w comme la variable et v comme un paramètre. La fonction n'aura dans le parallélogramme qu'un seul pôle simple, $w = v$, et ce même point sera un pôle double, triple, etc., pour les dérivées $\frac{\partial \Psi}{\partial v}$, ..., $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2}$, ... prises par rapport au paramètre v.

Posons, pour abréger,

$$e^{\pi i v} = z, \qquad e^{\pi i w} = t;$$

la fonction prendra la forme

$$\Psi(v, w) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} \frac{2\pi i t^2}{q^{2n} z^2 - t^2} = F(z, t).$$

On a évidemment

$$F(z, -t) = F(z, t). \tag{12}$$

Changeons, d'autre part, t en qt et remplaçons en même temps l'indice de sommation n par $n+1$, il viendra

$$F(z, qt) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n+1)} z^{2m(n+1)} \frac{2\pi i t^2}{q^{2n} z^2 - t^2},$$

d'où

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&F(z, qt) - t^{2m} F(z, t)\\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn}\, 2\pi i t^2 \frac{(q^{2n} z^2)^m - t^{2m}}{q^{2n} z^2 - t^2}\\
&= 2\pi i \sum_{-\infty}^{\infty} q^{mn(n-1)} z^{2mn} t^2 \sum_{r=0}^{r=m-1} (q^{2n} z^2)^r\, t^{2(m-r-1)}\\
&= 2\pi i \sum_{r=0}^{r=m-1} \Theta_r(z)\, t^{2(m-r)}.
\end{aligned}
\right.
$$

En repassant des variables auxiliaires z, t aux variables initiales v, w, les relations (12) et (13) deviendront

$$\Psi(v, w+1) = \Psi(v, w),$$

$$\Psi(v, w+\tau) - e^{2m\pi i w}\, \Psi(v, w) = 2\pi i \sum_{0}^{m-1} T_r(v)\, e^{2(m-r)\pi i w}.$$

En les dérivant par rapport au paramètre v, on aura plus généralement

$$\frac{\partial^k \Psi(v, w+1)}{\partial v^k} = \frac{\partial^k \Psi(v, w)}{\partial v^k},$$

$$\frac{\partial^k \Psi(v, w+\tau)}{\partial v^k} - e^{2m\pi i w} \frac{\partial^k \Psi(v, w)}{\partial v^k} = 2\pi i \sum_{0}^{m-1} T_r^{(k)}(v)\, e^{2(m-r)\pi i w}.$$

457. Cela posé, considérons une fonction réduite ψw où le nombre ν des pôles contenus dans le parallélogramme surpasse de m unités le nombre des zéros. Soient v_1, v_2, ... ces pôles; k, l, ... leurs ordres de multiplicité respectifs.

Formons l'expression

$$
\begin{aligned}
S(w) = {} & A_1 \Psi(v_1, w) + A_2 \frac{\partial \Psi(v_1, w)}{\partial v_1} + A_k \frac{\partial^{k-1} \Psi(v_1, w)}{\partial v_1^{k-1}}\\
& + B_1 \Psi(v_2, w) + \ldots\ldots\ldots\ldots + B_l \frac{\partial^{l-1} \Psi(v_2, w)}{\partial v_2^{l-1}}\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Elle admet les mêmes pôles, avec le même ordre de multiplicité. De plus, on a évidemment

$$(14) \qquad S(w+1) = S(w),$$

$$(15) \qquad S(w+\tau) - e^{2m\pi i w} S(w) = 2\pi i \sum_{0}^{m-1} U_r e^{2(m-r)\pi i w},$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} U_r = {} & A_1 T_r(v_1) + A_2 T'_r(v_1) + \ldots + A_k T_r^{(k-1)}(v_1) \\ & + B_1 T_r(v_2) + B_2 T'_r(v_2) + \ldots + B_l T_r^{(l-1)}(v_2) \\ & + \ldots\ldots \end{aligned}$$

Disposons des ν constantes A, B, ... de manière à satisfaire aux m équations

$$U_0 = 0, \qquad U_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad U_{m-1} = 0.$$

L'équation (15) se réduira à

$$S(w+\tau) = e^{2m\pi i w} S(w).$$

Donc $S(w)$ sera une fonction réduite d'ordre $-m$, ayant les mêmes pôles et les mêmes multiplicateurs que ψw. Elle dépend encore linéairement de $\nu - m$ constantes arbitraires, dont on peut déterminer les rapports de telle sorte qu'elle admette $\nu - m - 1$ des zéros de ψw. Le quotient $\frac{\psi w}{S w}$ sera donc une fonction elliptique, n'ayant pas plus d'un zéro. Ce sera donc une constante.

458. Passons aux fonctions de seconde espèce, dont nous avons réservé l'étude (451). Soit $\varphi_1 u$ une semblable fonction, aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et aux multiplicateurs 1, e^B. Posons

$$u = 2\omega_1 v, \qquad \varphi_1 u = \psi v.$$

La fonction $\psi(v)$ aura pour périodes 1, τ et pour multiplicateurs 1, e^B. Soient $a_1, \ldots, a_\mu$ ses zéros et $b_1, \ldots, b_\mu$ ses pôles dans le parallélogramme des périodes; posons, pour

abréger,

$$\Sigma a - \Sigma b = -s.$$

On aura, d'après la formule (3),

$$B + 2m_2\pi i - 2m_1\pi i\tau = -2\pi i s.$$

Supposons d'abord que s soit une période, telle que $n + n_1\tau$ (n, n_1 étant des entiers). Posons

$$\psi v = e^{2\pi i(m_1 - n_1)v}\chi v.$$

On aura évidemment

$$\frac{\chi(v+1)}{\chi v} = \frac{\psi(v+1)}{\psi v} = 1,$$

$$\frac{\chi(v+\tau)}{\chi v} = e^{-2\pi i(m_1-n_1)\tau}\frac{\psi(v+\tau)}{\psi v} = e^{B-2\pi i(m_1-n_1)\tau}$$
$$= e^{-2m_2\pi i - 2n\pi i} = 1.$$

Donc χv est une fonction elliptique que nous savons construire.

459. Passons au cas général, où s n'est pas une période. Nous poserons

$$\psi v = e^{2m_1\pi i v}\chi v;$$

χv admettra les mêmes zéros et les mêmes pôles que ψv et ses multiplicateurs seront

$$1 \quad \text{et} \quad e^{B-2m_1\pi i\tau} = e^{-2\pi i s - 2m_2\pi i} = e^{-2\pi i s}.$$

Cette *fonction réduite* $\chi(v)$ sera de la forme

$$(16) \qquad \chi(v) = C\frac{\theta(v-a_1)\ldots\theta(v-a_\mu)}{\theta(v-b_1)\ldots\theta(v-b_\mu)}.$$

Car le second membre admet les zéros a, les pôles b et ses multiplicateurs sont

$$1 \quad \text{et} \quad \frac{\Pi_1^\mu(-e^{-\pi i[2(v-a_k)+\tau]})}{\Pi_1^\mu(-e^{-\pi i[2(v-b_k)+\tau]})} = e^{-2\pi i s}.$$

Son rapport à χv est donc une constante, qui se réduira à l'unité par un choix convenable de C.

460. Considérons parmi les fonctions réduites la fonction particulière

$$(17) \qquad F(v) = \frac{\theta'(0)}{\theta(s)} \frac{\theta(v+s)}{\theta(v)}.$$

Elle a un seul pôle $v = 0$, pour lequel le résidu est égal à 1. On voit d'ailleurs, en dérivant les équations

$$F(v+1) = F(v), \qquad F(v+\tau) = e^{-2\pi i s} F(v),$$

que $F'(v)$, $F''(v)$, ... sont de nouvelles fonctions réduites. Elles admettent encore le pôle unique zéro, et leurs développements aux environs de ce point auront respectivement pour parties infinies

$$-\frac{1}{v^2}, \qquad \frac{2}{v^3}; \qquad \dots$$

Toutes les fonctions réduites χv sont exprimables à l'aide de cet élément simple. Soient, en effet, b_1, b_2, ... les pôles distincts de χv dans le parallélogramme, et

$$\frac{A_1}{v-b_1} + \dots + \frac{A_k}{(v-b_1)^k}, \qquad \frac{B_1}{v-b_2} + \dots, \qquad \dots$$

les parties infinies du développement de $\chi(v)$ aux environs de ces points. On aura

$$\chi(v) = A_1 F(v-b_1) - A_2 F'(v-b_1) + \dots$$
$$+ \frac{(-1)^{k-1} A_k}{1.2\dots(k-1)} F^{(k-1)}(v-b_1) + B_1 F(v-b_2)\dots.$$

Car la différence des deux membres est une nouvelle fonction réduite n'ayant plus de pôles; elle sera donc de la forme $Ce^{\beta v}$; mais de plus C sera nul. En effet, s'il ne l'était pas, cette fonction aurait pour multiplicateurs e^{β} et $e^{\beta\tau}$; mais ces multiplicateurs doivent se réduire à 1 et $e^{-2\pi i s}$; on

devrait donc avoir

$$\beta = 2n\pi i, \qquad \beta\tau = -2\pi i s + 2n_1\pi i \qquad (n, n_1 \text{ entiers})$$

et, en éliminant β,

$$s = -n\tau + n_1 :$$

s serait donc une période, contrairement à l'hypothèse.

461. L'élément simple

$$F(v, s) = \frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta(s)\,\theta(v)},$$

auquel nous venons de parvenir, satisfait aux relations

$$F(v+1, s) = F(v, s), \qquad F(v+\tau, s) = e^{-2\pi i s}\,F(v, s),$$

et, comme il est symétrique en v et s, on aura également

$$F(v, s+1) = F(v, s), \qquad F(v, s+\tau) = e^{-2\pi i v}\,F(v, s).$$

Les quantités v, s peuvent être mises sous la forme

$$\lambda + \lambda_1\tau, \qquad \mu + \mu_1\tau,$$

λ, λ_1, μ, μ_1 étant des quantités réelles. Au moyen des formules ci-dessus, on pourra ramener le calcul de $F(v, s)$ au cas où λ_1 et μ_1 sont compris entre 0 et -1. Dans ce cas, les quantités

$$|e^{\pi i v}| = |q|^{\lambda_1}, \qquad |e^{\pi i s}| = |q|^{\mu_1}$$

seront comprises entre 1 et $|q|^{-1}$.

462. Pour obtenir un développement de $F(v, s)$, valable dans ces conditions, calculons l'intégrale

$$\int \frac{F(x, s)}{e^{2\pi i x} - e^{2\pi i v}}\,dx$$

autour d'un parallélogramme ABCD ayant pour sommets les

points

$$A = -\frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - p\tau, \qquad B = \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2} - p\tau,$$

$$C = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + p'\tau, \qquad D = -\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + p'\tau,$$

p et p' étant des entiers infinis.

Par suite de la périodicité des fonctions F et $e^{2\pi i x}$, les intégrales suivant BC et DA se détruisent.

L'intégrale suivant AB est infiniment petite; car on a le long de cette ligne

$$x = -\frac{1+\tau}{2} - p\tau + y,$$

y variant de o à 1; et, par suite,

$$F(x, s) = e^{2\pi i s p} F\left(-\frac{1+\tau}{2} + y, s\right),$$

$$e^{2\pi i x} = q^{-2p} e^{\pi i(2y-1-\tau)}.$$

Or $F(x, s)$ ne devient infinie que pour les valeurs $x = m + m'\tau$, où m, m' sont entiers; $F\left(-\frac{1+\tau}{2} + y, s\right)$ reste donc finie lorsque y varie de o à 1. L'exponentielle $e^{\pi i(2y-1-\tau)}$ restera de même finie et différente de zéro. On a enfin, par hypothèse, $1 < |e^{\pi i s}| < |q|^{-1}$. Le facteur $e^{2\pi i s p}$ tendra donc vers ∞ avec p, mais moins rapidement que q^{-2p}. La fonction à intégrer tendra donc vers zéro lorsque p tend vers ∞.

L'intégrale suivant CD est aussi infiniment petite, car on a sur cette ligne

$$x = \frac{1+\tau}{2} + p'\tau + y,$$

y variant de o à -1, et par suite

$$F(x, s) = e^{-2\pi i s p'} F\left(\frac{1+\tau}{2} + y, s\right),$$

$$e^{2\pi i x} = q^{2p'} e^{\pi i(2y+1+\tau)}.$$

Ces quantités tendent vers zéro pour $p'=\infty$. Le numérateur de la fonction à intégrer tend donc vers zéro, et son dénominateur vers la constante $-e^{2\pi i v}$.

L'intégrale considérée étant nulle, comme on vient de le voir, pour $p=\infty$, $p'=\infty$, la somme des résidus relatifs aux pôles intérieurs à ABCD sera nulle. Ces pôles sont de plusieurs sortes :

1° Le dénominateur $e^{2\pi i x}-e^{2\pi i v}$ s'annule aux points $x=v+n$ (n entier); l'un de ces points est intérieur à ABCD; le résidu correspondant est $\frac{F(v,s)}{2\pi i e^{2\pi i v}}$;

2° Le numérateur $F(x,s)$ devient infini aux points $x=n\tau$, et l'on a

$$F(n\tau+h,s)=e^{-2\pi i s n}F(h,s)=e^{-2\pi i s n}\left(\frac{1}{h}+\ldots\right),$$

car le résidu de F relatif à l'origine est 1. Le résidu de $\frac{F(x,s)}{e^{2\pi i x}-e^{2\pi i v}}$, par rapport au pôle $n\tau$, sera donc

$$\frac{e^{-2\pi i s n}}{q^{2n}-e^{2\pi i v}}.$$

Égalant à zéro la somme des résidus et posant

$$e^{\pi i v}=z, \qquad e^{\pi i s}=t,$$

nous aurons donc

$$\frac{1}{2\pi i}F(v,s)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{t^{-2n}}{1-q^{2n}z^{-2}}. \tag{18}$$

463. Pour $n=0$, on aura au second membre le terme $\frac{1}{1-z^{-2}}$.

On a d'ailleurs, en changeant n en $-n$,

$$\sum_{-1}^{\infty}\frac{t^{-2n}}{1-q^{2n}z^{-2}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{1-q^{-2n}z^{-2}}=-\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{2n}t^{2n}z^{2}}{1-q^{2n}z^{2}}.$$

D'autre part,

$$\sum_1^\infty \frac{t^{-2n}}{1-q^{2n}z^{-2}} = \sum_1^\infty t^{-2n} + \sum_1^\infty \frac{q^{2n}t^{-2n}z^{-2}}{1-q^{2n}z^{-2}}.$$

Enfin, $|t|$ étant > 1, par hypothèse,

$$\sum_1^\infty t^{-2n} = \frac{1}{1-t^{-2}} - 1.$$

Nous pourrons donc écrire

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}F(v,s) = \frac{1}{1-z^{-2}} + \frac{1}{1-t^{-2}} - 1 \\ \qquad - \sum_1^\infty \left(\frac{q^{2n}t^{2n}z^2}{1-q^{2n}z^2} - \frac{q^{2n}t^{-2n}z^{-2}}{1-q^{2n}z^{-2}} \right). \end{cases}$$

Cette formule a été établie en supposant $1 < |t| < |q|^{-1}$, z restant quelconque. Mais, si l'on change v, s en $-v$, $-s$, d'où z, t en z^{-1}, t^{-1}, les deux membres ne font que changer de signe. L'égalité subsistera donc si $|t|$ est compris entre 1 et $|q|$.

464. Si $|z|$ est également compris entre $|q|^{-1}$ et $|q|$, on pourra développer en série les quantités $(1-q^{2n}z^2)^{-1}$, $(1-q^{2n}z^{-2})^{-1}$. On obtient ainsi la série double

$$(20) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}F(v,s) = \frac{1}{1-z^{-2}} + \frac{1}{1-t^{-2}} - 1 \\ \qquad - \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{2mn}(t^{2n}z^{2m} - t^{-2n}z^{-2m}), \end{cases}$$

ou, en remplaçant les exponentielles par des lignes trigonométriques,

$$(21) \quad \begin{cases} F(v,s) = \pi(\cot \pi v + \cot \pi s) \\ \qquad + 4\pi \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{2mn} \sin 2\pi(mv + ns). \end{cases}$$

465. Cette expression en série double met en évidence la symétrie de $F(v, s)$ par rapport à ses deux arguments. Pour obtenir une série simple offrant le même avantage, considérons les termes de la série double où $m \geqq n$. Posons

$$m = n + \rho.$$

Leur somme sera

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{\rho=0}^{\rho=\infty} q^{2n(n+\rho)} \left(t^{2n} z^{2(n+\rho)} - t^{-2n} z^{-2(n+\rho)} \right)$$

ou, en effectuant la sommation relative à ρ,

$$\sum_1^\infty q^{2n^2} \left(\frac{t^{2n} z^{2n}}{1 - q^{2n} z^2} - \frac{t^{-2n} z^{-2n}}{1 - q^{2n} z^{-2}} \right).$$

Les termes où $n \geqq m$ donneront une somme analogue, qui se déduit de la précédente en permutant z et t.

Ajoutons les deux sommes précédentes, et retranchons-en la somme des termes où $m = n$, afin de ne pas les compter deux fois; il viendra

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} F(v, s) = {} & \frac{1}{1 - z^{-2}} + \frac{1}{1 - t^{-2}} - 1 \\ & - \sum_1^\infty q^{2n^2} t^{2n} z^{2n} \left(\frac{1}{1 - q^{2n} z^2} + \frac{1}{1 - q^{2n} t^2} - 1 \right) \\ & + \sum_1^\infty q^{2n^2} t^{-2n} z^{-2n} \left(\frac{1}{1 - q^{2n} z^{-2}} + \frac{1}{1 - q^{2n} t^{-2}} - 1 \right). \end{aligned} \right.$$

Cette nouvelle série est d'ailleurs convergente pour toute valeur des arguments, car la racine $n^{\text{ième}}$ de son terme général a pour limite zéro.

466. Ayant trouvé par ce qui précède, et cela sous plusieurs formes différentes, le développement de la fonction

$$\frac{\theta'(o)\,\theta(v + s)}{\theta(s)\,\theta(v)},$$

on en déduira, sans peine, beaucoup d'autres développements.

Changeons, par exemple, v en $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{1}{2}\tau$ ou $v-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\tau$, et par suite z en iz, $q^{\frac{1}{2}}z$ ou $-iq^{-\frac{1}{2}}z$. Les fonctions $\theta(v)$, $\theta(v+s)$ seront changées, à des facteurs exponentiels près, dont nous avons donné l'expression (430), en

$$\theta_1(v),\quad \theta_1(v+s);\quad \theta_2(v),\quad \theta_2(v+s);\quad \theta_3(v),\quad \theta_3(v+s).$$

Nous aurons ainsi obtenu le développement des trois fonctions

$$F_\alpha(v,s)=\frac{\theta'(0)\,\theta_\alpha(v+s)}{\theta(s)\,\theta_\alpha(v)}.$$

Accroissons à son tour s d'une demi-période; nous obtiendrons le développement des fonctions

$$\frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta_\alpha(s)\,\theta_\alpha(v)},\qquad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(v+s)}{\theta_\beta(s)\,\theta_\alpha(v)}.$$

467. Comme exemple de ce calcul, cherchons le développement de la fonction $F_2(v,s)$.

On a (430)

$$\theta_2(v)\quad=i^{-1}q^{\frac{1}{4}}z\;\;\theta\left(v+\frac{1}{2}\tau\right),$$

$$\theta_2(v+s)=i^{-1}q^{\frac{1}{4}}zt\,\theta\left(v+s+\frac{1}{2}\tau\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}F_2&=\frac{t}{2\pi i}F\left(v+\frac{1}{2}\tau,s\right)\\ &=t\left(\frac{1}{1-q^{-1}z^{-2}}+\frac{1}{1-t^{-2}}-1\right)\\ &\quad-\sum_1^\infty\frac{q^{2n+1}t^{2n+1}z^2}{1-q^{2n+1}z^2}+\sum_1^\infty\frac{q^{2n-1}t^{-2n+1}z^{-2}}{1-q^{2n-1}z^{-2}}.\end{aligned}$$

Le premier terme peut s'écrire ainsi

$$\frac{1}{t-t^{-1}}-\frac{qtz^2}{1-qz^2}.$$

D'ailleurs

$$-\frac{qtz^2}{1-qz^2}-\sum_1^\infty \frac{q^{2n+1}t^{2n+1}z^2}{1-q^{2n+1}z^2}=-\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}t^{2n-1}z^2}{1-q^{2n-1}z^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi i}F_2=\frac{1}{t-t^{-1}}-\sum_1^\infty\left(\frac{q^{2n-1}t^{2n-1}z^2}{1-q^{2n-1}z^2}-\frac{q^{2n-1}t^{-2n+1}z^{-2}}{1-q^{2n-1}z^{-2}}\right).$$

Si nous supposons que $|z^2|$ soit compris entre $|q|$ et $|q|^{-1}$, nous pourrons développer les quatités $(1-q^{2n-1}z^2)^{-1}$ et $(1-q^{2n-1}z^{-2})^{-1}$ en série, et nous obtiendrons la série double

$$(23)\quad \frac{1}{2\pi i}F_2(v,s)=\frac{1}{t-t^{-1}}-\sum_1\sum_1 q^{(2n-1)m}(t^{2n-1}z^{2m}-t^{-2n+1}z^{-2m}),$$

et en revenant aux lignes trigonométriques

$$(24)\quad F_2(v,s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}+4\pi\sum_1^\infty\sum_1 q^{(2n-1)m}\sin\pi[2mv+(2n-1)s].$$

468. Changeons v en $v+\frac{1}{2}$ dans les formules (21) et (24); elles donneront immédiatement

$$(25)\quad F_1(v,s)=\pi(-\tang\pi v+\cot\pi s)$$
$$+4\pi\sum^\infty\sum_1^\infty(-1)^m q^{2mn}\sin 2\pi(mv+ns),$$

$$(26)\quad F_3(v,s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}+4\pi\sum_1^\infty\sum_1^\infty(-1)^m q^{(2n-1)m}\sin\pi[2mv+(2n-1)s].$$

469. Posons $s=-\frac{v}{2}$, d'où $t=z^{-\frac{1}{2}}$ dans l'un des développements trouvés pour

$$\frac{\theta'(0)\theta(v+s)}{\theta(s)\theta(v)}.$$

Nous obtiendrons le développement de

$$\frac{\theta'(0)}{\theta(v)}$$

et, en accroissant v de demi-périodes, ceux des fonctions

$$\frac{\theta'(0)}{\theta_\alpha(v)}.$$

Posons $s = -v$ dans les expressions des quantités

$$\frac{\theta'(0)\,\theta_\alpha(v+s)}{\theta(s)\,\theta_\alpha(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(v+s)}{\theta_\beta(s)\,\theta_\alpha(v)}.$$

Nous obtiendrons les développements des quantités

$$\frac{\theta'(0)\,\theta_\alpha(0)}{\theta(v)\,\theta_\alpha(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(0)}{\theta_\beta(v)\,\theta_\alpha(v)}.$$

Pour cette valeur de s, les quantités

$$\frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta(s)\,\theta(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta(v+s)}{\theta_\alpha(s)\,\theta_\alpha(v)}$$

s'annulent; mais leurs dérivées se réduisent à

$$-\frac{\theta'^2(0)}{\theta^2(v)}, \quad \frac{\theta'^2(0)}{\theta_\alpha^2(v)}.$$

On obtiendra donc ces dernières quantités en posant $s = -v$ dans les formules, après les avoir dérivées par rapport à s.

470. Développons les deux membres de la formule (21), suivant les puissances de s; l'identification des termes constants donnera

$$\frac{\theta'(v)}{\theta(v)} = \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_1^\infty \sum_1^\infty q^{2mn} \sin 2m\pi v$$

et en effectuant la sommation relative à n,

$$(27) \qquad \frac{d \log \theta(v)}{dv} = \pi \cot \pi v + 4\pi \sum_1^\infty \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi v.$$

Des formules (25), (24), (26) on déduit, par le même procédé,

$$\frac{d\log\theta_1(v)}{dv} = -\pi\,\mathrm{tang}\,\pi v + 4\pi\sum_1^\infty \frac{(-1)^m q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v, \tag{28}$$

$$\frac{d\log\theta_2(v)}{dv} \qquad 4\pi\sum_1^\infty \frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v, \tag{29}$$

$$\frac{d\log\theta_3(v)}{dv} \qquad 4\pi\sum_1^\infty \frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v. \tag{30}$$

On a d'ailleurs (**444**)

$$\zeta u = \frac{1}{2\omega_1}\left[4\eta_1\omega_1 v + \frac{d}{dv}\log\theta(v)\right],$$

$$p u = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - \frac{d^2\log\theta(v)}{dv^2}\right],$$

$$p(u+\omega_\alpha) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - \frac{d^2\log\theta_\alpha(v)}{dv^2}\right],$$

Les formules précédentes donneront donc

$$\zeta u = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)\left(4\eta_1\omega_1 v + \pi\cot\pi v + 4\pi\sum_1^\infty \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}\sin 2m\pi v\right), \tag{31}$$

$$p u = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left(-4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\sin^2\pi v} - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right), \tag{32}$$

$$p(u+\omega_1) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{\cos^2\pi v} - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right], \tag{33}$$

$$p(u+\omega_2) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left(-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right), \tag{34}$$

$$p(u+\omega_3) = \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[-4\eta_1\omega_1 - 8\pi^2\sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^m}{1-q^{2m}}\cos 2m\pi v\right]. \tag{35}$$

471. Posons $v = 0$ dans les développements des fonctions

$$\frac{\theta'(0)}{\theta_\alpha(v)}, \quad \frac{\theta'(0)\,\theta_\gamma(0)}{\theta_\alpha(v)\,\theta_\beta(v)}, \quad \frac{\theta'^2(0)}{\theta_\alpha^2(v)},$$

et tenant compte de l'identité

$$\theta'(0) = \pi\vartheta_1(0)\,\theta_2(0)\,\theta_3(0),$$

nous obtiendrons de nouvelles expressions en fonction de q pour les quantités

$$\theta_\beta(0)\,\theta_\gamma(0), \quad \theta_\gamma^2(0), \quad \theta_\beta^2(0)\,\theta_\gamma^2(0).$$

Développons, d'autre part, les deux membres des équations (32) à (35) suivant les puissances de v; on aura (u étant égal à $2\omega_1 v$)

$$pu = \frac{1}{(2\omega_1 v)^2} + \frac{g_2}{20}(2\omega_1 v)^2 + \frac{g_3}{28}(2\omega_1 v)^4 + \ldots$$

et, comme $p(u + \omega_\alpha)$ est une fonction paire,

$$\begin{aligned} p(u + \omega_\alpha) &= p\omega_\alpha + p''\omega_\alpha \frac{(2\omega_1 v)^2}{2} + \ldots \\ &= e_\alpha + \left(6e_\alpha^2 - \frac{1}{2}g_2\right)\frac{(2\omega_1 v)^2}{2} + \ldots. \end{aligned}$$

Identifions ces développements avec ceux des seconds membres. La comparaison des termes constants donnera

$$(36) \qquad 0 = -4\eta_1\omega_1 + \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_1 \frac{mq^{2m}}{1 - q^{2m}},$$

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 + \pi^2 - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1 - q^{2m}} \right], \\ e_2 &= \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left(-4\eta_1\omega_1 \qquad - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{mq^m}{1 - q^{2m}} \right), \\ e_3 &= \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2 \left[-4\eta_1\omega_1 \qquad - 8\pi^2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^m}{1 - q^{2m}} \right]. \end{aligned} \right.$$

En poussant plus loin l'identification, on obtiendrait de même l'expression des quantités g_2, g_3, g_2^2, ...

472. La comparaison des expressions ainsi obtenues avec celles déjà trouvées par d'autres voies donne des identités qui fournissent des théorèmes arithmétiques remarquables. En voici un exemple :

On déduit des équations (37)

$$e_1 - e_2 = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left\{ 1 + 8\left[\sum_1^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - \sum_1^\infty \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}}\right]\right\}.$$

Mais cette quantité est égale (**437**) à

$$\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \theta_3^4(0) = \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^4.$$

On aura donc l'identité

$$\left(\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2}\right)^4 = 1 + 8\left[\sum_1^\infty \frac{mq^m}{1-q^{2m}} - \sum_1 \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}}\right].$$

Le premier membre développé est de la forme

$$\sum q^{n^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2}.$$

Si donc on réunit les termes égaux, le coefficient du terme en q^N sera égal au nombre S des solutions en nombres entiers de l'équation

$$n^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = N.$$

Considérons le second membre. Le terme $\dfrac{mq^m}{1-q^{2m}}$ peut être développé ainsi

$$\frac{mq^m}{1-q^{2m}} = m(q^m + q^{3m} + q^{5m} + \ldots)$$

et fournira un terme en q^N avec le coefficient m, si m est un diviseur de N, tel que le quotient soit impair.

Soit $N = 2^\lambda I$, I étant impair; il sera nécessaire et suffisant pour cela que m soit de la forme $2^\lambda\delta$, δ divisant I. Le coefficient de q^N dans le développement de $\sum \frac{mq^m}{1-q^{m2}}$ sera donc $2^\lambda\Sigma\delta$, la sommation s'étendant à tous les diviseurs de I.

On a, d'autre part,

$$(-1)^m \frac{mq^{2m}}{1-q^{2m}} = (-1)^m m(q^{2m} + q^{4m} + \ldots).$$

Ce développement contient un terme en q^N avec le coefficient $(-1)^m m$ si $2m$ divise n. Cela ne peut avoir lieu si $\lambda = 0$, auquel cas $N = I$ est un nombre impair. On a donc, dans ce premier cas,

$$S = 8\Sigma\delta.$$

Soit, au contraire, $\lambda > 0$; $2m$ divisera N si m divise $2^{\lambda-1}I$, et par suite, si m est de la forme $2^\mu\delta$, μ pouvant varier de 0 à $\lambda - 1$. D'ailleurs, $(-1)^m$ sera positif si $\mu > 0$, négatif si $\mu = 0$. Le coefficient de q^N dans le développement de $\sum \frac{(-1)^m mq^{2m}}{1-q^{2m}}$ sera donc

$$2^{\lambda-1}\Sigma\delta + 2^{\lambda-2}\Sigma\delta + \ldots + 2\Sigma\delta - \Sigma\delta = (2^\lambda - 3)\Sigma\delta,$$

et l'on aura

$$S = 8[2^\lambda\Sigma\delta - (2^\lambda - 3)\Sigma\delta] = 24\Sigma\delta.$$

VII. — Dérivées par rapport aux paramètres.

473. Jusqu'à présent nous avons traité ω_1, ω_2 comme constants, de telle sorte que les fonctions $\wp$, ζ, σ ne dépendraient que d'une seule variable u. Supposons maintenant ω_1, ω_2 variables; continuons à désigner par $\wp'$, $\wp''$, ...; ζ', ζ'', ...; σ', σ'', ... les dérivées prises par rapport à u, et cherchons à déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial\wp}{\partial\omega_1}$, $\frac{\partial\wp}{\partial\omega_2}$, ... prises par rapport aux deux autres variables.

Soit f l'une quelconque des fonctions considérées; elle est homogène d'un certain degré λ en u, ω_1, ω_2; on aura donc cette première relation

$$(1) \qquad \omega_1 \frac{\partial f}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial \omega_2} + u f' = \lambda f.$$

Il suffira donc, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial \omega_1}$, $\frac{\partial f}{\partial \omega_2}$, d'obtenir une nouvelle relation entre ces quantités.

474. Considérons d'abord la fonction p. Désignons par p_1, ζ_1 ce que deviennent p et ζ lorsqu'on y remplace u par $u_1 = u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Nous aurons

$$p_1 = p, \qquad \zeta_1 = \zeta + 2m_1\eta_1 + 2m_2\eta_2,$$

et en prenant les dérivées partielles de la première équation par rapport à u, ω_1, ω_2, dont p_1 est une fonction composée,

$$p'_1 = p', \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \omega_1} + 2m_1 p'_1 = \frac{\partial p}{\partial \omega_1}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial \omega_2} + 2m_2 p'_1 = \frac{\partial p}{\partial \omega_2}.$$

En combinant ces équations, on trouve aisément

$$\eta_1 \frac{\partial p_1}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial p_1}{\partial \omega_2} + p'_1 \zeta_1 = \eta_1 \frac{\partial p}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial p}{\partial \omega_2} + p'\zeta.$$

Cette équation montre que la fonction

$$F = \eta_1 \frac{\partial p}{\partial \omega_1} + \eta_2 \frac{\partial p}{\partial \omega_2} + p'\zeta$$

est une fonction elliptique aux périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$. Nous allons chercher ses pôles.

On a, par définition,

$$p = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(u - 2m_1\omega_1 - 2m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^2} \right],$$

d'où

$$\frac{\partial p}{\partial \omega_1} = \sum{}' \left[\frac{4m_1}{(u - 2m_1\omega_1 - 2m_2\omega_2)^3} + \frac{4m_1}{(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)^3} \right],$$

série convergente qui s'annule pour $u=0$, et ne peut devenir infinie que si $u=$ période. On trouve une expression analogue pour $\frac{\partial p}{\partial \omega_2}$; enfin p' et ζ ne sont infinis que pour $u=$ période. Le point $u=0$ sera donc (aux périodes près) le seul pôle de F.

On a, aux environs de ce point,

$$p=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{20}g_2u^2+\ldots,\qquad p'=-\frac{2}{u^3}+\frac{1}{10}g_2u+\ldots.$$

$$\zeta=\frac{1}{u}-\frac{1}{60}g_2u^3+\ldots,$$

d'où

$$F=-\frac{2}{u^4}+\frac{2}{15}g_2+\ldots.$$

D'ailleurs

$$2p^2=\frac{2}{u^4}+\frac{2}{10}g_2+\ldots;$$

donc

$$F+2p^2-\frac{1}{3}g_2=0,$$

car le premier membre est une fonction elliptique sans pôle, et qui s'annule pour $u=0$.

Désignons par D l'opération

$$D=-2\eta_1\frac{\partial}{\partial\omega_1}-2\eta_2\frac{\partial}{\partial\omega_2};$$

nous aurons

$$(2)\quad\begin{cases} Dp=2p'\zeta-2F=2p'\zeta+4p^2-\frac{2}{3}g_2\\ \quad=2(p\zeta)'+6p^2-\frac{2}{3}g_2=2(p\zeta)'+p''-\frac{1}{6}g_2.\end{cases}$$

475. Substituons dans cette équation pour p et ζ leurs développements

$$p=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\frac{g_2^2}{1200}u^6+\ldots,\qquad \zeta=\frac{1}{u}-\frac{g_2}{60}u^3-\ldots,$$

et identifions les termes en u^2 et u^4; il viendra

$$(3)\qquad \mathrm{D}g_2 = 12 g_3, \qquad \mathrm{D}g_3 = \frac{2}{3} g_2^2,$$

et, plus généralement, f désignant une fonction quelconque de u, g_2, g_3,

$$(4)\qquad \mathrm{D}f = \frac{\partial f}{\partial g_2}\mathrm{D}g_2 + \frac{\partial f}{\partial g_3}\mathrm{D}g_3 = \left(12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3}\right) f.$$

On aura, en particulier,

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}\Delta = 12 g_3 \times 3 g_2^2 - \dfrac{2}{3} g_2^2 \times 27 \times 2 g_3 = 0, \\ \mathrm{DJ} = \dfrac{12 g_3 \times 3 g_2^2}{\Delta} - \dfrac{g_2^3\, \mathrm{D}\Delta}{\Delta^2} = \dfrac{36 g_3 g_2^2}{\Delta}. \end{cases}$$

Mais

$$\mathrm{J} = \frac{g_2^3}{\Delta}, \qquad \mathrm{J} - 1 = \frac{27 g_3^2}{\Delta},$$

d'où

$$g_2 = (\Delta \mathrm{J})^{\frac{1}{3}}, \qquad g_3 = \left[\frac{\Delta(\mathrm{J}-1)}{27}\right]^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$(6)\qquad \mathrm{DJ} = 4\sqrt{3}\,(\mathrm{J}-1)^{\frac{1}{2}} \mathrm{J}^{\frac{2}{3}} \Delta^{\frac{1}{6}}.$$

476. Intégrons l'équation (2) par rapport à u; on trouvera

$$(7)\qquad \mathrm{D}\zeta = -2 p\zeta - p' + \frac{1}{6} g_2 u.$$

On n'a pas à ajouter de constante, car, en substituant à ζ, p, p' leurs développements, on voit que les deux membres s'annulent pour $u = 0$.

Intégrons encore une fois il viendra

$$(8)\qquad \mathrm{D}\log\sigma = \zeta^2 - p + \frac{1}{12} g_2 u^2,$$

les deux membres s'annulant encore pour $u = 0$.

Mais on a évidemment

$$D\log\sigma = \frac{D\sigma}{\sigma}, \qquad \zeta^2 - p = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' = \frac{\sigma''}{\sigma}.$$

L'équation (8) pourra donc s'écrire ainsi

$$(9) \qquad D\sigma = \sigma'' + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma.$$

En substituant dans cette équation aux dérivées partielles le développement

$$\sigma = u + d_1 u^5 + d_2 u^7 + \ldots,$$

l'identification donnera une formule récurrente pour le calcul des coefficients $d_1, d_2, \ldots$.

477. On a évidemment, d'après la définition de l'opération D,

$$(10) \qquad D\omega_\alpha = -2\eta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3),$$

$$(11) \qquad D\tau = \frac{\omega_1 D\omega_2 - \omega_2 D\omega_1}{\omega_1^2} = \frac{-2\omega_1\eta_2 + 2\omega_2\eta_1}{\omega_1^2} = \frac{\pi i}{\omega_1^2}.$$

D'autre part, $f(u)$ désignant une fonction quelconque de u, ω_1, ω_2 et u_1 une valeur de u qui soit fonction de ω_1, ω_2, la règle de dérivation des fonctions composées donnera

$$D f(u_1) = [D f(u)]_{u=u_1} + f'(u_1) D u_1.$$

Appliquons cette formule aux expressions

$$\eta_\alpha = \zeta\omega_\alpha, \qquad e_\alpha = p\omega_\alpha.$$

En remarquant que $p'\omega_\alpha = 0$, $p''\omega_\alpha = 6e_\alpha^2 - \frac{1}{2}g_2$, il viendra

$$(12) \qquad D\eta_\alpha = -2e_\alpha\eta_\alpha + \frac{1}{6}g_2\omega_\alpha + e_\alpha \times 2\eta_\alpha = \frac{1}{6}g_2\omega_\alpha,$$

$$(13) \qquad De_\alpha = 4e_\alpha^2 - \frac{2}{3}g_2;$$

puis

$$\begin{aligned}
&D\log(e_\beta - e_\alpha)\\
&= \frac{D(e_\beta - e_\alpha)}{e_\beta - e_\alpha} = 4\frac{e_\beta^2 - e_\alpha^2}{e_\beta - e_\alpha} = 4(e_\beta + e_\alpha) = -4e_\gamma,
\end{aligned}$$

et enfin

$$(14)\quad \begin{aligned}
\frac{DU_\alpha}{U_\alpha} &= D\log U_\alpha = D\log[(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)]^{-\frac{1}{4}}\\
&= \frac{1}{4}(4e_\gamma + 4e_\beta) = -e_\alpha.
\end{aligned}$$

478. Appliquons ces formules au calcul de l'expression

$$\begin{aligned}
D\log\sigma_\alpha u &= D\log\frac{e^{-\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}\sigma(u+\omega_\alpha)}{U_\alpha}\\
&= -D\log U_\alpha - D\eta_\alpha\left(u + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right) + D\log\sigma(u+\omega_\alpha)\\
&= e_\alpha - \left(u + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)\frac{1}{6}g_2\omega_\alpha + \eta_\alpha\eta_\alpha\\
&\quad + \frac{\sigma''(u+\omega_\alpha)}{\sigma(u+\omega_\alpha)} + \frac{1}{12}g_2(u+\omega_\alpha)^2 + \frac{\sigma'(u+\omega_\alpha)}{\sigma(u+\omega_\alpha)}D\omega_\alpha.
\end{aligned}$$

On a

$$D\omega_\alpha = -2\eta_\alpha$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma(u+\omega_\alpha) &= U_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}\sigma_\alpha,\\
\sigma'(u+\omega_\alpha) &= U_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}(\sigma'_\alpha + \eta_\alpha\sigma_\alpha),\\
\sigma''(u+\omega_\alpha) &= U_\alpha e^{\eta_\alpha\left(u+\frac{1}{2}\omega_\alpha\right)}(\sigma''_\alpha + 2\eta_\alpha\sigma'_\alpha + \eta_\alpha^2\sigma_\alpha).
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs, il viendra

$$\begin{aligned}
D\log\sigma_\alpha = \frac{D\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha} &= e_\alpha - \left(u + \frac{1}{2}\omega_\alpha\right)\frac{1}{6}g_2\omega_\alpha + \eta_\alpha^2\\
&\quad + \frac{\sigma''_\alpha + 2\eta_\alpha\sigma'_\alpha + \eta_\alpha^2\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha} + \frac{1}{12}g_2(u+\omega_\alpha)^2\\
&\quad - 2\eta_\alpha\frac{\sigma'_\alpha + \eta_\alpha\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha}
\end{aligned}$$

ou, en chassant le dénominateur et réduisant,

$$(15)\qquad D\sigma_\alpha = \sigma''_\alpha + \left(e_\alpha + \frac{1}{12}g_2u^2\right)\sigma_\alpha,$$

équation aux dérivées partielles, analogue à l'équation (9) précédemment trouvée pour la fonction σ.

479. Cette équation (9) n'est d'ailleurs qu'une transformée de l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 4\pi i\frac{\partial\theta}{\partial\tau},$$

à laquelle satisfait la fonction θ(**428**)

Pour établir cette équivalence, revenons à la forme primitive de l'équation (9)

$$\frac{D\sigma}{\sigma} = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' + \frac{1}{12}g_2u^2,$$

et rappelons-nous les relations

$$\sigma = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\theta(v,\tau)}{\theta'(0,\tau)},\qquad v = \frac{u}{2\omega_1},\qquad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

$$\Delta = \frac{16\pi^4}{(2\omega_1)^{12}}\theta'^8(0,\tau).$$

On en déduit immédiatement

$$\sigma = \sqrt{\pi}\,\Delta^{-\frac{1}{8}}\omega_1^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\eta_1u^2}{2\omega_1}}\theta(v,\tau)$$

et, en prenant la dérivée logarithmique par rapport à u,

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\theta},$$

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' = \frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{1}{2\omega_1}\right)^2\left[\frac{\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}}{\theta} - \left(\frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\theta}\right)^2\right].$$

On aura, d'autre part,

$$\frac{D\sigma}{\sigma} = -\frac{1}{8}\frac{D\Delta}{\Delta} - \frac{1}{2}\frac{D\omega_1}{\omega_1} + \frac{u^2}{2}\frac{\omega_1 D\eta_1 - \eta_1 D\omega_1}{\omega_1^2} + \frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}Dv + \frac{\partial\theta}{\partial\tau}D\tau}{\theta}.$$

Or

$$\mathrm{D}v = \mathrm{D}\frac{u}{2\omega_1} = -\frac{u\,\mathrm{D}\omega_1}{2\omega_1^2} = \frac{\eta_1 u}{\omega_1^2}.$$

Substituant cette valeur et celles de $\mathrm{D}\Delta$, $\mathrm{D}\omega_1$, $\mathrm{D}\eta_1$, $\mathrm{D}\tau$ dans l'expression précédente, elle devient

$$\frac{\mathrm{D}\sigma}{\sigma} = \frac{\eta_1}{\omega_1} + \frac{1}{12}g_2 u^2 + \frac{\eta_1^2 u^2}{\omega_1^2} + \frac{\eta_1 u}{\omega_1^2}\frac{\frac{\partial\theta}{\partial v}}{\theta} + \frac{\pi i}{\omega_1^2}\frac{\frac{\partial\theta}{\partial\tau}}{\theta}.$$

Substituant ces valeurs de $\frac{\sigma'}{\sigma}$, $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'$, $\frac{\mathrm{D}\sigma}{\sigma}$ dans l'équation différentielle, réduisant et multipliant par $4\omega_1^2\theta$, il viendra

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 4\pi i\frac{\partial\theta}{\partial\tau}.$$

480. On peut déduire de l'équation (9) une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait l'expression

$$\psi_n = \frac{\sigma n u}{\sigma^{n^2} u}.$$

Changeons, en effet, u en nu et posons $\sigma nu = y$; l'équation (9) se changera en

$$\mathrm{D}y = \frac{1}{n^2}y'' + \frac{1}{12}g_2 n^2 u^2 y.$$

Posons

$$y = \sigma^{n^2}\psi_n,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{D}y}{y} = \frac{\mathrm{D}\psi_n}{\psi_n} + n^2\mathrm{D}\log\sigma = \frac{\mathrm{D}\psi_n}{\psi_n} + n^2\left(\zeta^2 - \mathrm{p} + \frac{1}{12}g_2 u^2\right),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\psi_n'}{\psi_n} + n^2\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{\psi_n'}{\psi_n} + n^2\zeta,$$

$$\frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \left(\frac{\psi_n'}{\psi_n}\right)' - n^2\mathrm{p} + \left(\frac{\psi_n'}{\psi_n} + n^2\zeta\right)^2$$

$$= \frac{\psi_n''}{\psi_n} + 2n^2\zeta\frac{\psi_n'}{\psi_n} + n^4\zeta^2 - n^2\mathrm{p}.$$

La transformée en ψ_n sera donc

$$\frac{D\psi_n}{\psi_n} + n^2\left(\zeta^2 - p + \frac{1}{12}g_2 u^2\right)$$
$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{\psi_n''}{\psi_n} + 2n^2\zeta\frac{\psi_n'}{\psi_n} + n^4\zeta^2 - n^2 p\right) + \frac{1}{12}g_2 n^2 u^2$$

ou

$$D\psi_n = \frac{1}{n^2}\psi_n'' + 2\zeta\psi_n' + (n^2-1)p\psi_n. \tag{16}$$

481. Prenons p, g_2, g_3 pour variables indépendantes au lieu de u, g_2, g_3; nous aurons

$$D\psi_n = 12 g_3 \frac{\partial\psi_n}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\psi_n}{\partial g_3} + \frac{\partial\psi_n}{\partial p} Dp$$
$$= 12 g_3 \frac{\partial\psi_n}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\psi_n}{\partial g_3} + \frac{\partial\psi_n}{\partial p}\left(2p'\zeta + 4p^2 - \frac{2}{3}g_2\right),$$

$$\psi_n' = \frac{\partial\psi_n}{\partial p}p',$$

$$\psi_n'' = \frac{\partial^2\psi_n}{\partial p^2}p'^2 + \frac{\partial\psi_n}{\partial p}p''$$
$$= \frac{\partial^2\psi_n}{\partial p^2}(4p^3 - g_2 p - g_3) + \frac{\partial\psi_n}{\partial p}\left(6p^2 - \frac{1}{2}g_2\right).$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (16) et chassant le dénominateur n^2, on aura la transformée

$$n^2\left(12 g_3\frac{\partial\psi_n}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial\psi_n}{\partial g_3}\right)$$
$$= (4p^3 - g_2 p - g_3)\frac{\partial^2\psi_n}{\partial p^2}$$
$$+ \left[(6-4n^2)p^2 - \frac{3-4n^2}{6}g_2\right]\frac{\partial\psi_n}{\partial p} + n^2(n^2-1)p\psi_n. \tag{17}$$

Si n est entier et impair, ψ_n sera un polynome entier en p, g_2, g_3; si n est pair, ce sera le produit d'un semblable polynome par p'. Dans l'un et l'autre cas, l'équation (17) fournira une formule récurrente pour le calcul des coefficients des diverses puissances de p.

482. Supposons qu'on ait pris pour variables indépendantes g_2, g_3 au lieu de ω_1, ω_2. L'opération D étant exprimée au moyen de ces nouvelles variables par la relation

$$D = 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

les équations précédentes donneront une première relation entre $\frac{\partial f}{\partial g_2}$, $\frac{\partial f}{\partial g_3}$, f désignant l'une quelconque des expressions considérées ci-dessus. L'homogénéité en donnera une seconde. Supposons en effet, que f soit homogène de degré λ par rapport à u, ω_1, ω_2 ou, ce qui revient au même, par rapport à u, $g_2^{-\frac{1}{4}}$, $g_3^{-\frac{1}{6}}$; on aura

$$u \frac{\partial f}{\partial u} + g_2^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial f}{\partial g_2^{-\frac{1}{4}}} + g_3^{-\frac{1}{6}} \frac{\partial f}{\partial g_3^{-\frac{1}{6}}} = \lambda f$$

ou

$$u \frac{\partial f}{\partial u} - 4 g_2 \frac{\partial f}{\partial g_2} - 6 g_3 \frac{\partial f}{\partial g_3} = \lambda f.$$

483. On peut encore prendre pour variables indépendantes Δ, J, v. Posons, dans ce cas,

$$f = \Delta^{-\frac{\lambda}{12}} \varphi.$$

φ, étant homogène et de degré zéro, se réduira à une fonction de J, v. La dérivée $\frac{\partial f}{\partial \Delta}$ sera évidemment égale à

$$-\frac{\lambda}{12} \Delta^{-\frac{\lambda}{12}-1} \varphi = -\frac{\lambda}{12} \frac{f}{\Delta}.$$

La dérivée $\frac{\partial f}{\partial v}$ sera égale à $2\omega_1 \frac{\partial f}{\partial u}$; enfin, $D\Delta$ étant nul, $\frac{\partial f}{\partial J}$ se déduira de la formule

$$(18) \qquad Df = \frac{\partial f}{\partial J} DJ + \frac{\partial f}{\partial v} Dv.$$

Effectuant à nouveau sur cette égalité l'opération D, on aura une nouvelle équation qui fournit $\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}$; etc.

Supposons, pour plus de simplicité, que f soit indépendant de u; il viendra

$$D^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial J^2}(DJ)^2 + \frac{\partial f}{\partial J}\frac{\partial DJ}{\partial J} DJ. \tag{19}$$

Mais de l'égalité

$$DJ = 4\sqrt{3}(J-1)^{\frac{1}{2}} J^{\frac{2}{3}} \Delta^{\frac{1}{6}}$$

on déduit

$$(DJ)^2 = 48(J-1)J^{\frac{4}{3}}\Delta^{\frac{1}{3}} = 48\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}(J-1)J,$$

$$\frac{\partial DJ}{\partial J} = 4\sqrt{3}\,\Delta^{\frac{1}{6}}\left[\frac{1}{2}(J-1)^{-\frac{1}{2}}J^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(J-1)^{\frac{1}{2}}J^{-\frac{1}{3}}\right],$$

$$\frac{\partial DJ}{\partial J} DJ = 48\Delta^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{2}J^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3}(J-1)J^{\frac{1}{3}}\right] = 48\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}\left(\frac{7J-4}{6}\right).$$

L'équation (19) devient donc

$$(\quad -1)J\frac{\partial^2 f}{\partial J^2} + \frac{7J-4}{6}\frac{\partial f}{\partial J} = \frac{D^2 f}{48\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}} \tag{20}$$

et pourra servir au calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial J^2}$.

484. Comme application, posons $f = \omega_\alpha$; on aura

$$D\omega_\alpha = -2\eta_\alpha,$$

$$D^2\omega_\alpha = -2D\eta_\alpha = -\frac{1}{3}g_2\omega_\alpha = -\frac{1}{3}\Delta^{\frac{1}{3}}J^{\frac{1}{3}}\omega_\alpha.$$

Nous aurons donc

$$(J-1)J\frac{\partial^2\omega_\alpha}{\partial J^2} + \frac{7J-4}{6}\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial J} + \frac{\omega_\alpha}{144} = 0. \tag{21}$$

Soit en second lieu $f = \eta_\alpha$; on aura

$$D\eta_\alpha = \frac{1}{6} g_2 \omega_\alpha = \frac{1}{6} \Delta^{\frac{1}{3}} J^{\frac{1}{3}} \omega_\alpha,$$

$$\begin{aligned} D^2\eta_\alpha &= \frac{1}{6}\omega_\alpha D g_2 + \frac{1}{6} g_2 D\omega_\alpha = 2 g_3 \omega_\alpha - \frac{1}{3} g_2 \eta_\alpha \\ &= \frac{12 g_3}{g_2} D\eta_\alpha - \frac{1}{3} g_2 \eta_\alpha = \frac{12 g_3}{g_2} DJ \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial J} - \frac{1}{3} g_2 \eta_\alpha \\ &= 16 \Delta^{\frac{1}{3}} J^{\frac{1}{3}} (J - 1) \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial J} - \frac{1}{3} \Delta^{\frac{1}{3}} J^{\frac{1}{3}} \eta_\alpha. \end{aligned}$$

On aura donc

$$(J-1)J \frac{\partial^2 \eta_\alpha}{\partial J^2} + \frac{7J-4}{6} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial J} = \frac{1}{3}(J-1)\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial J} - \frac{\eta_\alpha}{144}$$

et, en réduisant,

$$(J-1)J \frac{\partial^2 \eta_\alpha}{\partial J^2} + \frac{5J-2}{6} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial J} + \frac{\eta_\alpha}{144} = 0. \tag{22}$$

485. Si nous supposons Δ constant et J variable, les deux périodes ω_1 et $\omega_2 = \tau\omega_1$ satisferont, comme nous venons de le voir, à une équation différentielle linéaire du second ordre

$$A \frac{d^2\omega}{dJ^2} + 2B \frac{d\omega}{dJ} + C\omega = 0,$$

où nous posons, pour abréger,

$$A = (J-1)J, \qquad B = \frac{7J-4}{12}, \qquad C = \frac{1}{144}.$$

Nous aurons donc à la fois

$$\left\{ \begin{aligned} &A \frac{d^2\omega_1}{dJ^2} + 2B \frac{d\omega_1}{dJ} + C\,\omega_1 = 0, \\ &A \frac{d^2\tau\omega_1}{dJ^2} + 2B \frac{d\tau\omega_1}{dJ} + C\tau\omega_1 = 0. \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Développons cette dernière équation en tenant compte de

la précédente, il viendra

$$(24)\qquad 2A\frac{d\tau}{dJ}\frac{d\omega_1}{dJ}+\left(A\frac{d^2\tau}{dJ^2}+2B\frac{d\tau}{dJ}\right)\omega_1=0.$$

Une nouvelle dérivation donnera

$$(25)\quad 2A\frac{d\tau}{dJ}\frac{d^2\omega_1}{dJ^2}+\left[3A\frac{d^2\tau}{dJ^2}+2\left(\frac{dA}{dJ}+B\right)\frac{d\tau}{dJ}\right]\frac{d\omega_1}{dJ}$$
$$+\frac{d}{dJ}\left(A\frac{d^2\tau}{dJ^2}+2B\frac{d\tau}{dJ}\right)\omega_1=0.$$

Éliminant ω_1 et ses dérivées entre les équations (23), (24), (25), nous obtiendrons une équation différentielle du troisième ordre à laquelle τ satisfera.

486. La relation entre les deux variables J et τ mérite d'être étudiée avec soin.

A chaque valeur complexe de τ, à partie imaginaire positive, correspond une valeur unique de J, définie par la formule (34) du n° 437 (où $q=e^{\pi i\tau}$). Les séries qui figurent dans cette expression étant uniformément convergentes dans l'intérieur de tout contour fermé situé dans la moitié supérieure du plan où l'on figure la variation de τ (et ne rencontrant pas l'axe des x), J sera dans cette région une fonction analytique de τ, uniforme et sans point critique.

Réciproquement, supposons J donné; les rapports des quantités e_1, e_2, e_3 seront déterminés par les relations

$$e_1+e_2+e_3=0,$$
$$J=\frac{g_2^3}{\Delta}=\frac{-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)^3}{(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2}.$$

En éliminant e_3, on aura une équation du sixième degré en $\frac{e_2}{e_1}$; mais, à cause de la symétrie des équations en e_1, e_2, e_3, elle admet évidemment pour racines les six quantités $\frac{e_\beta}{e_\alpha}$. Donc la connaissance de J détermine e_1, e_2, e_3 sans ambiguïté à un facteur près de proportionnalité μ.

Or, si l'on change e_1, e_2, e_3 en μe_1, μe_2, μe_3, la période principale

$$2\omega_\alpha = \int_{e_\beta}^{e_\gamma} \frac{dz}{\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$

se change en

$$\int_{\mu e_\beta}^{\mu e_\gamma} \frac{dz}{\sqrt{(z-\mu e_1)(z-\mu e_2)(z-\mu e_3)}}.$$

Changeons également z en μz; cette intégrale deviendra $\frac{2}{\sqrt{\mu}}\omega_\alpha$. Donc la connaissance de J détermine les périodes principales et, par suite, tout le réseau des périodes, à un facteur près de proportionnalité, égal à $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, lequel disparaît des rapports des périodes.

Mais à un même réseau correspondent une infinité de valeurs de τ, qui se déduisent de l'une d'elles $\tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1}$ en remplaçant ω'_1, ω'_2 par un autre système de demi-périodes équivalentes

$$\omega_1 = a\omega'_1 + b\omega'_2, \qquad \omega_2 = c\omega'_1 + d\omega'_2;$$

la formule générale des valeurs de τ correspondantes à une même valeur de J sera donc

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{c + d\tau'}{a + b\tau'},$$

où a, b, c, d sont des entiers tels qu'on ait

$$ad - bc = 1.$$

Tous ces nombres τ ont, comme τ' leur partie imaginaire positive (353).

487. Soient d'ailleurs p, q deux entiers réels quelconques premiers entre eux. On pourra déterminer deux autres

entiers p', q', tels qu'on ait

$$pq' - qp' = 1,$$

et, plus généralement, n désignant un entier quelconque,

$$p(nq + q') - q(np + p') = 1.$$

Donc J prendra la même valeur au point τ' et au point

$$\tau = \frac{np + p' + p\tau}{nq + q' + q\tau}.$$

Mais si n tend vers ∞, ce point se rapprochera indéfiniment de $\frac{p}{q}$. Donc $\frac{p}{q}$ est un point d'indétermination pour J; et comme tout point de l'axe des x est un point limite pour l'ensemble des points $\frac{p}{q}$, l'axe des x sera une ligne critique au-dessous de laquelle la fonction ne pourra être prolongée.

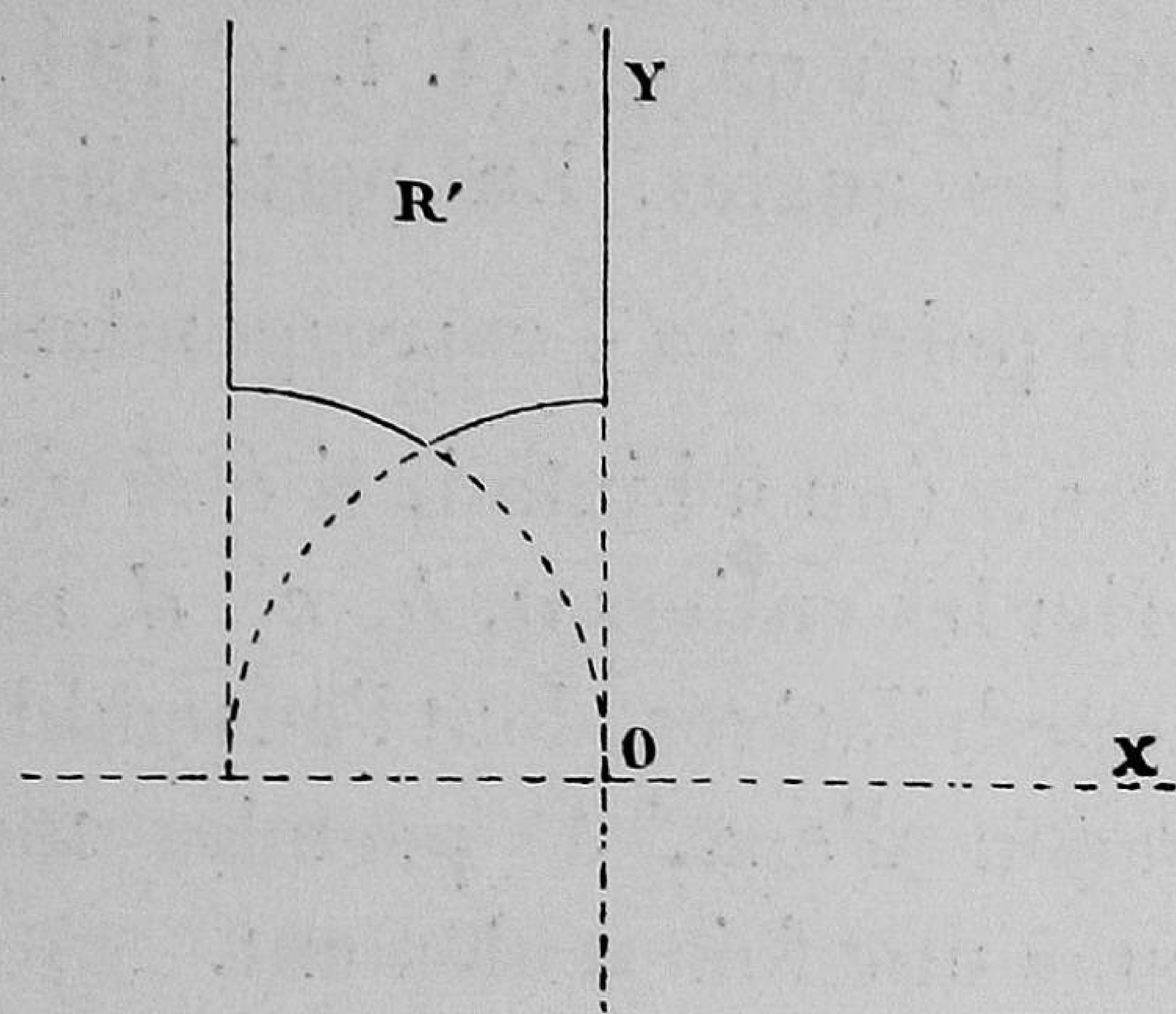
488. Parmi les valeurs de τ en nombre infini qui correspondent à une même valeur de J, considérons spécialement celle qu'on obtient en choisissant pour $2\omega_1$ la période de module minimum, et pour $2\omega_2$ la période principale qui la suit lorsqu'on tourne dans le sens direct autour du triangle principal. Désignons-la par τ'. Il est aisé de déterminer la région du plan décrite par τ' lorsque J prend toute la série des valeurs complexes.

Considérons, en effet, le triangle T formé par les trois points -1, 0, τ'. Il est semblable au triangle principal ($2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$); or celui-ci a ses angles aigus et son plus petit côté est $2\omega_1$, qui a pour correspondant dans T le côté $(-1, 0)$. Le troisième sommet τ' sera donc situé : 1° au-dessus de l'axe des x; 2° dans la bande comprise entre les deux droites $x = 0$, $x = -1$; 3° en dehors des cercles de rayon 1, décrits des points 0 et 1 comme centre.

La région R' ainsi délimitée (*fig.* 49) est un quadrilatère curviligne formé par quatre arcs de cercle ayant leur centre sur l'axe des x (une droite normale aux x pouvant être con-

sidérée comme cas limite de ces cercles). Ce quadrilatère a deux angles droits; le troisième est égal à $\frac{2\pi}{3}$; le dernier, correspondant au sommet à l'infini, est nul.

Fig. 49.



489. Soit $\tau = x + iy$ une variable complexe liée à $\tau' = x' + iy'$ par la relation

$$\tau = \frac{c + d\tau'}{a + b\tau'} \qquad (ad - bc = 1).$$

On en déduit

$$\tau' = x' + iy' = \frac{c - a\tau}{-d + b\tau} = \frac{c - ax - aiy}{-d + bx + biy},$$

et, en égalant les parties réelles,

$$x' = \frac{(c - ax)(-d + bx) - aby^2}{(-d + bx)^2 + b^2y^2}$$
$$= \frac{-cd + (ad + bc)x - ab(x^2 + y^2)}{d^2 - 2bdx + b^2(x^2 + y^2)}.$$

D'autre part, en multipliant $x' + iy'$ par l'expression conjuguée, il vient

$$x'^2 + y'^2 = \frac{c^2 - 2acx + a^2(x^2 + y^2)}{d^2 - 2bdx + b^2(x^2 + y^2)}.$$

Si donc τ' décrit un cercle

$$A(x'^2 + y'^2) + Bx' + C = 0,$$

ayant son centre sur l'axe des x, τ décrira un cercle analogue.

Lorsque τ' décrit le quadrilatère R', limité par quatre arcs de cercles, τ décrira un autre quadrilatère R, limité par les arcs transformés. Ceux-ci se coupent sous les mêmes angles que les précédents; car on sait (t. I, n° 194) que la transformation conserve les angles. En particulier, le sommet de l'angle nul sera le point $\tau = \frac{d}{b}$ correspondant à $\tau' = \infty$. Il est situé sur l'axe des x (ou a l'infini, si $b = 0$),

En faisant varier les entiers a, b, c, d nous obtiendrons une infinité de quadrilatères, dont l'ensemble couvre le demi-plan. Dans chacun d'eux, J prendra toutes les valeurs possibles, chacune une fois seulement.

490. La fonction $J(\tau)$ que nous venons d'étudier est le type le plus simple des *fonctions modulaires*. On donne ce nom aux fonctions analytiques, uniformes dans le demi-plan, et qui ne prennent qu'un nombre limité de valeurs distinctes pour l'ensemble des valeurs de la variable indépendante τ, qui se déduisent les unes des autres par les substitutions linéaires de déterminant 1,

$$\tau = \frac{c + d\tau'}{a + b\tau'}.$$

Toutes ces fonctions admettent évidemment l'axe des x comme ligne critique.

491. Pour en donner quelques exempler, considérons les produits infinis $\varphi\tau$, $\varphi_1\tau$, $\varphi_2\tau$, $\varphi_3\tau$ du n° 443. On a, d'après les formules (50) et (53) du même numéro,

$$\varphi^{24}\tau = \left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12}\Delta, \qquad \varphi_\alpha^{24} = \frac{16(e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}.$$

Changeons de périodes fondamentales en posant

$$(26) \qquad \omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

d'où

$$\omega'_1 = \omega_1(a + b\tau), \qquad \tau' = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}.$$

La substitution (26) n'altère pas Δ, et fait éprouver aux quantités e_1, e_2, e_3 une permutation, variable suivant celle des six classes à laquelle appartient la substitution (358).

Nous aurons donc

$$\varphi^{24}\tau' = \left(\frac{\omega'_1}{\pi}\right)^{12}\Delta = (a + b\tau)^{12}\varphi^{24}\tau,$$

$$\varphi_{\alpha'}^{24}\tau' = \varphi_\alpha^{24}\tau,$$

α' parcourant, ainsi que α, la suite des valeurs 1, 2, 3, mais dans un ordre qui peut être différent et qui dépend de l'ordre de parité des coefficients a, b, c, d.

On en déduit

$$(27) \qquad \varphi\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) = \varphi\tau' = \mathrm{E}\sqrt{a + b\tau}\,\varphi\tau;$$

$$(28) \qquad \varphi_{\alpha'}\left(\frac{c + d\tau}{a + b\tau}\right) = \varphi_{\alpha'}\tau' = \mathrm{E}_{\alpha'}\varphi_\alpha\tau,$$

E, $\mathrm{E}_{\alpha'}$ étant des racines 24^{ièmes} de l'unité, que nous allons préciser.

492. Convenons tout d'abord d'adopter, pour $\sqrt{a + b\tau}$, celle des deux déterminations de ce radical dont l'argument est $> -\frac{\pi}{2}$, mais ne surpasse pas $\frac{\pi}{2}$.

Si b est nul, la condition $ad - bc = 1$ montre qu'on aura $a = d = \pm 1$; et le radical $\sqrt{a + b\tau}$ aura une valeur constante égale à 1 ou à i, suivant qu'on a $a = 1$ ou $a = -1$. Son argument sera 0 dans le premier cas, $\frac{\pi}{2}$ dans le second.

Si $b \gtrless 0$, τ ne passant par aucune valeur réelle, $\sqrt{a + b\tau}$ ne pourra être purement imaginaire; son argument ne pourra donc atteindre la limite supérieure $\frac{\pi}{2}$, et $\sqrt{a + b\tau}$ sera une fonction continue de τ.

Les produits $\varphi\tau$, $\varphi_\alpha\tau$, $\varphi\tau'$, $\varphi_{\alpha'}\tau'$ sont aussi des fonctions continues de τ (τ' étant une fonction continue de τ). D'ailleurs les séries

$$\Sigma q^{2n}, \quad \Sigma q^{2n-1},$$

où $|q| < 1$, étant absolument convergentes, la valeur de ces produits n'est jamais nulle (t. I, n° 323).

Les quantités E, E_α, définies par les équations (27), (28), sont donc des fonctions continues de τ; mais ce sont des racines $24^{\text{ièmes}}$ de l'unité; elles sont donc indépendantes de τ; mais elles dépendent des paramètres a, b, c, d; mettant ceux-ci en évidence, nous les représenterons par

$$E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad E_{\alpha'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

493. Soient

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

deux substitutions successives ayant pour résultante

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \qquad \tau'' = \frac{c' + d'\tau'}{a' + b'\tau'} = \frac{c'' + d''\tau}{a'' + b''\tau},$$

on aura

$$\begin{aligned} \varphi\tau'' &= E\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\sqrt{a' + b'\tau'}\,\varphi\tau' \\ &= E\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\sqrt{a' + b'\tau'}\,E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\sqrt{a + b\tau}\,\varphi\tau; \end{aligned}$$

mais, d'autre part,

$$\varphi\tau'' = E\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\sqrt{a'' + b''\tau}\,\varphi\tau.$$

Donc

$$E\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \varepsilon E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

ε désignant le facteur

$$\varepsilon = \sqrt{a' + b'\tau'}\,\frac{\sqrt{a + b\tau}}{\sqrt{a'' + b''\tau}} = \sqrt{\frac{\omega''_1}{\omega'_1}}\,\frac{\sqrt{\frac{\omega'_1}{\omega_1}}}{\sqrt{\frac{\omega''_1}{\omega_1}}}.$$

On a évidemment $\varepsilon^2 = 1$, d'où $\varepsilon = \pm 1$. Cherchons dans quelles circonstances on aura $\varepsilon = -1$.

Il faut, pour cela, que l'argument de ε soit égal à π. Celui de $\sqrt{a' + b'\tau'}$ est $> -\frac{\pi}{2}$, mais $\overline{\overline{<}}\ \frac{\pi}{2}$; l'argument du second facteur devra donc être $< \frac{3\pi}{2}$, mais $\overline{\overline{>}}\ \frac{\pi}{2}$.

Donnons à τ la valeur particulière Ri, R étant un infini positif, et posons

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2R^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\rho}, \qquad \sin\varphi = \frac{bR}{\rho},$$

nous aurons

$$a + bRi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\sqrt{a + bRi} = \sqrt{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

où $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\sin\frac{\varphi}{2}$ sont déterminés par les formules

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{\rho + a}{2\rho}},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{bR}{2\rho\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

La valeur du radical $\sqrt{\frac{\rho + a}{2\rho}}$ doit être prise positivement, puisque l'argument de $\sqrt{a + bRi}$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas particulier où $b = 0$, $a = -1$, ce radical

s'annule, et ces formules devront être remplacées par celles-ci

$$\cos\frac{\varphi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = 1.$$

Posons de même

$$\sqrt{a''^2 + b''^2 R^2} = \rho''$$

et

$$\cos\frac{\varphi''}{2} = \sqrt{\frac{\rho'' + a''}{2\rho''}}, \qquad \sin\frac{\varphi''}{2} = \frac{b'' R}{2\rho'' \cos\frac{\varphi''}{2}}.$$

ou, si $b'' = 0$, $a'' = -1$,

$$\cos\frac{\varphi''}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi''}{2} = 1;$$

nous aurons

$$\sqrt{a'' + b'' R i} = \sqrt{\rho''}\left(\cos\frac{\varphi''}{2} + i \sin\frac{\varphi''}{2}\right),$$

et l'argument de

$$\frac{\sqrt{a + bRi}}{\sqrt{a'' + b'' Ri}}$$

sera $\frac{\varphi - \varphi''}{2}$. Pour qu'il soit $< \frac{3\pi}{2}$ et $\overline{\gt} \frac{\pi}{2}$, il faut qu'on ait

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} < 0$$

ou

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = +1.$$

Considérons d'abord le cas général où $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi''}{2}$ sont positifs, on aura

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi''}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi''}{2}.$$

Remplaçons les sinus par leurs valeurs et multiplions par

le facteur positif $4\rho\rho''\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi''}{2}$; nous obtiendrons l'expression

$$4\rho\rho''\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi''}{2}+bb''R^2=(\rho+a)(\rho''+a'')+bb''R^2,$$

qui devra être négative ou nulle.

Or les facteurs

$$\rho+a=\sqrt{a^2+b^2R^2}+a,\qquad \rho''+a''$$

sont positifs: on aura donc, pour première condition,

$$bb''<0$$

et, par suite,

$$bb''=-|b|\,|b''|.$$

On a d'ailleurs

$$\rho+a=|b|R\left[\left(1+\frac{a^2}{b^2R^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{a}{|b|R}\right]$$
$$=|b|R\left(1+\frac{a}{|b|R}+\ldots\right).$$

Développant de même $\rho''+a''$, il viendra

$$(\rho+a)(\rho''+a'')+bb''R^2=|bb''|R^2\left[\left(\frac{a}{|b|}+\frac{a''}{|b''|}\right)\frac{1}{R}+\ldots\right].$$

Pour $R=\infty$, cette expression a le signe de la quantité

$$\frac{a}{|b|}+\frac{a''}{|b''|}$$

ou, en multipliant par le facteur positif $|b|\,|b''|^2$, celui de la quantité

$$a|b''|^2+a''|bb''|=ab''^2-a''bb''.$$

Or celle-ci est égale à $b'b''$; car on a

$$ab''-a''b=a(ba'+db')-(aa'+cb')b=(ad-bc)b'=b'.$$

Nous obtenons donc cette nouvelle condition

$$b'b''<0.$$

Il y a encore doute si $b'b''=0$.

Dans ce dernier cas, bb'' étant supposé < 0, on aura $b' = 0$, $a' = d' = \pm 1$, $a'' = aa'$, $b'' = ba'$. D'ailleurs $bb'' < 0$. Donc $a' = -1$, $a'' = -a$, $b'' = -b$, $\rho'' = \rho$, d'où

$$(\rho + a)(\rho'' + a'') + bb''R^2 = \rho^2 - a^2 - b^2R^2 = 0.$$

Donc $\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = 0$. Mais cette condition ne suffit pas; il faut encore que

$$\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi''}{2} - \sin\frac{\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

soit égal à $+1$. Or $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi''}{2}$ sont positifs, $\sin\frac{\varphi}{2}$ a le signe de b, $\sin\frac{\varphi''}{2}$ le signe contraire. Donc $\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2}$ a le signe de b. On doit donc avoir cette condition nouvelle

$$b > 0,$$

qui, jointe à la condition $bb'' < 0$, réduira celle-ci à $b'' < 0$.

Venons enfin aux cas exceptionnels où l'une au moins des quantités $\cos\frac{\varphi}{2}$, $\cos\frac{\varphi''}{2}$ est nulle, le sinus correspondant étant égal à $+1$.

Soit d'abord $\cos\frac{\varphi}{2} = 0$, $\sin\frac{\varphi}{2} = 1$, mais $\cos\frac{\varphi''}{2} > 0$. On aura $b = 0$, $a = -1$, d'où

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \sin\frac{\varphi''}{2} = \frac{b''R}{2\rho''\cos\frac{\varphi''}{2}},$$

$$\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \cos\frac{\varphi''}{2}.$$

Le cosinus sera négatif si $b'' < 0$; il sera nul, et le sinus égal à $+1$, si $b'' = 0$. Dans ce dernier cas a'' devra être égal à $+1$, puisque par hypothèse, $\cos\frac{\varphi''}{2} > 0$.

Soit $\cos\frac{\varphi}{2} > 0$, mais $\cos\frac{\varphi''}{2} = 0$, $\sin\frac{\varphi''}{2} = 1$, d'où $b'' = 0$,

$a'' = -1$. On aura

$$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2} = \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{bR}{2\rho\cos\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sin\frac{\varphi - \varphi''}{2} = -\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Le cosinus sera négatif, si $b < 0$. Si $b = 0$ il sera nul, mais le sinus sera négatif.

Enfin, si

$$\cos\frac{\varphi}{2} = \cos\frac{\varphi''}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi''}{2} = 1,$$

$\cos\frac{\varphi - \varphi''}{2}$ sera positif et égal à $+1$.

Comme conclusion de cette analyse, on voit que le facteur ε sera égal à -1 dans les cas suivants :

1° $\quad bb'' < 0, \quad b'b'' < 0;$

2° $\quad b > 0, \quad b' = 0, \quad b'' < 0;$

3° $\quad b = 0, \quad a = -1, \quad b'' < 0;$

4° $\quad b = 0, \quad a = -1, \quad b'' = 0, \quad a'' = 1;$

5° $\quad b'' = 0, \quad a'' = -1, \quad b < 0.$

494. La loi de composition du symbole E étant ainsi fixée, il nous reste à déterminer sa valeur pour les substitutions élémentaires dont toutes les autres sont composées (354) :

1° Considérons d'abord la substitution

$$A_2^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle transforme τ en $\tau + \lambda$, q en $e^{\pi i\lambda}q$. Elle multiplie donc le produit infini

$$\varphi\tau = q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1 - q^{2n})$$

par ρ^λ, ρ désignant l'exponentielle $e^{\frac{\pi i}{12}}$, de sorte que nous

aurons

$$\varphi(\tau+\lambda) = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\sqrt{1}\,\varphi\tau = \rho^{\lambda}\varphi\tau.$$

d'où

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \rho^{\lambda}. \tag{29}$$

2° Passons à la substitution

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle transforme τ en $\frac{-1}{\tau}$; on aura donc

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sqrt{\tau}\,\varphi\tau.$$

Pour la valeur particulière $\tau = i = -\frac{1}{\tau}$, cette équation se réduit à

$$1 = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\sqrt{i},$$

donc

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{i}} = e^{-\frac{\pi i}{4}} = \rho^{-3}. \tag{30}$$

De ces deux résultats on déduit successivement, par la règle de composition,

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^{-6}, \tag{31}$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{E}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\rho^{-9} = \rho^{3}, \tag{32}$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}\mathrm{E}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda-6}, \tag{33}$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}\mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda+3}, \tag{34}$$

$$\mathrm{E}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{E}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda}. \tag{35}$$

Les formules (29) et (33) donnent la valeur du symbole E toutes les fois que $b=0$, car on a nécessairement dans ce cas $a=d=\pm 1$.

Si b est négatif, la règle de composition donnera

$$E\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -E\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \rho^6 E\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix},$$

formule qui réduit la recherche du symbole au cas où le second coefficient b est positif.

495. Écrivons, pour plus de symétrie, a_1, c_1 à la place de b, d. Pour déterminer la valeur de

$$E\begin{pmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix},$$

a_1 étant positif, cherchons le plus grand commun diviseur de a et de a_1; on aura

$$a = \lambda a_1 + a_2, \qquad a_1 = \lambda_1 a_2 + a_3, \qquad \ldots, \qquad a_{m-1} = \lambda_{m-1} a_m,$$

a_1, a_2, ... étant des entiers positifs décroissants, dont le dernier a_m est égal à l'unité (car a, a_1 sont premiers entre eux). Comme on peut, au besoin, remplacer la dernière équation par les deux suivantes

$$a_{m-1} = (\lambda_{m-1} - 1) a_m + a_{m+1}, \qquad a_m = a_{m+1},$$

il est permis de supposer m pair.

Soient $c_2, \ldots, c_m, c_{m+1}$ des entiers déterminés par les relations

$$c = \lambda c_1 + c_2, \quad c_1 = \lambda_1 c_2 + c_3, \quad \ldots, \quad c_{m-1} = \lambda_{m-1} c_m + c_{m+1}.$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned} 1 &= ac_1 - a_1 c = a_2 c_1 - a_1 c_2 \\ &= a_2 c_3 - a_3 c_2 = \ldots = a_m c_{m+1} - c_m a_{m+1}, \end{aligned}$$

a_{m+1} étant égal à zéro et ne figurant dans la formule que pour la symétrie.

D'ailleurs $a_m = 1$; on en déduit donc $c_{m+1} = 1$.

Cela posé, $a_1, a_2, \ldots$ étant positifs, la règle de composition nous donnera successivement

$$E\begin{pmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = \rho^{\lambda}\ E\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$E\begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \rho^{-\lambda_1} E\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix},$$

$$E\begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda_2 & 1 \end{pmatrix} E\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ c_4 & c_3 \end{pmatrix} = \rho^{\lambda_2}\ E\begin{pmatrix} a_4 & a_3 \\ c_4 & c_3 \end{pmatrix}.$$

. . . .

Enfin, comme $a_m = 1$, $a_{m+1} = 0$, $c_{m+1} = 1$,

$$E\begin{pmatrix} a_m & a_{m+1} \\ c_m & c_{m+1} \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_m & 1 \end{pmatrix} = \rho^{c_m}.$$

Multipliant toutes ces équations, il viendra

$$E\begin{pmatrix} a & a_1 \\ c & c_1 \end{pmatrix} = \rho^{\lambda-\lambda_1+\lambda_2-\ldots+c_m}.$$

496. On peut déterminer par un procédé analogue la valeur des symboles $E_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Supposons, en effet, qu'en posant

$$\tau' = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}, \qquad \tau'' = \frac{c' + d'\tau'}{a' + b'\tau'},$$

on ait

$$\varphi_{\alpha'}\tau' = E_{\alpha'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \varphi_\alpha \tau,$$

$$\varphi_{\alpha''}\tau'' = E_{\alpha''}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \varphi_{\alpha'}\tau'.$$

En désignant, comme précédemment, par

$$\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$$

la résultante des substitutions

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

on aura

$$\tau'' = \frac{c'' + d''\tau}{a'' + b''\tau}$$

et

$$\varphi_{\alpha''}\tau'' = \mathrm{E}_{\alpha''}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \mathrm{E}_{\alpha'}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \varphi_{\alpha}\tau,$$

formule qui contient la règle de composition des symboles considérés.

497. Cherchons l'effet des substitutions élémentaires. Considérons d'abord la substitution

$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

laquelle change q en $e^{\pi i} q$. Opérée sur les produits

$$\varphi_1\tau = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \Pi(1 + q^{2n}),$$

$$\varphi_2\tau = q^{-\frac{1}{24}} \Pi(1 - q^{2n-1}),$$

$$\varphi_3\tau = e^{-\frac{\pi i}{8}} q^{-\frac{1}{24}} \Pi(1 + q^{2n-1}),$$

elle les changera respectivement en

$$\rho\varphi_1, \qquad e^{\frac{\pi i}{8}} e^{-\frac{\pi i}{24}} \varphi_3 = \rho\varphi_3, \qquad e^{-\frac{\pi i}{8} - \frac{\pi i}{24}} \varphi_2 = \rho^{-2}\varphi_2.$$

La substitution A_2^2 les change en $\rho^2\varphi_1$, $\rho^{-1}\varphi_2$, $\rho^{-1}\varphi_3$; A_2^{-1} les change en $\rho^{-1}\varphi_1$, $\rho^2\varphi_3$, $\rho^{-1}\varphi_2$.

Passons à la substitution

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme elle appartient à la classe VI (358), elle les changera en

$$\varphi_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\varphi_2\tau,$$

$$\varphi_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\varphi_1\tau,$$

$$\varphi_3\left(-\frac{1}{\tau}\right) = E_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\varphi_3\tau,$$

Or, si l'on suppose τ purement imaginaire, $\frac{1}{\tau}$ le sera également et

$$\varphi_1\tau, \quad \varphi_2\tau, \quad e^{\frac{\pi i}{8}}\varphi_3\tau, \quad \varphi_1\left(-\frac{1}{\tau}\right), \quad \dots$$

seront réels et positifs. Donc

$$E_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad E_3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

le sont aussi; étant des racines $24^{\text{ièmes}}$ de l'unité, ils se réduisent à $+1$. Donc B transforme $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ en $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3$; son carré

$$B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les laisse inaltérées. Enfin B^{-1} les change en $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3$.

Partant de ces résultats, et appliquant la règle de composition donnée plus haut, nous pourrons calculer sans peine l'effet des substitutions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1 = BA_2^{-1}B^{-1}, \quad A_1^2, \quad A_1A_2, \quad A_2A_1, \quad A_1A_2A_1.$$

Tous ces résultats sont consignés dans le Tableau suivant :

1.	φ_1	φ_2.	φ_3.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_2$	$\rho\varphi_1$	$\rho\varphi_3$	$\rho^{-2}\varphi_2$
A_2^2	$\rho^2\varphi_1$	$\rho^{-1}\varphi_2$	$\rho^{-1}\varphi_3$
A_2^{-1}	$\rho^{-1}\varphi_1$	$\rho^2\varphi_3$	$\rho^{-1}\varphi_2$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = B$	φ_2	φ_1	φ_3
B^2	φ_1	φ_2	φ_3
B^{-1}	φ_2	φ_1	φ_3
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1$	$\rho^2\varphi_3$	$\rho^{-1}\varphi_2$	$\rho^{-1}\varphi_1$
A_1^2	$\rho\varphi_1$	$\rho^{-2}\varphi_2$	$\rho\varphi_3$
$A_2 A_1$	$\rho^3\varphi_3$	φ_1	$\rho^{-3}\varphi_2$
$A_1 A_2$	φ_2	φ_3	φ_1
$A_1 A_2 A_1$	$\rho^{-1}\varphi_2$	$\rho^{-1}\varphi_1$	$\rho^2\varphi_3$

498. Soit maintenant T une substitution quelconque de la première classe. On peut (358), par une opération analogue à la recherche du plus grand commun diviseur, la mettre sous l'une des deux formes

$$A_1^{2\lambda} A_2^{2\mu} \ldots A_1^{2\lambda_k} A_2^{2\mu_k}$$

ou

$$B^2 A_1^{2\lambda} A_2^{2\mu} \ldots A_1^{2\lambda_k} A_2^{2\mu_k},$$

et il résulte du Tableau précédent qu'elle reproduira les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 respectivement multipliées par

$$\rho^{\Sigma\lambda+2\Sigma\mu}, \quad \rho^{-2\Sigma\lambda-\Sigma\mu}, \quad \rho^{\Sigma\lambda-\Sigma\mu}.$$

Enfin une substitution S, appartenant à une des cinq autres classes, peut (358) se mettre sous la forme TU, T étant de la première classe, et U l'une des substitutions A_1, A_2, $A_1 A_2$, $A_2 A_1$, $A_1 A_2 A_1$. Connaissant l'effet de ces dernières, on n'a qu'à appliquer la règle de composition.

499. Si l'on suppose les fonctions elliptiques déterminées non par leurs périodes, mais par leurs invariants, les quan-

tités φ_α seront données (443) par les équations binomes

$$\varphi_\alpha^{24} = \frac{16(e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}.$$

On lèvera l'ambiguïté que représente cette formule en précisant comme il suit les arguments des quantités φ_α.

Supposons d'abord qu'on ait choisi pour périodes fondamentales les périodes principales et considérons le cas particulier où e_1, e_2, e_3 sont réels, et tels qu'on ait

$$e_2 < e_3 < e_1.$$

Dans ce cas, q sera réel et positif et les expressions de φ_1, φ_2, $e^{\frac{\pi i}{8}}\varphi_3$ en produits infinis montrent qu'ils seront réels et positifs.

Si le triangle $e_1 e_2 e_3$, à ce moment infiniment aplati, se déforme de manière à prendre une autre position quelconque, l'inspection de la figure montre immédiatement comment varieront les arguments de $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$, $e_3 - e_1$ et, par suite, les arguments des radicaux qui représentent φ_1, φ_2, φ_3.

Enfin, si l'on remplace les périodes principales par d'autres périodes équivalentes, les nouvelles valeurs de φ_1, φ_2, φ_3 se déduiront des anciennes par les formules de transformation données ci-dessus.

500. Posons

$$x_\alpha = \frac{1}{16}\varphi_\alpha^{24}.$$

Les substitutions A_1, A_2 transforment respectivement les trois fonctions x_1, x_2, x_3 en x_3, x_2, x_1 et en x_1, x_3, x_2, et les substitutions A_1^2, A_2^2, B^2 ne les altèrent pas. Elles sont donc simplement permutées entre elles par toute substitution linéaire de déterminant 1, et les substitutions de la première classe les laissent inaltérées.

En éliminant e_α, e_β, e_γ entre les équations

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0,$$

$$J = \frac{-4(e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\gamma + e_\gamma e_\alpha)^3}{(e_\alpha - e_\beta)^2(e_\beta - e_\gamma)^2(e_\gamma - e_\alpha)^2},$$

$$x_\alpha = \frac{(e_\beta - e_\gamma)^2}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)},$$

on obtiendrait une équation

$$F(J, x) = 0,$$

ayant pour racines x_1, x_2, x_3.

Cette équation peut se former plus rapidement comme il suit :

A chaque valeur de x_α correspondent deux systèmes de valeurs des rapports $e_1 : e_2 : e_3$ et, par suite, deux valeurs de J ; réciproquement, à chaque valeur de J correspondent six systèmes de valeurs des rapports $e_1 : e_2 : e_3$, mais ils se déduisent l'un de l'autre en permutant ces trois lettres ; x_α, restant inaltéré par l'échange de e_β et de e_γ, n'aura que trois valeurs.

L'équation cherchée sera donc de la forme

$$AJ^2 + BJ + C = 0,$$

où A, B, C sont des polynomes du troisième degré par rapport à l'inconnue x_α (que nous désignerons plus simplement par x pour abréger l'écriture).

Dans le cas particulier où $e_1 = e_2$, nous aurons

$$J = \infty, \qquad x_1 = x_2 = \infty, \qquad x_3 = 0,$$

donc

$$A = x.$$

Pour

$$e_1 : e_2 : e_3 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

on aurait

$$J = 0, \qquad x_1 = x_2 = x_3 = -1,$$

d'où

$$C = a(x+1)^3,$$

a désignant une constante.

Enfin, pour $e_1 = 0$, $e_3 = -e_2$, on aurait

$$J = 1, \qquad x_1 = -4, \qquad x_2 = x_3 = \frac{1}{2},$$

d'où

$$A + B + C = b(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

b désignant une constante.

L'équation cherchée sera donc de la forme

$$\begin{aligned} F(J, x) = x(J^2 - J) + b(x+4)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 J & \\ - a(x+1)^3(J-1) & = 0. \end{aligned}$$

Pour déterminer les constantes restantes a, b, on pourra poser

$$e_1 = -1 - h, \qquad e_2 = -1 + h, \qquad e_3 = 2,$$

d'où

$$J = \frac{12 + 4h^2}{4h^2(9-h^2)^2} = \frac{1}{27h^2} + \frac{5}{9.27} + \ldots,$$

$$x_1 = \frac{(3-h)^2}{2h(3+h)} = \frac{3}{2h} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}h + \ldots.$$

En substituant ces développements dans l'équation

$$F(J, x_1) = 0,$$

et égalant à zéro les coefficients des termes en $\frac{1}{h^5}$ et $\frac{1}{h^3}$, on obtiendra deux équations linéaires en a et b.

501. On obtient de nouvelles fonctions modulaires par la combinaison des fonctions φ_1, φ_2, φ_3.

Posons, par exemple,

$$\varphi_{\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i}{8}} \frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta}.$$

Les six fonctions ainsi obtenues éprouveront, par les sub-

stitutions A_1, A_2, $A_1 A_2, \ldots$, les altérations consignées au Tableau suivant, où r désigne l'exponentielle $e^{\frac{\pi i}{4}}$.

1.	φ_{12}.	φ_{23}.	φ_{31}.	φ_{21}.	φ_{32}.	φ_{13}.
A_1.......	$r\varphi_{32}$	φ_{21}	$r^{-1}\varphi_{13}$	$r^{-1}\varphi_{23}$	φ_{12}	$r\varphi_{31}$
A_2.......	φ_{13}	$r\varphi_{32}$	$r^{-1}\varphi_{21}$	φ_{31}	$r^{-1}\varphi_{23}$	$r\varphi_{12}$
$A_2 A_1$...	$r\varphi_{31}$	$r\varphi_{12}$	$r^{-2}\varphi_{23}$	$r^{-1}\varphi_{13}$	$r^{-1}\varphi_{21}$	$r^2\varphi_{32}$
$A_1 A_2$....	φ_{23}	φ_{31}	φ_{12}	φ_{32}	φ_{13}	φ_{21}
$A_1 A_2 A_1$..	φ_{21}	$r^{-1}\varphi_{13}$	$r\varphi_{32}$	φ_{12}	$r\varphi_{31}$	$r^{-1}\varphi_{23}$
A_1^2.......	$r\varphi_{12}$	$r^{-1}\varphi_{23}$	φ_{31}	$r^{-1}\varphi_{21}$	$r\varphi_{32}$	φ_{13}
A_2^2.......	$r\varphi_{12}$	φ_{23}	$r^{-1}\varphi_{31}$	$r^{-1}\varphi_{21}$	φ_{32}	$r\varphi_{13}$
B^2.......	φ_{12}	φ_{23}	φ_{31}	φ_{21}	φ_{32}	φ_{13}

502. Ces fonctions peuvent s'exprimer au moyen des invariants par la formule (**422**)

$$\varphi_{\beta\alpha}^8 = -\frac{\varphi_\beta^8}{\varphi_\alpha^8} = \frac{e_\alpha - e_\gamma}{e_\beta - e_\gamma} = k_{\alpha\beta}^2,$$

dont on lèvera l'ambiguïté comme au n° **499**.

Pour former l'équation algébrique qui lie les modules $k_{\alpha\beta}^2$ à J, nous remarquerons que l'un d'eux, k^2 étant donné, les rapports $e_1 : e_2 : e_3$ et, par suite, J seront déterminés sans ambiguïté. D'autre part, à chaque valeur de J correspondent six modules k^2. L'équation sera donc de la forme

$$AJ + B = 0,$$

A et B étant du sixième degré en k^2.

Or, si l'on suppose $e_2 = e_3$, on aura

$$J = \infty, \quad k_{12}^2 = k_{13}^2 = \infty, \quad k_{21}^2 = k_{31}^2 = 0, \quad k_{23}^2 = k_{32}^2 = 1;$$

donc

$$A = k^4(k^2 - 1)^2.$$

Posons d'autre part,

$$e_1 : e_2 : e_3 :: 1 : e^{\frac{2\pi i}{3}} : e^{\frac{4\pi i}{3}};$$

nous aurons

$$J = 0, \quad k_{12}^2 = k_{23}^2 = k_{31}^2 = -e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad k_{21}^2 = k_{32}^2 = k_{13}^2 = -e^{\frac{4\pi i}{3}};$$

d'où

$$B = b\left(k^2 + e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^3 \left(k^2 + e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)^3 = b(k^4 - k^2 + 1)^3,$$

b désignant une constante.

Pour la déterminer, posons $e_1 = 0$, $e_2 = -e_3$; on aura

$$J = 1, \quad k_{23}^2 = -1,$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation,

$$4 + b.3^3 = 0, \quad \text{d'où} \quad b = -\frac{4}{27}.$$

503. Nous pouvons encore signaler les fonctions modulaires

$$\varphi_1^{16} + \varphi_2^{16} + \varphi_3^{16},$$
$$(\varphi_2^8 - \varphi_3^8)(\varphi_3^8 - \varphi_1^8)(\varphi_1^8 - \varphi_2^8),$$

dont la première a pour cube $3^3 . 2^9 J$, et la seconde a pour carré $3^3 . 2^8 (J - 1)$ (443).

VIII. — Division.

504. On a vu (405) que, si n est entier, $\wp nu$ s'exprime rationnellement au moyen de $\wp u$ par la formule

$$(1) \qquad \wp nu - \wp u = -\frac{\psi_{n+1}\psi_{n-1}}{\psi_n^2}.$$

Réciproquement, supposons $\wp nu$ donné, et proposons-nous de déterminer $\wp u$.

A la valeur donnée a de $\wp nu$ correspondent une infinité de valeurs de u; en désignant par u_0 l'une d'elles choisie à volonté, elles seront données par la formule

$$\pm u_0 + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} \qquad (m_1, m_2 \text{ entiers}),$$

et les valeurs correspondantes de l'inconnue $x = \wp u$ seront les suivantes

$$\wp\left(u_0 + \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}\right),$$

car on reproduirait la même suite de valeurs en prenant u_0 avec le signe — et changeant en même temps les signes de m_1, m_2.

Comme l'expression ci-dessus ne change pas si l'on fait varier m_1, m_2 de multiples de n, on n'obtiendra que n^2 racines distinctes. Tel est effectivement le degré de l'équation (1) par rapport à $\wp u$.

Soient, plus généralement,

$$\frac{2\omega_1'}{n} = \frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}, \qquad \frac{2\omega_2'}{n} = \frac{2\nu_1\omega_1 + 2\nu_2\omega_2}{n}$$

deux $n^{\text{ièmes}}$ de périodes, tels que

$$\frac{2m_1\omega_1' + 2m_2\omega_2'}{n}$$

ne puisse être une période que si m_1 et m_2 sont multiples de n (il faut et il suffit pour cela que $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$ soit premier à n). Les quantités

$$x_{m_1 m_2} = \wp\left(u_0 + \frac{2m_1\omega_1' + 2m_2\omega_2'}{n}\right),$$

où m_1, m_2 varient de 0 à $n - 1$, seront toutes distinctes, et représenteront la suite complète des racines de l'équation (1).

En combinant les formules d'addition et de multiplication, on voit immédiatement que chacune des racines $x_{m_1 m_2}$ s'exprime rationnellement en $\wp u_0$, $\wp\frac{2\omega_1'}{n}$, $\wp\frac{2\omega_2'}{n}$, $\wp' u_0$, $\wp'\frac{2\omega_1'}{n}$, $\wp'\frac{2\omega_2'}{n}$. D'ailleurs, en dérivant l'équation (1), on trouve un résultat de la forme

$$n\wp' nu = R(\wp u)\wp' u,$$

R étant une fonction rationnelle. Donc $p'u_0$ est rationnel en pu_0 et $p'nu_0$, et $x_{m_1 m_2}$ s'exprimera rationnellement au moyen de $x_{00} = p u_0, p\frac{2\omega'_1}{n}, p\frac{2\omega'_2}{n}, p' nu_0, p'\frac{2\omega'_2}{n}, p'\frac{2\omega'_1}{n}$.

505. Posons, pour abréger,

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}.$$

La quantité

$$\Sigma_{m_1}\Sigma_{m_2}\alpha^{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2} x_{m_1 m_2}$$

$$(m_1 = 0, 1, \ldots, n-1;\ m_2 = 0, 1, \ldots, n-1)$$

pourra, d'après ce qui précède, s'exprimer rationnellement en $x_{00}, p\frac{2\omega'_1}{n}, p\frac{2\omega'_2}{n}, p' nu_0, p'\frac{2\omega'_1}{n}, p'\frac{2\omega'_2}{n}, \alpha$. Représentons-la par $P_{\mu_1\mu_2}(x_{00})$.

Changeons dans l'égalité

$$(2)\qquad P_{\mu_1\mu_2}(x_{00}) = \Sigma_{m_1}\Sigma_{m_2}\alpha^{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2} x_{m_1 m_2},$$

u_0 en $u_0 + \frac{2\lambda_1\omega'_1 + 2\lambda_2\omega'_2}{n}$, et changeons en même temps les indices de sommation m_1, m_2 en $m_1 - \lambda_1$, $m_2 - \lambda_2$; il viendra

$$(3)\qquad \begin{aligned} P_{\mu_1\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2}) &= \Sigma_{m_1}\Sigma_{m}\ \alpha^{\mu_1(m_1-\lambda_1)+\mu_2(m_2-\lambda_2)} x_{m_1 m_2} \\ &= \alpha^{-\mu_1\lambda_1 - \mu_2\lambda_2} P_{\mu_1\mu_2}(x_{00}). \end{aligned}$$

On en déduit

$$P^n_{\mu_1\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2}) = P^n_{\mu_1\mu_2}(x_{00}) = \frac{1}{n^2}\Sigma_{\lambda_1}\Sigma_{\lambda_2} P^n_{\mu_1\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2}).$$

Cette dernière expression, étant symétrique par rapport aux racines de l'équation en x, s'exprime rationnellement par les coefficients de cette équation et les constantes α, $p\frac{2\omega'_1}{n}, p\frac{2\omega'_2}{n}, p' nu_0, p'\frac{2\omega'_1}{n}, p'\frac{2\omega'_2}{n}$ que renferment ses coefficients. Désignons-la par $A_{\mu_1\mu_2}$.

On aura, en particulier,

$$P^n_{10}(x_{00}) = A_{10}, \qquad P^n_{01}(x_{00}) = A_{01};$$

d'où

$$P_{10}(x_{00}) = A_{10}^{\frac{1}{n}}, \qquad P_{01}(x_{00}) = A_{01}^{\frac{1}{n}}.$$

L'équation (3) donne, d'autre part,

$$\begin{aligned}
&P_{\mu_1\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2})\,P_{10}^{-\mu_1}(x_{\lambda_1\lambda_2})\,P_{01}^{-\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2})\\
&\quad = P_{\mu_1\mu_2}(x_{00})\,P_{10}^{-\mu_1}(x_{00})\,P_{01}^{-\mu_2}(x_{00})\\
&\quad = \frac{1}{n^2}\Sigma_{\lambda_1}\Sigma_{\lambda_2}P_{\mu_1\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2})\,P_{10}^{-\mu_1}(x_{\lambda_1\lambda_2})\,P_{01}^{-\mu_2}(x_{\lambda_1\lambda_2}) = B_{\mu_1\mu_2},
\end{aligned}$$

$B_{\mu_1\mu_2}$ étant encore une fonction rationnelle des coefficients de l'équation en x et des constantes α, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$, $p' nu_0$, $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$. On en déduit

$$P_{\mu_1\mu_2}(x_{00}) = A_{10}^{\frac{\mu_1}{n}}A_{01}^{\frac{\mu_2}{n}}B_{\mu_1\mu_2}.$$

Les quantités $P_{\mu_1\mu_2}(x_{00})$ étant ainsi déterminées, on en déduira immédiatement les racines $x_{\lambda_1\lambda_2}$. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\alpha^{-\mu_1\lambda_1-\mu_2\lambda_2}P_{\mu_1\mu_2}(x_{00})\\
&\quad = \Sigma_{m_1}\Sigma_{m_2}x_{m_1m_2}\big(\Sigma_{\mu_1}\alpha^{\mu_1(m_1-\lambda_1)}\big)\big(\Sigma_{\mu_2}\alpha^{\mu_2(m_2-\lambda_2)}\big).
\end{aligned}$$

Or, si $m_1 \gtrless \lambda_1$, on aura

$$\Sigma_{\mu_1}\alpha^{\mu_1(m_1-\lambda_1)} = \frac{\alpha^{n(m_1-\lambda_1)}-1}{\alpha^{m_1-\lambda_1}-1} = 0,$$

et, si $m_1 = \lambda_1$, cette somme est égale à n. De même, pour le second facteur $\Sigma_{\mu_2}\alpha^{\mu_2(m_2-\lambda_2)}$, suivant qu'on a $m_2 \gtrless \lambda_2$ ou $m_2 = \lambda_2$. Le second membre se réduit donc à $n^2 x_{\lambda_1\lambda_2}$, et l'on aura

$$\begin{aligned}
(4)\qquad x_{\lambda_1\lambda_2} &= \frac{1}{n^2}\Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\alpha^{-\mu_1\lambda_1-\mu_2\lambda_2}P_{\mu_1\mu_2}(x_{00})\\
&= \frac{1}{n^2}\Sigma_{\mu_1}\Sigma_{\mu_2}\Big(\alpha^{-\lambda_1}A_{10}^{\frac{1}{n}}\Big)^{\mu_1}\Big(\alpha^{-\lambda_2}A_{01}^{\frac{1}{n}}\Big)^{\mu_2}B_{\mu_1\mu_2}.
\end{aligned}$$

Il faudra donc, pour résoudre l'équation proposée : 1° calculer les quantités auxiliaires a, $\mathrm{p}\frac{2\omega'_1}{n}$, $\mathrm{p}\frac{2\omega'_2}{n}$, $\mathrm{p}' nu_0$, $\mathrm{p}'\frac{2\omega'_1}{n}$, $\mathrm{p}\frac{2\omega'_2}{n}$; 2° déterminer par des opérations rationnelles, les quantités A_{10}, A_{01}, $B_{\mu_1\mu_2}$; 3° extraire la racine $n^{\text{ième}}$ de A_{10} et de A_{01}. Les racines $x_{\lambda_1\lambda_2}$ seront données par la formule (4) ; et l'on passera de l'une à l'autre en changeant la détermination des radicaux $A_{10}^{\frac{1}{n}}$ $A_{01}^{\frac{1}{n}}$.

506. Dans la solution précédente, u_0 désigne l'une quelconque des solutions de l'équation

$$\mathrm{p}\, nu = a,$$

et $\frac{2\omega'_1}{n}$, $\frac{2\omega'_2}{n}$ sont deux $n^{\text{ièmes}}$ de périodes

$$\frac{2\omega'_1}{n} = \frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}, \qquad \frac{2\omega'_2}{n} = \frac{2\nu_1\omega_1 + 2\nu_2\omega_2}{n},$$

assujettis à celle seule condition que $\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1$ soit premier à n ; $\mathrm{p}\, nu_0 = a$ est donc une des données de la question, et $\mathrm{p}' nu_0$ sera fourni par la formule

$$\mathrm{p}' nu_0 = \sqrt{4a^3 - g_2 a - g_3}.$$

Lorsqu'on aura déterminé $\mathrm{p}\frac{2\omega'_1}{n}$, $\mathrm{p}\frac{2\omega'_2}{n}$, on aura de même

$$\mathrm{p}'\frac{2\omega'_1}{n} = \sqrt{4\mathrm{p}^3\frac{2\omega'_1}{n} - g_2\mathrm{p}\frac{2\omega'_1}{n} - g_3},$$

$$\mathrm{p}'\frac{2\omega'_2}{n} = \sqrt{4\mathrm{p}^3\frac{2\omega'_2}{n} - g_2\mathrm{p}\frac{2\omega'_2}{n} - g_3}.$$

Les signes de ces trois radicaux peuvent être choisis à volonté, car on ne cesse pas de satisfaire aux conditions imposées à u_0, $\frac{2\omega'_1}{n}$, $\frac{2\omega'_2}{n}$ en changeant leur signe, ce qui

n'altère pas les quantités $p\,u_0$, $p\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\,\frac{2\omega'_2}{n}$, mais change le signe des dérivées $p'\,u_0$, $p'\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\,\frac{2\omega'_2}{n}$.

507. Tout revient donc à calculer les deux constantes $p\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\,\frac{2\omega'_2}{n}$. Ces quantités sont (403) des racines de l'équation

$$(5) \qquad 0 = \psi_n^2(y) = n^2 \prod \left(y - p\,\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} \right),$$

de degré $n^2 - 1$, et dont les coefficients sont des polynomes entiers en g_2, g_3. Mais ce couple de racines n'est pas arbitraire, car il faut que

$$\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}$$

ne puisse se réduire à une période que si m_1, m_2 sont multiples de n, ou, ce qui revient au même, que deux expressions

$$p\,\frac{2m'_1\omega'_1 + 2m'_2\omega'_2}{n}, \qquad p\,\frac{2m''_1\omega'_1 + 2m''_2\omega'_2}{n},$$

où m'_1, m'_2, m''_1, m''_2 varient de 0 à $n-1$, ne puissent être égales que si l'on a

$$m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m'_2 + m''_2 \equiv 0 \qquad (\bmod n).$$

Il sera facile de déterminer s'il en est ainsi pour un couple de racines $p\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\,\frac{2\omega'_2}{n}$ supposé connu. En effet, $p'\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\,\frac{2\omega'_2}{n}$ seront donnés en fonction de $p\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\,\frac{2\omega'_2}{n}$ par des radicaux carrés, dont nous pouvons prendre le signe à volonté. Les formules d'addition et de multiplication nous permettront dès lors de déterminer, en fonction rationnelle de $p\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\,\frac{2\omega'_2}{n}$, $p'\,\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\,\frac{2\omega'_2}{n}$, chacune des quantités $p\,\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}$ $\left(\text{et aussi les dérivées } p'\,\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}\right)$,

et par suite de reconnaître si deux de ces quantités sont ou non égales.

508. Soient

$$y_{m_1 m_2} = \wp \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$$

une des racines de l'équation (5), d le plus grand commun diviseur de m_1, m_2, n; posons

$$m_1 = d\mu_1, \qquad m_2 = d\mu_2, \qquad n = d\nu,$$

$$\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n} = \frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{\nu}$$

sera un $\nu^{\text{ième}}$ de période, et nous dirons que la racine $y_{m_1 m_2}$ appartient au diviseur ν.

Désignons par χ_ν^2 le produit des facteurs linéaires $y - y_{m_1 m_2}$ correspondant aux racines qui appartiennent au diviseur ν; on aura évidemment

$$\psi_n^2 = n^2 \Pi \chi_\nu^2,$$

le produit s'étendant à tous les diviseurs ν de n, y compris ce nombre lui-même, mais l'unité exceptée.

Les polynomes χ_ν^2 ont leurs coefficients rationnels et entiers en g_2, g_3. En effet, décomposons ν en facteurs premiers; soit $\nu = a^\alpha b^\beta \ldots$. L'équation

$$\psi_\nu^2 = 0$$

aura évidemment pour racines celles des racines $y_{m_1 m_2}$ qui appartiennent à ν ou à l'un de ses diviseurs. Ces dernières appartiendront à l'un des nombres $\frac{\nu}{a}$, $\frac{\nu}{b}$, ... ou à l'un de ses diviseurs. Elles satisferont donc à l'une au moins des équations

$$\psi_{\frac{\nu}{a}}^2 = 0, \qquad \psi_{\frac{\nu}{b}}^2 = 0, \qquad \ldots.$$

Si donc on détermine : 1° le plus grand commun diviseur

de ψ_ν^2 avec chacun des polynomes $\psi_{\frac{\nu}{a}}^2$, $\psi_{\frac{\nu}{b}}^2$, ...; 2° le plus petit multiple M de ces plus grands communs diviseurs ; enfin, si l'on divise ψ_ν^2 par M, on obtiendra un polynome n'ayant plus pour racines que celles qui appartiennent à ν ; il sera donc égal à χ_ν^2 à un facteur numérique près. D'ailleurs, ψ_ν^2, $\psi_{\frac{\nu}{a}}^2$,... ayant pour coefficients des polynomes entiers en g_2, g_3, dont le premier est purement numérique, $\frac{\psi_\nu^2}{M}$ jouira évidemment de la même propriété.

509. Cherchons le degré du polynome χ_ν^2. Il a pour racines les quantités

$$p\,\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{\nu},$$

μ_1, μ_2 étant $\gtreqless 0$ mais $< \nu$, et μ_1, μ_2, ν n'ayant pas de facteur commun.

Les entiers $\frac{\nu}{a^\alpha}$, $\frac{\nu}{b^\beta}$, ... étant premiers entre eux, on pourra déterminer des entiers A, B, ... tels qu'on ait

$$\frac{\nu}{a^\alpha}A+\frac{\nu}{b^\beta}B+\ldots=\mu_1,$$

d'où

$$\frac{\mu_1}{\nu}=\frac{A}{a^\alpha}+\frac{B}{b^\beta}+\ldots=\frac{A_1}{a^\alpha}+\frac{B_1}{b^\beta}+\ldots+k_1,$$

A_1 désignant un entier $< a^\alpha$ et non négatif ; B_1 un entier $< b^\beta$ et non négatif, etc., k_1 un entier. On pourra mettre $\frac{\mu_2}{\nu}$ sous une forme analogue

$$\frac{\mu_2}{\nu}=\frac{A_2}{a^\alpha}+\frac{B_2}{b^\beta}+\ldots+k_2.$$

Pour que μ_1, μ_2, ν n'aient pas de facteur commun, il faut et il suffit que μ_1 et μ_2 ne soient simultanément divisibles ni par a, ni par b, ... ou, ce qui revient au même, que A_1, A_2

ne soient pas tous deux divisibles par a, ni B_1, B_2 tous deux divisibles par b, etc.

Or A_1, A_2 sont chacun susceptibles des a^α valeurs $0, 1, \ldots, a^\alpha - 1$, ce qui donne $a^{2\alpha}$ combinaisons. Celles où A_1, A_2 sont tous deux divisibles par a sont au nombre de $a^{2\alpha-2}$. En les excluant, il restera

$$a^{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

combinaisons admissibles.

Le nombre des combinaisons admissibles pour B_1, B_2 sera de même

$$b^{2\beta}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right),$$

etc. Le nombre des valeurs admissibles pour μ_1, μ_2 (ou le degré du polynome χ_ν^2) sera donc

$$a^{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) b^{2\beta}\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) \cdots = \nu^2 \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)\cdots.$$

Si n est pair, dans la suite des facteurs χ_ν^2 figurera le facteur

$$\chi_2^2 = (y - e_1)(y - e_2)(y - e_3) = y^3 - \frac{1}{4} g_2 y - \frac{1}{4} g_3$$

correspondant aux demi-périodes. Les autres polynomes χ_ν^2, où $\nu > 2$, sont des carrés parfaits; car à chaque racine $y_{m'_1 m'_2}$ appartenant au diviseur ν, on peut associer une autre racine $y_{m''_2 m''_2}$ par la relation

$$m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m'_2 + m''_2 \equiv 0 \qquad (\bmod n),$$

et ces deux racines, évidemment égales, appartiennent au même diviseur.

510. La résolution de l'équation $\chi_n^2 = 0$ entraîne celle de l'équation $\psi_n^2 = 0$.

Soit, en effet, $p\frac{2\omega'_1}{n}$, $p\frac{2\omega'_2}{n}$ un couple de racines de l'équation $\chi_n^2 = 0$; nous pourrons, après avoir choisi à volonté les

signes des radicaux $p'\frac{2\omega'_1}{n}$, $p'\frac{2\omega'_2}{n}$, calculer par des opérations rationnelles les quantités

$$p\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}, \quad p'\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n},$$

où m_1, m_2 varient de o à $n - 1$. Si les quantités

$$p\frac{2m_1\omega'_1 + 2m_2\omega'_2}{n}$$

sont toujours distinctes lorsque la somme de leurs arguments n'est pas une période, elles reproduiront toute la suite des racines $y_{m_1 m_2}$ de $\psi_n^2 = 0$.

Si la condition précédente n'était pas satisfaite, on essaierait un autre couple de racines; on est d'ailleurs certain qu'il en existe qui conduisent au résultat désiré.

511. Si l'on décompose n d'une façon quelconque en facteurs q, r, ... premiers entre eux, on pourra remplacer la résolution de l'équation $\chi_n^2 = 0$ par celle des équations

$$\chi_q^2 = 0, \quad \chi_r^2 = 0, \quad \ldots.$$

Car cette résolution, entraînant celle des équations

$$\psi_q^2 = 0, \quad \psi_r^2 = 0, \quad \ldots,$$

fait connaître les valeurs de pu et de $p'u$ pour tous les arguments qui sont des $q^{\text{ièmes}}$ de périodes, des $r^{\text{ièmes}}$ de périodes, etc.

Cela posé, soit

$$\frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{n}$$

un $n^{\text{ième}}$ de période; nous pourrons déterminer des entiers $\mu_1, \mu_2, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots; k_1, k_2$ tels qu'on ait

$$\frac{m_1}{n} = \frac{\mu_1}{q} + \frac{\nu_1}{r} + \ldots + k_1,$$
$$\frac{m_2}{n} = \frac{\mu_2}{q} + \frac{\nu_2}{r} + \ldots + k_2,$$

d'où

$$\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}=\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{q}+\frac{2\nu_1\omega_1+2\nu_2\omega_2}{r}+\ldots;$$

et comme on connaît les valeurs de pu, $p'u$ pour les arguments

$$\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{q},\quad \frac{2\nu_1\omega_1+2\nu_2\omega_2}{r},\quad \ldots,$$

qui sont des $q^{\text{ièmes}}$, des $r^{\text{ièmes}}$, etc. de périodes, on en déduira par la formule d'addition les valeurs de

$$p\,\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n},\quad p'\,\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{n}.$$

Si donc $n=a^\alpha b^\beta\ldots$, a, b,... étant premiers, la résolution de $\psi_n^2=0$ se ramènera à celle des équations

$$\chi_{a^\alpha}^2=0,\quad \chi_{b^\beta}^2=0,\quad \ldots.$$

512. Considérons donc une de celles-ci, telle que

$$\chi_{a^\alpha}^2=0,$$

et supposons $\alpha>1$. Ses racines sont les quantités

$$p\,\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{a^\alpha},$$

où m_1, m_2 ne sont pas tous deux divisibles par a. Soient respectivement μ_1, μ_2 les restes de leur division par $a^{\alpha-1}$; ils ne seront pas nuls à la fois, et nous pourrons écrire

$$\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{a^\alpha}=\frac{1}{a}\left(\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}}+\text{période}\right).$$

Considérons celles des racines $p\,\frac{2m_1\omega_1+2m_2\omega_2}{a^\alpha}$ pour lesquelles μ_1, μ_2 ont la même valeur. On pourra, en posant dans les formules (4),

$$n=a,\qquad u_0=\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}},$$

les exprimer en fonction de

$$p\,\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}},\quad p'\,\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{a^{\alpha-1}},$$

$$p\,\frac{2\omega_1}{a},\quad p'\,\frac{2\omega_1}{a},\quad p\,\frac{2\omega_2}{a},\quad p'\,\frac{2\omega_2}{a}.$$

Mais toutes ces quantités auxiliaires seront connues (au signe près des dérivées, qui est arbitraire), si l'on suppose résolues les équations

$$\psi_a^2=0,\qquad \psi_{a^{\alpha-1}}^2=0.$$

La résolution de cette dernière se ramènera de même à celle de

$$\psi_a^2=0,\qquad \text{et}\qquad \psi_{a^{\alpha-2}}^2=0.$$

La résolution de l'équation

$$\psi_n^2=0,\qquad \text{où}\qquad n=a^\alpha b^\beta\ldots,$$

se ramène donc finalement :

1° A celle des équations

$$\psi_a^2=0,\qquad \psi_b^2=0,\qquad \ldots;$$

2° A des extractions de racines.

513. On peut obtenir une réduction ultérieure du problème de la manière suivante :

Soit

$$\frac{w}{n}=\frac{2\mu_1\omega_1+2\mu_2\omega_2}{n}$$

un $n^{\text{ième}}$ de période *propre*, c'est-à-dire tel que μ_1, μ_2, n n'aient pas de facteur commun; toutes les quantités de la forme

$$m\,\frac{w}{n}+\text{période},$$

où m est premier à n, seront également des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes propres. Nous les réunirons dans un même groupe.

Un autre $n^{\text{ième}}$ de période propre, $\frac{\omega'}{n}$, donnera de même naissance à un nouveau groupe

$$m\frac{\omega'}{n} + \text{période}.$$

Ces deux groupes n'auront aucun $n^{\text{ième}}$ de période propre commun, s'ils ne sont pas identiques. Supposons, en effet, qu'on ait

$$m\frac{\omega}{n} \equiv m'\frac{\omega'}{n}.$$

Soit μ un entier quelconque; on pourra déterminer un nombre λ satisfaisant à la congruence

$$\lambda m \equiv \mu \pmod{n}.$$

On aura dès lors

$$\mu\frac{\omega}{n} \equiv \lambda m\frac{\omega}{n} \equiv \lambda m'\frac{\omega'}{n};$$

donc tout $n^{\text{ième}}$ de période du premier groupe est contenu dans le second. La réciproque se démontre de même.

On peut donc répartir les $n^{\text{ièmes}}$ de périodes propres en groupes, chacun d'eux étant caractérisé par l'un quelconque des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes qu'il contient.

Le nombre total des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes non équivalents entre eux est, comme nous l'avons vu,

$$n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\cdots.$$

Ceux qui sont contenus dans un groupe

$$\frac{\omega}{n}, \quad \ldots, \quad m\frac{\omega}{n}, \quad \ldots + \text{période}$$

s'obtiendront évidemment en donnant à m la suite des valeurs premières à n et $< n$. Leur nombre M sera égal à

$$n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots.$$

Le nombre N des groupes sera donc

$$n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdots$$

En particulier, si n est premier, on aura $n+1$ groupes ; et l'on pourra choisir pour les caractériser les $n^{\text{ièmes}}$ de périodes ci-dessous

$$\frac{w}{n}=\frac{2\omega_1}{n},\qquad \frac{w_k}{n}=\frac{2k\omega_1+2\omega_2}{n}\qquad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

ou, plus généralement,

$$\frac{w}{n}=\frac{2\omega_1}{n},\qquad \frac{w_k}{n}=\frac{2\lambda k\omega_1+2\omega_2}{n}\qquad (k=0,1,\ldots,n-1),$$

λ étant un entier fixe premier à n et arbitrairement choisi. Ces $n^{\text{ièmes}}$ de périodes appartiennent, en effet, à des groupes différents ; car on ne peut avoir

$$\frac{2m\omega_1}{n}\equiv\frac{2\lambda k\omega_1+2\omega_2}{n},$$

et la relation

$$m\frac{2\lambda k\omega_1+2\omega_2}{n}\equiv\frac{2\lambda k'\omega_1+2\omega_2}{n}$$

donnerait

$$m\equiv 1,\qquad 2\lambda k\equiv 2\lambda k'\qquad (\operatorname{mod} n),$$

d'où

$$k=k'.$$

514. Soient $\frac{w}{n}, \frac{w'}{n}, \ldots$ des $n^{\text{ièmes}}$ de périodes choisis à volonté dans chaque groupe pour le caractériser. Tout $n^{\text{ième}}$ de période propre sera équivalent à l'un de ceux-ci

$$m\frac{w}{n},\quad m\frac{w'}{n},\quad \ldots,$$

où m prendra la suite des valeurs premières à n et moindres que n.

Les quantités

$$\frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}$$

(où μ_1, μ_2 sont $\geqq 0$, mais $< n$, et μ_1, μ_2, n n'ont pas de facteur commun) forment également un système complet de $n^{\text{ièmes}}$ de périodes propres non équivalentes entre elles. Elles seront donc équivalentes, à l'ordre près, aux quantités précédentes. Les racines $p\frac{2\mu_1\omega_1 + 2\mu_2\omega_2}{n}$ de l'équation $\chi_n^2 = 0$ seront donc les quantités

$$pm\frac{w}{n}, \quad pm\frac{w'}{n}, \quad \ldots.$$

Nous les répartirons en groupes en réunissant ensemble celles dont les arguments sont multiples d'une même quantité $\frac{w}{n}$.

515. Soit F une fonction rationnelle de

$$p\frac{w}{n}, \quad p\frac{2w}{n}, \quad \ldots, \quad p\frac{(n-1)w}{n}.$$

Toutes ces quantités peuvent s'exprimer rationnellement en $p\frac{w}{n}$, g_2, g_3; on pourra donc écrire

$$F = \varphi\left(p\frac{w}{n}\right),$$

φ désignant une fonction rationnelle en $p\frac{w}{n}$, g_2, g_3.

Si l'on change $\frac{w}{n}$ en $m\frac{w}{n}$, m étant premier à n, le système des quantités $p\frac{w}{n}, \ldots, p\frac{(n-1)w}{n}$ se reproduira. Celles de ces racines qui appartiennent à un même diviseur ν seront seulement permutées entre elles. Si donc nous admettons qu'elles figurent symétriquement dans F, cette fonction ne sera pas changée; on aura donc

$$F = \varphi\left(p\frac{w}{n}\right) = \ldots = \varphi\left(p\frac{mw}{n}\right) = \ldots = \frac{1}{M}\sum_m \varphi\left(p\frac{mw}{n}\right).$$

Soient $F', \ldots$ les fonctions analogues à F, formées avec les racines des autres groupes; on aura de même

$$F' = \frac{1}{M} \sum_m \varphi\left(p \frac{m\omega'}{n}\right), \quad \ldots$$

et, par suite,

$$F + F' + \ldots = \frac{1}{M} \sum \varphi(y),$$

la sommation s'étendant à toutes les racines y de l'équation $\chi_n^2 = 0$.

Le second membre, étant une fonction symétrique de ces racines, pourra s'exprimer rationnellement au moyen de g_2, g_3 et des coefficients de l'équation, qui sont eux-mêmes rationnels en g_2 et g_3.

D'ailleurs F^2, $F^3, \ldots$ sont comme F des fonctions symétriques; on pourra donc exprimer aussi rationnellement les quantités

$$F^2 + F'^2 + \ldots, \quad F^3 + F'^3 + \ldots, \quad \ldots$$

et, par suite, tous les coefficients de l'équation de degré N,

$$(6) \qquad (z - F)(z - F')\ldots = 0,$$

dont $F, F', \ldots$ sont les racines.

516. Supposons que la fonction F ait été choisie de telle sorte que les quantités $F, F', \ldots$ aient des valeurs numériques distinctes. Toute fonction symétrique Φ des racines d'un même groupe pourra s'exprimer rationnellement au moyen de $F, F', \ldots$ et des coefficients de χ_n^2.

En effet, les fonctions $\Phi, \Phi F, \Phi F^2, \ldots$ sont encore symétriques par rapport aux racines qui appartiennent à un même diviseur; on aura donc

$$\Phi + \Phi' + \ldots = R,$$
$$\Phi F + \Phi' F' + \ldots = R_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$R, R_1, \ldots$ étant rationnels. Ces équations linéaires, dont le

déterminant n'est pas nul (car il est égal au produit des différences $F - F'$), détermineront $\Phi, \Phi', \dots$.

Donc, lorsqu'on aura résolu l'équation en z, on pourra, par des opérations rationnelles, calculer les coefficients de chacune des équations

$$\left(y - \wp\frac{w}{n}\right)\cdots\left(y - \wp\frac{mw}{n}\right)\cdots = 0,$$

$$\left(y - \wp\frac{w'}{n}\right)\cdots\left(y - \wp\frac{mw'}{n}\right)\cdots = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

dont dépendent les racines de chaque groupe.

517. Ces dernières équations peuvent se résoudre par des extractions de racines. Pour plus de simplicité, nous supposerons n premier; cas auquel les autres peuvent se réduire, ainsi que nous l'avons vu.

Soit, en effet, g une *racine primitive* de n, c'est-à-dire un entier tel que les nombres $1, g, g^2, \dots, g^{n-2}$, divisés par n, donnent des restes tous différents, reproduisant, à l'ordre près, tous les nombres de la suite $1, 2, \dots, n-1$, (g^{n-1} donnant d'ailleurs l'unité pour reste, d'après un théorème de *Fermat*). A chaque entier m', positif et $< n$, correspond un exposant r non négatif et $< n-1$, tel qu'on ait

$$m' \equiv g^r \equiv g^{r+k(n-1)} \pmod{n}.$$

Les racines $\wp\frac{w}{n}, \dots, \wp\frac{mw}{n}$ pourront donc, en les rangeant dans un ordre convenable, se mettre sous la forme

$$\wp\frac{w}{n}, \quad \wp\left(g\frac{w}{n}\right), \quad \dots, \quad \wp\left(g^r\frac{w}{n}\right), \quad \dots, \quad r = 0, 1, \dots, n-2.$$

En donnant à r les valeurs suivantes $n-1, n, \dots$, les mêmes racines se reproduiraient périodiquement.

Posons

$$\beta = e^{\frac{2\pi i}{n-1}}$$

et considérons l'expression

$$\Sigma_r \beta^{\mu r} \wp\left(g^r \frac{w}{n}\right), \qquad r \equiv 0, 1, \ldots, n-2 \qquad [\bmod(n-1).]$$

Ce sera une fonction rationnelle de $\wp \frac{w}{n}$ et de β; désignons-la par $P_\mu\left(\wp \frac{w}{n}\right)$.

Dans l'équation

$$P_\mu\left(\wp \frac{w}{n}\right) = \Sigma_r \beta^{\mu r} \wp\left(g^r \frac{w}{n}\right)$$

changeons w en $g^\lambda w$ et changeons en même temps l'indice de sommation r en $r - \lambda$, il viendra

$$P_\mu\left(\wp \frac{g^\lambda w}{n}\right) = \beta^{-\lambda\mu} P_\mu\left(\wp \frac{w}{n}\right).$$

Les fonctions

$$\left[P_1\left(\wp \frac{w}{n}\right)\right]^{n-1} = G\left[\wp\left(\frac{w}{n}\right)\right],$$

$$\left[P_1\left(\wp \frac{w}{n}\right)\right]^{-\mu} P_\mu\left(\wp \frac{w}{n}\right) = H_\mu\left(\wp \frac{w}{n}\right)$$

resteront donc inaltérées, et l'on aura

$$G\left(\wp \frac{w}{n}\right) = G\left(\wp \frac{g^\lambda w}{n}\right) = \frac{G\left(\wp \frac{w}{n}\right) + \ldots + G\left(\wp \frac{g^\lambda w}{n}\right) + \ldots}{n-1}.$$

Cette quantité, symétrique par rapport aux racines de l'équation

$$\left(y - \wp \frac{w}{n}\right) \cdots \left(y - \wp \frac{g^{n-2} w}{n}\right) = 0,$$

pourra s'exprimer rationnellement par ses coefficients. Il en sera de même pour les fonctions

$$H_\mu\left(\wp \frac{w}{n}\right).$$

Désignons par G, H_μ les expressions ainsi trouvées, il

viendra

$$P_1\left(p\frac{w}{n}\right) = G^{\frac{1}{n-1}},$$

$$P_\mu\left(p\frac{w}{n}\right) = H_\mu G^{\frac{\mu}{n-1}}.$$

Cela posé, on aura

$$\Sigma_\mu \beta^{-\lambda\mu} P_\mu\left(p\frac{w}{n}\right) = \Sigma_r \Sigma_\mu \beta^{\mu(r-\lambda)}\, p\frac{g^r w}{n}.$$

Mais $\Sigma_\mu \beta^{\mu(r-\lambda)}$ est égal à o si $r \gtrless \lambda$, à $n-1$ si $r=\lambda$. Le second membre se réduit donc à

$$(n-1)\,p\frac{g^\lambda w}{n},$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}(n-1)\,p\frac{g^\lambda w}{n} &= \Sigma_\mu \beta^{-\lambda\mu} P_\mu\left(p\frac{w}{n}\right)\\ &= H_0 + \beta^{-\lambda} G^{\frac{1}{n-1}} + \beta^{-2\lambda} G^{\frac{2}{n-1}} H_2 + \ldots.\end{aligned}$$

Cette formule donnera toutes les racines, qui se déduisent d'ailleurs les unes des autres en changeant la détermination du radical $G^{\frac{1}{n-1}}$.

Le problème de la division des périodes serait donc résolu si l'on savait trouver les racines de l'équation auxiliaire (6) dont dépend la fonction symétrique F. Cette équation a reçu le nom d'*équation modulaire*. En variant le choix de la fonction F, on obtiendrait une infinité de semblables équations.

IX. — Transformation.

518. Pour que deux fonctions elliptiques $p(u, \omega_1', \omega_2')$ et $p(u, \omega_1'', \omega_2'')$ soient liées par une équation algébrique, il faut

et il suffit (366) que leurs périodes soient liées par deux relations

$$(1)\qquad \begin{cases} a'\omega'_1 + b'\omega'_2 = a''\omega''_1 + b''\omega''_2, \\ c'\omega'_1 + d'\omega'_2 = c''\omega''_1 + d''\omega''_2. \end{cases}$$

Posons

$$(2)\qquad \begin{cases} \Omega_1 = a'\omega'_1 + b'\omega'_2, \\ \Omega_2 = c'\omega'_1 + d'\omega'_2. \end{cases}$$

Il existera une relation algébrique entre $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$ et $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$, et une relation analogue entre $p(u, \omega''_1, \omega''_2)$ et $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$. L'élimination de cette dernière fonction donnera la relation entre $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$ et $p(u, \omega''_1, \omega''_2)$. Nous pouvons donc nous borner à chercher la relation entre deux fonctions dont les périodes sont liées par la relation (2).

Comme la fonction pu ne change pas si l'on change le signe d'une de ses périodes, il est permis d'admettre que $\frac{\omega'_2}{\omega'_1}$ et $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ ont leur partie imaginaire positive. Dans ce cas, $a'd' - b'c'$ sera un entier positif. Ce déterminant se nomme le *degré* de la *transformation* (2).

Soit r le plus grand commun diviseur de a', b', c', d'. La transformation (2) est la résultante des deux suivantes

$$\Omega'_1 = \frac{a'}{r}\omega'_1 + \frac{b'}{r}\omega'_2, \qquad \Omega'_2 = \frac{c'}{r}\omega'_1 + \frac{d'}{r}\omega'_2$$

et

$$\Omega_1 = r\Omega'_1, \qquad \Omega_2 = r\Omega'_2,$$

dont la première relie $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$ à $p(u, \Omega'_1, \Omega'_2)$ et la seconde $p(u, \Omega'_1, \Omega'_2)$ à $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$. Mais on a

$$p(u, \Omega'_1, \Omega'_2) = r^2 p(ru, r\Omega'_1, r\Omega'_2) = r^2 p(ru, \Omega_1, \Omega_2).$$

D'ailleurs la théorie de la multiplication nous a donné, sous forme explicite, la relation entre cette quantité et $p(u, \Omega_1, \Omega_2)$. Nous n'avons donc plus qu'à chercher la relation entre $p(u, \Omega'_1, \Omega'_2)$ et $p(u, \omega'_1, \omega'_2)$.

Le problème général de la transformation est ainsi réduit

au cas des transformations *propres*, où les coefficients a', b', c', d' n'ont pas de facteur commun.

519. Une transformation propre

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

de degré $a'd' - b'c' = n$ est (354) la résultante de trois autres

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$

dont la première et la dernière sont de déterminant 1. Posons

$$\bar{\omega}_1 = \alpha\omega'_1 + \beta\omega'_2, \qquad \bar{\omega}_2 = \gamma\omega'_1 + \delta\omega'_2$$

et

$$\Omega_1 = \alpha'\omega_1 + \beta'\omega_2, \qquad \Omega_2 = \gamma'\omega_1 + \delta'\omega_2.$$

Nous aurons

$$p(u, \omega'_1, \omega'_2) = p(u, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2),$$
$$p(u, \Omega_1, \Omega_2) = p(u, \omega_1, \omega_2),$$

et la relation entre les nouvelles périodes aura pris la forme simple

$$\omega_1 = n\bar{\omega}_1, \qquad \omega_2 = \bar{\omega}_2$$

ou

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{n}, \qquad \bar{\omega}_2 = \omega_2.$$

Nous désignerons par $\bar{p}u$, $\bar{\zeta}u$, $\bar{\sigma}u$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, ... ce que deviennent pu, ζu, σu, g_2, g_3, ..., lorsqu'on y remplace ainsi ω_1 par $\frac{\omega_1}{n}$ sans altérer la seconde période.

Les périodes de pu sont, comme on le voit, celles de $\bar{p}u$, et, en outre, des $n^{\text{ièmes}}$ de période $\frac{2\omega_1}{n}$, $\frac{2m\omega_1}{n}$, ... formant un des N groupes définis au n° 514.

Au lieu de ces $n^{\text{ièmes}}$ de périodes, on aurait pu adjoindre ceux d'un quelconque des autres groupes. On obtiendrait ainsi N réseaux différents, à chacun desquels correspond une fonction elliptique $\mathfrak{p}$ liée à la primitive par une transformation de degré n. Les formules relatives à ces diverses transformations se déduiront évidemment de celles que nous allons établir pour la fonction $\overline{\mathfrak{p}}u$, en y remplaçant $\frac{2\omega_1}{n}$ par les $n^{\text{ièmes}}$ de périodes propres qui caractérisent respectivement ces divers groupes.

La transformation

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

étant évidemment la résultante de transformations analogues où n est remplacé par ses facteurs premiers, tous les cas pourraient être ramenés à celui-là. Nous nous bornerons donc à considérer les deux cas suivants : 1° $n=2$; 2° n est impair.

520. *Transformation de degré* 2. — La fonction $\overline{\mathfrak{p}}u$ admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$; elle a, aux périodes près, les pôles 0 et $2\overline{\omega}_1 = \omega_1$. Aux environs de ces points, les parties infinies de son développement sont $\frac{1}{u^2}$, $\frac{1}{(u-\omega_1)^2}$. Enfin le développement relatif à l'origine est privé de terme constant. On aura donc, par la formule de décomposition en éléments simples,

$$(3) \qquad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{p}}u &= -\zeta' u - \zeta'(u-\omega_1) + \zeta'(-\omega_1) \\ &= \mathfrak{p}u + \mathfrak{p}(u-\omega_1) - e_1 \\ &= \mathfrak{p}u + \frac{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}{\mathfrak{p}u - e_1}. \end{aligned}$$

Intégrons et déterminons la constante de telle sorte que le développement des deux membres suivant les puissances de u n'ait pas de terme constant; il vient

$$(4) \qquad \overline{\zeta}u = \zeta u + \zeta(u-\omega_1) + e_1 u + \eta_1.$$

Une seconde intégration donnera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \log \bar{\sigma} u &= \log \sigma u + \log \sigma(u-\omega_1) + \frac{e_1 u^2}{2} + \eta_1 u - \log \sigma(-\omega_1), \\ \bar{\sigma} u &= e^{\frac{e_1 u^2}{2} + \eta_1 u} \frac{\sigma u\, \sigma(u-\omega_1)}{\sigma(-\omega_1)} \\ &= e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma u\, \sigma_1 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{p u - e_1}. \end{aligned}\right.$$

Pour déduire de là les expressions de $\bar{\sigma}_1 u$, $\bar{\sigma}_2 u$, $\bar{\sigma}_3 u$, considérons les rapports $\frac{\bar{\sigma}_1 u}{\bar{\sigma} u}$, $\frac{\bar{\sigma}_2 u}{\bar{\sigma} u}$, $\frac{\bar{\sigma}_3 u}{\bar{\sigma} u}$. Ce sont des fonctions elliptiques admettant les périodes $2\omega_1$, $4\omega_2$; leur valeur principale pour $u = 0$ est $\frac{1}{u}$; leurs pôles sont les zéros de $\bar{\sigma} u$; leurs zéros sont, aux multiples près de $2\omega_1$ et de $2\omega_2$,

$$\frac{1}{2}\omega_1 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2}\omega_1, \qquad \omega_2 \quad \text{et} \quad \omega_2 + \omega_1 = -\omega_3,$$

$$\bar{\omega}_3 = -\omega_2 - \frac{1}{2}\omega_1 \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_3 + \omega_1.$$

Les rapports des quatre fonctions

$$\sigma u\, \sigma_1 u, \qquad \frac{\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{-\sigma^2 \frac{\omega_1}{2}} = \sigma^2 u \left(p u - p\frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\sigma_2 u\, \sigma_3 u, \qquad \frac{\sigma\left(u + \omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right)}{-\sigma^2\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)} = \sigma^2 u \left[p u - p\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)\right]$$

jouissent évidemment des mêmes propriétés ; ils seront donc égaux aux précédents, et l'on aura, en conséquence,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 u &= e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \left(p u - p\frac{\omega_1}{2}\right), \\ \bar{\sigma}_2 u &= e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma_2 u\, \sigma_3 u = e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \sqrt{(p u - e_2)(p u - e_3)}, \\ \bar{\sigma}_3 u &= e^{\frac{e_1 u^2}{2}} \sigma^2 u \left[p u - p\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right)\right] \end{aligned}\right.$$

et

$$(7)\quad \begin{cases} \bar{p}u - \bar{e}_1 = \dfrac{\bar{\sigma}_1^2 u}{\bar{\sigma}^2 u} = \dfrac{\left(pu - p\dfrac{\omega_1}{2}\right)^2}{pu - e_1}, \\[2ex] \bar{p}u - \bar{e}_2 = \dfrac{\bar{\sigma}_2^2 u}{\bar{\sigma}^2 u} = \dfrac{(pu - e_2)(pu - e_3)}{pu - e_1}, \\[2ex] \bar{p}u - \bar{e}_3 = \dfrac{\bar{\sigma}_3^2 u}{\bar{\sigma}^2 u} = \dfrac{\left[pu - p\left(\omega_2 + \dfrac{\omega_1}{2}\right)\right]^2}{pu - e_1}. \end{cases}$$

Développons les deux membres des équations (7) suivant les puissances de u; l'identification des termes constants donnera

$$(8)\quad \begin{cases} \bar{e}_1 = 2p\dfrac{\omega_1}{2} - e_1, \\ \bar{e}_2 = e_2 + e_3 - e_1 = -2e_1, \\ \bar{e}_3 = 2p\left(\omega_2 + \dfrac{\omega_1}{2}\right) - e_1. \end{cases}$$

Pour calculer les constantes $p\dfrac{\omega_1}{2}$, $p\left(\omega_2 + \dfrac{\omega_1}{2}\right)$, qui figurent dans les formules précédentes, ajoutons ces trois dernières ; nous obtiendrons cette première relation

$$2p\frac{\omega_1}{2} + 2p\left(\omega_2 + \frac{\omega_1}{2}\right) - 4e_1 = 0.$$

Posons, d'autre part, $u = -\dfrac{\omega_1}{2}$ dans l'identité

$$[p(u + \omega_1) - e_1](pu - e_1) = \frac{1}{U_1^4},$$

et extrayons la racine carrée, il vient

$$p\frac{\omega_1}{2} - e_1 = \pm\frac{1}{U_1^2}.$$

Mais, dans le cas particulier où ω_1 est réel et ω_2 purement imaginaire, U_1 est réel ; lorsque u varie de 0 à ω_1, pu est également réel et varie de $+\infty$ à e_1; donc $p\dfrac{\omega_1}{2} - e_1$ est po-

sitif. Il faut donc prendre

$$(9)\qquad p\frac{\omega_1}{2}=e_1+\frac{1}{U_1^2},\qquad p\left(\omega_2+\frac{\omega_1}{2}\right)=e_1-\frac{1}{U_1^2}.$$

On aura donc

$$\bar{e}_1=e_1+\frac{2}{U_1^2},\qquad \bar{e}_2=-2e_1,\qquad \bar{e}_3=e_1-\frac{2}{U_1^2}.$$

Calculons enfin $\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$. A cet effet, changeons u en $u+2\omega_1=u+4\bar{\omega}_1$ dans la formule (5). Le premier membre sera multiplié par $e^{4\bar{\eta}_1(u+\omega_1)}$, le second par $e^{2e_1\omega_1(u+\omega_1)}e^{2.2\eta_1(u+\omega_1)}$. L'identification donne

$$(10)\qquad \bar{\eta}_1=\eta_1+\frac{1}{2}e_1\omega_1.$$

L'équation

$$\bar{\eta}_1\omega_2-\bar{\eta}_2\frac{1}{2}\omega_1=\frac{\pi i}{2}$$

donne ensuite

$$(11)\qquad \bar{\eta}_2=-\frac{\pi i}{\omega_1}+\frac{2\eta_1\omega_2}{\omega_1}+e_1\omega_2.$$

521. Réciproquement proposons-nous d'exprimer e_1, e_2, e_3 en fonction de $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$,

On aura

$$e_1=-\frac{1}{2}\bar{e}_2,\qquad e_2+e_3=\frac{1}{2}\bar{e}_2,$$

$$(e_2-e_1)(e_3-e_1)=\frac{1}{U_1^4}=\frac{(\bar{e}_1-\bar{e}_3)^2}{16}.$$

Mais

$$(e_2-e_1)(e_3-e_1)=e_2e_3-e_1(e_2+e_3)+e_1^2=e_2e_3+\frac{\bar{e}_2^2}{2}.$$

Donc

$$e_2e_3=\frac{(\bar{e}_2-\bar{e}_3)^2}{16}-\frac{\bar{e}_2^2}{2},$$

de sorte que e_2, e_3 seront les racines de l'équation du second

degré

$$(12) \qquad X^2 - \frac{1}{2}\bar{e}_2 X + \frac{(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)^2}{16} - \frac{\bar{e}_2^2}{2} = 0$$

et la relation entre $\overline{pu}$ et pu deviendra

$$(13) \qquad \overline{pu} = pu + \frac{1}{16} \frac{(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)^2}{pu + \frac{1}{2}\bar{e}_2}.$$

522. L'emploi de cette formule peut être avantageux dans les applications. Les fonctions elliptiques que l'on a à considérer ont toujours leurs invariants g_2 et g_3 réels. Le polynome

$$4z^3 - g_2 z - g_3$$

a donc ses trois racines réelles ou une seule racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées. Le premier cas est le plus avantageux, car l'une des périodes principales étant réelle, une autre purement imaginaire, leur rapport est purement imaginaire, ce qui donne pour q une valeur réelle. De plus le triangle des périodes sera rectangle, et si l'on choisit pour première période celle de module minimum, $|q|$ sera au plus égal à $e^{-\pi}$, limite moins élevée que celle $e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}}$ trouvée dans le cas général.

Or les formules précédentes permettent de ramener le cas des racines imaginaires à celui où les trois racines sont réelles.

Soit en effet $\overline{pu}$ une fonction elliptique pour laquelle le polynome ait une racine réelle $\bar{e}_2$ et deux racines imaginaires conjuguées $\bar{e}_1$, $\bar{e}_3$. La somme des trois racines étant nulle, on aura

$$\bar{e}_1 = -\frac{1}{2}\bar{e}_2 + ai, \qquad \bar{e}_3 = -\frac{1}{2}\bar{e}_2 - ai,$$

a étant réel, et $(\bar{e}_1 - \bar{e}_3)^2 = -4a^2$ sera négatif.

Si donc on fait la substitution (13), $\overline{pu}$ sera exprimé ration-

nellement par une nouvelle fonction pu pour laquelle les trois racines e_1, e_2, e_3 seront réelles ; car l'équation (12) a son dernier terme négatif.

523. *Transformations de degré impair.* — Soit

$$n = 2m + 1.$$

La fonction $\bar{p}u$ admet les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$ et les pôles $0, \pm\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, \pm\frac{2m\omega_1}{n}$. La décomposition en éléments simples donnera

$$(14)\qquad \begin{aligned}\bar{p}u &= pu + \sum_{-m}^{\prime m} p\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) - a\\ &= pu + \sum_{1}^{n-1} p\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) - a,\end{aligned}$$

a désignant la constante

$$(15)\qquad a = \sum_{-m}^{\prime m} p\,\frac{2\mu\omega_1}{n} = \sum_{1}^{n-1} p\,\frac{2\mu\omega_1}{n}.$$

D'ailleurs, la formule d'addition donne

$$\sum_{-m}^{\prime m} p\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) = \sum_{-m}^{\prime m}\left[-pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n} + \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'\frac{2\mu\omega_1}{n}}{pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right)^2\right].$$

En remarquant que les termes impairs en u doivent se détruire dans la somme, on aura

$$\begin{aligned}\sum_{-m}^{\prime m}\frac{1}{4}&\left(\frac{p'u - p'\frac{2\mu\omega_1}{n}}{pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right)\\ &= \sum_{-m}^{\prime m}\frac{1}{4}\,\frac{p'^2u + p'^2\frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2}\\ &= \sum_{-m}^{\prime m}\frac{1}{4}\,\frac{p'^2u - p'^2\frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2} + \frac{1}{2}\sum_{-m}^{\prime m}\frac{p'^2\frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2}.\end{aligned}$$

Le premier terme est égal à

$$\sum_{-m}^{\prime m} \frac{\wp^3 u - \wp^3 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2 \left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)}{\left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2}$$

$$= \sum_{-m}^{\prime m} \frac{\wp^2 u + \wp u \, \wp \frac{2\mu\omega_1}{n} + \wp^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}}$$

$$= \sum_{-m}^{\prime m} \left(\wp u + 2\wp \frac{2\mu\omega_1}{n} + \frac{3\wp^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}} \right).$$

Substituant dans l'équation (14), nous obtiendrons l'expression de $\bar{\wp} u$ par une somme de fractions simples

$$(16)\quad \bar{\wp} u = \wp u + \sum_{-m}^{\prime m} \frac{3\wp^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} - \frac{1}{4} g_2}{\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}} + \sum_{-m}^{\prime m} \frac{\frac{1}{2} \wp'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}}{\left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)^2}.$$

Intégrons l'équation (14) ; il viendra

$$(17)\quad \bar{\zeta} u = \zeta u + \sum_{-m}^{\prime m} \zeta \left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) + a u.$$

On n'a pas à ajouter de constante, la différence des deux membres étant nulle pour $u = 0$, puisque ζu est une fonction impaire.

Intégrons encore, nous aurons

$$\log \bar{\sigma} u = \log \sigma u + \sum_{-m}^{\prime m} \log \sigma \left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) + \frac{a u^2}{2}$$
$$- \sum_{-m}^{\prime m} \log \sigma \frac{2\mu\omega_1}{n},$$

$$(18)\quad \bar{\sigma} u = e^{\frac{a u^2}{2}} \sigma u \prod_1^m \frac{\sigma\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right) \sigma\left(u - \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)}{-\sigma^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}}$$

$$= e^{\frac{a u^2}{2}} \sigma^n u \prod_1^m \left(\wp u - \wp \frac{2\mu\omega_1}{n}\right).$$

On en déduit, pour $\bar{\sigma}_1 u$, $\bar{\sigma}_2 u$, $\bar{\sigma}_3 u$, les formules analogues

$$(19)\quad \bar{\sigma}_\alpha u = e^{\frac{au^2}{2}} \sigma_\alpha u \prod_1^m \frac{\sigma_\alpha\left(u + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)\sigma_\alpha\left(u - \frac{2\mu\omega_1}{n}\right)}{\sigma_\alpha^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}}$$

$$= e^{\frac{au^2}{2}} \sigma_\alpha u\, \sigma^{n-1} u \prod_1^m \left[\mathrm{p} u - \mathrm{p}\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_\alpha\right)\right].$$

Car, en divisant membre à membre par l'égalité (18), on obtient des deux côtés des fonctions elliptiques aux périodes $4\omega_1$ et $4\omega_2$, ayant mêmes zéros, mêmes pôles et même valeur principale $\frac{1}{u}$ pour $u = 0$. Elles sont donc égales.

On aura encore

$$(20)\quad \bar{\mathrm{p}} u - \bar{e}_\alpha = \frac{\bar{\sigma}_\alpha^2 u}{\bar{\sigma}^2 u} = (\mathrm{p} u - e_\alpha) \prod_1^m \left[\frac{\mathrm{p} u - \mathrm{p}\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_\alpha\right)}{\mathrm{p} u - \mathrm{p}\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right]^2.$$

524. Changeons, dans la formule (18), u en

$$u + 2\omega_1 = u + 2n\bar{\omega}_1.$$

Le premier membre sera multiplié par

$$(-1)^n e^{2n\bar{\eta}_1(u + n\bar{\omega}_1)},$$

et le second par

$$e^{2a\omega_1(u+\omega_1)}(-1)^n e^{2\eta_1(u+\omega_1)n}.$$

L'identification donnera

$$(21)\quad \bar{\eta}_1 = \eta_1 + \frac{a\omega_1}{n}.$$

De l'équation $\bar{\eta}_1 \omega_2 - \bar{\eta}_2 \frac{\omega_1}{n} = \frac{\pi i}{2}$ on tire ensuite

$$(22)\quad \bar{\eta}_2 = -\frac{n\pi i}{2\omega_1} + a\omega_2 + n\eta_1 \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Comme on a $\omega_1 = \bar{\omega}_1 + 2m\bar{\omega}_1$, on obtiendra les valeurs

de $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ en posant $u = \omega_1, \omega_2, \omega_3$ dans l'équation (14). Il vient

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \bar{e}_\alpha &= -a + e_\alpha + \sum_1^{n-1} \mathrm{p}\left(\omega_\alpha + \frac{2\mu\omega_1}{n}\right), \\ &= -a + n\,e_\alpha + \frac{1}{U_\alpha^{+}} \sum_1^{n-1} \frac{1}{\mathrm{p}\dfrac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Développons les deux membres de l'équation (14) suivant les puissances de u. L'identification des termes en u^2 et u^4 donnera

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{20}\bar{g}_2 &= \frac{1}{20} g_2 + \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} \mathrm{p}'' \frac{2\mu\omega_1}{n}, \\ \frac{1}{28}\bar{g}_3 &= \frac{1}{28} g_3 + \frac{1}{24} \sum_1^{n-1} \mathrm{p}^{\mathrm{IV}} \frac{2\mu\omega_1}{n}. \end{aligned}\right.$$

Comme $\mathrm{p}''u$ et $\mathrm{p}^{\mathrm{IV}}u$ s'expriment rationnellement en $\mathrm{p}u$, g_2, g_3, ces formules montrent que $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ et l'invariant absolu $\bar{\mathrm{J}}$ sont racines d'équations modulaires.

525. Il est évident, d'après l'homogénéité, que l'équation modulaire à laquelle $\bar{\mathrm{J}}$ satisfait ne doit contenir g_2 et g_3 que dans la combinaison J. Elle sera donc de la forme

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{J}, \bar{\mathrm{J}}) = 0.$$

Cette équation sera symétrique en J et $\bar{\mathrm{J}}$. Soient, en effet, $\mathrm{R} = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ le réseau de périodes auquel correspond l'invariant J ; $\bar{\mathrm{R}} = 2m_1\dfrac{\omega_1}{n} + 2m_2\omega_2$ l'un des réseaux transformés, $\bar{\mathrm{J}}$ l'invariant correspondant. En divisant à son tour la période ω_2 par n, on obtiendra un nouveau réseau $\mathrm{R}' = 2m_1\dfrac{\omega_1}{n} + 2m_2\dfrac{\omega_2}{n}$, qui sera l'un des transformés de $\bar{\mathrm{R}}$. Son invariant J' sera donc lié à $\bar{\mathrm{J}}$ par la relation

$$\mathrm{F}_n(\bar{\mathrm{J}}, \mathrm{J}') = 0.$$

Mais, d'autre part, l'invariant absolu ne dépendant que du

rapport des périodes, on a $J' = J$. Donc l'équation

$$F_n(J, \bar{J}) = 0$$

entraîne celle-ci

$$F_n(\bar{J}, J) = 0.$$

526. L'équation (20) fournit de nouvelles équations modulaires plus simples que les précédentes. Posons, en effet,

$$u = \omega_\beta, \qquad \text{d'où} \qquad \bar{p}u = \bar{e}_\beta, \qquad pu = e_\beta,$$

et remplaçons $p\left(\frac{2\mu\omega_1}{n} + \omega_\alpha\right)$ par sa valeur

$$e_\alpha + \frac{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha};$$

il viendra

$$(25)\quad \bar{e}_\beta - \bar{e}_\alpha = (e_\beta - e_\alpha)^n \prod_1^m \left[\frac{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\gamma}{\left(p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha\right)\left(p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\beta\right)}\right]^2$$

$$= (e_\beta - e_\alpha)^n \prod_1^m \left[\frac{2\left(p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\gamma\right)}{p'\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right]^4$$

Or on a (443)

$$e_\beta - e_\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4\tau\,\varphi_\gamma^8\tau,$$

$$\bar{e}_\beta - \bar{e}_\alpha = \pm\left(\frac{\pi}{2\bar{\omega}_1}\right)^2 \varphi^4\bar{\tau}\,\varphi_\gamma^8\bar{\tau} = \pm\left(\frac{n\pi}{2\omega_1}\right)^2 \varphi^4 n\tau\,\varphi_\gamma^8 n\tau$$

(le signe dépendant de l'ordre circulaire des indices α, β, γ). Cette équation peut donc s'écrire ainsi

$$(26)\quad n^2\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{2n-2} \frac{\varphi^4 n\tau\,\varphi_\gamma^8 n\tau}{\varphi^{4n}\tau\,\varphi_\gamma^{8n}\tau} = \prod_1^m \left(\frac{p\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\gamma}{p'\frac{2\mu\omega_1}{n}}\right)^4.$$

En la combinant avec ses homologues, et tenant compte

de l'identité

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = e^{-\frac{\pi i}{8}}\sqrt{2},$$

ainsi que des relations

$$\varphi_{\alpha\beta} = e^{\frac{\pi i}{8}}\frac{\varphi_\alpha}{\varphi_\beta}, \qquad \Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12}\varphi^{24}$$

(443 et 501), on en déduit aisément

$$(27) \qquad \frac{\varphi_{\alpha\beta}^8 n\tau}{\varphi_{\alpha\beta}^{8n}\tau} = \prod_1^m \left(\frac{\wp\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha}{\wp\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\beta}\right)^4,$$

$$(28) \qquad \frac{\varphi_\alpha^{24} n\tau}{\varphi_\alpha^{24n}\tau} = \prod_1^m \frac{\left(\wp\frac{2\mu\omega_1}{n} - e_\alpha\right)^{12}}{\wp'^8\frac{2\mu\omega_1}{n}},$$

$$(29) \qquad \frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n} = n^{12}\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{12n-12}\frac{\varphi^{24} n\tau}{\varphi^{24n}\tau} = \prod_1^m \frac{1}{\wp'^8\frac{2\mu\omega_1}{n}}.$$

Les quantités

$$\frac{\varphi_{\alpha\beta}^2 n\tau}{\varphi_{\alpha\beta}^{2n}\tau}, \qquad \frac{\varphi_\alpha^6 n\tau}{\varphi_\alpha^{6n}}, \qquad \sqrt[4]{\frac{\overline{\Delta}}{\Delta^n}} = n^3\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{3n-3}\frac{\varphi^6 n\tau}{\varphi^{6n}\tau}$$

sont donc rationnelles et symétriques par rapport aux quantités $\wp\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, \wp\frac{2m\omega_1}{n}$.

De semblables expressions sont racines d'équations modulaires; car, d'une part, elles peuvent s'exprimer rationnellement par $\wp\frac{2\omega_1}{n}$; d'autre part, elles restent inaltérées par le changement de ω_1 en $\lambda\omega_1$, λ étant un entier quelconque premier à n. Soit, en effet, $\pm r_\mu$ le reste positif ou négatif, mais $<\frac{n}{2}$, qu'on obtient en divisant $\lambda\mu$ par n; on aura

$$\wp\frac{2\lambda\mu\omega_1}{n} = \wp\frac{2r_\mu\omega_1}{n},$$

et les nombres r_μ reproduisent, à l'ordre près, la suite 1, 2, ..., m.

On doit toutefois remarquer que, les expressions de $\frac{\varphi_{\alpha\beta}^2 n\tau}{\varphi_{\alpha\beta}^2\tau}$, $\frac{\varphi_\alpha^6 n\tau}{\varphi_\alpha^{6n}\tau}$ contenant les constantes e_α, e_β, celles-ci figureront conjointement avec g_2 et g_3 dans les coefficients des équations modulaires correspondantes.

527. Nous allons montrer, d'après M. *Kiepert*, que, si n est premier à 3, le produit

$$\prod_1^m p'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}$$

est le cube d'une fonction rationnelle et symétrique de $p\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, p\frac{2m\omega_1}{n}$, d'où cette conséquence que

$$\frac{\varphi_\alpha^2 n\tau}{\varphi_\alpha^{2n}\tau}, \qquad \sqrt[12]{\frac{\bar\Delta}{\Delta^n}} = n\left(\frac{\omega_1}{\pi}\right)^{n-1} \frac{\varphi^2 n\tau}{\varphi^{2n}\tau}$$

sont elles-mêmes des racines d'équations modulaires.

Nous partirons de l'expression

$$t_\mu = \frac{\theta'(0)}{2\omega_1\theta\left(\frac{\mu}{n}\right)} = \frac{e^{\frac{2\mu^2\eta_1\omega_1}{n^2}}}{\sigma\frac{2\mu\omega_1}{n}} \tag{30}$$

$\Big($remarquons en passant que, pour $n = 2$, $\mu = 1$, elle se réduirait à $\frac{1}{U_1}\Big)$. On a évidemment

$$t_{-\mu} = -t_\mu = t_{n+\mu}, \qquad t_{\mu+\lambda n} = (-1)^\lambda t_\mu, \tag{31}$$

$$\frac{t_\mu^{\lambda^2}}{t_{\lambda\mu}} = \frac{\sigma\frac{2\lambda\mu\omega_1}{n}}{\sigma^{\lambda^2}\frac{2\mu\omega_1}{n}} = \psi_\lambda\frac{2\mu\omega_1}{n}. \tag{32}$$

Considérons le produit

$$f = \prod_1^m t_\mu. \tag{33}$$

Son carré n'est pas altéré par le changement de μ en $\lambda\mu$,

si λ est premier à n. Soit, en effet, $\pm r_\mu$ le plus petit reste de la division de $\lambda\mu$ par n ; on aura

$$t_{\lambda\mu}^2 = t_{r_\mu}^2,$$

d'où

$$\prod_1^m t_{\lambda\mu}^2 = \prod_1^m t_{r_\mu}^2 = \prod_1^m t_\mu^2,$$

car r_μ prend, à l'ordre près, la suite des valeurs 1, 2, ..., m.

Cela posé, l'équation (32) donnera

$$(34)\qquad \left(\prod_1^m \frac{t_\mu^{\lambda^2}}{t_{\lambda\mu}}\right)^2 = \frac{f^{2\lambda^2}}{f^2} = f^{2(\lambda^2-1)} = \prod_1^m \psi_\lambda^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}.$$

Mais $\psi_\lambda^2 \frac{2\mu\omega_1}{n}$ est un polynome entier en $\wp\frac{2\mu\omega_1}{n}$. Donc $f^{2(\lambda^2-1)}$ est racine d'une équation modulaire (si λ est premier à n).

Puisque nous supposons n impair et non divisible par 3, nous pourrons prendre successivement $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, et nous en conclurons que f^6, f^{16}, et par suite

$$f^2 = \frac{(f^{16})^2}{(f^6)^5},$$

sont racines d'équations modulaires.

Cela posé, considérons l'équation

$$\wp v - \wp u = \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}.$$

Posons

$$u = \frac{2\mu\omega_1}{n}, \qquad v = \frac{2\mu\omega_1}{n} + h,$$

h étant infiniment petit. L'identification des valeurs principales donnera

$$\wp' \frac{2\mu\omega_1}{n} = -\frac{\sigma\dfrac{4\mu\omega_1}{n}}{\sigma^4\dfrac{2\mu\omega_1}{n}} = -\frac{t_\mu^4}{t_{2\mu}},$$

d'où

$$(35)\qquad \prod_1^m p'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n} = \prod_1^m \frac{t_\mu^8}{t_{2\mu}^2} = \frac{f^8}{f^2} = (f^2)^3.$$

En comparant cette expression à la formule (29), on voit qu'on aura

$$(36)\qquad f = \sqrt[24]{\frac{\Delta^n}{\bar{\Delta}}} = \alpha \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varphi^n \tau}{\varphi n \tau},$$

α désignant une racine $24^{\text{ième}}$ de l'unité.

Nous supposerons qu'on ait choisi pour $2\omega_1$ une période principale, et pour préciser davantage, la période de module minimum. On aura dans ce cas $\alpha = 1$; car, dans le cas particulier où ω_1 est réel et ω_2 purement imaginaire, $\varphi\tau$, $\varphi n\tau$ sont réels et positifs ; quant aux $\frac{n-1}{2}$ facteurs du produit f, ils sont réels et ont le signe de ω_1.

528. Supposons, pour plus de simplicité, n premier et > 3, et cherchons à former l'équation modulaire à laquelle satisfait f^2. Une première racine est donnée par la formule

$$f^2 = \frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{n-1} \frac{\varphi^{2n}\tau}{\varphi^2 n\tau}.$$

Les autres s'en déduiront en remplaçant $\frac{2\omega_1}{n}$ par d'autres $n^{\text{ièmes}}$ de période propres choisis à volonté dans les n autres groupes. Comme n est premier à 24, on pourra prendre les suivants (513)

$$\frac{48k\omega_1 + 2\omega_2}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

On devra, en conséquence, substituer à $2\omega_1$ la nouvelle période

$$2\omega'_1 = 48k\omega_1 + 2\omega_2 = 2\omega_1(24k + \tau),$$

et à $2\omega_2$ une nouvelle période $2\omega'_2$ formant avec celle-ci un

couple primitif. On pourra prendre, par exemple,

$$2\omega'_2 = -2\omega_1.$$

Par là τ se trouvera changé en

$$\frac{-2\omega_1}{48k\omega_1 + 2\omega_2} = \frac{-1}{24k+\tau}.$$

Les autres racines auront donc pour expression

$$f_k^2 = \frac{1}{n}\left[\frac{\pi}{\omega_1(24k+\tau)}\right]^{n-1} \frac{\varphi^{2n}\left(\dfrac{-1}{24k+\tau}\right)}{\varphi^2\left(\dfrac{-n}{24k+\tau}\right)}.$$

Mais on a (494)

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\tau}\,\varphi\tau$$

et, par suite,

$$\varphi\left(\frac{-1}{24k+\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{24k+\tau}\,\varphi(24k+\tau),$$

$$\varphi\left(\frac{-n}{24k+\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{24k+\tau}{n}}\,\varphi\left(\frac{24k+\tau}{n}\right),$$

d'où

$$f_k^2 = \left(\frac{\pi}{i\omega_1}\right)^{n-1} \frac{\varphi^{2n}(24k+\tau)}{\varphi^2\left(\dfrac{24k+\tau}{n}\right)}.$$

Or on a

$$\varphi\tau = q^{\frac{1}{12}}\prod_1^\infty(1-q^{2\mu}),$$

d'où

$$\varphi n\tau = q^{\frac{n}{12}}\prod_1^\infty(1-q^{2n\mu}),$$

$$\varphi(24k+\tau) = \varphi\tau$$

et, en posant pour abréger $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \varepsilon$,

$$\varphi\left(\frac{24k+\tau}{n}\right) = \varepsilon^k q^{\frac{1}{12n}}\prod_1^\infty\left(1-\varepsilon^{24k\mu}q^{\frac{2\mu}{n}}\right).$$

Les racines auront donc en fonction de ω_1 et de q les expressions suivantes :

$$(37)\quad \begin{cases} f^2 = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\pi}{\omega_1}\right)^{n-1} \displaystyle\prod_1^{\infty} \dfrac{(1-q^{2\mu})^{2n}}{(1-q^{2n\mu})^2}, \\ f_k^2 = \left(\dfrac{\pi}{i\omega_1}\right)^{n-1} \varepsilon^{-2k} q^{\frac{n^2-1}{6n}} \displaystyle\prod_1^{\infty} \dfrac{(1-q^{2\mu})^{2n}}{\left(1-\varepsilon^{24k\mu} q^{\frac{2\mu}{n}}\right)^2}. \end{cases}$$

529. Il est maintenant aisé de former l'équation modulaire

$$(38)\qquad \Phi(f^2) = f^{2n+2} + A_1 f^{2n} + \ldots + A_{n+1} = 0,$$

dont f^2, f_k^2 sont les racines. Nous savons que ses coefficients sont rationnels en g_2, g_3. Mais ils sont entiers ; car, en supposant qu'on ait choisi pour $2\omega_1$ la période de module minimum (un changement de périodes fondamentales ne ferait que permuter les racines), q a un module au plus égal à $e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}}$, et les racines seront toujours finies. Les coefficients $A_1, \ldots, A_n$ resteront donc finis, quels que soient g_2 et g_3 ; ce seront donc des polynomes entiers.

En outre, si nous supposons Δ infiniment petit du premier ordre, la relation

$$\Delta = \left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^{12} q^2 \prod_1^{\infty} (1-q^{2\mu})^{24}$$

montre que q sera infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$; f^2 sera fini et les autres racines f_k^2 seront infiniment petites d'ordre $\frac{n^2-1}{12n}$. Le coefficient A_r est une somme de produits de r racines ; dans chacun d'eux $r-1$ racines au moins sont infiniment petites d'ordre $\frac{n^2-1}{12n}$. Donc A_r est d'ordre $\frac{n^2-1}{12n}(r-1)$ au moins. Il contiendra donc Δ^a en facteur, a étant l'entier égal ou immédiatement supérieur à ce nombre. On aura, par suite,

$$A_r = \Delta^a B_r,$$

B_r étant un polynome entier en g_2, g_3, satisfaisant à la condition d'homogénéité. Or, les racines f^2, f_k^2 ont, par rapport à ω_1, ω_2, le poids $1-n$; Δ, g_2, g_3 ont respectivement les poids -12, -4, -6. Le polynome B_r aura donc pour poids

$$r(1-n)+12a.$$

Si ce nombre est positif, la formation du polynome B_r sera impossible, puisque g_2, g_3 ont des poids négatifs; A_r sera donc identiquement nul. Dans le cas contraire, l'homogénéité permettra d'écrire la partie littérale de B_r. Il ne restera ainsi à déterminer qu'un nombre restreint de coefficients numériques. Pour les obtenir, on substituera dans l'équation les développements de g_2, g_3, Δ et des racines f^2, f_k^2 et l'on égalera à zéro les coefficients des puissances successives de q.

530. Les quantités

$$\frac{i^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}f}, \quad \frac{1}{f_k}$$

sont proportionnelles aux produits

$$\varphi n\tau, \quad \varphi\left(\frac{24k+\tau}{n}\right).$$

Il existe entre ces expressions des relations linéaires remarquables, que nous allons établir.

On a (442)

$$\prod_1^\infty (1-q^{2\mu}) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^\mu q^{3\mu^2+\mu},$$

d'où

$$\varphi\tau = q^{\frac{1}{12}} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^\mu q^{3\mu^2+\mu} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^\mu q^{\frac{(6\mu+1)^2}{12}},$$

$$\varphi n\tau = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^\mu q^{\frac{n(6\mu+1)^2}{12}},$$

$$\varphi\frac{24k+\tau}{n} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^\mu \varepsilon^{k(6\mu+1)^2} q^{\frac{(6\mu+1)^2}{12n}}.$$

Posons, dans cette dernière équation, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ et ajoutons les résultats. La somme

$$\sum \varepsilon^{k(6\mu+1)^2}$$

sera égale à n ou à zéro, suivant que $6\mu+1$ sera ou non divisible par n. D'ailleurs n étant, par hypothèse, premier impair et différent de 3, sera de la forme $6a+1$ ou $6a-1$. Dans le premier cas, pour que $6\mu+1$ soit divisible par n, il faut poser $\mu = a + n\mu'$, d'où

$$6\mu + 1 = n(6\mu'+1)$$

et, par suite,

$$(39)\qquad \sum_0^{n-1} \varphi\frac{24k+\tau}{n} = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{a+n\mu'} n q^{\frac{n(6\mu'+1)^2}{12}} = (-1)^a n\,\varphi n\tau.$$

Si $n = 6a - 1$, il faudra poser

$$\mu = -a - n\mu', \qquad \text{d'où} \qquad 6\mu+1 = -n(6\mu'+1),$$

et l'on arrivera à la même conclusion.

Soit enfin s l'un quelconque des $\frac{n-1}{2}$ non résidus quadratiques de n; on aura

$$(40)\qquad \sum_0^{n-1} \varepsilon^{-ks}\varphi\frac{24k+\tau}{n} = \sum_0^{n-1} (-1)^\mu \varepsilon^{k[(6\mu+1)^2-s]} q^{\frac{(6\mu+1)^2}{12n}} = 0,$$

car, quel que soit μ, l'exposant

$$(6\mu+1)^2 - s$$

ne sera jamais multiple de n.

531. Les cubes des fonctions $\varphi n\tau$, $\varphi\frac{24k+\tau}{n}$ sont liés par des relations analogues. Elles se déduisent du développement

$$\varphi^3\tau = \frac{1}{2\pi}\theta'(0) = \sum_0^{\infty} (-1)^\mu (2\mu+1) q^{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2},$$

d'où

$$\varphi^3 n\tau = \sum_0^\infty (-1)^\mu (2\mu+1) q^{n\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2},$$

$$\varphi^3 \frac{24k+\tau}{n} = \sum_0^\infty (-1)^\mu (2\mu+1) \varepsilon^{3k(2\mu+1)^2} q^{\frac{1}{n}\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)^2}.$$

Formons la somme $\sum \varphi^3 \frac{24k+\tau}{n}$. Les termes où $2\mu+1$ n'est pas divisible par n se détruisent. Les autres s'obtiennent en posant

$$\mu = \frac{n-1}{2} + n\mu',$$

d'où

$$2\mu+1 = n(2\mu'+1), \qquad (-1)^\mu = (-1)^{\frac{n-1}{2}+\mu'}.$$

Leur somme sera donc

$$\sum (-1)^{\frac{n-1}{2}+\mu'} n(2\mu'+1) n q^{n\left(\frac{2\mu'+1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^2 \varphi^3 n\tau.$$

Donc

$$\sum \varphi^3 \frac{24k+\tau}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n^2 \varphi^3 n\tau. \tag{41}$$

On trouvera de même, s désignant un non-résidu quadratique de n,

$$\sum \varepsilon^{-3ks} \varphi^3 \frac{24k+\tau}{n} = 0, \tag{42}$$

car, quel que soit μ, l'exposant

$$3k[(2\mu+1)^2 - s]$$

ne sera jamais divisible par n.

532. On sait que les fonctions symétriques des quantités $\wp\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, \wp\frac{2m\omega_1}{n}$ doivent s'exprimer rationnellement en

f^2, g_2, g_3. Pour réaliser ce calcul, on peut recourir aux considérations suivantes :

Les deux fonctions $\sigma(u, \omega_1, \omega_2)$ et $\theta(v, \tau)$, liées par la relation

$$\sigma(u, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{\pi}\,\Delta^{-\frac{1}{8}}\omega_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\theta(v, \tau),$$

satisfont respectivement aux équations aux dérivées partielles

$$\text{(43)} \qquad D\sigma = \sigma'' + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma,$$

$$\text{(44)} \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \theta}{\partial \tau},$$

lesquelles sont les conséquences l'une de l'autre (**479**). Or la fonction $\theta(v\sqrt{n}, n\tau)$ satisfait évidemment encore à l'équation (44). L'équation (43) admettra donc la solution

$$F(u, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{\pi}\,\Delta^{-\frac{1}{8}}\omega_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}}\theta(v\sqrt{n}, n\tau).$$

Mais on a

$$\bar{\sigma}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \sigma\left(\frac{u}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1}{n}, \omega_2\right) = \sqrt{\pi}\,\bar{\Delta}^{-\frac{1}{8}}\left(\frac{\omega_1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\bar{\eta}_1 u^2}{2\omega_1}}\theta(v\sqrt{n}, n\tau).$$

On a d'ailleurs $\eta_1 = \bar{\eta}_1 + \dfrac{a\omega_1}{n}$ (**524**).

La solution précédente pourra donc se mettre sous la forme

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^{\frac{1}{8}} e^{-\frac{au^2}{2n}}\bar{\sigma}\frac{u}{\sqrt{n}} = F(u, \omega_1, \omega_2).$$

Cette expression satisfait à l'équation

$$DF = F'' + \frac{1}{12} g_2 u^2 F.$$

Si donc nous changeons u en $u\sqrt{n}$, la fonction

$$x = F(u\sqrt{n}, \omega_1, \omega_2) = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{\Delta}}{\Delta}\right)^{\frac{1}{8}} c^{-\frac{au^2}{2}}\bar{\sigma} u$$

satisfera à l'équation transformée

$$\mathrm{D}x = \frac{1}{n}x'' + \frac{1}{12}g_2 n u^2 x.$$

Cette équation est semblable à celle à laquelle satisfait $\sigma n u$, sauf le remplacement de n^2 par n.

Nous avons déduit de cette dernière (**480** et **481**) une équation aux dérivées partielles pour l'expression

$$\psi_n = \frac{\sigma n u}{\sigma^{n^2} u},$$

considérée comme fonction de $p u$, g_2, g_3. Par le même calcul (sauf le changement de n^2 en n), nous trouverons que $\dfrac{x}{\sigma^n u} = z$ satisfait à l'équation

$$(45)\quad n\left(12 g_3 \frac{\partial z}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial z}{\partial g_3}\right) \\ = (4p^3 - g_2 p - g_3)\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \\ + \left[(6-4n)p^2 - \frac{3-4n}{6}g_2\right]\frac{\partial z}{\partial p} + n(n-1)p z,$$

semblable à l'équation (17) du n° **481**, sauf le changement de n^2 en n.

Comme Δ est indépendant de u, et satisfait à la relation $\mathrm{D}\Delta = 0$, la quantité

$$y = \frac{1}{\sqrt{n}}\Delta^{-\frac{n-1}{8}} z = \left(\frac{\Delta}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{8}} \frac{e^{-\frac{au^2}{2}}\sigma u}{\sigma^n u}$$

satisfera à cette même équation.

Or on a [formules (36 et 18)]

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{f^3}, \qquad \frac{e^{-\frac{au^2}{2}}\sigma u}{\sigma^n u} = \prod_1^m \left(p u - p\frac{2\mu\omega_1}{n}\right).$$

Donc

$$y = \frac{1}{f^3} \prod_1^m \left(pu - p\frac{2\mu\omega_1}{n} \right) = A_0 p^m + A_1 p^{m-1} + \ldots + A_m$$

sera un polynome en pu.

On connaît déjà le premier coefficient

$$A_0 = \frac{1}{f^3}.$$

L'équation ci-dessus fournit une formule récurrente pour déterminer les autres. Substituons, en effet, ce polynome dans l'équation et identifions les termes en p^μ. On aura

$$\begin{aligned}(46)\quad & n\left(12 g_3 \frac{\partial A_\mu}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial A_\mu}{\partial g_3} \right) \\ & = [4(\mu-1)(\mu-2) + (6-4n)(\mu-1) + n(n-1)] A_{\mu-1} \\ & - \left[(\mu+1)\mu + \frac{3-4n}{6}(\mu+1) \right] g_2 A_{\mu+1} \\ & - g_3(\mu+2)(\mu+1) A_{\mu+2}.\end{aligned}$$

Supposons qu'on ait déterminé les expressions des coefficients jusqu'à $A_{\mu+1}$ inclusivement en fonction rationnelle de g_2, g_3, f. Soit $A_\mu = \varphi(g_2, g_3, f)$. On aura

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial g_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial g_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial g_2}, \qquad \frac{\partial A_\mu}{\partial g_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial g_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial g_3}.$$

D'ailleurs $\frac{\partial f}{\partial g_2}$, $\frac{\partial f}{\partial g_3}$ s'obtiendront en dérivant l'équation modulaire.

La formule (46) donnera donc $A_{\mu+2}$ au moyen des coefficients précédents.

Connaissant ainsi les coefficients de l'équation qui a pour racines $p\frac{2\omega_1}{n}, \ldots, p\frac{2m\omega_1}{n}$, on obtiendra par des formules connues l'expression d'une fonction symétrique quelconque.

533. Multiplication complexe. — On a vu, que si m est entier, pmu s'exprime rationnellement en pu. Cherchons

avec *Abel* sous quelles conditions cette propriété peut subsister pour d'autres valeurs de m.

Puisque pmu est, par hypothèse rationnel en pu, il admet les périodes $2\omega_1$ $2\omega_2$; mais ses périodes fondamentales sont évidemment $\frac{2\omega_1}{m}$, $\frac{2\omega_2}{m}$: on aura donc

$$2\omega_1 = \frac{2a\omega_1 + 2b\omega_2}{m}, \qquad 2\omega_2 = \frac{2c\omega_1 + 2d\omega_2}{m}$$

ou

$$m\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad m\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

a, b, c, d étant des entiers.

Ces équations sont satisfaites, quels que soient ω_1, ω_2, si l'on pose $m = a = d$, $b = c = 0$, mais alors m est entier : c'est le cas de la multiplication ordinaire.

Si m n'est pas entier, son élimination donnera entre les périodes la relation

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{c\omega_1 + d\omega_2}{a\omega_1 + b\omega_2}$$

ou

$$b\omega_2^2 + (a - d)\omega_1\omega_2 - c\omega_1^2 = 0$$

ou enfin

$$(47) \qquad b\tau^2 + (a - d)\tau - c = 0.$$

Cette équation doit avoir ses racines imaginaires, et τ représentera celle dont la partie imaginaire est positive. Quant au multiplicateur

$$m = a + b\tau,$$

ce sera aussi une quantité complexe.

Si les relations précédentes sont satisfaites, pmu étant une fonction paire qui admet les périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, sera bien rationnel en pu; nous dirons, en conséquence, que pu admet une *multiplication complexe*. Nous venons de voir que cela ne peut avoir lieu que si τ est racine d'une équation du second degré, à coefficients entiers et à racines imaginaires.

534. Supposons réciproquement que τ satisfasse à une équation de ce genre. Comme on peut multiplier ou diviser tous les coefficients par un même entier positif ou négatif, cette équation pourra se mettre sous la forme

$$A\tau^2 + 2B\tau + C = 0, \tag{48}$$

A, C étant positifs, et A, B, C premiers entre eux. Le discriminant

$$D = AC - B^2$$

sera positif.

Nous distinguerons deux sortes d'équations (48) suivant que A, 2B, C ont pour plus grand commun diviseur 1 ou 2. Dans ce second cas, A, C seront pairs, B impair, et D de la forme $4n - 1$.

Pour déterminer les multiplications complexes dont pu est susceptible, il nous faut identifier l'équation (48) avec (47), ce qui donnera

$$b = Ax, \qquad a - d = 2Bx, \qquad c = -Cx.$$

Nous joindrons à ces relations la suivante

$$a + d = 2y,$$

et nous en tirerons

$$a = y + Bx, \qquad b = Ax, \qquad c = -Cx, \qquad d = y - Bx;$$

et le déterminant $ad - bc$, que nous désignerons par n, sera donné par la formule

$$n = y^2 + Dx^2.$$

Enfin

$$\tau = \frac{-B + i\sqrt{D}}{A},$$

$$m = a + b\tau = y + ix\sqrt{D}.$$

Si l'équation (48) est de la première sorte, il faudra, pour que a, b, c, d soient entiers, que x, y le soient. Si elle est de la seconde sorte, A, 2B, C admettant 2 comme diviseur commun, x, y pourront contenir 2 en dénominateur : posant

donc $x = \frac{x'}{2}$, $y = \frac{y'}{2}$, on aura

$$a = \frac{y' + Bx'}{2}, \qquad b = \frac{Ax'}{2},$$

$$c = -\frac{Cx'}{2}, \qquad d = \frac{y' - Bx'}{2},$$

$$4n = y'^2 + Dx'^2, \qquad m = \frac{y' + ix'\sqrt{D}}{2}$$

et a, b, c, d seront entiers, si x', y' sont entiers et de même parité.

La fonction pu considérée admet donc une infinité de multiplicateurs complexes m, qu'on obtiendra en faisant varier dans ces formules les entiers x, y (ou x', y'). Nous pouvons toutefois nous borner à donner à ces deux indéterminées des valeurs premières entre elles ; car, si l'on changeait x, y en rx, ry, m serait changé en rm, et la relation entre pu et $prmu$ se déduirait de la combinaison de celle qui lie pu, pmu avec celle que donne la multiplication ordinaire et qui lie pmu avec $prmu$.

Supposons donc x, y (ou x', y') premiers entre eux ; a, b, c, auront évidemment l'unité pour plus grand commun diviseur.

535. On voit, par cette analyse, que toute équation

$$A\tau^2 + 2B\tau + C = 0$$

ou

$$(49) \qquad A\omega_2^2 + 2B\omega_1\omega_2 + C\omega_1^2 = 0, \qquad \text{où} \qquad D > 0,$$

caractérise une fonction pu admettant des multiplicateurs complexes. Mais cette même fonction pu correspond à une infinité d'équations de ce genre. En effet, pu ne change pas si l'on remplace ω_1, ω_2 par un autre système de demi-périodes fondamentales ω'_1, ω'_2. Soient

$$\omega_1 = \alpha\omega'_1 + \beta\omega'_2, \qquad \omega_2 = \gamma\omega'_1 + \delta\omega'_2 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma) = 1$$

les équations qui lient ces deux systèmes de périodes.

L'équation (49) sera transformée en

$$A'\omega_2'^2 + 2B'\omega_1'\omega_2' + C'\omega_1'^2 = 0, \tag{50}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} A' &= A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2, \\ B' &= A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\gamma\delta, \\ C' &= A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2. \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Nous considérerons comme équivalentes et nous rangerons dans la même classe toutes les équations qui peuvent ainsi se déduire de l'une d'elles, et qui répondent à une même fonction pu.

Toutes ces équations ont le même discriminant, car on a

$$D' = A'C' - B'^2 = (AC - B^2)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = D.$$

En outre, elles sont de la même sorte; car les formules (51) montrent que le plus grand commun diviseur de A, B, C divise celui de A', B', C', et que celui de A, 2B, C divise celui de A', $2B'$, C'; et la réciproque est vraie, car on peut revenir de l'équation (50) à l'équation (49) par la substitution inverse

$$\omega_1' = \delta\omega_1 - \beta\omega_2, \qquad \omega_2' = -\gamma\omega_1 + \alpha\omega_2.$$

On sait, par la théorie des formes quadratiques, que les équations d'un même discriminant D et de même sorte ne forment qu'un nombre fini de classes. Nous allons retrouver ce résultat en cherchant l'expression des fonctions pu à multiplication complexe, qui correspondent à ce discriminant D.

536. Toutes ces fonctions admettent les mêmes multiplicateurs, donnés (534) par les formules

$$y + ix\sqrt{D} \qquad \text{ou} \qquad \frac{y' + ix'\sqrt{D}}{2}.$$

Soit m un de ces multiplicateurs, choisi à volonté (il conviendra dans le calcul effectif de choisir le plus simple, cor-

respondant à $x=1$, $y=0$ ou à $x'=y'=1$). On aura

$$m\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad m\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

a, b, c, d étant des entiers encore inconnus, car nous ne supposons pas donnés les coefficients A, B, C, mais seulement le discriminant D.

Posons

$$\frac{\omega_1}{m} = \Omega_1, \qquad \frac{\omega_2}{m} = \Omega_2;$$

les équations précédentes deviennent

$$\omega_1 = a\Omega_1 + b\Omega_2, \qquad \omega_2 = c\Omega_1 + d\Omega_2.$$

Remplaçons ω_1, ω_2, d'une part, et Ω_1, Ω_2 d'autre part, par d'autres demi-périodes équivalentes ω'_1, ω'_2 et Ω'_1, Ω'_2. Nous pourrons par un choix convenable de ces nouvelles périodes, (519) réduire la relation entre les périodes à la forme plus simple

$$\omega'_1 = n\Omega'_1, \qquad \omega'_2 = \Omega'_2.$$

Cela posé, $\wp mu$ admet pour périodes primitives $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, ou leurs équivalentes $2\Omega'_1$, $2\Omega'_2$. Elle admet donc les périodes $2\omega'_1$, $2\omega'_2$ qui sont des périodes primitives pour $\wp u$. Ses pôles sont, à ces périodes près, les points $0, \frac{2\omega'_1}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\omega'_1}{n}$. La décomposition en éléments simples donnera donc

$$(52) \qquad \wp mu = \wp u + \sum_1^{n-1} \left[\wp\left(u + \frac{2\mu\omega'_1}{n}\right) - \wp\frac{2\mu\omega'_1}{n}\right].$$

Identifions les développements des deux membres, suivant les puissances de u, en remarquant que $\wp mu$, ayant pour périodes $\frac{2\omega_1}{m}$, $\frac{2\omega_2}{m}$, aura, en vertu de l'homogénéité, les invariants $m^4 g_2$, $m^6 g_3$; il viendra

$$(53) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{20}(m^4-1)g_2 &= \frac{1}{2}\sum_1^{n-1} \wp''\frac{2\mu\omega'_1}{n}, \\ \frac{1}{28}(m^6-1)g_3 &= \frac{1}{24}\sum_1^{n-1} \wp^{\text{IV}}\frac{2\mu\omega'_1}{n}. \end{aligned} \right.$$

Prenons une de ces deux équations. Nous savons que la somme du second membre est liée à g_2, g_3 par une équation algébrique. Substituant dans celle-ci la valeur obtenue ci-dessus pour cette somme, nous obtiendrons une équation algébrique entre g_2 et g_3. Cette équation, en vertu de l'homogénéité, déterminera J.

Il n'existe donc qu'un nombre limité d'invariants absolus J correspondant aux multiplications complexes de discriminant D et d'une sorte donnée. Ils sont racines d'une équation algébrique, à coefficients entiers, dont le degré sera le nombre des classes d'équations quadratiques du discriminant et de la sorte donnés.

La connaissance de ces invariants déterminera, à un facteur d'homogénéité près, les fonctions pu correspondantes.

537. Les deux cas les plus simples de la multiplication complexe sont ceux l'équation en τ se réduit à

$$\tau^2 + 1 = 0 \qquad (D = 1)$$

ou à

$$2\tau^2 + 2\tau + 2 = 0 \qquad (D = 3, \text{ deuxième sorte}).$$

Nous avons déjà signalé l'intérêt de ces cas particuliers; on a dans le premier $J = 0$, et dans le second $J = 1$.

538. Soient pu, $\overline{p}u$ deux fonctions elliptiques dont les périodes soient liées par les relations

$$\omega_1 = a\overline{\omega}_1 + b\overline{\omega}_2, \qquad \omega_2 = c\overline{\omega}_1 + d\overline{\omega}_2 \qquad (ad - bc = n).$$

Leurs invariants J et $\overline{J}$ sont liés par une équation modulaire

$$F_n(J, \overline{J}) = 0,$$

et les diverses valeurs de $\overline{J}$ fournies par cette équation correspondent aux diverses manières de déterminer a, b, c, d, sous la condition $ad - bc = n$.

Pour que J soit égal à J, il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{\overline{\omega}_2}{\overline{\omega}_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1};$$

d'où

$$\overline{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{m}, \qquad \overline{\omega}_2 = \frac{\omega_2}{m},$$

m désignant une constante. On aura donc

$$m\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad m\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

et la fonction pu devra être l'une de celles qui admettent une multiplication complexe. De plus, D désignant le discriminant correspondant, on aura

$$n = x^2 + \mathrm{D}y^2 \qquad \text{ou} \qquad 4n = x'^2 + \mathrm{D}y'^2.$$

L'équation

$$\mathrm{F}_n(\mathrm{J}, \overline{\mathrm{J}}) = 0$$

se décomposera donc en facteurs rationnels, donnant respecvement les invariants J qui correspondent :

1° Aux multiplications complexes de la première sorte, pour les discriminants D qui satisfont à la relation

$$n = x^2 + \mathrm{D}y^2,$$

x, y étant des entiers premiers entre eux;

2° Aux multiplications complexes de la seconde sorte, pour les discriminants D qui satisfont à la relation

$$4n = x'^2 + \mathrm{D}y'^2,$$

x', y' étant impairs et premiers entre eux.

X. — Applications.

539. Considérons la différentielle abélienne

$$\mathrm{R}(x, y)\,dx,$$

R désignant une fonction rationnelle et y étant lié à x par une équation algébrique

$$f(x, y) = 0.$$

Si l'on effectue une transformation birationnelle

$$x = \varphi(x', y'), \qquad y = \varphi_1(x', y').$$

l'équation $f = 0$ sera changée en une équation analogue

$$f(\varphi, \varphi_1) = f_1(x', y') = 0.$$

$R(x, y)$ deviendra une fonction rationnelle de x', y'; enfin dx s'exprimera au moyen de x', y', dx' au moyen des relations

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} dx' + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} dy', \qquad 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} dy'.$$

La différentielle proposée est donc transformée en une autre, $R_1(x', y')\, dx'$, où la relation entre les variables sera

$$f_1(x', y') = 0.$$

Si $f(x, y) = 0$ représente une courbe de genre 1, la transformation pourra être choisie (t. I, n° 607) de telle sorte que la courbe transformée soit du troisième ordre.

On peut encore simplifier cette dernière équation par une suite de transformations homographiques. Par une première transformation, qui rejette à l'infini un des points d'inflexion, on la réduira à la forme

$$(ax + by)^3 + P_2 = 0,$$

P_2 étant du second degré. Un autre changement d'axe la réduira à

$$ax^3 + P_2 = 0.$$

Le polynome P_2 contient un terme en y^2, car autrement la courbe serait unicursale. En changeant y en $y + \lambda x + \mu$, on fera disparaître les termes du premier degré en y;

l'équation prendra la forme

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Enfin, changeant x en $\alpha x + \beta$, on pourra réduire A à 4, B à 0; appelant $-g_2$ et $-g_3$ les deux autres coefficients, nous aurons l'équation définitive

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Soit pu la fonction elliptique construite avec les invariants g_2, g_3; cette équation équivaudra aux deux suivantes

$$x = pu, \qquad y = p'u.$$

Donc, *les coordonnées de toute courbe de genre* 1 *peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un même paramètre.*

540. Prenons ce paramètre u pour variable indépendante, la différentielle $R(x, y)\,dx$ se changera en

$$R(pu, p'u)p'u\,du.$$

Pour intégrer cette expression, il faudrait : 1° déterminer les valeurs de pu qui rendent infinie la fonction à intégrer; 2° calculer les valeurs correspondantes de u; 3° développer la fonction aux environs de chacun de ces pôles afin de la décomposer en éléments simples, dont chacun sera intégrable (**392**).

Cette dernière opération ne demande que des divisions; mais la première exige la résolution d'une équation algébrique, et la seconde celle d'équations transcendantes de la forme

$$pu = C.$$

Il convient d'éviter ces résolutions, s'il est possible ou tout au moins de les retarder, en réduisant la différentielle algébrique avant d'exécuter le changement de variables.

541. Cette différentielle peut être mise sous la forme

$$\left(R + \frac{R_1}{\sqrt{X}}\right) dx \qquad (X = 4x^3 - g_2 x - g_3),$$

R, R_1 étant rationnelles en x.

Or on peut, par des opérations purement rationnelles, mettre l'intégrale $\int R\,dx$ sous la forme

$$\int R\,dx = \rho(x) + \int \frac{M}{P}\,dx,$$

$\rho(x)$ étant rationnel en x, P un polynome sans racine multiple, et M un polynome de degré inférieur à celui de P.

L'intégrale

$$\int \frac{R_1\,dx}{\sqrt{X}},$$

peut d'une manière analogue (28-31) se mettre sous la forme

$$\int \frac{R_1\,dx}{\sqrt{X}} = \rho_1(x)\sqrt{X} = \int \frac{M_1\,dx}{P_1\sqrt{X}},$$

$\rho_1(x)$ étant rationnel, P_1 un polynome en x sans racine multiple, et n'ayant aucune racine commune avec X; M_1 un autre polynome dont le degré ne peut surpasser celui de P_1 de plus d'une unité.

Si M et M_1 sont nuls, l'intégration est terminée. Dans le cas contraire, il faudra résoudre les équations $P = 0$, $P_1 = 0$ pour décomposer $\frac{M}{P}$, $\frac{M_1}{P_1}$ en fractions simples. On aura ainsi à intégrer une expression de la forme

$$Cx + D + \sum \frac{A}{x-a}\frac{dx}{\sqrt{X}} + \sum \frac{B\,dx}{x-b}.$$

Posons maintenant

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u.$$

Les termes tout intégrés

$$\rho(x) + \rho_1(x)\sqrt{X}$$

deviendront la fonction elliptique

$$\rho(\mathrm{p}u) + \rho_1(\mathrm{p}u)\mathrm{p}'u.$$

On aura en second lieu

$$\int \frac{Cx + D}{\sqrt{X}}\, dx = \int (C\mathrm{p}u + D)\, du = -C\zeta u + Du,$$

$$\frac{A}{x - a}\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{A\, du}{\mathrm{p}u - a} = \frac{A\, du}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v},$$

en désignant par v une racine de l'équation transcendante

$$\mathrm{p}v = a.$$

Si v est une demi-période telle que ω_α, on aura $a = e_\alpha$, et

$$\frac{A du}{\mathrm{p}u - e_\alpha} = \frac{A[\mathrm{p}(u + \omega_\alpha) - e_\alpha]\, du}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)},$$

expression dont l'intégrale est

$$\frac{-A[\zeta(u + \omega_\alpha) + e_\alpha u]}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)} + \text{const.}$$

Si v n'est pas une demi-période, on aura (397)

$$\frac{A}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v} = \frac{-A}{\mathrm{p}'v}[\zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta v],$$

et en intégrant

$$\int \frac{A\, du}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v} = \frac{-A}{\mathrm{p}'v}[\log\sigma(u + v) - \log\sigma(u - v) - 2u\zeta v] + \text{const.}$$

On aura de même en désignant par w une racine de l'équation

$$\mathrm{p}w = b,$$

$$\int \frac{B\, dx}{x - b} = \int \frac{B\mathrm{p}'u\, du}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}w} = \int B[\zeta(u + w) + \zeta(u - w) - 2\zeta w]$$
$$= B[\log\sigma(u + w) + \log\sigma(u - w) - 2u\zeta w] + \text{const.}$$

Réunissant ces résultats, et appliquant aux termes où figure la fonction ζ la formule d'addition

$$\zeta(u + v) = \zeta u + \zeta v + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}v}$$

on voit que l'intégrale cherchée sera de la forme

$$(1) \qquad \Sigma A_k \log\sigma(u - a_k) + B\zeta u + Cu + \psi u,$$

les A, a, B, C étant des constantes, et ψu une fonction elliptique.

542. Cherchons à quelles conditions cette intégrale sera une fonction algébrique de x.

Il est nécessaire qu'elle n'ait qu'un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de $x = pu$, et *a fortiori* pour chaque valeur de u. Or, pour une même valeur de u, chacun des logarithmes $\log \sigma(u - a_k)$ a une infinité de valeurs. Il faut donc que tous les coefficients A_k soient nuls.

Cette première condition remplie, l'intégrale sera uniforme en u. Mais il faut de plus que, pour tous les systèmes de valeurs de la forme $u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$, qui n'altèrent pas pu, le nombre de ces valeurs soit limité.

Or, le changement de u en $u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$ augmente la valeur de l'intégrale de

$$(2B\eta_1 + 2C\omega_1)m_1 + (2B\eta_2 + 2C\omega_2)m_2,$$

expression qui prendrait une infinité de valeurs, si l'on n'avait pas

$$2B\eta_1 + 2C\omega_1 = 0, \qquad 2B\eta_2 + 2C\omega_2 = 0.$$

Comme le déterminant $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1$ est égal à $\frac{\pi i}{2}$, on en conclut ces nouvelles conditions

$$B = 0, \qquad C = 0.$$

Réciproquement, si les conditions trouvées ci-dessus sont remplies, l'intégrale sera doublement périodique; elle s'exprimera donc rationnellement au moyen de $pu = x$ et de $p'u = y$, et sera algébrique en x.

543. Cherchons encore à quelles conditions les termes non elliptiques

$$\Sigma A_k \log \sigma(u - a_k) + B\zeta u + Cu \tag{2}$$

peuvent représenter le logarithme d'une fonction algébrique de x.

Il sera nécessaire que cette expression n'admette, aux multiples près de $2\pi i$, qu'un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de x, et *a fortiori* pour chaque valeur de u.

Or, pour une même valeur de u, $A_k \log \sigma\,(u - a_k)$ a une infinité de valeurs, différant de multiples de $A_k\, 2\pi i$. Il faut donc tout d'abord que les coefficients A_k soient rationnels.

Supposons qu'il en soit ainsi. Soit μ le plus petit multiple de leurs dénominateurs. L'expression (2) sera égale à $\frac{1}{\mu}\log F$, F désignant la fonction uniforme

$$e^{\mu(B\zeta u + Cu)} \prod \sigma^{A_k \mu}(u - a_k),$$

laquelle ne devra prendre qu'un nombre limité de valeurs quand on change u en $u + 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2$. Or ce changement la reproduit au signe près, multipliée par une exponentielle, dont l'exposant est

$$\begin{aligned}\mu B(2m_1\eta_1 + 2m_2\eta_2) &+ \mu C(2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2)\\ &+ (2m_1\eta_1 + 2m_2\eta_2)\Sigma A_k \mu(u - a_k + m_1\omega_1 + m_2\omega_2).\end{aligned}$$

Le coefficient de u doit être nul, d'où cette première condition

$$\Sigma A_k = 0,$$

ce qui réduit l'exposant ci-dessus à

$$\begin{aligned}&[2\eta_1(B - \Sigma A_k a_k) + 2\omega_1 C]\mu m_1\\ +\,&[2\eta_2(B - \Sigma A_k a_k) + 2\omega_2 C]\mu m_2.\end{aligned}$$

Pour que l'exponentielle ait un nombre limité de valeurs, il faut et il suffit que les multiplicateurs de μm_1, μm_2 soient commensurables à $2\pi i$. On aura donc les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}2\eta_1(B - \Sigma A_k a_k) + 2\omega_1 C &= f_1\, 2\pi i,\\ 2\eta_2(B - \Sigma A_k a_k) + 2\omega_2 C &= f_2\, 2\pi i,\end{aligned}$$

f_1, f_2 étant rationnels, ou en résolvant, et remarquant que $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$,

$$(3)\qquad \begin{cases} B - \Sigma A_k a_k = -f_2\, 2\omega_1 + f_1\, 2\omega_2,\\ C \qquad\qquad\;\; = \;\; f_2\, 2\eta_1 - f_1\, 2\eta_2.\end{cases}$$

Réciproquement, supposons ces conditions satisfaites; soit ν le plus petit multiple des dénominateurs de f_1, f_2; on aura

$$\frac{1}{\mu}\log F = \frac{1}{\mu\nu}\log F^\nu,$$

F^{ν} étant doublement périodique et pouvant, par conséquent, s'exprimer rationnellement en pu et $p'u$.

544. Les différentielles elliptipues

$$R(x, \sqrt{X})\,dx,$$

où X est un polynome du quatrième degré

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

rentrent dans la classe considérée ci-dessus, car la courbe

$$y^2 = X$$

est de genre 1.

La représentation simultanée de x et de $y = \sqrt{X}$ par des fonctions elliptiques d'un même paramètre peut se réaliser comme il suit

Nous pouvons écrire

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 z + \ldots + a_4 z^4,$$

z étant égal à 1 et n'étant introduit que pour l'homogénéité. Ce polynome homogène admet les deux invariants

$$I_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,$$
$$I_3 = a_0 a_2 a_4 - 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4.$$

Posons $x = t - \frac{a_1}{a_0} z$; X se changera en un polynome sans second terme

$$T = a_0(t^4 + 6\alpha_2 t^2 z^2 + 4\alpha_3 t z^3 + \alpha_4 z^4),$$

et les invariants restent inaltérés; on aura donc

$$a_0^2(\alpha_4 + 3\alpha_2^2) = I_2,$$
$$a_0^3(\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2) = I_3,$$

ce qu'on peut d'ailleurs vérifier par un calcul direct. Remettant l'unité à la place de z, on aura

$$T = a_0(t^4 + 6\alpha_2 t^2 + 4\alpha_3 t + \alpha_4)$$

et

$$y^2 - T = 0.$$

Nous allons montrer qu'on peut identifier cette dernière équation avec celle qui lie les deux fonctions elliptiques

$$f = \frac{1}{2} \frac{p' u - p' v}{p u - p v}, \qquad \varphi = [p u - p(u+v)] \sqrt{a_0},$$

en déterminant convenablement la constante v et les invariants g_2 et g_3.

En effet, on a identiquement

$$(p u - p v) - [p(u+v) - p v] = \frac{\varphi}{\sqrt{a_0}},$$

et la formule d'addition donne, d'autre part,

$$p(u+v) + p u + p v = \frac{1}{4} \left(\frac{p' u - p' v}{p u - p v} \right)^2 = f^2$$

ou

$$(p u - p v) + [p(u+v) - p v] = f^2 - 3 p v.$$

On en conclut

$$\frac{\varphi^2}{a_0} = (f^2 - 3 p v)^2 - 4(p u - p v)[p(u+v) - p v].$$

Cela posé, la fonction

$$\xi = (p u - p v)[p(u+v) - p v]$$

admet les mêmes pôles o et $-v$ que la fonction f; ces pôles sont simples dans toutes deux, et pour u infiniment petit on a

$$\xi = \left(\frac{1}{u^2} - p v + \dots \right) \left(u p' v + \frac{u^2}{2} p'' v + \dots \right)$$
$$= \frac{p' v}{u} + \frac{1}{2} p'' v + \dots,$$

$$f = \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{2}{u^3} - p' v + \dots}{\frac{1}{u^2} - p v + \dots} \right) = -\frac{1}{u} + \dots.$$

Donc

$$\xi + f\wp' v - \frac{1}{2}\wp'' v$$

est nul, car cette fonction elliptique, ayant perdu l'un des deux pôles o et $-v$, est une constante; de plus, elle s'annule pour $u = 0$.

On aura donc

$$\frac{\varphi^2}{a_0} = (f^2 - 3\wp v)^2 + 4f\wp' v - 2\wp'' v$$

ou, en remplaçant $\wp'' v$ par sa valeur en $\wp v$,

$$\varphi^2 = a_0(f^4 - 6f^2\wp v + 4f\wp' v + g_2 - 3\wp^2 v).$$

Pour identifier les coefficients de ce polynome avec ceux de T, il faudra poser

$$\wp v = -\alpha_2, \qquad \wp' v = \alpha_3, \qquad g_2 - 3\wp^2 v = \alpha_4,$$

d'où

$$g_2 = \alpha_4 + 3\alpha_2^2 = \frac{I_2}{a_0^2},$$

$$g_3 = 4\wp^3 v - g_2\wp v - \wp'^2 v = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2 = \frac{I_3}{a_0^3}.$$

Enfin, $\wp v$ se déterminera par la relation

$$\wp v = -\alpha_2.$$

Celle-ci a, aux périodes près, deux solutions, auxquelles correspondent des valeurs égales et opposées de $\wp' v$. Il faut choisir celle pour laquelle $\wp' v = +\alpha_3$.

Les constantes g_2, g_3, v étant ainsi calculées, on satisfera identiquement à l'équation $y^2 = X$ en posant

$$(4) \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{a_1}{a_0} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}, \\ y = \sqrt{X} = \pm\sqrt{a_0}[\wp u - \wp(u+v)], \end{cases}$$

le double signe pouvant être fixé arbitrairement.

Enfin, d'après une formule précédemment trouvée (397),

$$(5) \qquad dx = \frac{1}{2} d \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = [pu - p(u+v)]\, du.$$

On a obtenu ainsi tous les éléments nécessaires pour la transformation de la différentielle.

545. La fonction $\dfrac{p'u - p'v}{pu - pv}$ étant du second ordre, à chaque valeur de x correspondent (aux périodes près) deux valeurs de u. Leur somme est égale à celle des pôles, qui est $-v$; les valeurs correspondantes de y sont égales et contraires, car le changement de u en $-u-v$ change le signe de $pu - p(u+v)$. A chaque point (x, y) de la courbe $y^2 = X$ répond donc une seule valeur du paramètre u.

La fonction y s'annule pour les valeurs de u qui satisfont à la relation

$$u + v = -u + \text{période}$$

ou

$$u = -\frac{v}{2} + m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Les valeurs correspondantes de x sont les racines de l'équation $X = 0$. Il suffira, pour les avoir, de donner à chacun des entiers m_1, m_2 les valeurs 0 et 1.

Nous obtenons ainsi une résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques.

546. *Équation différentielle d'Euler.* — Appliquons les formules précédentes à la transformation de la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx}{y}.$$

Elle se réduira à

$$\pm \frac{du}{\sqrt{a_0}},$$

le signe $\pm$ restant à notre disposition.

Soient donc x, x_1 deux variables, liées par l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

X_1 étant un polynome formé avec x_1 comme X l'est avec x. En posant

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \psi u,$$

$$x_1 = \psi u_1,$$

nous pourrons réduire cette équation à la forme

$$\frac{du}{\sqrt{a_0}} = \frac{du_1}{\sqrt{a_0}},$$

d'où

$$u_1 = u + c,$$

c désignant une constante. On aura donc

$$x = \psi(u), \qquad x_1 = \psi(u + c).$$

Ces deux fonctions elliptiques, d'ordre 2 et aux mêmes périodes, sont liées par une équation algébrique du second degré par rapport à chacune d'elles. Soit

$$F(x, x_1, c) = 0$$

cette équation. Elle sera évidemment symétrique par rapport à x et x_1, et sera équivalente à l'équation différentielle, sur laquelle on retombera en éliminant c entre $F = 0$ et sa dérivée.

547. Cette équation F peut être formée comme il suit :

Soit t une variable auxiliaire, liée à x par une équation algébrique du second degré par rapport à chaque variable. En ordonnant successivement par rapport à chacune d'elles, on pourra l'écrire ainsi

$$0 = \varphi(x, t) = At^2 + 2Bt + C = Mx^2 + 2Nx + P.$$

On en déduit

$$o = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}dt = (Mx + N)\,dx + (At + B)\,dt$$

ou, en substituant pour x et t leurs valeurs

$$x = -\frac{N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M}, \qquad t = -\frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A},$$

$$\pm\sqrt{N^2 - MP}\,dx \pm \sqrt{B^2 - AC}\,dt = o,$$

et enfin

$$\frac{dx}{\sqrt{B^2 - AC}} = \pm\frac{dt}{\sqrt{N^2 - MP}}.$$

Soient x_1 la seconde racine de l'équation $\varphi(x, t) = o$, et soient A_1, B_1, C_1 ce que deviennent les polynomes A, B, C quand on y change x en x_1 ; on aura de même

$$\frac{dx_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}} = \pm\frac{dt}{\sqrt{N^2 - MP}};$$

on aura donc, en choisissant des déterminations convenables pour les deux radicaux $\sqrt{B^2 - AC}$, $\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{B^2 - AC}} = \frac{dx_1}{\sqrt{B_1^2 - A_1 C_1}}. \tag{7}$$

D'autre part, en éliminant t entre les deux équations

$$At^2 + 2Bt + C = o, \qquad A_1 t^2 + 2B_1 t + C_1 = o,$$

on obtiendra entre x et x_1 l'équation

$$\left(\frac{2BB_1 - AC_1 - CA_1}{2}\right)^2 = (B^2 - AC)(B_1^2 - A_1 C_1). \tag{8}$$

Or A, B, C sont des polynomes en x du second degré. Si nous les déterminons de telle sorte que $B^2 - AC$ soit identique à X, l'équation différentielle (7) se confondra avec la proposée (6), et l'équation (8) représentera la relation algébrique entre x et x_1 [après suppression du facteur $(x - x_1)^2$ que nous mettrons tout à l'heure en évidence].

On pourra prendre pour B un polynome arbitraire du second degré, pour A un des des diviseurs quadratiques de $B^2 - X$ (lequel ne sera déterminé qu'à un facteur constant près); et pour C le quotient $\frac{B^2 - X}{A}$. Cette solution comporte en apparence quatre constantes arbitraires; mais il est aisé de voir que l'équation (8) ne dépendra, en réalité, que d'une seule combinaison de ces constantes.

En effet, le polynome $\frac{2BB_1 - AC_1 - CA_1}{2}$ symétrique en x, x_1 sera de la forme

$$\begin{aligned}&\alpha_{22}x^2x_1^2 + 2\alpha_{21}(x^2x_1 + xx_1^2)\\ &\quad + \alpha_{20}(x^2 + x_1^2) + 4\alpha_{11}xx_1 + 2\alpha_{10}(x + x_1) + \alpha_{00}.\end{aligned}$$

Mais, de plus, pour $x_1 = x$, il se réduit identiquement à

$$B^2 - AC = X = a_0x^4 + 4a_1x^3 + \ldots;$$

d'où les relations

$$\alpha_{22} = a_0, \quad \alpha_{21} = a_1, \quad 2\alpha_{20} + 4\alpha_{11} = 6a_2, \quad \alpha_{10} = a_3, \quad \alpha_{00} = a_4.$$

Joignons-y celle-ci

$$\alpha_{20} = a_2 - 2\mu,$$

μ étant une nouvelle inconnue. Tous les coefficients α pourront s'exprimer au moyen de cette seule indéterminée, et l'on aura

$$\frac{2BB_1 - A_1C - AC_1}{2} = \Psi - 2\mu(x - x_1)^2,$$

Ψ désignant le polynome

$$\begin{aligned}(9)\qquad \Psi = {}&a_0x^2x_1^2 + 2a_1(x^2x_1 + xx_1^2)\\ &+ a_2(x^2 + x_1^2) + 4a_2xx_1 + 2a_3(x + x_1) + a_4.\end{aligned}$$

La relation entre x et x_1 sera donc

$$(10)\qquad [\Psi - 2\mu(x - x_1)^2]^2 = XX_1$$

ou

$$\Psi^2 - XX_1 - 4\mu(x - x_1)^2\Psi + 4\mu^2(x - x_1)^4 = 0.$$

548. Il reste à y mettre en évidence le facteur $(x - x_1)^2$ Posons, à cet effet,

$$\begin{aligned}
M &= a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2,\\
N &= a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3,\\
P &= a_2 x^2 + 2a_3 x + a_4,
\end{aligned}$$

et soient M_1, N_1, P_1 les polynomes analogues en x_1. Nous aurons

$$\begin{aligned}
\Psi &= M\, x_1^2 + 2N\, x_1 + P = M_1 x^2 + 2N_1 x + P_1,\\
X &= M\, x^2 + 2N\, x + P,\\
X_1 &= M_1 x_1^2 + 2N_1 x_1 + P_1;
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Psi^2 - XX_1 = {} & (Mx_1^2 + 2Nx_1 + P)(M_1 x^2 + 2N_1 x + P_1)\\
& -(Mx^2 + 2Nx + P)(M_1 x_1^2 + 2N_1 x_1 + P_1)\\
= {} & (x - x_1)[\,2(NM_1 - N_1 M)xx_1\\
& \qquad + (PM_1 - P_1 M)(x + x_1)\\
& \qquad + 2(PN_1 - P_1 N)].
\end{aligned}$$

Or les déterminants $NM_1 - N_1M$, $PM_1 - P_1M$, $PN_1 - P_1N$ sont évidemment encore divisibles par $x - x_1$; les quotients peuvent se calculer sans difficulté, et la relation entre x, x_1, débarrassée du facteur étranger $(x - x_1)^2$, prendra la forme définitive

$$\Pi - 4\mu\Psi + 4\mu^2(x - x_1)^2 = 0, \tag{11}$$

Π désignant le polynome

$$\begin{aligned}
\Pi = {} & 4(a_0 a_2 - a_1^2)x^2 x_1^2 + 4(a_0 a_3 - a_1 a_2)(x + x_1)xx_1\\
& + (a_0 a_4 - a_2^2)(x + x_1)^2 + 8(a_1 a_3 - a_2^2)xx_1\\
& + 4(a_1 a_4 - a_2 a_3)(x + x_1) + 4(a_2 a_4 - a_3^2).
\end{aligned} \tag{12}$$

549. L'équation (10), résolue par rapport à la constante μ,

donnera cette relation sous la forme irrationnelle

$$(13)\qquad \frac{\Psi \pm \sqrt{X}\sqrt{X_1}}{2(x-x_1)^2} = \mu.$$

Il reste à fixer le double signe. Nous allons établir que le signe + doit être rejeté.

Supposons, en effet, que x, x_1, partant d'une même valeur initiale a, varient de manière à conserver une valeur constante à la fonction

$$F = \frac{\Psi - \sqrt{X}\sqrt{X_1}}{2(x-x_1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\Pi}{\Psi + \sqrt{X}\sqrt{X_1}},$$

les radicaux $\sqrt{X}$, $\sqrt{X_1}$ ayant d'ailleurs la même détermination initiale.

On aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 = 0.$$

Cette équation sera applicable à l'origine, car en ce point F et ses dérivées partielles sont finies. D'ailleurs F est symétrique en x et x_1; on aura donc en ce point $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x_1}$, et, par suite, $dx = -dx_1$. L'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

donnerait, au contraire, $dx = dx_1$.

L'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

entraîne donc la suivante

$$\frac{\Psi - \sqrt{X}\sqrt{X_1}}{2(x-x_1)^2} = \text{const.},$$

où les radicaux $\sqrt{X}$, $\sqrt{X_1}$ ont la même détermination que dans l'équation différentielle.

550. *Polygones de Poncelet.* — Soit C une conique ; les coordonnées de ses points pourront s'exprimer rationnellement au moyen d'un paramètre x. Soit C′ une seconde conique, donnée en coordonnées tangentielles. Les coordonnées de ses tangentes pourront s'exprimer rationnellement par un autre paramètre t.

La condition pour qu'un point x se trouve sur une tangente t sera exprimée par une équation algébrique

$$F(x, t) = 0$$

du second degré par rapport à chacune des variables, car chaque tangente t coupe C en deux points et réciproquement, de chaque point x, on peut mener deux tangentes à C′.

Soit

$$F(x, t) = At^2 + 2Bt + C = 0,$$

et posons $B^2 - AC = X$; soient x_0. x_1 les deux racines de cette équation ; on aura, comme nous l'avons vu,

$$\frac{dx_0}{\sqrt{X_0}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}. \tag{14}$$

Posons, comme au n° 544,

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}.$$

On pourra se servir, pour caractériser les points de la courbe C, du nouvel argument u. A chaque point correspondent, aux périodes près, deux valeurs u et $-u-v$ de cet argument. A ces deux arguments correspondent deux valeurs de $\frac{dx}{du}$ égales et contraires et qui représentent les deux déterminations du radical $\sqrt{\frac{X}{a_0}}$.

Soient u_0 l'un des arguments correspondants au point x_0, u_1 l'un de ceux qui correspondent à x_1 ; on pourra choisir

ce dernier de telle sorte que l'équation (14) se réduise à

$$du_0 = + du_1, \qquad \text{d'où} \qquad u_1 = u_0 + c,$$

c désignant une constante.

Cela posé, par un point x_0 de la conique C menons une tangente t_0 à C'; elle coupera C en un second point x_1. De ce point menons la seconde tangente t_1 à C'; elle coupera C en un nouveau point x_2, duquel nous mènerons une nouvelle tangente t_2 et ainsi de suite. Cherchons à quelles conditions ce polygone de tangentes se fermera au bout de n opérations.

Il faut pour cela que le point x_n se confonde avec x_0. Or les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ admettent respectivement pour l'un de leurs arguments elliptiques $u_0, u_0 + c, \ldots, u_0 + nc$. Ce dernier doit se confondre avec l'un des deux arguments elliptiques u_0 ou $-u_0 - v$ du point x_0. Nous devrons donc avoir

$$u_0 + nc = u_0 + \text{période}$$

ou

$$u_0 + nc = - u_0 - v + \text{période}.$$

La première relation sera satisfaite si c est un $n^{\text{ième}}$ de période. Il est remarquable que cette condition ne dépende pas du choix du point x_0.

La seconde relation est satisfaite pour les quatre systèmes de valeurs

$$u_0 \equiv \frac{-v - nc}{2} + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \qquad (m_1 = 0, 1, m_2 = 0, 1).$$

Mais il est aisé de voir que, si elle est remplie, les tangentes ne forment pas un véritable polygone, mais une ligne polygonale décrite d'abord dans un sens, puis dans l'autre.

En effet, l'égalité

$$u_0 + nc = - u_0 - v + \text{période},$$

de laquelle résulte la coïncidence des points x_0, x_n peut

s'écrire ainsi

$$u_0+(n-k)c=-(u_0+kc)-v+\text{période}$$

et montre que x_k coïncide avec x_{n-k}. La tangente t_k qui joint les points x_k, x_{k+1} coïncidera de même avec t_{n-k-1} qui joint x_{n-k-1} à x_{n-k}.

Deux cas seront à distinguer suivant que n est pair ou impair.

Soit $n=2m$. Les tangentes t_{m-1} et t_m coïncideront. Or ce sont les deux tangentes menées à C' par le point x_m ; ce point sera donc sur C', et sera l'un des quatre points d'intersection de C' et de C.

Soit $n=2m+1$; les points x_m, x_{m+1} coïncident. Or ce sont les points d'intersection de t_m avec C. Donc t_m est l'une des quatre tangentes communes à C et à C'.

551. *Cubiques planes.* — Nous avons vu que ces courbes sont les transformées homographiques de la courbe particulière

$$x=\wp u, \qquad y=\wp' u,$$

sur laquelle il sera commode de faire l'étude de leurs propriétés projectives.

A chaque point de cette courbe correspond (aux périodes près) une seule valeur de u qui le caractérise.

Une courbe de degré n,

$$F(x,y)=0,$$

coupe la proposée aux points dont les arguments sont les zéros de la fonction elliptique

$$F(\wp u, \wp' u)=0.$$

Celle-ci n'a qu'un pôle, $u=0$, d'ordre $3n$; elle a donc $3n$ zéros, dont la somme est une période. Cette remarque est féconde en conséquences.

Ainsi, pour que trois points u_1, u_2, u_3 soient en ligne

droite, il faut que l'on ait

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car la droite qui joint les points u_1, u_2 coupe la cubique en un troisième point, qui ne pourra être que u_3. De même, pour que six points u_1, u_2, ..., u_6 soient sur une conique, il faut et il suffit qu'on ait

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_6 \equiv 0.$$

Le point de contact U d'une tangente menée à la courbe par un de ses points u sera fourni par l'équation

$$u + 2\mathrm{U} \equiv 0,$$

d'où

$$\mathrm{U} \equiv -\frac{u}{2} + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 \qquad (m_1 = 0, 1, m_2 = 0, 1).$$

Il y a donc quatre tangentes.

Soient u_1, u_2, u_3 et u'_1, u'_2, u'_3 les points de rencontre de la courbe avec deux droites arbitraires; joignons $u_1 u'_1$, $u_2 u'_2$, $u_3 u'_3$. Ces droites rencontreront la cubique en trois nouveaux points u''_1, u''_2, u''_3 qui seront en ligne droite. En effet, des équations

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0, \qquad u'_1 + u'_2 + u'_3 \equiv 0,$$

$$u_1 + u'_1 + u''_1 \equiv 0, \qquad u_2 + u'_2 + u''_2 \equiv 0, \qquad u_3 + u'_3 + u''_3 \equiv 0,$$

on déduit

$$u''_1 + u''_2 + u''_3 \equiv 0.$$

La tangente en un point d'inflexion u coupe la courbe en trois points confondus en u; on aura donc

$$3u \equiv 0,$$

d'où

$$u \equiv \frac{2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_2}{3},$$

m_1, m_2 pouvant varier chacun de 0 à 2. Nous aurons donc 9 points d'inflexion, que nous représenterons commodément par la notation

$$u = (m_1 m_2) \qquad (m_1 = 0, 1, 2, m_2 = 0, 1, 2).$$

La droite qui joint deux points d'inflexion $(m_1 m_2)$, $(m'_1 m'_2)$ passera évidemment par le troisième point d'inflexion $(m''_1 m''_2)$, m''_1, m''_2 étant définis par les relations

$$m_1 + m'_1 + m''_1 \equiv 0, \qquad m_2 + m'_2 + m''_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } 3).$$

On obtient ainsi 12 droites

$$\begin{array}{lll}
(00)(01)(02), & (10)(11)(12), & (20)(21)(22), \\
(00)(10)(20), & (01)(11)(21), & (02)(12)(22), \\
(00)(11)(22), & (01)(12)(20), & (02)(10)(21), \\
(00)(12)(21), & (10)(22)(01), & (20)(02)(11),
\end{array}$$

formant quatre triangles, dont chacun contient tous les points d'inflexion.

L'équation du neuvième degré dont dépendent les points d'inflexion se résout par radicaux; car les triangles dépendent d'une équation du quatrième degré. L'un d'eux étant connu, ses côtés dépendront d'une équation du troisième degré. Ceux-ci trouvés, leurs intersections avec la cubique dépendront de nouvelles équations du troisième degré.

Les tangentes à la courbe menées par les points d'inflexion (autres que les tangentes d'inflexion) la couperont aux points dont l'argument est un sixième de période sans être en même temps un tiers de période. Ces points, au nombre de 27, seront ceux où il existe une conique (ne dégénérant pas en une droite double) qui coupe la courbe en six points coïncidents; etc.

552. On obtient des résultats analogues pour les courbes gauches, intersection de deux surfaces du second degré. On vérifie en effet facilement qu'elles sont les transformées homographiques de la courbe

$$x = \wp u, \qquad y = \wp' u, \qquad z = \wp'' u.$$

Elles sont coupées par une surface algébrique d'ordre n, $F(x, y, z) = 0$ en $4n$ points, tels que la somme de leurs arguments soit une période.

CHAPITRE VIII.

INTÉGRALES ABÉLIENNES.

I. — Surfaces de Riemann.

553. Soit u une fonction algébrique de z, définie par une équation irréductible de degré n

$$f(z, u) = 0.$$

Nous admettrons que la courbe $f = 0$ n'ait que des points multiples à tangentes séparées. S'il en était autrement, il nous faudrait opérer sur les variables z, u une transformation birationnelle telle que la courbe transformée jouisse de cette propriété.

En opérant encore, s'il est nécessaire, une transformation homographique, nous pourrons faire en sorte : 1° que la courbe f n'ait pas de point multiple à l'infini ; 2° que l'axe des u ne soit parallèle ni aux asymptotes de f, ni aux tangentes qui passent par les points multiples, ni aux tangentes d'inflexion.

Le nombre des points de f où la tangente est parallèle aux u sera égal à la classe ν de la courbe. Ces points seront des branchements, où deux valeurs de u deviennent égales. Aux points multiples, l'équation en u a aussi des racines égales ; mais, en vertu ~~des vertu~~ des hypothèses faites, chacune des branches de la fonction u restera monodrome aux environs de ces points.

A partir de chacun des ν branchements, traçons une cou-

pure s'étendant jusqu'à l'infini, et ne passant pas par les points multiples. Dans le plan ainsi coupé, chacune des branches $u_1, \ldots, u_n$ de la fonction u sera monodrome; mais, si l'on traverse une coupure, deux de ces branches, u_i et u_k par exemple, seront permutées entre elles. Pour exprimer cette propriété, nous dirons que la coupure en question a le caractère (ik).

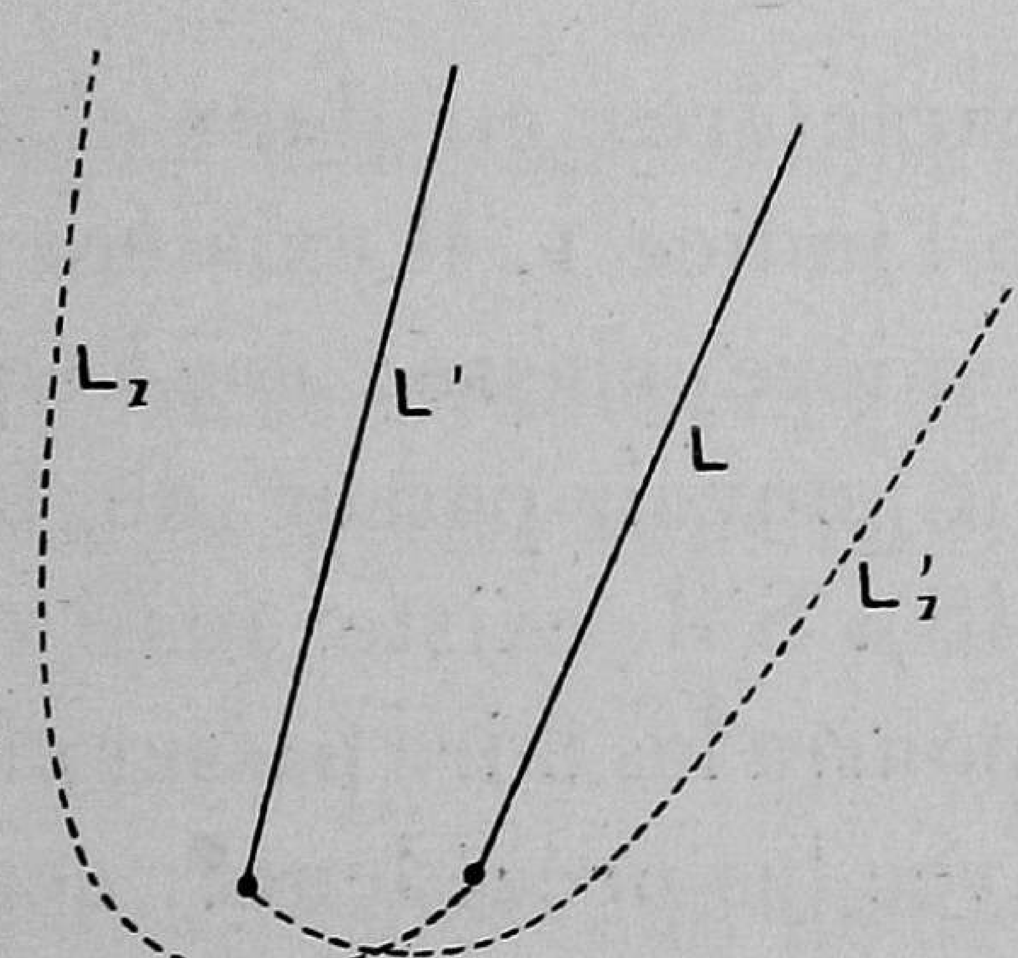
Soient $L_1, \ldots, L_\nu$ les diverses coupures, écrites dans l'ordre où se succèdent leurs points d'intersection avec un cercle de rayon infini, décrit dans le sens direct. La loi de permutation des branches $u_1, \ldots, u_n$ sera entièrement définie lorsqu'on connaîtra le Tableau

$$T = (i_1 k_1)(i_2 k_2)\ldots(i_\nu k_\nu)$$

des caractères de ces coupures.

554. En changeant le tracé des coupures (*fig.* 50), on pourra modifier ce Tableau. Soient, en effet, L, L′ deux

Fig. 50.



coupures consécutives; (ik), $(i'k')$ leurs caractères. Nous dirons que nous faisons *reculer* la coupure L par rapport à L′ si nous lui donnons le nouveau tracé L_1 marqué en pointillé sur la figure 50. La permutation entre les deux branches u_i, u_k, qui se faisait le long de L, se trouve reportée le long de L_1. Dans la région du plan coupé comprise entre ces deux lignes, les branches primitivement dénommées u_i, u_k s'appelleront maintenant u_k, u_i, et les autres garderont leur déno-

mination. Le caractère de L' restera donc inaltéré si les couples d'indices (i, k), (i', k') sont identiques ou complètement différents ; mais, s'ils ont un seul indice commun $i' = i$, le caractère de L', qui était primitivement (ik'), se trouvera changé en (kk').

Supposons, au contraire, que, laissant la coupure L immobile, nous fassions *avancer* L' de manière à lui donner le nouveau tracé L'_1. On verra de la même manière que le caractère de L restera inaltéré après ce changement si i, k, i', k' sont différents, ou si $i' = i$, $k' = k$. Mais si $i' = i$ et $k' \gtrless k$, ce caractère, primitivement égal à (ik), sera changé en (kk').

Nous voyons donc qu'en déplaçant les coupures, nous pouvons intervertir l'ordre de deux caractères consécutifs du Tableau T, à la condition, s'ils ont un indice commun, de le remplacer dans l'un des deux caractères (choisi à volonté) par celui qui lui est associé dans l'autre caractère.

555. M. *Lüroth* a montré que, par une suite d'opérations de ce genre, on peut amener le Tableau T à une forme canonique très simple.

Partageons les caractères en deux classes, suivant qu'ils contiennent ou non l'indice 1. Il existera nécessairement des caractères de la première classe; car l'équation $f = 0$ étant irréductible, on doit pouvoir passer de la branche u_1 aux autres branches (348). S'il existe aussi des caractères de la seconde classe, on pourra les faire passer en queue du Tableau en les permutant avec les précédents ; ceux-ci pourront être modifiés, mais en restant de première classe. Après cette première opération, on aura

$$T = P_1 T_1,$$

P_1 étant un produit de caractères de première classe, T_1 un produit de caractères de seconde classe.

Si tous les caractères du produit P_1 ne sont pas identiques, il contiendra deux caractères consécutifs différents $(1\,i)\,(1\,k)$, dont le produit pourra être transformé en $(1\,k)\,(ki)$. Nous

avons fait ainsi apparaître un nouveau caractère de seconde classe (ki), que nous amènerons à la queue de P_1 pour le réunir à T_1. Nous pourrons ainsi réduire successivement le nombre des facteurs de P_1 jusqu'à ce qu'ils soient tous égaux.

Supposons qu'on ait à ce moment

$$P_1 = (12)^{\lambda_1}, \qquad T = (12)^{\lambda_1} T_1$$

et que n soit > 2. Si $\lambda_1 > 2$, on pourra le réduire de deux unités. En effet, pour qu'on puisse passer de l'une des branches u_1, u_2 à l'une des autres branches $u_3, \ldots$, il faut que T_1 contienne un caractère au moins, tel que (23), où figure l'indice 2. Amenons-le en tête de T_1; T commencera par le produit $(12)^{\lambda_1}(23)$, qu'on peut transformer successivement dans les suivants :

$$\begin{array}{ll}
(12)^{\lambda_1-1}(23)(13), & (12)^{\lambda_1-2}(23)\,(13)^2, \\
(12)^{\lambda_1-2}(13)(12)(13), & (12)^{\lambda_1-2}(13)^2(23), \\
(12)^{\lambda_1-3}(23)(12)(13)(23), & (12)^{\lambda_1-3}(23)^2(12)(23), \\
(12)^{\lambda_1-3}(23)(13)(23)^2, & (12)^{\lambda_1-2}(23)^3.
\end{array}$$

En répétant au besoin cette opération, on amènera λ_1 à ne pas surpasser 2.

Cela fait, opérons sur le produit T_1 comme nous l'avons fait sur T; on pourra le mettre sous la forme

$$T_1 = (23)^{\lambda_2} T_2,$$

T_2 étant un produit de caractères où ne figure plus l'indice 2, et λ_2 étant au plus égal à 2 (si $n - 1 > 2$). Continuant ainsi, nous aurons finalement

$$T = (12)^{\lambda_1}(23)^{\lambda_2}\ldots(n-1, n)^{\lambda_{n-1}},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ étant des entiers positifs, dont le dernier seul peut surpasser 2.

Ces entiers sont pairs; car si λ_2, par exemple, était impair, en décrivant un cercle de rayon infini avec la détermination initiale u_3, on obtiendrait comme valeur finale u_2.

L'infini serait donc un branchement, contrairement à nos hypothèses.

On aura donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-2} = 2, \qquad \lambda_{n-1} = \nu - 2(n-2) = 2p + 2,$$

p désignant le genre de le courbe f (t. I, n° 597).

556. Concevons, avec *Riemann*, un système de n feuillets plans $P_1, \ldots, P_n$ étendus sur le plan P des z; chacun de ces feuillets, tel que P_i, étant d'ailleurs coupé suivant celles des lignes $L_1, \ldots, L_\nu$ dans le caractère desquelles figure l'indice i.

Une quelconque de ces lignes, L, ayant pour caractère (ik), sera une coupure pour les deux feuillets P_i, P_k. Imaginons qu'on soude chacun des bords de la coupure pratiquée sur P_i avec le bord opposé de la coupure faite sur P_k. Si nous opérons de même pour chacune des lignes $L_1, \ldots, L_\nu$, toutes ces soudures auront pour résultat de réunir nos n feuillets en une surface unique S.

A chaque point (z, u_i) de la courbe $f(z, u) = 0$, faisons correspondre sur S un point ζ ayant pour projection z et situé sur le feuillet P_i. Si le point (z, u_i) se déplace sur f d'une manière continue, le point ζ décrira sur S une ligne continue; car une discontinuité ne pourrait se produire dans cette trajectoire que, si z traversant une coupure, u_i se trouvait changé en une autre branche u_k ; mais ζ passe alors du feuillet P_i sur le feuillet P_k et, ces deux feuillets étant soudés le long de la coupure, la continuité est maintenue.

La variation simultanée des deux quantités z, u (liées par l'équation $f = 0$) est donc figurée sans ambiguïté par le déplacement de ζ sur la surface S ; et si ζ décrit un contour fermé, z et u reprendront au retour leur valeur primitive.

La variable ζ étant constamment égale à z en valeur numérique, nous pourrons l'appeler dorénavant z ; comme elle ne parcourt plus le plan simple, mais la surface de Riemann, il ne suffira plus, pour qu'elle décrive un contour fermé, qu'elle

revienne à sa valeur primitive ; il faudra de plus qu'elle se trouve au retour sur le même feuillet qu'au départ.

557. Les points de la surface S correspondent uniformément aux cycles de la courbe f.

En effet, considérons d'abord un point (z_0, u_{0i}), qui soit simple sur la courbe f. C'est l'origine d'un cycle unique, ayant pour équations

$$(1) \qquad z = z_0 + t, \qquad u = u_{0i} + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots,$$

si la tangente n'est pas parallèle aux u, ou

$$(2) \qquad z = z_0 + t^2, \qquad u = u_{0i} + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots$$

dans le cas contraire. D'autre part, ce point correspond à un point unique de la surface S.

Considérons maintenant un point multiple, où se croisent μ branches, telles que $u_1, \ldots, u_\mu$. Il sera l'origine de μ cycles de la forme (1), représentant chacun l'une de ces branches aux environs du point multiple. D'autre part il correspond à μ points de S, respectivement situés sur les feuillets $P_1, \ldots, P_\mu$, qui ne sont pas soudés entre eux en ce point.

Enfin la courbe f a n cycles dont l'origine est à l'infini, et dont les équations ont la forme

$$(3) \qquad z = \frac{1}{t}, \qquad u = \frac{\alpha}{t} + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots$$

Nous les regarderons comme correspondant à autant de points situés à l'infini sur la surface S.

558. Une portion finie s de la surface S, bornée par un ou plusieurs contours fermés, est dite *connexe*, s'il est possible de réunir deux quelconques de ses points par une ligne continue entièrement située sur s.

La connexité sera *simple*, si toute transversale ab tracée à l'intérieur de s, entre deux points de sa frontière (et de manière à ne pas se couper elle-même), partage s en deux régions distinctes, de telle sorte que, pour passer de l'une à

l'autre, il faille nécessairement sortir de s ou traverser ab. Elle sera *double*, si, en coupant s par une transversale t_1 convenablement choisie, la nouvelle surface s_1 ainsi obtenue est simplement connexe. Généralement, elle sera d'ordre N, si une coupure, faite suivant une transversale convenable t_1, transforme s en une surface de connexité $N-1$.

D'après cette définition, si s est connexe d'ordre N, on pourra la transformer en une surface simplement connexe, en la coupant successivement par $N-1$ transversales, dont chacune ait ses extrémités, soit sur la frontière de s, soit sur une des transversales précédentes, mais n'ait aucun autre point commun avec ces lignes, et ne se coupe pas elle-même.

559. Lemme. — *Les deux régions s_1, s_2, dans lesquelles une surface simplement connexe s est partagée par une transversale ab, sont elles-mêmes simplement connexes.*

Coupons, en effet, s_1 par une transversale cd; trois cas peuvent se présenter :

1° Si c et d sont sur la frontière de s, cd sera une transversale sur s, qu'elle partagera en deux régions séparées. On ne pourra donc passer d'un côté à l'autre de cette ligne, en restant sur s, et, *a fortiori*, en restant sur s_1, sans la traverser ;

2° Si c est sur la frontière de s, et d sur la première transversale ab, la ligne cdb sera une transversale de s. Pour passer d'un côté à l'autre de cd, il faudra donc nécessairement, ou sortir de s, et par suite de s_1, ou traverser cdb. Mais, en traversant db, qui fait partie de la frontière de s_1, on sortirait de s_1. Pour passer d'un côté à l'autre de cd, il faudra donc nécessairement traverser cette ligne, ou sortir de s_1.

3° Si c et d sont tous deux sur ab, la ligne $acdb$ sera une transversale sur s. Pour passer d'un côté à l'autre de cd, il faudra ou sortir de s, et par suite de s_1, ou traverser $acdb$.

Or, en traversant ac ou db, on sortirait de s_1. Il faudra donc, ou sortir de s_1 ou traverser cd.

560. Théorème. — *Coupons une surface* s, *de connexité* N, *par* μ *transversales successives; soient* $s_1, \ldots, s_m$ *les régions distinctes en lesquelles elle se trouve partagée;* $N_1, \ldots, N_m$ *leurs connexités respectives. Nous aurons la relation*

$$(4) \qquad \sum_1^m (N_i - 2) + \mu = N - 2.$$

On peut, en effet, en coupant la surface s_i par $N_i - 1$ transversales convenablement choisies, la changer en une surface σ_i simplement connexe. Opérant de même sur chacune des surfaces $s_1, \ldots, s_m$, on voit que, par un système de

$$\mu + \sum_1^m (N_i - 1)$$ transversales successives $\theta_1, \theta_2, \ldots$, on a décomposé s en régions simplement connexes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$

On peut, d'autre part, tracer sur s un second système de $N - 1$ transversales $t_1, t_2, \ldots$, qui la transforme en une surface σ simplement connexe.

Une surface simplement connexe restant évidemment telle, si l'on déplace infiniment peu une portion de sa frontière, nous pourrons, en modifiant légèrement, s'il y a lieu, le tracé des deux systèmes de transversales, faire en sorte qu'ils ne se coupent qu'en un nombre fini de points. Soit δ le nombre de ces points. Ils partagent les transversales $\theta_1, \theta_2, \ldots$ du premier système en $\mu + \sum_1^m (N_i - 1) + \delta$ tronçons et celle du second système $t_1, t_2, \ldots$ en $N - 1 + \delta$ tronçons.

Cela posé, cherchons en combien de régions distinctes s sera partagé par l'ensemble des lignes $t_1, t_2, \ldots, \theta_1, \theta_2, \ldots$ Traçons d'abord les lignes $t_1, t_2, \ldots$; nous obtiendrons une seule région simplement connexe σ. Traçons maintenant successivement les divers tronçons de θ_1, puis ceux de $\theta_2, \ldots$;

chacun d'eux sera une transversale pour une des régions préexistantes, qu'il partagera en deux. Le nombre final des régions sera donc

$$1 + \mu + \sum_1^m (N_i - 1) + \delta.$$

Supposons, au contraire, qu'on ait commencé par tracer les lignes θ_1, θ_2, ... Nous aurons à ce moment m régions simplement connexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Traçons successivement les divers tronçons de t_1, puis ceux de t_2, etc. Chacun d'eux partageant en deux parties une des régions préexistantes, le nombre final des régions sera

$$m + N - 1 + \delta.$$

En égalant cette expression à la précédente, on obtient la formule (4).

561. Deux cas particuliers de cette formule méritent d'être signalés :

1° Si $m = 1$, elle se réduit à

$$N_1 = N - \mu.$$

Donc, *en coupant une surface s par* μ *transversales successives quelconques qui ne la partagent pas en régions séparées, on réduit de* μ *son ordre de connexité.*

Si, en outre, $N_1 = 1$, il vient $\mu = N - 1$.

Donc, *le nombre des transversales nécessaires pour rendre s simplement connexe est indépendant du tracé de ces transversales.*

2° Si $N_1, \ldots, N_m$ sont tous égaux à l'unité, la formule se réduit à

$$(5) \qquad \mu - m = N - 2$$

et fournira N, si l'on connaît μ et m.

562. Théorème. — *Supposons :*

1° *Que la surface s soit bornée par* λ *contours fermés distincts* $A_1, \ldots, A_\lambda$;

2° *Qu'on puisse, sans détruire sa connexité, la couper suivant p contours fermés* $C_1, \ldots, C_p$ *qui ne se traversent pas mutuellement ;*

3° *Que l'adjonction d'un nouveau contour quelconque* C_{p+1} *ne traversant pas les précédents détruise la connexité.*

L'ordre de connexité de s sera $\lambda + 2p$.

Soit, en effet, s' la surface obtenue en coupant s suivant $C_1, \ldots, C_p$. Elle est encore connexe. Soient donc γ_1 un point de C_1 ; γ'_1, γ''_1 deux points infiniment voisins de γ_1, situés de part et d'autre de C_1. On pourra les réunir par une ligne Δ, tracée sur s'. Lorsque γ'_1, γ''_1 viendront se confondre avec γ_1, Δ deviendra un contour fermé D_1, qui traverse C_1 en un seul point γ_1.

Coupons s' suivant D_1. La nouvelle surface s'_1 ainsi obtenue sera encore connexe, car on peut passer d'un côté à l'autre de D_1 en suivant le contour C_1. On pourra de même tracer sur s'_1 un contour fermé D_2, traversant C_2 en un seul point γ_2 ; et en coupant s'_1 suivant D_2, on obtiendra une surface connexe s'_2. Continuant ainsi, on arrivera à une surface connexe s'' obtenue en coupant s suivant les $2p$ contours C_1, D_1 ; C_2, D_2 ; ... ; C_p, D_p. Cette nouvelle surface sera limitée par $\lambda + p$ contours fermés, à savoir :

Les λ contours $A_1, \ldots, A_\lambda$;

Les p contours $R_1 = C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}, \ldots, R_p = C_p D_p C_p^{-1} D_p^{-1}$ obtenus respectivement en suivant : 1° l'un des bords de la coupure C_i ; 2° l'un des bords de la coupure D_i ; puis, dans le sens inverse, 3° le second bord de C_i ; 4° le second bord de D_i.

Nous donnons le nom de *rétrosections* à ces contours $R_1, \ldots, R_p$.

563. Soit maintenant ω un point quelconque de s''; joignons-le :

1° Aux contours $A_1, \ldots, A_\lambda$ par des lignes $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\lambda$;
2° Aux points $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ par des lignes $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$.

Si nous coupons s'' suivant les lignes $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_\lambda, \mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_p$, nous obtiendrons une surface s''', bornée par un seul contour fermé Q qui résulte de la succession des lacets $\mathcal{L}_1 A_1 \mathcal{L}_1^{-1}, \ldots, \mathfrak{M}_1 R_1 \mathfrak{M}_1^{-1}, \ldots$. Cette surface sera encore connexe, car on peut passer d'un bord à l'autre d'une des sections $\mathcal{L}_i$ ou $\mathfrak{M}_i$ en suivant le contour A_i ou R_i.

D'ailleurs s''' sera simplement connexe. Supposons, en effet, qu'on pût la couper par une transversale $\delta\varepsilon$ sans détruire sa connexité. Soient β un point de la transversale; β', β'' deux points infiniment voisins de β situés de part et d'autre de $\delta\varepsilon$; on pourrait les joindre par une ligne Γ située sur s'''. Lorsque β', β'' se confondront avec β, Γ deviendra un contour fermé C_{p+1}, lequel ne coupe pas $C_1, \ldots, C_p$. Il devrait donc, d'après l'hypothèse, partager s''' en deux régions distinctes, ce qui n'est pas, car on peut passer d'un bord à l'autre de la ligne C_{p+1} en suivant la ligne $\beta\delta$, puis la portion de Q comprise entre les points δ et ε, et enfin la ligne $\varepsilon\beta$.

564. Cela posé, pour passer de la surface s à la surface simplement connexe s''', il suffit d'y tracer les $\lambda + 2p - 1$ transversales successives

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2,\ \mathcal{L}_3,\ \ldots,\ \mathcal{L}_\lambda,\ \mathfrak{M}_1 C_1 \mathfrak{M}_1^{-1},\ \ldots,\ \mathfrak{M}_p C_p \mathfrak{M}_p^{-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D_1,\ \qquad \ldots,\ \qquad D_p. \end{array} \right.$$

Donc l'ordre de connexité de s est bien $\lambda + 2p$.

Nous désignerons sous le nom de *système canonique* le système particulier de transversales (6) auquel nous venons d'arriver.

565. Nous dirons que deux lignes Λ, Λ', tracées entre deux points O et z de la surface s, sont *équivalentes* si l'on peut

passer de l'une à l'autre par une déformation continue (sans sortir de s).

La ligne Λ' est évidemment équivalente à la succession du contour fermé $\Lambda'\Lambda^{-1}$ et de la ligne Λ. Elle sera donc équivalente à Λ, si le contour $\Lambda'\Lambda^{-1}$ peut se réduire à un simple point par une déformation continue, auquel cas nous dirons que ce contour est *équivalent à zéro*.

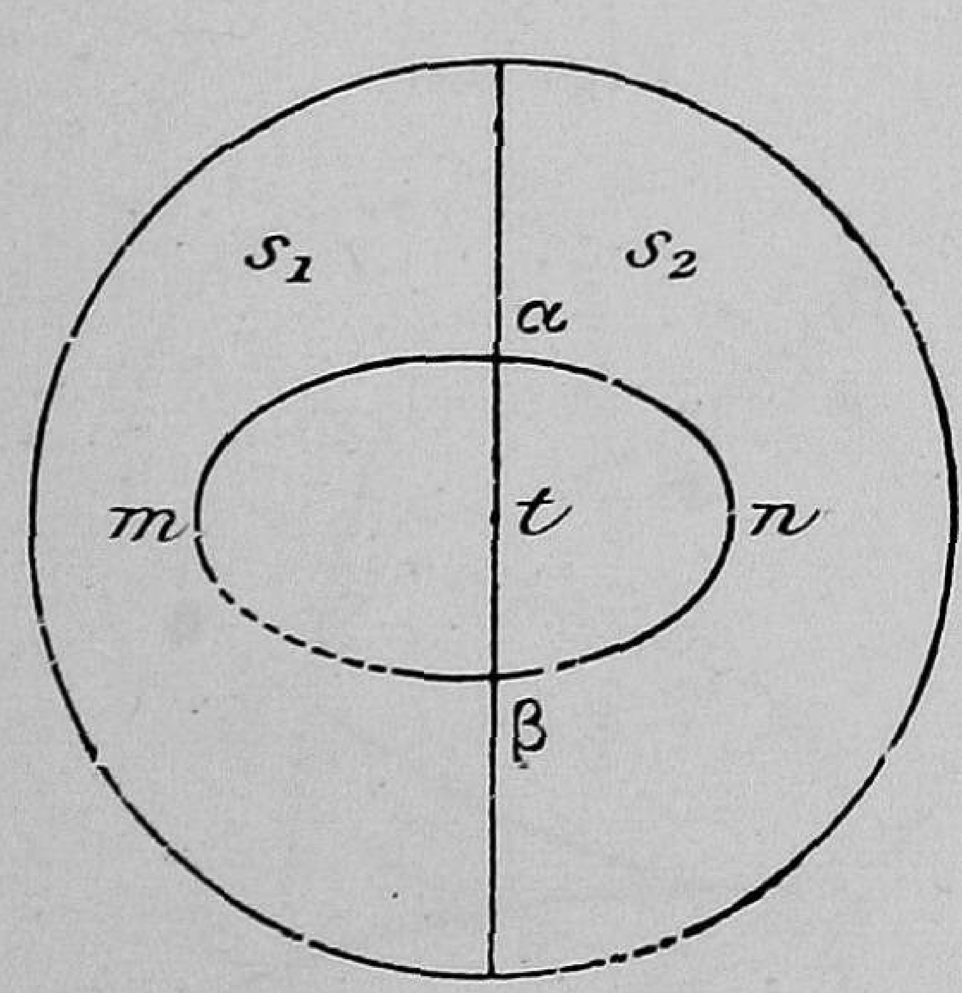
566. Théorème. — *Tout contour fermé* Γ *tracé sur une surface* s *à connexité simple est équivalent à zéro.*

En effet, coupons la surface par une transversale t; elle la partage en deux régions distinctes, s_1 et s_2. Nous allons montrer que ce théorème est vrai pour s, s'il l'est pour s_1 et pour s_2.

Nous pouvons admettre que Γ ne traverse t qu'en un nombre fini de points, car nous pourrions au besoin substituer à Γ un contour polygonal infiniment voisin, et prendre aussi une transversale polygonale.

Soient α, β (*fig.* 51) deux points d'intersection consécu-

Fig. 51.



tifs de Γ avec t. Le contour $\Gamma = m\alpha n\beta m$ équivaut évidemment à $m\alpha n\beta.\beta\alpha.\alpha\beta.\beta m$, et, comme la portion $\alpha n\beta.\beta\alpha$, entièrement située sur s_2, est équivalente à zéro, C équivaut à $m\alpha\beta m$. Dans ce nouveau contour, le nombre des points d'intersection avec t est réduit de deux unités.

Par une suite de réductions de ce genre, on peut ramener

le nombre des intersections à être < 2. Mais on ne peut passer de la région s_1 à la région s_2, ou réciproquement (en restant sur s) sans traverser t. Le nombre des intersections doit donc être pair pour que le contour se ferme. Il sera donc nul, et le contour considéré, étant entièrement situé dans la région s_1, sera équivalent à zéro.

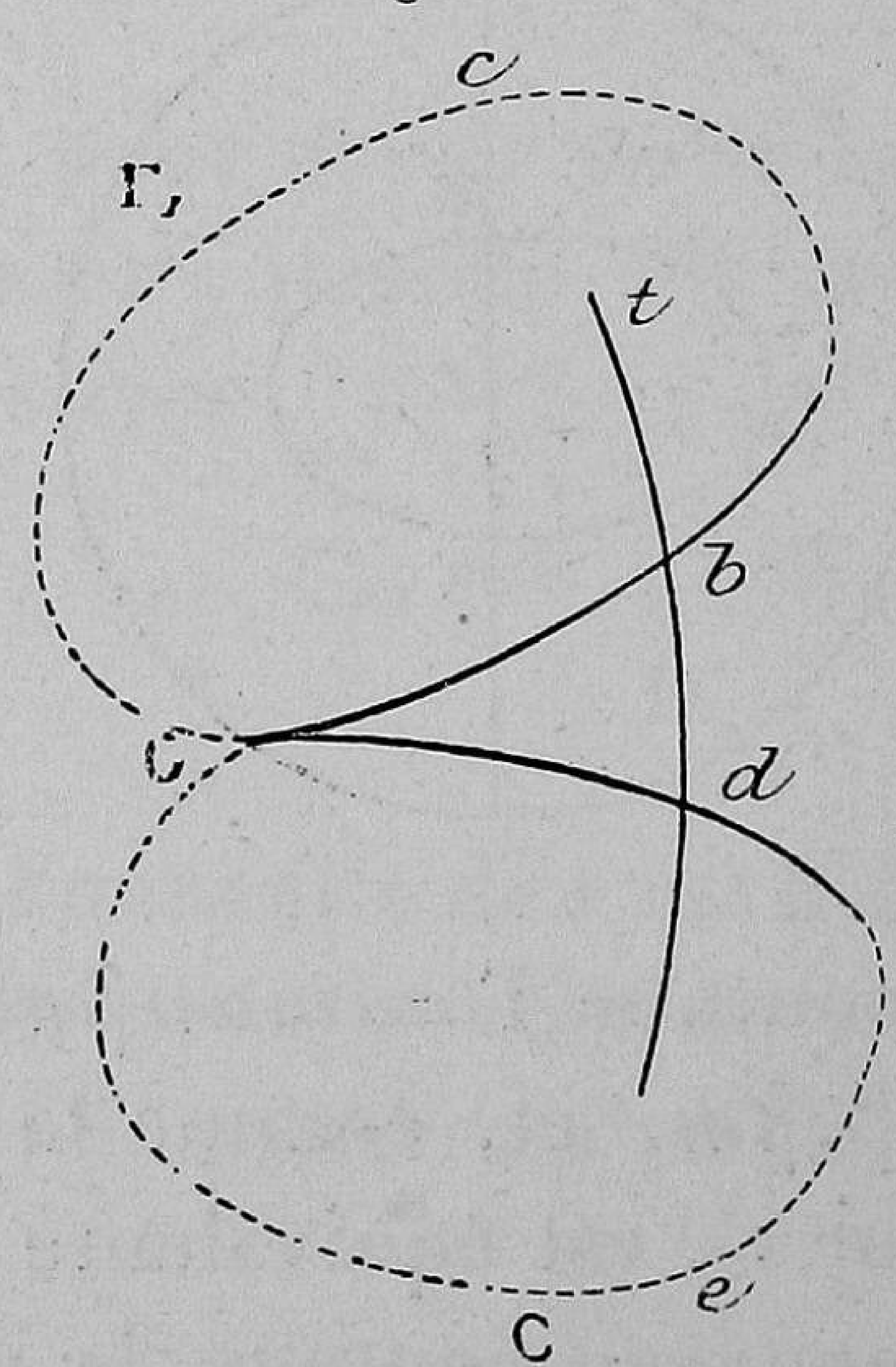
Nous pouvons subdiviser de même chacune des régions s_1, s_2 par une nouvelle transversale, et ainsi de suite, et ramener ainsi la démonstration du théorème au cas d'une région infiniment petite, pour laquelle il devient évident.

567. Théorème. — *Tout contour fermé tracé sur une surface s, de connexité N, à partir d'un de ses points O, équivaut à une combinaison de N — 1 contours déterminés $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{N-1}$ décrits successivement, une ou plusieurs fois chacun, dans un sens ou dans l'autre.*

Traçons, en effet, sur s une transversale t, qui la transforme en une surface s_1, N — 1 fois connexe.

Soient b', b'' deux points situés en regard l'un de l'autre sur les deux bords de la coupure t. On pourra les joindre au point O par des lignes tracées sur s_1. La réunion de ces

Fig. 52.



deux figures constituera un contour $\Gamma_1 = ObcO$ (*fig.* 52) tracé sur s et traversant t en un seul point $b' = b'' = b$.

Soit $C = O\,de\,O$ un autre contour fermé partant de O. Supposons qu'il traverse la ligne t en m points. Soit d le premier de ces points d'intersection. Le contour C équivaut évidemment au suivant

$$Od.db.bO.Ob.bcO.Ocb.bd.deO,$$

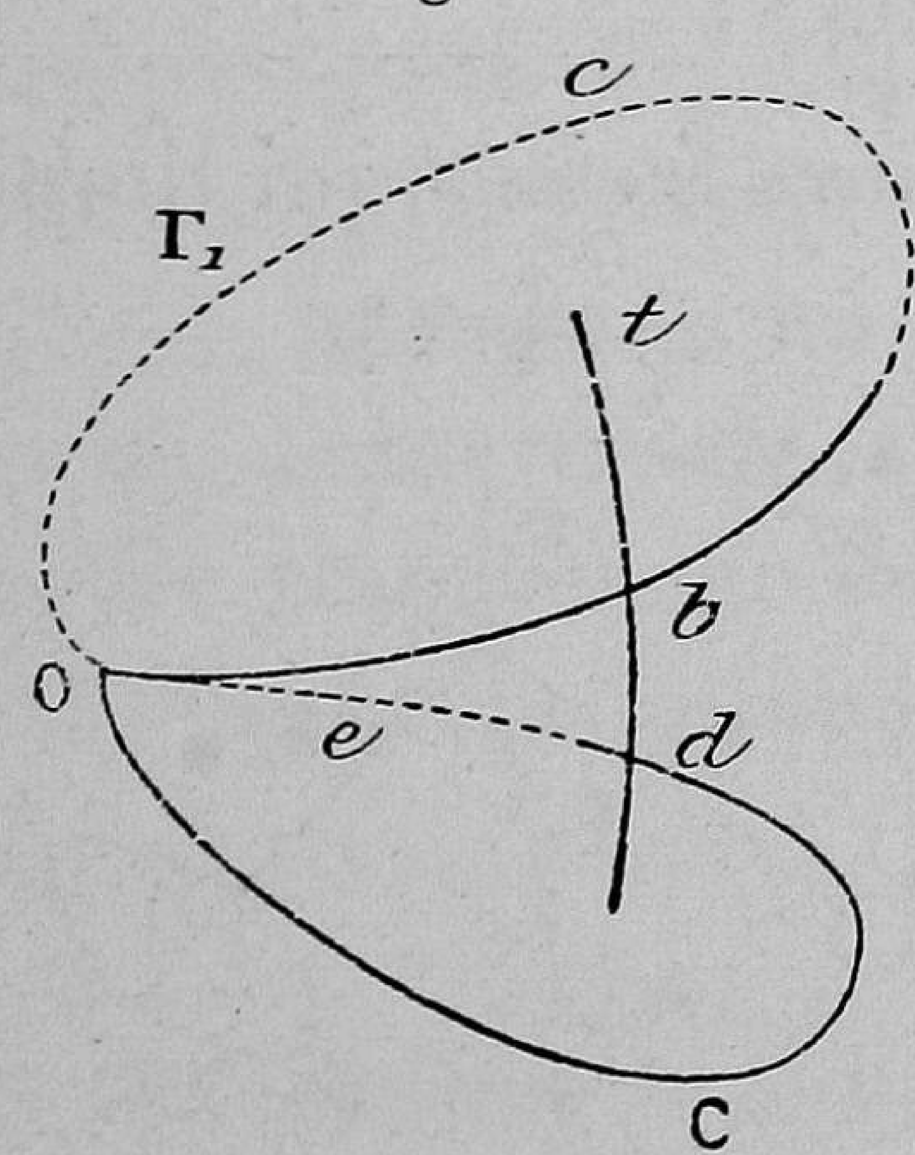
lequel est la combinaison de trois contours successifs : le premier, $OdbO$, ne traverse pas t ; le second, $ObcO$, n'est autre que Γ_1 ; et le troisième $Ocbde\,O = C'$ ne traverse plus t qu'en $m-1$ points, car il a cessé de la traverser au point d.

Nous avons supposé, dans la figure précédente, que la ligne $C = OdeO$ franchissait la transversale de gauche à droite, comme la ligne $O\,bc$. Si elle la franchissait dans le sens contraire, comme dans la figure 53, C, serait équivalent à

$$OdbcOcbObdeO.$$

Ce nouveau contour se compose de trois contours partiels : le premier, $O\,dbc\,O = C'$, ne traverse plus t ; le second,

Fig. 53.



$OcbO$, n'est autre que Γ_1^{-1} ; le dernier, $O\,bde\,O$, ne coupe plus la transversale qu'en $m-1$ points.

On verra de même que C' équivaut à la succession de trois contours, le premier ne traversant plus t ; le second étant Γ_1 ou Γ_1^{-1}, et le troisième ne traversant plus t qu'en $m-2$ points.

Donc, en dernière analyse, C équivaudra à une combinaison des contours Γ_1 et Γ_1^{-1} avec d'autres contours, lesquels, ne traversant plus t, seront situés sur s_1.

568. Coupons s_1 par une seconde transversale t_1, qui la transforme en une surface s_2 de connexité $N-2$. On pourra de même tracer sur s_1, à partir du point O, un contour fermé Γ_2, qui ne traverse t_1 qu'en un seul point; et l'on montrera que tout contour tracé sur s_1 équivaut à une combinaison des contours Γ_2 et Γ_2^{-1} avec des contours tracés sur s_2.

On poursuivra cette réduction jusqu'à ce qu'on arrive à une surface simplement connexe s_{N-1}. Les contours tracés sur celle-ci étant équivalents à zéro, on voit finalement que tout contour C tracé sur s se réduit à une combinaison des contours

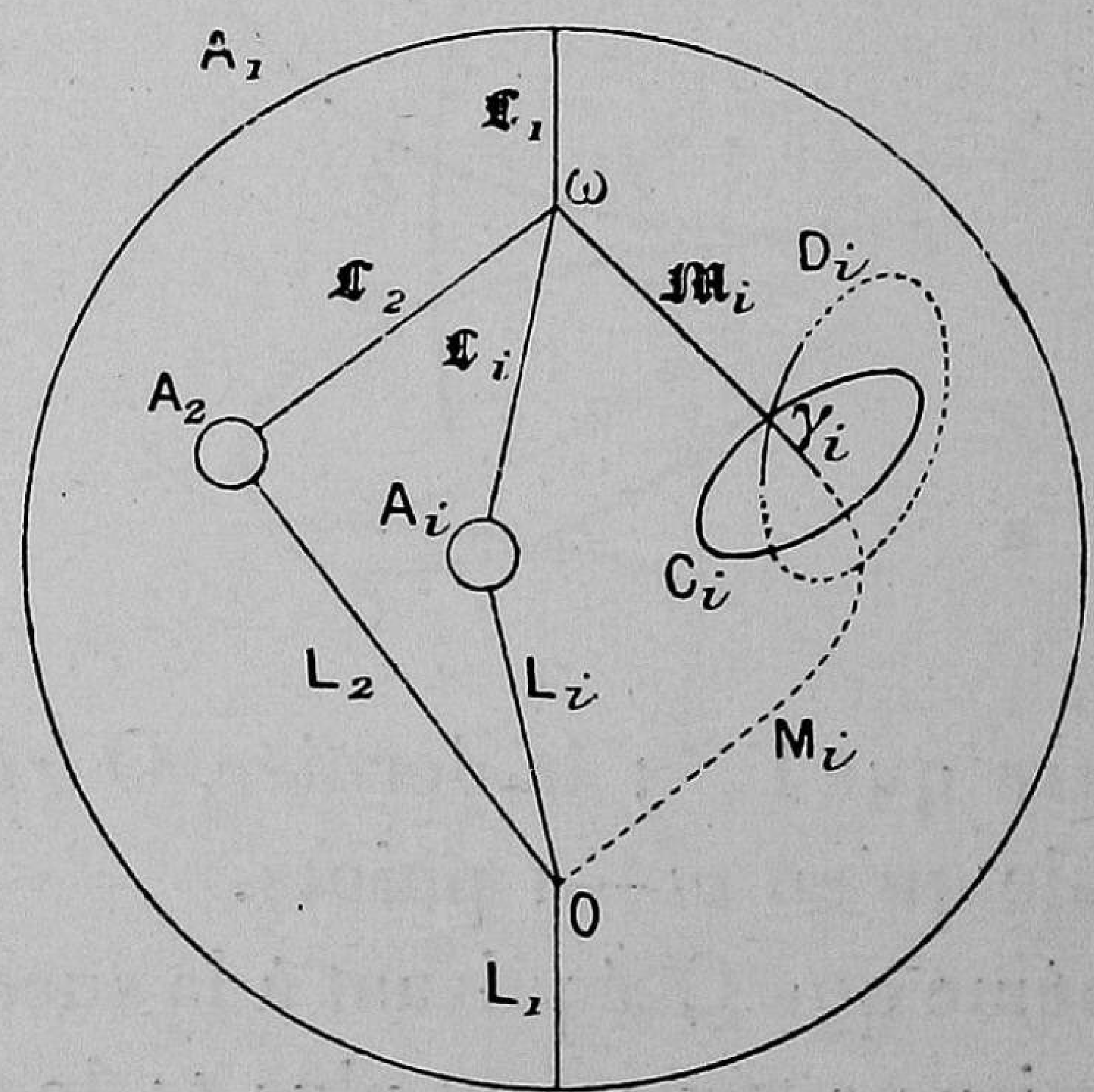
$$\Gamma_1, \quad \Gamma_1^{-1}, \quad \ldots, \quad \Gamma_{N-1}, \quad \Gamma_{N-1}^{-1},$$

Γ_i désignant un contour qui traverse en un seul point la transversale t_i, sans traverser les précédentes.

569. Soient (*fig.* 54) :

$A_1, \ldots, A_\lambda$ les contours fermés qui limitent s;

Fig. 54.



$R_1 = C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}, \ldots, R_p = C_p D_p C_p^{-1} D_p^{-1}$ les rétrosections que l'on peut tracer sur cette surface ;

γ_i le point d'intersection de C_i et de D_i ;
ω un point arbitraire de s ;
$\mathcal{L}_i$ une ligne joignant ω à A_i ;
$\mathfrak{M}_i$ une ligne le joignant à γ_i.

Nous avons vu (564) qu'on peut adopter comme système canonique de transversales le suivant :

$$\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2,\quad \mathcal{L}_3,\quad \ldots,\quad \mathcal{L}_\lambda,\quad \ldots,\quad \mathfrak{M}_i C_i \mathfrak{M}_i^{-1},\quad D_i,\quad \ldots.$$

Joignons le point O aux contours $A_1, A_2, \ldots, A_\lambda$ par des lignes $L_1, \ldots, L_\lambda$. De même joignons-le aux points $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ par des lignes $M_1, \ldots, M_p$, tracées de telle sorte qu'aux environs du point γ_i la ligne M_i se trouve dans celui des quatre angles formés par C_i et D_i qui est opposé à celui qui contient $\mathfrak{M}_i$.

Considérons le système des lacets

$$(7)\qquad L_i A_i L_i^{-1},\quad \ldots,\quad M_i D_i M_i^{-1},\quad M_i C_i M_i^{-1},\quad \ldots.$$

L'un de ces lacets, le premier, par exemple, équivaut à une combinaison des autres. Mais ces derniers sont indépendants et pourront être pris pour $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{N-1}$.

En effet, le contour $L_2 A_2 L_2^{-1}$ coupe une seule des transversales, à savoir $\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2$, et cela en un seul point ; si $i > 2$, $L_i A_i L_i^{-1}$ coupe la seule transversale $\mathcal{L}_i$ en un seul point, $M_i D_i M_i^{-1}$ coupe la seule transversale $\mathfrak{M}_i C_i \mathfrak{M}_i^{-1}$ en un seul point γ_i ; enfin $M_i C_i M_i^{-1}$ ne coupe qu'une seule transversale D_i au seul point γ_i.

570. Cherchons à déterminer le nombre p des rétrosections que l'on peut tracer sur la surface S de Riemann, considérée dans toute son étendue (ou plus généralement sur la surface S′ obtenue en excluant de S les portions intérieures à des contours fermés infiniment petits $A_2, \ldots, A_\mu$ tracés autour de quelques-uns de ses points $a_1, \ldots, a_\mu$, en nombre limité.

La surface S′ s'étendant jusqu'à l'infini, il conviendra,

pour lui appliquer les théorèmes précédents, d'en exclure les points à l'infini, en considérant seulement la portion s' de cette surface située dans l'intérieur d'un cylindre droit ayant pour base un cercle C de rayon infini tracé sur le plan des z.

L'infini étant un point ordinaire pour la courbe f, chacune des n racines de l'équation $f(z, u) = 0$ revient à sa valeur initiale lorsque z décrit le cercle C. L'intersection de S' avec le cylindre se compose donc de n circuits fermés distincts, $A_{\mu+1}, \ldots, A_{\mu+n}$, qui constituent avec $A_1, \ldots, A_\mu$ la frontière de s'.

Le nombre p sera donné (562) par la formule

$$n + \mu + 2p = N,$$

N désignant l'ordre de connexité de s'.

Pour déterminer ce dernier nombre, nous remarquerons que la surface s' a été obtenue en soudant ensemble, suivant les coupures primitives, $L_1, \ldots, L_\nu$ les feuillets plans $P_1, \ldots, P_n$. Le long de chacune de ces lignes, telle que L_i, nous avons fait deux soudures σ_i et σ'_i, dont la réunion constitue une transversale $\sigma_i^{-1}\sigma'_i$ ayant ses extrémités sur la frontière de s'. En coupant s' suivant ces ν transversales, de manière à détruire les liaisons établies, nous serons revenu au système primitif de n feuillets. Joignons encore par une transversale chacun des contours $A_1, \ldots, A_\mu$ au circuit qui limite le feuillet plan sur lequel il est situé. Chaque feuillet deviendra simplement connexe.

La surface s' étant ainsi décomposée par $\nu + \mu$ transversales en n régions simplement connexes, on aura, d'après la formule (5),

$$\nu + \mu - n = N - 2,$$

et par suite

$$n + 2p = \nu - n + 2,$$

$$p = \frac{\nu}{2} - n + 1.$$

Le nombre p ainsi obtenu n'est autre chose que le genre de la courbe f (t. I, 597).

II. — Intégrales abéliennes. Périodicité.

571. Aux environs d'un point $a = (z_0, u_0)$ de la surface de Riemann, z et u peuvent être développés (557) suivant les puissances entières et croissantes d'un paramètre t (égal à $z - z_0$ dans le cas général, à $\sqrt{z - z_0}$ aux points où la tangente est parallèle à l'axe des u, à $\frac{1}{z}$ pour les points à l'infini).

Soit F une fonction analytique de z ; nous dirons que le point a est *ordinaire* pour cette fonction, si aux environs de ce point, elle est développable en une série de puissances entières et positives de t.

Ce sera un *pôle*, si le développement, procédant toujours suivant les puissances entières et croissantes, commence par des puissances négatives.

Ce sera *un point critique logarithmique*, si le développement contient en outre un terme de la forme $C \log t$.

Nous dirons encore que la fonction F est *monodrome* dans une portion s de la surface de Riemann, si, lorsque la variable z varie arbitrairement sans sortir de s, F reprend toujours la même valeur lorsque z revient au même point ; qu'elle est *synectique*, si elle est monodrome et sans point critique.

Enfin, si F est monodrome sur toute la surface S, nous dirons qu'elle est *uniforme* sur cette surface.

572. Théorème. — *Soient s une région de la surface de Riemann, finie et à connexion simple ;* $F = P + Qi$ *une fonction de z qui n'acquière pas de point critique, lorsque z se meut arbitrairement sur s.*

1° *Les fonctions* F *et* $\int F\,dz$ *seront synectiques dans la région s.*

2° *L'intégrale* $\int F\,dz$ *prise suivant le contour qui limite s sera nulle.*

3° *L'intégrale* $\int P\,dQ$, *prise suivant ce même contour (supposé décrit dans un sens tel qu'on ait la région s à sa gauche), a une valeur positive (à moins que* F *ne se réduise à une constante, auquel cas elle s'annule évidemment).*

Coupons s par une transversale arbitraire; elle la décomposera en deux régions s_1, s_2. Et le théorème sera vrai pour s, s'il l'est pour s_1 et s_2, car les intégrales $\int F\,dz$, $\int P\,dQ$, prises sur le contour de s, sont évidemment égales à la somme des intégrales analogues prises sur le contour de s_1 et sur celui de s_2, les intégrales suivant les transversales se détruisant.

Subdivisons s_1, s_2 par de nouvelles transversales; la démonstration sera ramenée au cas d'un élément de surface infiniment petit σ. Or, dans un semblable élément, F est représenté par une série de puissances

$$F = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots .$$

On aura, d'autre part, suivant que la tangente au point (z_0, u_0) qui correspond à $t = 0$ est parallèle ou non à l'axe des u,

$$z = z_0 + t^2 \quad \text{ou} \quad z = z_0 + t,$$

d'où

$$dz = 2t\,dt \quad \text{ou} \quad dz = dt.$$

Donc F et $\int F\,dz$ sont des fonctions synectiques dans cet élément.

La première partie du théorème est donc établie; et la seconde en est une conséquence immédiate.

573. Pour établir la troisième, nous remarquerons que, lorsque z décrit σ de manière à laisser son intérieur à gauche, t décrit autour de l'origine des coordonnées, dans le sens direct, un contour fermé infiniment petit τ, qui ne se traverse pas lui-même. Un semblable contour est la limite d'un contour polygonal de même sorte. Celui-ci peut lui-même être

considéré comme la limite d'un contour fermé de même nature, ayant en chaque point une tangente dont la direction varie d'une manière continue, et ne coupant une parallèle aux axes qu'en un nombre fini de points.

Tout revient donc à démontrer la proposition pour un contour τ de cette dernière sorte.

Prenons pour variable indépendante la quantité complexe

$$t = x + iy.$$

On aura

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy,$$

d'où

$$\int P\, dQ = \int_\tau P \frac{\partial Q}{\partial x} dx + P \frac{\partial Q}{\partial y} dy.$$

Mais cette intégrale curviligne est égale (**165**) à l'intégrale double suivante, prise dans l'intérieur de τ,

$$\iint \left(\frac{\partial}{\partial x} P \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\sigma = \iint \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) d\sigma.$$

Mais $P + Qi$ étant une fonction de la variable complexe t, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

L'intégrale double devient ainsi

$$\iint \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] d\sigma,$$

et tous ses éléments sont positifs, à moins qu'on n'ait identiquement

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,$$

auquel cas P, Q et enfin $F = P + Qi$ se réduiront à des constantes.

574. Soit $F = P + Qi$ une fonction qui n'admette sur la surface de Riemann qu'un nombre fini de points critiques $a_1, \ldots, a_\mu$. Prenons arbitrairement un point O sur cette surface et joignons-le par des lacets : 1° aux p rétrosections ; 2° aux points $a_1, \ldots, a_\mu$; 3° aux n circuits à l'infini. Coupons S suivant ces lacets ; le contour ainsi formé délimitera une surface finie s', à connexion simple, sur laquelle F n'a pas de point critique.

Si donc nous désignons par K l'ensemble des lacets des rétrosections, par $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ les autres lacets, nous aurons

$$\int_K F\,dz + \sum \int_{\mathcal{A}_k} F\,dz = 0, \tag{1}$$

et si F ne se réduit pas à une constante,

$$\int_K P\,dQ + \sum \int_{\mathcal{A}_k} P\,dQ > 0. \tag{2}$$

575. Si la fonction F n'a pas de point critique (même à l'infini) sur la surface de Riemann, l'inégalité (2) se réduira à

$$\int_K P\,dQ > 0. \tag{3}$$

En effet, on n'a, dans ce cas, d'autres lacets $\mathcal{A}$ que ceux qui sont relatifs aux circuits. Or ceux-ci ne donnent que des intégrales infiniment petites.

Soit, en effet, $\mathcal{A}_k = L_k A_k L_k^{-1}$ celui qui est relatif au circuit A_k. Les intégrales suivant L_k et L_k^{-1} se détruisent. Pour évaluer l'intégrale suivant A_k, posons

$$z = \frac{1}{t} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

et prenons φ pour variable indépendante ; l'intégrale deviendra

$$\int_0^{2\pi} P\frac{dQ}{d\varphi}\,d\varphi.$$

Mais, sur le circuit A_k, F admet par hypothèse un développement de la forme

$$F = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.$$

On aura donc, en désignant par r_i le module et par α_i l'argument de c_i,

$$P = r_0 \cos\alpha_0 + r_1 \rho \cos(\varphi + \alpha_1) + \ldots,$$
$$Q = r_0 \sin\alpha_0 + r_1 \rho \sin(\varphi + \alpha_1) + \ldots.$$

Si ρ tend vers zéro, P tendra vers une limite finie, et $\frac{dQ}{d\varphi}$, qui contient ρ en facteur, tendra vers zéro. L'intégrale est donc infiniment petite.

576. Théorème. — *Une fonction* F, *synectique sur toute la surface de Riemann, se réduit à une constante.*

La fonction F n'ayant pas de point critique, il faudrait, pour qu'elle ne fût pas constante, que l'intégrale

$$\int_K P\,dQ = \int_K P \frac{dQ}{dz} dz$$

fût positive. Mais elle est évidemment nulle.

Soit, en effet (*fig.* 55),

$$M_k C_k D_k C_k^{-1} D_k^{-1} M_k^{-1}$$

l'un des lacets dont K est composé. Les intégrales suivant M_k et M_k^{-1}, ayant leurs éléments égaux et contraires, se détruiront. De même pour les intégrales $\int_{C_k}$ et $\int_{C_k^{-1}}$, $\int_{D_k}$ et $\int_{D_k^{-1}}$.

577. Discutons d'une manière analogue l'égalité (1).

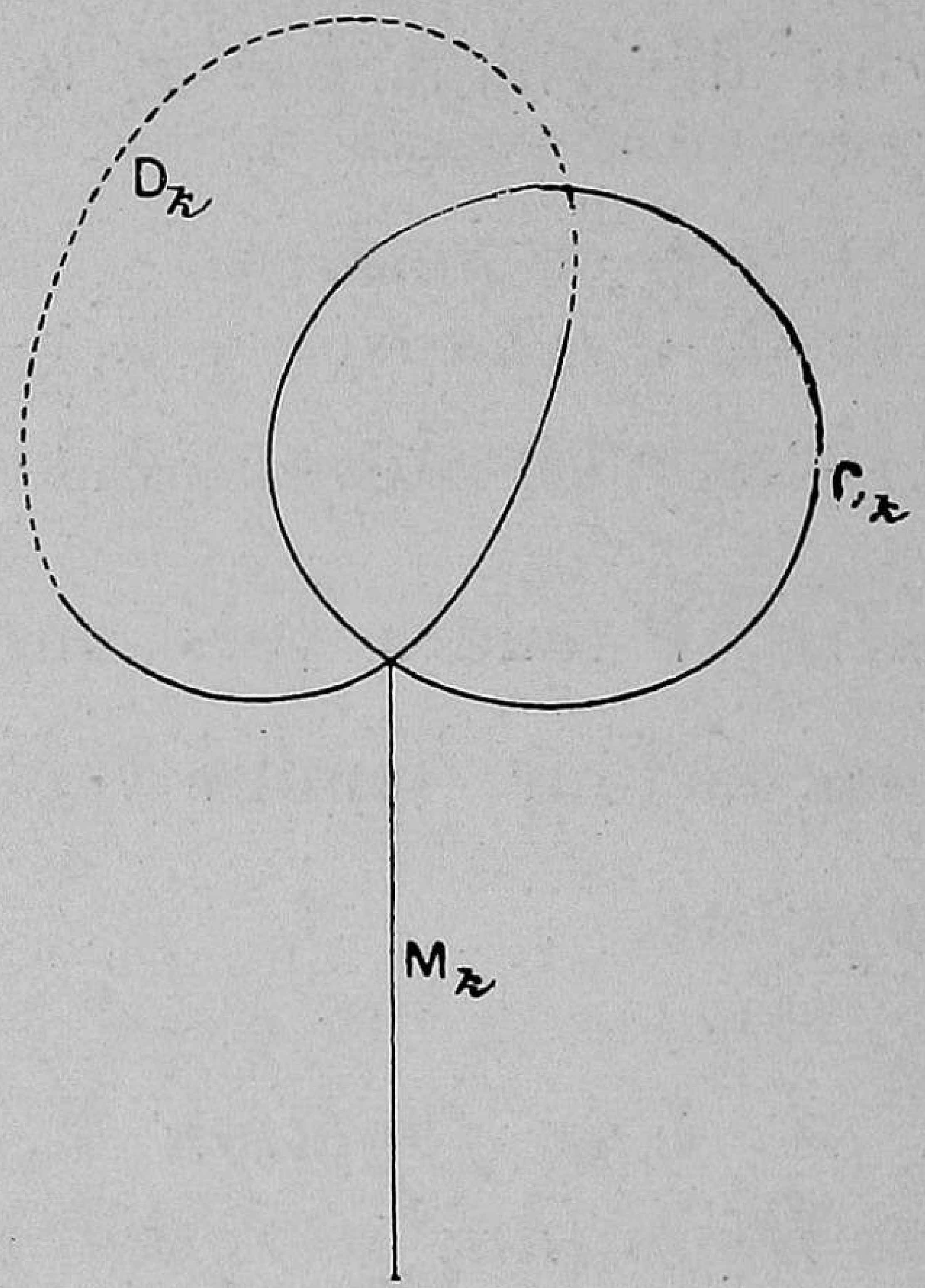
L'un quelconque des lacets $\mathcal{A}_k$ est de la forme

$$\mathcal{A}_k = L_k A_k L_k^{-1},$$

A_k désignant, soit un contour infiniment petit décrit dans le

sens rétrograde autour de l'un des points $a_1, \ldots, a_\mu$, soit un circuit, décrit dans le sens direct, et isolant l'un des n

Fig. 55.



points $a_{\mu+1}, \ldots, a_{\mu+n}$ situés à l'infini sur la surface de Riemann.

Nous avons vu que, aux environs du point $a_k = (z_k, u_k)$, z et u sont exprimables au moyen d'un paramètre t (égal, suivant le cas, à $z - z_k$, ou à $\sqrt{z - z_k}$, ou enfin à $\frac{1}{z}$ si a_k est à l'infini). Lorsque z décrit A_k, t décrira, dans le sens rétrograde, un contour infiniment petit, τ_k, autour du point $t = 0$, On aura donc

$$\int_{A_k} F\, dz = \int_{\tau_k} F \frac{dz}{dt}\, dt.$$

Si, aux environs de $t = 0$, $F \frac{dz}{dt}$ est développable suivant les puissances entières non négatives et croissantes de t, cette intégrale sera nulle.

Si $F \frac{dz}{dt}$ admet un développement suivant les puissances entières et croissantes de t mais commençant par des termes

à exposants négatifs

$$\alpha_{km} t^{-m} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1},$$

l'intégrale sera égale à $-2\pi i \alpha_{k1}$.

Dans l'un et l'autre cas, F reprenant sa valeur initiale lorsque z décrit le contour A_k, les deux intégrales $\int_{\mathrm{L}_k} F\,dz$ et $\int_{\mathrm{L}^{-1}} F\,dz$ se détruiront.

Nous obtenons donc le résultat suivant :

On a

$$(4) \qquad \int_{\mathrm{K}} F\,dz + \sum \int_{\mathcal{A}_k} F\,dz = 0,$$

la sommation s'appliquant seulement aux lacets $\mathcal{A}_k$ décrits autour des points (à distance finie ou à l'infini) qui sont critiques pour l'expression $F\dfrac{dz}{dt}$.

Si l'un de ces points a_k est un pôle pour $F\dfrac{dz}{dt}$, *soit α_{k1} le résidu correspondant. L'intégrale suivant le lacet relatif à ce point sera* $-2\pi i \alpha_{k1}$.

578. Cherchons l'expression générale, des fonctions F uniformes sur la surface de Riemann et n'ayant pour points critiques que des pôles.

Une semblable fonction F, étant développable aux environs de chaque point (z_0, u_0) suivant les puissances entières et croissantes d'une variable t égale à $z - z_0$, ou à $\sqrt{z - z_0}$, ou à $\frac{1}{z}$, n'aura que des points critiques algébriques par rapport à la variable z.

A chaque valeur de z correspondent n points $a_1, \ldots, a_n$ de la surface de Riemann, et à chacun d'eux a_i des valeurs déterminées F_i, u_i des fonctions F et u. La somme

$$u_1^m F_1 + \ldots + u_n^m F_n = \Phi_m,$$

où m est un entier quelconque, sera une fonction uniforme

de z. N'ayant que des points critiques algébriques, elle sera rationnelle en z.

Posons $m = 0, 1, \ldots, n-1$, et des équations ainsi obtenues, tirons la valeur de F_1. Nous obtiendrons un résultat de la forme

$$F_1 = \frac{A_1\Phi_1 + \ldots + A_n\Phi_n}{D}.$$

Le déterminant D est le produit des différences $u_i - u_k$, et ses mineurs $A_1, \ldots, A_n$ sont divisibles par celles de ces différences où u_1 ne figure pas. On aura donc, après suppression de ces facteurs communs,

$$F_1 = \frac{B_1\Phi_1 + \ldots + B_n\Phi_n}{(u_1 - u_2)\ldots(u_1 - u_n)}.$$

Le dénominateur est égal, à un facteur constant près, à la valeur de $\frac{\partial f}{\partial u}$ pour $u = u_1$. D'autre part, les B, étant des fonctions symétriques entières des racines de l'équation $\frac{f(z, u)}{u - u_1} = 0$, sont des polynomes entiers en z et u_1; et s'ils contenaient des puissances de u_1 supérieures à $n - 1$, on pourrait les éliminer au moyen de l'équation $f(z, u_1) = 0$. On aura donc, en remplaçant u_1 par u dans l'identité précédente, une expression de la forme

$$F = \frac{C_1\Phi_1 + \ldots + C_n\Phi_n}{\frac{\partial f}{\partial u}},$$

$C_1, \ldots, C_n$ étant des polynomes entiers en z, u, de degré $n - 1$ au plus par rapport à u, ou enfin, en désignant par Δ le dénominateur commun des fonctions $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$,

$$F = \frac{E_0 + E_1 u + \ldots + E_{n-1}u^{n-1}}{\Delta\frac{\partial f}{\partial u}}, \tag{5}$$

$E_0, \ldots, E_{n-1}, \Delta$ étant des polynomes en z.

Cette expression est une fraction rationnelle en z, u. Réciproquement, toute fraction rationnelle en z, u, étant évidemment de l'espèce considérée, pourra se mettre sous la forme précédente.

579. On donne le nom d'*intégrales abéliennes* aux intégrales de la forme

$$I = \int F\,dz,$$

où F désigne une fonction rationnelle en z, u. On achèvera de préciser cette intégrale en fixant sa valeur initiale en un point O, choisi à volonté sur la surface de Riemann, pour servir d'origine à la variation de z.

Cherchons le système des valeurs diverses que peut prendre cette fonction en un point a de la surface, lorsqu'on fait varier le trajet suivi par z pour passer de O à a.

Nous avons vu que tous les chemins possibles se ramènent à l'un d'entre eux, précédé d'une combinaison :

1° De lacets $M_k C_k M_k^{-1}$, $M_k D_k M_k^{-1}$ joignant le point O aux deux contours C_k, D_k qui forment chaque rétrosection ;

2° De lacets $\mathcal{A}_k = L_k A_k L_k^{-1}$ joignant ce même point aux pôles de F et aux n circuits à l'infini.

Les diverses valeurs de l'intégrale au point a différeront donc les unes des autres d'une somme de multiples entiers positifs ou négatifs des intégrales prises suivant ces lacets, ou plus simplement, suivant les contours C_k, D_k, A_k, car les intégrales suivant les lignes M_k, M_k^{-1} et L_k, L_k^{-1}, se détruisent évidemment.

Ces intégrales se nomment les *périodes* de I. Nous appellerons *premières périodes cycliques* les p intégrales $\int_{C_k}$; *deuxièmes périodes cycliques* les p intégrales $\int_{D_k}$; nous les désignerons respectivement par c_k, d_k.

Nous appellerons enfin *périodes polaires* les intégrales $\int_{A_k}$.

Nous avons appris à déterminer ces dernières (577), et nous avons vu que $\int_{A_k}$ s'annule, si le point a_k, autour duquel est décrit le contour A_k, est un point ordinaire pour $F\frac{dz}{dt}$. Dans le cas contraire, ce sera évidemment un pôle, et l'on aura

$$\int_{A_k} = -2\pi i \alpha_{k1},$$

α_{k1} désignant le résidu correspondant.

580. On a (574)

$$\int_K F\,dz + \sum \int_{\mathcal{A}_1} F\,dz = 0.$$

Mais le premier terme s'annule, car chacun des lacets qui constituent K étant formé de lignes décrites deux fois en sens contraire, les intégrales correspondantes se détruisent.

Donc *la somme des périodes polaires* (et par suite *la somme des résidus*) *est nulle.*

581. Il peut d'ailleurs exister, dans certains cas, d'autres relations linéaires entre les périodes. Considérons, par exemple, l'expression $\log F$ (F étant rationnel en z, u). C'est une intégrale abélienne, car sa dérivée

$$\frac{1}{F}\left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dz}\right)$$

devient rationnelle en z, u, lorsqu'on y remplace $\frac{du}{dz}$ par sa valeur déduite de l'équation $f = 0$; or toutes ses périodes se réduisent à des multiples entiers de la seule quantité $2\pi i$.

582. L'intégrale I n'a évidemment de points critiques qu'aux points a_k qui sont des pôles pour $F\frac{dz}{dt}$. Si, aux environs d'un de ces points a, la partie infinie du dévelop-

pement de $F\frac{dz}{dt}$ est

$$\alpha_m t^{-m} + \ldots + \alpha_1 t^{-1},$$

celle du développement de $I = \int F \frac{dz}{dt} dt$ sera évidemment

$$\frac{\alpha_m}{1-m} t^{-m+1} + \ldots + \alpha_1 \log t,$$

et a sera un point critique logarithmique (un pôle, dans le cas particulier où le résidu α_1 est nul).

583. Soit $I = P + Qi$. Proposons-nous de déterminer la valeur de l'intégrale $\int P\, dQ$, prise le long de l'un des lacets $M_k C_k D_k C_k^{-1} D_k^{-1} M_k^{-1}$ qui aboutissent à une rétrosection.

Soient $c_k = \gamma_k + i\gamma'_k$, $d_k = \delta_k + i\delta'_k$ les périodes cycliques relatives aux deux contours C_k et D_k.

Considérons deux éléments correspondants pris sur les deux lignes C_k et C_k^{-1}; dz y a des valeurs égales et opposées; $\frac{dQ}{dz}$ y reprend la même valeur, car c'est le coefficient de la partie imaginaire de la fonction $\frac{dI}{dz}$, qui est rationnelle en z, u, et, par suite, reste uniforme sur la surface de Riemann; mais P a changé de valeur; car, entre les lignes C_k et C_k^{-1}, on a décrit le contour D_k, ce qui a accru I de d_k, et sa partie réelle P de δ_k. La somme des deux éléments d'intégrale considérés sera donc

$$P\, dQ - (P + \delta_k)\, dQ = -\delta_k\, dQ.$$

On aura donc

$$\int_{C_k} + \int_{C_k^{-1}} = -\int_{C_k} \delta_k\, dQ = -\delta_k \gamma'_k.$$

Considérons de même deux éléments correspondants sur D_k et D_k^{-1}; comme P augmente de $-\gamma_k$ lorsque z décrit le

contour intermédiaire C_k^{-1}, la somme de ces éléments sera

$$P\,dQ - (P - \gamma_k)\,dQ = \gamma_k\,dQ,$$

et l'on aura

$$\int_{D_k} + \int_{D_k^{-1}} = \gamma_k \delta'_k.$$

Enfin les éléments correspondants des intégrales suivant M et M^{-1} se détruisent; car, lorsque z décrit le contour $C_k D_k C_k^{-1} D_k^{-1}$, P augmente de $\gamma_k + \delta_k - \gamma_k - \delta_k = 0$; il reprend donc sa valeur primitive.

L'intégrale cherchée aura donc pour valeur

$$\gamma_k \delta'_k - \delta_k \gamma'_k.$$

Soit, comme précédemment, K le contour formé par l'ensemble des lacets des rétrosections; on aura

$$\int_K P\,dQ = \sum_1^p (\gamma_k \delta'_k - \delta_k \gamma'_k). \tag{6}$$

584. Soient I, I′ deux intégrales abéliennes ayant respectivement les périodes cycliques $c_1, d_1, \ldots, c_p, d_p$ et $c'_1, d'_1, \ldots, c'_p, d'_p$ et les points critiques $a_1, a_2, \ldots$, et $a'_1, a'_2, \ldots$. Nous admettrons pour plus de simplicité qu'elles n'aient pas de point critique commun.

Joignons un point O par des lacets aux rétrosections et aux points critiques $a_1, a_2, \ldots$ et $a'_1, a'_2, \ldots$. Nous aurons soin de tracer ces lacets de telle sorte qu'en tournant autour de l'origine O, on rencontre d'abord les lacets des rétrosections, puis les lacets $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$, des points $a_1, a_2, \ldots$ et enfin les lacets $\mathcal{A}'_1, \mathcal{A}'_2, \ldots$ des points $a'_1, a'_2, \ldots$.

L'ensemble de ces lacets délimite une surface s simplement connexe et sur laquelle ni $\frac{dI}{dt}$, ni I′, ni par suite l'intégrale $\int I'\,dI$ n'ont de point critique.

On aura donc

$$(7)\qquad \int_{K} I' dI + \sum \int_{\mathcal{A}_k} I' dI + \sum \int_{\mathcal{A}'_k} I' dI = 0.$$

Un calcul identique à celui du numéro précédent nous donnera pour la première intégrale la valeur suivante :

$$\int_{K} I' dI = \sum_{1}^{p} (c'_k d_k - d'_k c_k).$$

585. Les points $a_1, a_2, \ldots$ sont des pôles pour $I' \frac{dI}{dt}$; en effet, aux environs d'un de ces points a_k, $\frac{dI}{dt}$ admet un développement de la forme

$$\frac{dI}{dt} = \alpha_{km} t^{-m} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1} + \ldots.$$

D'autre part, ce point étant ordinaire pour I', la série de Taylor donnera aux environs de ce point

$$I' = (I')_{a_k} + \left(\frac{dI'}{dt}\right)_{a_k} t + \left(\frac{d^2 I'}{dt^2}\right)_{a_k} \frac{t^2}{1.2} + \ldots.$$

On aura donc

$$\int_{\mathcal{A}_k} I' dI = -2\pi i \rho_k,$$

ρ_k désignant le résidu

$$(8)\qquad \rho_k = \alpha_{k1} (I')_{a_k} + \alpha_{k2} \left(\frac{dI'}{dt}\right)_{a_k} + \ldots + \frac{\alpha_{km}}{(m-1)!} \left(\frac{d^{m-1} I'}{dt^{m-1}}\right)_{a_k}$$

et, par suite,

$$\sum \int_{\mathcal{A}_k} I' dI = -2\pi i \sum \rho_k.$$

586. Calculons enfin le dernier terme de l'équation (7). L'intégration par parties donne

$$\int I' dI = II' - \int I\, dI'.$$

Or, lorsqu'on parcourt la suite des lacets $\mathcal{A}'$, I ne change pas et I' s'accroît de la somme de ses périodes polaires; mais celle-ci est nulle. Donc II' reprend sa valeur initiale, et l'on a simplement

$$\sum \int_{\mathcal{A}'_k} \mathrm{I}'\, d\mathrm{I} = -\sum \int_{\mathcal{A}'_k} \mathrm{I}\, d\mathrm{I}'.$$

Mais, pour l'expression $\mathrm{I}\,\frac{d\mathrm{I}'}{dt}$, les points $a'_1, a'_1, \ldots$ sont des pôles, dont les résidus se calculeront comme les précédents, et seront de la forme

$$(9) \qquad \rho'_k = \alpha'_{k1}(\mathrm{I})_{a'_k} + \alpha'_{k2}\left(\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)_{a'_k} + \ldots.$$

Nous obtiendrons donc finalement la relation fondamentale suivante

$$(10) \qquad \frac{1}{2\pi i}\sum_1^p (c_k d'_k - d_k c'_k) = \sum \rho'_k - \sum \rho_k,$$

les résidus ρ_k ou ρ'_k relatifs à chaque point critique étant calculés comme ci-dessus.

587. Appliquons cette formule au cas où $\mathrm{I}' = \log \mathrm{F}$, F désignant une fraction rationnelle en z, u.

Les périodes c'_k, d'_k de cette fonction étant des multiples de $2\pi i$, le premier membre de la formule (10) se réduira à une fonction linéaire homogène, à coefficients entiers, des périodes cycliques de I.

D'autre part les points critiques de log F sont les zéros et les pôles de F, et la partie infinie du développement de $\frac{d \log \mathrm{F}}{dt}$ sera $-\mu t^{-1}$, pour un pôle b de multiplicité μ; $\mu' t^{-1}$, pour un zéro b' de multiplicité μ'.

On aura, par suite,

$$\sum \rho'_k = \sum \mu'(\mathrm{I})_{b'} - \sum \mu(\mathrm{I})_b,$$

ou, si l'on considère un zéro de multiplicité μ' (ou un pôle

de multiplicité μ) comme résultant de la coïncidence de μ' zéros simples (de μ pôles simples),

$$\sum \rho'_k = \sum (\mathrm{I})_{b'} - \sum (\mathrm{I})_b,$$

les sommes du second membre s'étendant respectivement à tous les zéros simples et à tous les pôles simples de F.

Si donc nous concevons de considérer comme *équivalentes* deux quantités qui ne diffèrent que par des fonctions linéaires homogènes, à coefficients entiers, des périodes de I, l'équation (10) nous donnera l'équivalence

$$\sum (\mathrm{I})_{b'} - \sum (\mathrm{I})_b \equiv \sum \rho_k, \tag{11}$$

ρ_k désignant l'expression

$$\rho_k = \alpha_{k1} (\log \mathrm{F})_{a_k} + \alpha_{k2} \left(\frac{d \log \mathrm{F}}{dt} \right)_{a_k} + \ldots .$$

588. Supposons que la fonction I se réduise à une constante C. Elle n'aura pas de point critique, et toutes ses périodes s'annuleront. La relation (11) se réduira donc à

$$\mathrm{C}(\mathrm{N}' - \mathrm{N}) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{N} = \mathrm{N}',$$

N désignant le nombre des pôles b de F, N' le nombre de ses zéros b'.

Soit d'ailleurs λ une constante arbitraire. La fonction $\mathrm{F} - \lambda$ ayant les mêmes pôles que F, en nombre N, aura N zéros. Nous obtenons donc ce résultat :

Le nombre des points pour lesquels une fonction rationnelle F *de* z, *u prend une valeur déterminée* λ *est indépendant de* λ *et égal au nombre des pôles de* F.

589. On déduit aisément de ce qui précède la démonstration d'une proposition célèbre, connue sous le nom de *théorème d'Abel.*

Soit ψ un polynome entier de degré m; les deux courbes f et ψ se couperont en mn points.

Supposons que les coefficients de ψ varient simultanément, d'une manière continue et suivant une loi quelconque. Les points d'intersection se déplaceront et décriront sur la surface de Riemann des lignes continues $L_1, L_2, \ldots$.

Soient ψ_0 et ψ la forme initiale et la forme finale du polynome variable; les lignes $L_1, L_2, \ldots$ auront pour origine les points d'intersection $b_1, b_2, \ldots$ de f et de ψ_0 et se termineront aux points d'intersection $b'_1, b'_2, \ldots$ de f et de ψ.

Soit I une intégrale abélienne, dont les points critiques a_1, $a_2, \ldots$ ne soient pas situés sur les lignes $L_1, L_2, \ldots$ Les mn intégrales

$$\int_{L_1} dI, \quad \int_{L_2} dI, \quad \ldots$$

auront des valeurs finies et déterminées. Le théorème d'Abel a pour objet de déterminer la somme de ces intégrales.

On a évidemment

$$\int_{L_k} dI \equiv (I)_{b'_k} - (I)_{b_k}.$$

D'autre part, la fonction rationnelle

$$F = \frac{\psi}{\psi_0}$$

a pour pôles les points $b_1, b_2, \ldots$ et pour zéros les points b'_1, $b'_2, \ldots$. En lui appliquant la formule (11), il viendra

$$\sum \int_{L_k} dI \equiv \sum (I)_{b'_k} - \sum (I)_{b_k}$$
$$\equiv \sum \left[\alpha_{k1} \left(\log \frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k} + \alpha_{k2} \left(\frac{d}{dt} \log \frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k} + \ldots \right].$$

590. Mais il est aisé de voir que les deux membres de cette formule sont non seulement équivalents, mais égaux.

En effet, ils le sont à l'origine du mouvement où $\psi = \psi_0$. Car

le premier membre s'annule. D'autre part, $\frac{\psi}{\psi_0}$ étant égal à 1, son logarithme se réduit à un multiple de $2\pi i$, et les dérivées de ce logarithme par rapport à t s'annulent. Le second membre se réduit donc à un multiple de la somme des périodes polaires $-2\pi i \alpha_{k1}$, laquelle est nulle (580).

Si d'ailleurs on fait varier le polynome ψ d'une manière continue, à partir de sa forme initiale ψ_0, les deux membres varieront d'une manière continue; car les points a_k n'étant pas situés, par hypothèse, sur les lignes $L_1, L_2, \ldots$, ne seront à aucun instant des points critiques pour $\log \frac{\psi}{\psi_0}$.

Le module de la différence des deux membres ne peut donc varier que d'une manière continue. Si donc il cessait d'être nul et devenait, à un certain moment, égal à δ, il prendrait nécessairement dans l'intervalle toutes les valeurs comprises entre o et δ.

Mais, les deux membres étant équivalents, leur différence est représentée à chaque instant par une expression de la forme $m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q$, en désignant par $\omega_1, \ldots, \omega_q$ les périodes de I. Il faudrait donc que tout nombre compris entre o et δ fît partie de la suite des nombres

$$(12) \qquad m_1\omega_1 + \ldots + m_q\omega_q.$$

Or il est aisé de voir que cela est impossible. Ordonnons, en effet, les nombres (12) de la manière suivante :

Nous mettrons en tête, en les disposant dans un ordre arbitraire, ceux d'entre eux (en nombre limité), pour lesquels $|m_1| + \ldots + |m_q| = 1$; puis, dans un ordre arbitraire, ceux en nombre limité, où cette somme est égale à 2, et ainsi de suite. Tous ces nombres sont ainsi disposés en une série, où chacun d'eux figure à un rang déterminé.

Soit δ_1 le premier terme de la série dont la valeur tombe entre o et δ. Si la série contient des termes dont la valeur soit comprise entre δ et δ_1, ils ne viendront qu'après celui-là. Soit δ_2 le premier d'entre eux. Si la série contient des termes dont la valeur soit comprise entre δ_1 et δ_2, ils ne

viendront qu'après δ_2. Continuant ainsi, nous formerons deux suites de termes, les uns croissants

$$\delta_1, \quad \delta_3, \quad \delta_5, \quad \ldots,$$

les autres décroissants

$$\delta_2, \quad \delta_4, \quad \delta_6, \quad \ldots,$$

mais plus grands que les précédents. D'ailleurs, chacun de ces termes δ_n étant plus éloigné dans la série que δ_{n-1}, le rang qu'il occupe et, *a fortiori*, le rang occupé par les autres termes compris comme lui entre δ_{n-2} et δ_{n-1}, ne saurait être moindre que n.

Cela posé, si les deux suites précédentes s'arrêtent à un dernier terme δ_n, la série ne contiendra aucun des nombres compris entre δ_{n-1} et δ_n, et notre proposition sera établie. Si, au contraire, les deux suites contiennent un nombre de termes illimité, les nombres δ_1, δ_3, ... tendront vers une limite Δ, et les nombres δ_2, δ_4, ... vers une limite Δ' égale ou supérieure à Δ. Le nombre Δ ne peut figurer dans la série; car il y devrait occuper un rang déterminé m; mais, Δ étant compris, quel que soit n, dans l'intervalle de δ_{n-2} à δ_{n-1}, ce rang serait au moins égal à n, quel que fût ce dernier nombre; ce qui est absurde.

591. Nous aurons donc, comme expression du théorème d'Abel, la formule

$$(13)\qquad \sum \int_{\mathrm{L}_k} d\mathrm{I} = \sum \left[\alpha_{k1} \left(\log \frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k} + \alpha_{k2} \left(\frac{d}{dt} \log \frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k} + \ldots \right].$$

Les expressions $\left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k}$, $\left(\frac{d}{dt} \log \frac{\psi}{\psi_0} \right)_{a_k}$, ... sont évidemment rationnelles par rapport aux coefficients de ψ et de ψ_0.

Le second membre de la formule précédente se compose donc d'une partie logarithmique et d'une partie rationnelle par rapport à ces coefficients.

592. Deux cas particuliers doivent être signalés ici :

On dit que l'intégrale I est de *première espèce*, si elle n'a aucun point critique. Dans ce cas, le second membre disparaît, et l'on a simplement

$$\sum \int_{L_k} dI = 0. \tag{14}$$

L'intégrale I sera de *seconde espèce*, si, tout en admettant des points critiques, elle n'a pas de périodes polaires. Dans ce cas, les résidus α_{k1} seront tous nuls, et le second membre se réduit à sa partie rationnelle.

Enfin l'intégrale sera de *troisième espèce*, si elle a des périodes polaires.

593. *Remarque.* — Il peut arriver que ψ varie de telle sorte que quelques-uns de ses points d'intersection avec f restent fixes. Leurs trajectoires L_k se réduisant à de simples points, les intégrales correspondantes disparaîtront du premier membre des équations (13) ou (14), qui ne contiendront plus que les intégrales relatives aux points d'intersection variables.

594. Soient $\beta_1 = (z_1, u_1), \ldots, \beta_\mu = (z_\mu, u_\mu)$ des points variables, décrivant simultanément sur la surface de Riemann des lignes arbitraires $L_1, \ldots, L_\mu$ (ne passant pas par les points critiques de l'intégrale I). Nous pourrons déterminer une courbe φ, adjointe à f et d'un degré assez élevé pour que son équation contienne plus de μ coefficients arbitraires. On pourra donc déterminer ses coefficients, en tout ou en partie, par la condition que φ passe par les points $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$, et, s'il reste encore des arbitraires, on achèvera de déterminer φ en la faisant passer par des points fixes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots,$ choisis à volonté sur f. Les coefficients de l'adjointe ainsi formée sont rationnels et symétriques en $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$. Elle coupera f : 1° en certains points fixes simples ou multiples; 2° aux

points variables $(z_1, u_1), \ldots, (z_\mu, u_\mu)$; 3° en p autres points variables $(z'_1, u'_1), \ldots, (z'_p, u_p)$.

Les coordonnées de ces derniers points sont des fonctions algébriques de $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$. Pour les obtenir, éliminons u ntre les deux équations

$$\varphi(z, u) = 0, \qquad f(z, u) = 0.$$

Soit $Z = 0$ l'équation finale. On connaît d'avance celles de ses racines qui correspondent aux points fixes, et les racines $z_1, \ldots, z_\mu$. Supprimant ces solutions par la division, il restera une équation $Z' = 0$, de degré p, pour déterminer $z'_1, \ldots, z'$. Soit z'_k l'une de ses racines; la valeur correspondante u' s'obtiendra en cherchant la solution commune aux deux équations

$$\varphi(z'_k, u) = 0, \qquad f(z'_k, u) = 0.$$

Elle sera unique (si $Z' = 0$ n'a pas de racine multiple) et s'exprimera rationnellement au moyen de z' et de $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$.

Lorsque les points $(z_1, u_1), \ldots, (z_\mu, u_\mu)$ décriront les trajectoires $L_1, \ldots, L_\mu$, les points $(z'_1, u'_1), \ldots, (z'_p, u'_p)$ décriront des trajectoires correspondantes $L'_1, \ldots, L'_p$; les autres points d'intersection restant fixes, on aura, par le théorème d'Abel,

$$\sum_1^\mu \int_{L_k} dI + \sum_1^p \int_{L'_k} dI = M,$$

M étant une fonction rationnelle et logarithmique des coefficients de φ et de φ_0, et par suite des quantités $z_1, u_1, \ldots, z_\mu, u_\mu$ et de leurs valeurs initiales $z_{10}, u_{10}, \ldots, z_{\mu 0}, u_{\mu 0}$. Nous obtenons donc cette nouvelle proposition :

La somme d'un nombre quelconque d'intégrales abéliennes semblables est toujours réductible à une somme de p intégrales analogues, prise négativement, plus un terme complémentaire, algébrique et logarithmique.

III. — Réduction des intégrales abéliennes.

595. *Une intégrale abélienne* $I = \int F\,dz$ *est déterminée à une constante près, lorsque l'on connaît : 1° ses p premières périodes cycliques* $c_1, \ldots, c_p$; *2° la position de ses points critiques* $a_1, a_2, \ldots,$ *et aux environs de chacun de ces points, tel que* a_k, *la partie infinie de son développement* (ou, ce qui revient au même, la partie infinie $\alpha_{k\mu_k} t^{-\mu_k} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1}$ du développement de sa dérivée $F\dfrac{dz}{dt}$).

Soient, en effet, I, I' deux intégrales pour lesquelles ces divers éléments soient les mêmes. La différence I — I' sera une intégrale abélienne sans point critique et dont les premières périodes cycliques sont toutes nulles.

Or, nous avons vu (575) qu'une intégrale abélienne $J = P + Qi$ sans points critiques, et dont les périodes cycliques sont

$$c_k = \gamma_k + i\gamma'_k, \qquad d_k = \delta_k + i\delta'_k,$$

se réduit à une constante si l'intégrale $\int_K P\,dQ$ n'est pas positive; d'autre part, cette intégrale est égale (583) à

$$\sum_1^p (\gamma_k\delta'_k - \delta_k\gamma'_k).$$

Or, pour l'intégrale I — I', les quantités γ_k, γ'_k sont nulles. Donc $\int_K P\,dQ$ sera nulle, et I — I' est une constante.

596. Supposons les éléments ci-dessus donnés *a priori*, et proposons-nous de déterminer l'intégrale abélienne correspondante. Elle ne pourra exister que si la somme des

résidus α_{k1} est nulle. Nous allons voir que cette condition est suffisante.

Soit Δ une courbe de degré m telle que, parmi ses points d'intersection avec f, il y en ait au moins μ_1 confondus en a_1, μ_2 confondus en a_2, etc. On pourra toujours satisfaire à ces conditions en prenant m suffisamment élevé.

Nous allons établir que l'intégrale cherchée existe, et qu'elle est de la forme

$$\mathrm{I} = \int \frac{\Phi\, dz}{\Delta \dfrac{\partial f}{\partial u}},$$

Φ désignant une adjointe convenablement choisie parmi celles de degré $m+n-3$.

597. Cherchons, à cet effet, quels sont les points de la surface de Riemann aux environs desquels l'expression

$$\frac{\Phi \dfrac{dz}{dt}}{\Delta \dfrac{\partial f}{\partial u}}$$

devient infinie.

Aux environs d'un point (ζ, υ), situé à distance finie, $\dfrac{\Phi \dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}}$ sera fini. Cela est évident, si $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ n'est pas nul au point considéré.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial z} \gtrless 0$, il en sera de même, car de l'équation $f = 0$ on déduit

$$\frac{\dfrac{dz}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}} = - \frac{\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial z}},$$

et le second membre reste fini.

Enfin, si $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, le point (ζ, υ) sera multiple. Soit ν

son ordre de multiplicité. A une valeur $z = \zeta + t$ voisine de ζ correspondent n valeurs $u_1, \ldots, u_n$; celles de ces branches qui se croisent au point multiple auront des développements de la forme

$$u_1 = \upsilon + c_1 t + \ldots, \qquad \ldots, \qquad u_\nu = \upsilon + c_\nu t + \ldots,$$

les coefficients angulaires $c_1, \ldots, c_\nu$ de leurs tangentes étant différents; les autres développements seront de la forme

$$u_k = \upsilon_k + \ldots \qquad (k = \nu + 1, \ldots, n),$$

υ_k différant de υ.

Si donc on prend sur l'une des branches qui passent au point multiple, sur la première par exemple, un point (z, u_1) voisin de (ζ, υ), l'expression $\frac{\partial f}{\partial u_1}$, qui est égale à un facteur constant près au produit

$$(u_1 - u_2) \ldots (u_1 - u_n),$$

sera d'ordre $\nu - 1$.

Mais, d'autre part, Φ ayant au point (ζ, υ) un point multiple de multiplicité $\nu - 1$, son ordre sera au moins égal à $\nu - 1$. Le quotient restera fini.

Considérons enfin un point situé à l'infini. A une valeur infinie de $z = \frac{1}{t}$ correspondent n développements

$$u_1 = \frac{c_1}{t} + \ldots, \qquad u_n = \frac{c_n}{t} + \ldots,$$

et le produit

$$(u_1 - u_2) \ldots (u_1 - u_n)$$

sera d'ordre $-(n-1)$. D'autre part, $\frac{dz}{dt}$ est d'ordre -2. Enfin Φ, polynome d'ordre $n + m - 3$, est d'un ordre au moins égal à $-(n + m - 3)$. Donc

$$\frac{t^m \Phi \frac{dz}{dt}}{\frac{\partial f}{\partial u}}$$

restera fini au point considéré.

Quant à Δ, son ordre en un point (ζ, υ) à distance finie sera égal au nombre λ des intersections de Δ et de f qui sont concentrées en ce point [λ étant nul, si (ζ, υ) n'est pas un point d'intersection]. Pour un point à l'infini, cet ordre serait $-m+\lambda$.

Donc *l'expression*

$$\frac{\Phi \dfrac{dz}{dt}}{\Delta \dfrac{\partial f}{\partial u}}$$

ne devient infinie qu'aux points d'intersection de f et de Δ; et si l'un de ces points b_i compte pour λ_i intersections, elle deviendra infinie d'ordre λ_i (au plus).

La partie infinie de son développement

$$(1) \qquad B_{i,\lambda_i} t^{-\lambda_i} + \ldots + B_{i1} t^{-1}$$

s'obtiendra aisément par la division.

598. Si nous prenons pour Φ l'adjointe la plus générale de son degré, elle aura pour coefficients des fonctions linéaires et homogènes de $mn+p-1$ paramètres indéterminés (t. I, n° 600). (Nous supposerons ici $m>0$; s'il était nul, le nombre des paramètres serait p.)

Le nombre total des coefficients B est égal au nombre mn des intersections de Δ et de f. Ces coefficients sont évidemment des fonctions linéaires et homogènes des paramètres. La somme des résidus étant nécessairement nulle, on aura la relation

$$\sum B_{i1} = 0,$$

qui permettra d'exprimer l'une de ces fonctions, telle que B_{11} au moyen des autres.

Désignons ces dernières par B_{kl}.

Les p premières périodes cycliques $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ de l'intégrale considérée sont évidemment aussi des fonctions linéaires et homogènes des paramètres.

Le déterminant des $mn - 1 + p$ fonctions B_{kl}, Γ_1, ..., Γ_p n'est pas nul; car, s'il l'était, on pourrait déterminer les rapports des paramètres de manière à les annuler simultanément. L'intégrale abélienne ainsi obtenue n'aurait plus de pôles, et ses premières périodes cycliques seraient nulles; mais elle ne peut se réduire à une constante, car sa différentielle n'est pas identiquement nulle; il y a donc contradiction.

Le déterminant n'étant pas nul, on pourra choisir les paramètres de manière à donner aux fonctions linéaires B_{kl}, Γ_1,..., Γ_p un système de valeurs arbitraires.

On pourra donc faire en sorte :

1° Que $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$ prennent les valeurs assignées c_1, ..., c_p; 2° que le polynome (1) s'annule pour tout point b_i qui ne fait pas partie de la suite des points a_1, a_2, ..., et se réduise, si $b_i = a_k$, au polynome donné

$$\alpha_{k,\mu_k} t^{-\mu_k} + \ldots + \alpha_{k1} t^{-1}.$$

Les coefficients B_{11} et α_{11} du terme en t^{-1} dans les développements relatifs au point $b_1 = a_1$ échapperont seuls à l'identification directe; mais, comme on a, d'une part,

$$\sum B_{i1} = 0,$$

et, d'autre part, par hypothèse,

$$\sum \alpha_{k1} = 0,$$

ces deux coefficients seront encore égaux.

599. *Intégrales de première espèce.* — Si l'intégrale I n'a pas de point critique, on pourra supposer $m = 0$; Δ se réduit alors à une constante. La forme générale des inté-

grales de première espèce sera donc

$$\int \frac{\varphi\, dz}{\frac{\partial f}{\partial u}},$$

φ désignant une adjointe d'ordre $n-3$.

Nous pourrons déterminer une intégrale de première espèce

$$E_k = \int \frac{\varphi_k\, dz}{\frac{\partial f}{\partial u}},$$

telles que toutes ses premières périodes cycliques $c_{k1}, \ldots, c_{kp}$ soient nulles, sauf l'une d'elles c_{kk}, laquelle sera égale à l'unité. Nous désignerons ses secondes périodes cycliques par $d_{k1}, \ldots, d_{kp}$.

Nous obtiendrons ainsi p intégrales particulières $E_1, \ldots, E_p$, que nous appellerons *intégrales normales de première espèce*.

La formule (10) du n° 586, appliquée à deux intégrales normales E_i, E_k donnera évidemment

$$(2) \qquad 0 = \sum_{l=1}^{l=p} (c_{il} d_{kl} - d_{il} c_{kl}) = d_{ki} - d_{ik}.$$

600. Une intégrale abélienne I, ayant pour premières périodes cycliques $c_1, \ldots, c_p$, peut évidemment se mettre sous la forme

$$I = c_1 E_1 + \ldots + c_p E_p + I',$$

I' étant une *intégrale réduite*, dont les premières périodes cycliques sont nulles.

Dans l'étude des intégrales de deuxième et de troisième espèce, nous pourrons donc nous borner à la considération des intégrales réduites.

601. *Intégrales de seconde espèce.* — Nous pouvons

construire une intégrale réduite F_a^μ n'ayant qu'un seul pôle a, aux environs duquel la partie infinie de son développement se réduise à $t^{-\mu}$ (celle du développement de $\frac{dF_a^\mu}{dt}$ se réduira à $-\mu t^{-\mu-1}$).

Soient $d_{a1}^\mu, \ldots, d_{ap}^\mu$ ses secondes périodes cycliques. Leur valeur s'obtiendra en appliquant la formule (10) du n° 586 aux deux intégrales E_k et F_a^μ; il viendra

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi i} d_{ak}^\mu = \frac{-\mu}{\mu!}\left(\frac{d^\mu E_k}{dt^\mu}\right)_a = \frac{-1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^{\mu-1}}{dt^{\mu-1}} \frac{\varphi_k}{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt}\right)_a.$$

Cette expression est une fonction algébrique des coordonnées ζ, υ du point a. Si ce point n'est pas à l'infini, et si $\frac{\partial f}{\partial u}$ n'y est pas nul, on aura $t = z - \zeta$, et le second membre se réduira à

$$\frac{-1}{(\mu-1)!} \frac{d^{\mu-1}}{d\zeta^{\mu-1}} \left[\frac{\varphi_k(\zeta, \upsilon)}{\frac{\partial f(\zeta, \upsilon)}{\partial \upsilon}}\right],$$

Le théorème d'Abel, appliqué à F_a^μ, donnera, d'autre part,

$$(4)\qquad \sum \int_{L_k} dF_a^\mu = \frac{-1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^\mu}{dt^\mu} \log \frac{\psi}{\psi_0}\right)_a.$$

602. Une intégrale réduite de seconde espèce I (et, en particulier, une fraction rationnelle en z, u), admettant les pôles $a_1, a_2, \ldots$, et ayant pour partie infinie de son développement, aux environs de a_i, un polynome

$$\alpha_{i,m_i} t^{-m_i} + \ldots + \alpha_{i1} t^{-1}$$

pourra se mettre sous la forme

$$(5)\qquad I = \sum_i (\alpha_{i,m_i} F_{a_i}^{m_i} + \ldots + \alpha_{i1} F_{a_i}^1) + C,$$

C désignant une constante.

En effet, la quantité C définie par cette équation est une

intégrale abélienne qui n'a ni pôles, ni premières périodes cycliques. C'est donc une constante.

Réciproquement, une expression de I la forme (5), où les quantités α et C sont des constantes indéterminées, est une intégrale réduite de seconde espèce, n'ayant de pôles qu'aux points $a_1, a_2, \ldots$ avec des ordres de multiplicité au plus égaux à $m_1, m_2, \ldots$ (ces ordres de multiplicité pouvant s'abaisser si quelques-uns des coefficients α sont nuls).

603. Pour que cette expression I se réduise à une fraction rationnelle, il faut et il suffit que ses secondes périodes cycliques

$$\delta_k = \sum_i (\alpha_{i1} d^1_{a_i k} + \ldots + \alpha_{i,m_i} d^{m_i}_{a_i k})$$

soient toutes nulles; car ce sera alors une fonction uniforme, n'ayant pour points critiques que des pôles.

Ces polynomes δ_k, au nombre de p, contiennent les indéterminées α, en nombre $\sum m_i = q$. Ils peuvent être liés par des relations linéaires; soit σ le nombre de ces relations. Nous aurons à satisfaire à $p - \sigma$ équations distinctes.

Si $p - \sigma \geqq q$, on ne pourra y satisfaire qu'en supposant les α tous nuls, et I se réduira à la constante arbitraire C.

Si $p - \sigma < q$, ces équations détermineront $p - \sigma$ des quantités α en fonction des autres et I contiendra encore, sous forme linéaire, $q - p + \sigma + 1$ indéterminées (y compris la constante C).

Pour trouver la signification du nombre σ, nous remarquerons qu'une relation linéaire

$$\lambda_1 \delta_1 + \ldots + \lambda_p \delta_p = 0,$$

entre les polynomes δ_k, équivaut au système des relations

$$\sum_k \lambda_k d^1_{a_i k} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_k \lambda_k d^{m_i}_{a_i k} = 0, \qquad \ldots.$$

Remplaçons les périodes d par leurs valeurs (3), et

posons

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_p \varphi_p.$$

Ces relations deviennent

$$\left(\frac{\varphi}{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt} \right)_{a_i} = 0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{d^{m_i - 1}}{dt^{m_i - 1}} \frac{\varphi}{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt} \right)_{a_i} = 0, \quad \ldots.$$

Elles expriment que, parmi les $2p - 2$ points d'intersection de f avec l'adjointe φ, de degré $n - 3$, autres que ceux qui se trouvent aux points multiples de f, d'après la définition même des adjointes, m_1 coïncident avec $a_1, \ldots, m_i$ avec a_i, etc.

Si nous avons, entre les polynomes δ, σ relations linéairement distinctes, nous aurons donc σ adjointes φ linéairement distinctes jouissant de la propriété précédente, et réciproquement.

Nous pouvons donc formuler la proposition suivante :

Théorème de Riemann-Roch. — *Soient $a_1, \ldots, a_q$ q points quelconques (distincts ou non); σ le nombre des adjointes d'ordre $n - 3$ linéairement distinctes, qui passent par ces points.*

Les fonctions rationnelles de z, u, qui n'ont aucun pôle en dehors de ces points, dépendent linéairement de $q - p + \sigma + 1$ constantes arbitraires, si $q > p - \sigma$; elles se réduisent à une constante, si $q \overline{\overline{<}} p - \sigma$.

604. Cherchons l'expression explicite de ces fractions rationnelles.

Soit d'abord $\sigma > 0$, et soit

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_\sigma \varphi_\sigma$$

l'adjointe la plus générale de degré $n - 3$, qui passe par les points $a_1, \ldots, a_q$. On peut déterminer les constantes λ de manière à la faire passer par $\sigma - 1$ nouveaux points choisis

à volonté; mais le nombre total de ses intersections avec f est $2p-2$; on aura donc l'inégalité

$$q+\sigma-1 \overline{\overline{>}} 2p-2.$$

Soient $b_1, \ldots, b_{q'}$ les points d'intersection de φ_1 avec f, autres que $a_1, \ldots, a_q$; et soit σ' le nombre des adjointes d'ordre $n-3$ qui passent par $b_1, \ldots, b_{q'}$. La fonction rationnelle la plus générale, n'ayant de pôle qu'en ces points, contiendra $q'-p+\sigma'+1$ constantes arbitraires. Mais la fonction

$$\frac{\lambda_1\varphi_1+\ldots+\lambda_\sigma\varphi_\sigma}{\varphi_1},$$

qui en contient σ, jouit évidemment de cette propriété; on aura donc

$$q'-p+\sigma'+1 \overline{\overline{>}} \sigma.$$

Si nous échangeons dans le raisonnement les points $a_1, \ldots, a_q$ et $b_1, \ldots, b_{q'}$, nous trouverons de même

$$q-p+\sigma+1 \overline{\overline{>}} \sigma';$$

ajoutant ces inégalités, et remarquant que $q+q'=2p-2$, il vient

$$\sigma'+\sigma \overline{\overline{>}} \sigma+\sigma'.$$

Donc les deux membres des relations précédentes ne peuvent être inégaux, et l'on a nécessairement

$$q'-p+\sigma'+1=\sigma, \qquad q-p+\sigma+1=\sigma'.$$

Soit maintenant

$$\varphi'=\lambda'_1\varphi'_1+\ldots+\lambda'_{\sigma'}\varphi'_{\sigma'}$$

l'adjointe la plus générale qui passe par les points $b_1, \ldots, b_{q'}$. La fonction rationnelle

$$\frac{\varphi'}{\varphi_1}$$

ne pourra devenir infinie qu'aux points $a_1, \ldots, a_q$, et

contiendra le nombre voulu de constantes arbitraires pour être la plus générale de cette espèce.

605. Soit maintenant $\sigma = 0$. En prenant m assez grand, nous pourrons déterminer une adjointe Φ d'ordre $n - 3 + m$ passant par les points $a_1, \ldots, a_q$. Elle coupera f en $mn + 2p - 2 - q$ autres points $b_1, b_2, \ldots$. Soit Ψ l'adjointe du même degré la plus générale parmi celles qui passent par les points b; elle contiendra encore (au moins) $q - p + 1$ paramètres arbitraires. D'ailleurs $\frac{\Psi}{\Phi}$ ne devient infinie qu'aux points $a_1, \ldots, a_q$. Ce sera donc la fraction rationnelle cherchée, et le nombre des paramètres sera précisément $q - p + 1$.

606. Soit, en particulier, $q = p + 1$. On pourra prendre pour Φ une adjointe de degré $n - 2$; Ψ contenant deux paramètres sera de la forme $\lambda\Phi + \lambda_1\Phi_1$, et l'on aura

$$\frac{\Psi}{\Phi} = \lambda + \lambda_1 \frac{\Phi_1}{\Phi}.$$

La fonction $\frac{\Phi_1}{\Phi}$ ayant $p + 1$ pôles $a_1, \ldots, a_{p+1}$ prendra une valeur donnée $\frac{1}{\mu}$ en $p + 1$ points

$$\alpha_1 = (z_1, u_1), \qquad \ldots, \qquad \alpha_{p+1} = (z_{p+1}, u_{p+1}).$$

Ces points seront évidemment ceux des points d'intersection des courbes

$$f = 0, \qquad \Phi - \mu\Phi_1 = 0$$

qui varient avec μ. Pour $\mu = 0$, ils se confondent respectivement avec $a_1, \ldots, a_{p+1}$; lorsque μ varie, ils décriront des lignes $L_1, \ldots, L_{p+1}$; et l'on aura, d'après le théorème d'Abel,

$$\sum_{i=1}^{i=p+1} \int_{L_i} dE_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

ou, en différentiant,

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{i=p+1} \frac{\varphi_k(z_i, u_i)\,dz_i}{\dfrac{\partial f(z_i, u_i)}{\partial u_i}} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Ce système d'équations différentielles, joint aux relations

$$f(z_2, u_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad f(z_i, u_i) = 0, \qquad \ldots$$

et aux conditions initiales

$$\ldots, \qquad z_i = \zeta_i, \qquad u_i = \upsilon_i, \qquad \ldots$$

(ζ_i, υ_i étant les coordonnées du point a_i), suffit, comme nous le verrons dans la théorie des équations différentielles, à définir z_2, u_2, ... en fonction de z_1.

Mais on peut établir entre ces variables un système de relations algébriques équivalent au précédent. En effet, les fonctions symétriques des coordonnées $z_1, u_1, \ldots, z_{p+1}, u_{p+1}$ sont évidemment rationnelles en μ, qui, lui-même, en vertu de la relation

$$\mu = \frac{\Phi_1(z_1, u_1)}{\Phi(z_1, u_1)} = \ldots = \frac{\Phi_1(z_{p+1}, u_{p+1})}{\Phi(z_{p+1}, u_{p+1})} = \frac{\Sigma\Phi_1(z_i, u_i)}{\Sigma\Phi(z_i, u_i)}$$

est une fonction de même nature.

Les équations ainsi obtenues, entre les fonctions symétriques de z_1, u_1, z_2, u_2, ..., ont leurs coefficients rationnels par rapport à ceux de Φ, Φ_1, lesquels sont évidemment rationnels et symétriques en ζ_1, υ_1, ζ_2, υ_2, ... Par l'élimination de ces dernières constantes, on retrouverait les équations différentielles.

607. Parmi les intégrales F_a^μ, au moyen desquelles nous avons exprimé toutes les intégrales réduites de seconde espèce, la plus simple est celle où $\mu = 1$. Nous l'appellerons l'*intégrale élémentaire de seconde espèce*. On peut la

mettre (596) sous la forme suivante :

$$(7) \qquad F_a^1 = \int \frac{\Phi_a \, dz}{\Delta_a \frac{\partial f}{\partial u}},$$

Δ_a désignant la tangente à f au point a, et Φ_a une adjointe convenable de degré $n-2$ (passant évidemment par les $n-2$ points d'intersection de f et de Δ_a autres que a).

Ses secondes périodes d'_{ak} seront données par la formule

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi i} d_{ak}^1 = -\left(\frac{\varphi_k}{\frac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt} \right)_a.$$

Soient $a_1, \ldots, a_p$, p points quelconques non situés sur une même adjointe de degré $n-3$. Le déterminant des p^2 périodes $d_{a_ik}^1$ ne sera pas nul.

608. *Toute intégrale réduite* I *de seconde espèce pourra se mettre sous la forme*

$$(9) \qquad I = \lambda_1 F_{a_1}^1 + \ldots + \lambda_p F_{a_p}^1 + R,$$

R *désignant une fraction rationnelle.*

Soient, en effet, $\delta_1, \ldots, \delta_p$ les secondes périodes de I. Si nous déterminons les constantes λ par les relations

$$\delta_k = \lambda_1 d_{a_1k}^1 + \ldots + \lambda_p d_{a_pk}^1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

l'intégrale R, définie par la relation précédente, aura toutes ses périodes cycliques nulles. Elle sera donc rationnelle.

609. *Intégrales de troisième espèce.* — Une intégrale de troisième espèce admet au moins deux points critiques logarithmiques, la somme des résidus devant être nnlle.

Nous appellerons *intégrale élémentaire de troisième espèce*, et nous représenterons par G_a^b l'intégrale réduite qui a deux pôles a et b, et dont les développements aux environs

de ces deux points ont respectivement pour partie infinie $-\log t$ et $+\log t$.

Cette intégrale pourra se mettre sous la forme

$$\text{(10)} \qquad G_a^b = \int \frac{\Phi_{ab}\, dz}{\Delta_{ab} \dfrac{\partial f}{\partial u}},$$

Δ_{ab} désignant la droite qui joint les points a, b, et Φ_{ab} une adjointe de degré $n-2$ (laquelle devra passer par les $n-2$ points d'intersection de Δ_{ab} autres que a, b).

Soient $d_{ab1}, \ldots, d_{abp}$ ses secondes périodes cycliques. En la formule (10) du n° 586 aux intégrales E_k et G_a^b, appliquant on trouvera

$$\text{(11)} \qquad \frac{1}{2\pi i} d_{abk} = (E_k)_b - (E_k)_a.$$

La même formule, appliquée à F_α^μ et à G_a^b, donne

$$\text{(12)} \qquad 0 = (F_\alpha^\mu)_b - (F_\alpha^\mu)_a + \frac{1}{(\mu-1)!}\left(\frac{d^{\mu-1}}{dt^{\mu-1}} \frac{\Phi_{ab}}{\Delta_{ab}\dfrac{\partial f}{\partial u}} \frac{dz}{dt}\right)_\alpha.$$

Appliquée à G_a^b et G_α^β, elle donne

$$0 = (G_a^b)_\beta - (G_a^b)_\alpha - (G_\alpha^\beta)_b + (G_\alpha^\beta)_a,$$

ou

$$\text{(13)} \qquad \int_\alpha^\beta dG_a^b = \int_a^b dG_\alpha^\beta$$

(les intégrales étant prises suivant des lignes qui restent dans la région délimitée par le contour K et les lacets des points a, b, α, β, région dans laquelle les intégrales G_a^b et G_α^β restent monodromes).

Enfin, le théorème d'Abel (591), appliqué à l'intégrale G_a^b, donnera, en désignant par ζ_0, υ_0 et ζ_1, υ_1 les coordonnées des points a et b,

$$\text{(14)} \qquad \sum \int_{I_k} dG_a^b = \log \frac{\psi(\zeta_1, \upsilon_1)}{\psi_0(\zeta_1, \upsilon_1)} - \log \frac{\psi(\zeta_0, \upsilon_0)}{\psi_0(\zeta_0, \upsilon_0)}.$$

610. *Toute intégrale abélienne* I *est la somme d'une fonction linéaire d'intégrales élémentaires de troisième espèce et d'une intégrale de seconde espèce.*

Soient, en effet, $a_1, \ldots, a_q$ les points critiques de I; $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ les résidus correspondants. Posons

$$\mathrm{I} = \lambda_2 \mathrm{G}_{a_1}^{a_2} + \ldots + \lambda_q \mathrm{G}_{a_1}^{a_q} + \mathrm{R}.$$

La fonction complémentaire R n'ayant plus de périodes polaires (en vertu de l'équation $\lambda_1 + \ldots + \lambda_q = 0$) sera une intégrale de seconde espèce.

IV. — Inversion.

611. Soient $a_1 = (z_1, u_1), \ldots, a_p = (z_p, u_p)$, p points mobiles, partant des positions initiales $a_{10} = (z_{10}, u_{10}), \ldots, a_{p0} = (z_{p0}, u_{p0})$; et soient, comme précédemment,

$$\mathrm{E}_k = \int \frac{\varphi_k \, dz}{\dfrac{\partial f}{\partial u}} \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

les p intégrales normales de première espèce. Soient enfin $e_1, \ldots, e_p$ de nouvelles variables, liées aux premières par les relations

$$(1) \qquad \sum_i \frac{\varphi_k(z_i, u_i) \, dz_i}{\dfrac{\partial f(z_i, u_i)}{\partial u_i}} = de_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

On en déduit par l'intégration

$$(2) \qquad \sum_i \int_{\mathrm{L}_i} d\mathrm{E}_k = e_k - e_{k0} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

L_i désignant la ligne décrite par le point a_i et e_{k0} la valeur initiale de e_k.

Si l'on fait varier les lignes L_i sans changer leurs extrémités, on obtiendra pour chaque position des points $a_1, \ldots,$

a_p une infinité de systèmes de valeurs pour $e_1, \ldots, e_p$. En désignant l'un d'eux par $e'_1, \ldots, e'_p$, ils auront évidemment pour forme générale

$$e_k = e'_k + g_k + \sum_l h_l d_{kl},$$

$d_{k1}, \ldots, d_{kp}$ étant les secondes périodes cycliques de E_k, et g_k, h_l des entiers positifs ou négatifs.

612. Le *problème d'inversion* des intégrales abéliennes consiste à trouver réciproquement l'expression des quantités z_i, u_i en fonction de $e_1, \ldots, e_p$, considérées comme variables indépendantes.

Étudions la marche de ces fonctions aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$. Les quantités z_i, u_i étant voisines de z_{i0}, u_{i0} pourront être développées suivant les puissances entières et croissantes d'un même paramètre t_i; et $\frac{dE_k}{dt_i}$, restant fini pour $t_i = 0$, admettra un développement en puissances entières et positives, tel que

$$\frac{dE_k}{dt_i} = \alpha_{ki}^0 + \alpha'_{ki} t_i + \alpha''_{ki} t_i^2 + \ldots.$$

Les nouvelles variables t_i seront des fonctions implicites de $e_1, \ldots, e_p$, déterminées par les équations

$$(3) \quad \sum_i \int_0^{t_i} (\alpha_{ki}^0 t_i + \ldots)\, dt_i - (e_k - e_{k0}) = 0 \quad (k = 1, \ldots, p).$$

Le jacobien des premiers membres par rapport aux variables t_i sera le déterminant D des quantités

$$\alpha_{ki}^0 + \alpha'_{ki} t_i + \ldots.$$

Pour $t_1 = \ldots = t_p = 0$, D se réduit au déterminant D_0 des quantités α_{ki}^0.

Si D_0 n'est pas nul, les équations précédentes définiront effectivement (t. I, n° 193) des fonctions $t_1, \ldots, t_p$ des

variables $e_1, \ldots, e_p$, lesquelles fonctions sont synectiques aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$.

613. Le déterminant D_0 s'annule dans les deux cas suivants :

1° Les points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, tout en restant distincts, sont situés sur une même adjointe $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_p\varphi_p$ de degré $n-3$.

En effet, cette condition est exprimée par les p équations

$$\sum_k \lambda_k \alpha_{ki}^0 = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

et, pour qu'on puisse y satisfaire autrement qu'en posant $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$, il faut et il suffit que D_0 soit nul.

2° Si plusieurs points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, par exemple $a_{10}, \ldots, a_{\mu 0}$ coïncident. En effet, dans ce cas, les développements

$$\alpha_{ki}^0 + \alpha'_{ki} t_i + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

étant opérés aux environs du même point, auront les mêmes coefficients, et D_0 aura μ colonnes identiques.

Le déterminant D aura lui-même deux colonnes identiques lorsque deux des variables $t_1, \ldots, t_\mu$ seront égales : il est donc divisible par le produit P de leurs différences, et l'on aura

$$D = PD',$$

D' étant un nouveau déterminant, qui, pour $t_1 = \ldots = t_p = 0$ se réduit à

$$D'_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^0, \alpha'_{11} & \ldots & \alpha_{11}^{\mu-1}, \alpha_{1,\mu+1}^0 & \ldots & \alpha_{1p}^0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p1}^0, \alpha'_{p1} & \ldots & \alpha_{p1}^{\mu-1}, \alpha_{p,\mu+1}^0 & \ldots & \alpha_{pp}^0 \end{vmatrix}.$$

Prenons pour nouvelles variables, au lieu de $t_1, \ldots, t_\mu$, les sommes de puissances semblables

$$\sum_1^\mu t_i = s_1, \qquad \ldots, \qquad \sum_1^\mu t_i^\mu = s_\mu.$$

Le jacobien de $s_1, \ldots, s_\mu$ par rapport à $t_1, \ldots, t_\mu$ sera

$$\mu! \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ t_1 & \ldots & t_\mu \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{\mu-1} & \ldots & t_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix} = \mu!\,\mathrm{P}.$$

Le jacobien des premiers membres des équations (3) par rapport aux nouvelles variables $s_1, \ldots, s_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_p$ sera donc $\frac{1}{\mu!}\mathrm{D}'$, et si D'_0 n'est pas nul, $s_1, \ldots, s_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_p$ seront aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$ des fonctions synectiques de $e_1, \ldots, e_p$; et $t_1, \ldots, t_\mu$ seront les racines d'une équation algébrique, à coefficients synectiques.

La condition $\mathrm{D}' = 0$ exprime d'ailleurs qu'il existe une adjointe $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_p\varphi_p$ passant par les points $a_{\mu+1,0}, \ldots, a_{p,0}$ et satisfaisant, en outre, aux relations

$$\sum_k \lambda_k \alpha_{k1}^0 = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_k \lambda_k \alpha_{k1}^{\mu-1} = 0,$$

lesquelles expriment que μ de ses points d'intersection avec f sont concentrés au points $a_{10} = \ldots = a_{\mu 0}$.

614. Nous avons ainsi élucidé la nature des fonctions $t_1, \ldots, t_p$ aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$ sous la seule condition que les points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$ ne soient pas sur une même adjointe φ de degré $n-3$.

Soit ψ une fonction rationnelle de z, u, qui ne devienne infinie en aucun des points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$. Aux environs du point a_{i0}, on aura pour $\psi(z_i, u_i)$ un développement en puissances tel que

$$\psi(z_i, u_i) = \beta_i^0 + \beta_1' t_i + \ldots.$$

Les sommes $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots$ des puissances semblables des quantités $\psi(z_i, u_i)$ seront donc des fonctions synectiques de $t_1, \ldots, t_p$. D'ailleurs si $a_{10} = a_{20} = \ldots = a_{\mu 0}$, les développements de $\psi(z_1, u_1), \ldots, \psi(z_\mu, u_\mu)$ auront les mêmes coef-

ficients. Les développements de S_1, S_2, ... ne contiendront donc $t_1, \ldots, t_\mu$ que par les sommes s_1, s_2, ... de leurs puissances semblables, qui sont synectiques en $e_1, \ldots, e_p$.

Donc S_1, S_2, ... seront elles-mêmes synectiques en $e_1, \ldots, e_p$.

Si, contrairement à ce que nous avons supposé en premier lieu, $\psi(z, u)$ devenait infini en quelqu'un des points $a_{10}, \ldots, a_{p0}$ tel que a_{10}, les développements de S_1, S_2, ... contiendraient des puissances négatives de t_1 (ou, si $a_{10} = \ldots = a_{\mu 0}$, des sommes de puissances négatives semblables de $t_1, \ldots, t_\mu$) lesquelles sont des quotients de fonctions synectiques.

Donc toute fonction rationnelle symétrique Q des quantités $\psi(z_i, u_i)$ sera aux environs du point $(e_{10}, \ldots, e_{p0})$ une fonction synectique de $e_1, \ldots, e_p$, ou un quotient de fonctions synectiques.

On donne à ces fonctions Q le nom de *fonctions abéliennes*.

615. Faisons varier $e_1, \ldots, e_p$ à partir de leurs valeurs initiales; on pourra suivre de proche en proche le mouvement des points $a_1, \ldots, a_p$ et la variation des fonctions Q. On ne se trouvera arrêté que lorsque les points $a_1, \ldots, a_p$ atteindront des positions $a'_1, \ldots, a'_p$ telles qu'ils soient situés sur une même adjointe de degré $n - 3$.

Il est aisé de déterminer les valeurs $e'_1, \ldots, e'_p$ des variables indépendantes pour lesquelles cette circonstance se produira. Considérons, en effet, une adjointe variable, déterminée à chaque instant par la condition de passer par les points $a_1, \ldots, a_{p-1}$. Dans sa première position φ_0, elle coupera f aux points $a_{10}, \ldots, a_{p-1,0}$ et en $p - 1$ autres points β_0, $\beta_1, \ldots, \beta_{p-2}$. Dans sa position finale φ, elle la coupera aux points $a'_1, \ldots, a'_p$ et en $p - 2$ autres points $b_1, \ldots, b_{p-2}$.

On aura, d'après le théorème d'Abel,

$$(4) \qquad \sum_1^{p-1} \int_{a_{i0}}^{a'_i} d\mathrm{E}_k + \int_{\beta_0}^{a'_p} d\mathrm{E}_k + \sum_1^{p-2} \int_{\beta_i}^{b_i} d\mathrm{E}_k = 0.$$

On a d'autre part, d'après l'équation qui définit e_k,

$$(5)\qquad \sum_1^p \int_{a_{i0}}^{a'_i} d\mathrm{E}_k = e'_k - e_{k0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

On en déduit

$$(6)\qquad e'_k - e_{k0} = \int_{a_{p0}}^{\beta_0} d\mathrm{E}_k - \sum_1^{p-2} \int_{\beta_i}^{b_i} d\mathrm{E}_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Ces systèmes de valeurs singuliers des quantités e_k ne dépendent, comme on le voit, que de $p - 2$ points variables b_i.

616. Réciproquement tout système de valeurs $e'_1, \ldots, e'_p$ défini par les relations (6) constitue, quels que soient les points b_i, un point d'indétermination commun à toutes les fonctions abéliennes.

En effet, par les $p - 2$ points b_i nous pouvons faire passer un faisceau d'adjointes de degré $n - 3$. Soient φ l'une quelconque d'entre elles, $a'_1, \ldots, a'_p$ ses autres points d'intersection avec f. Faisons décrire aux points mobiles $a_1, \ldots, a_p$ des lignes quelconques $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_p$ partant des $a_{10}, \ldots, a_{p0}$ et aboutissant à $a'_1, \ldots, a'_p$. Les fonctions e_k définies par les équations (2) varieront suivant une loi déterminée et leurs valeurs finales e'_k seront données par les formules (5), ou, en vertu des équations (4), par les formules équivalentes (6), lesquelles sont indépendantes de l'adjointe particulière φ que l'on a choisie. Si donc, considérant les e_k comme variables indépendantes, nous les faisons varier de e_{k0} à e'_k suivant une loi convenable, les points $a_1, \ldots, a_p$ viendront aux positions finales $a'_1, \ldots, a'_p$. Or celles-ci, variant avec le choix de l'adjointe φ, sont indéterminées.

617. Les fonctions abéliennes sont uniformes. Nous établirons cette proposition en montrant leur identité avec d'autres fonctions, uniformes par leur définition même. Nous

résoudrons en même temps le problème de l'inversion, en donnant leur expression explicite en fonction de $e_1, \ldots, e_p$.

618. Soient

$$v_1 = v'_1 + iv''_1, \qquad \ldots, \qquad v_p = v'_p + iv''_p$$

p variables complexes indépendantes;

$$d_{kl} = d_{lk} = d'_{kl} + id''_{kl} \qquad (k = 1, \ldots, p;\ l = 1, \ldots, p)$$

des constantes complexes en nombre p^2; $m_1, \ldots, m_p$ des entiers réels, variables de $-\infty$ à $+\infty$. Désignons par φ la forme quadratique

$$\varphi = \sum_{k,l} d_{kl} m_k m_l,$$

par ψ la forme linéaire

$$\psi = \sum_k 2 m_k v_k,$$

et considérons la série

$$(7) \qquad \Theta(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{m_1, \ldots, m_p} e^{\pi i(\varphi + \psi)}.$$

Elle sera absolument convergente, si la forme

$$\varphi'' = \sum_{kl} d''_{k,l} m_k m_l$$

est toujours positive (sauf si tous les m sont nuls).

Posons en effet

$$\psi'' = \sum_k 2 m_k v''_k.$$

Le terme général de la série Θ aura pour module $e^{-\pi(\varphi''+\psi'')}$. Or si les indices $m_1, \ldots, m_p$, ou seulement quelques-uns d'entre eux, croissent indéfiniment, $\varphi'' + \psi''$ tendra vers ∞, et la série $\sum (\varphi'' + \psi'')^{-\mu}$ sera convergente, si $\mu > \frac{p}{2}$ (t. I, n° 318). A plus forte raison la série $\sum e^{-\pi(\varphi''+\psi'')}$ dont les termes décroissent plus rapidement.

Si l'on dérive terme à terme la série Θ par rapport à l'une des variables v, on obtiendra de nouvelles séries, dont la convergence s'établit de même. Donc Θ sera une fonction analytique de $v_1, \ldots, v_p$, uniforme et entière.

619. Elle est paire, car elle n'est pas altérée, si l'on y change le signe des variables, pourvu qu'on change en même temps le signe des indices de sommation.

Elle reste également inaltérée, si l'on accroît de l'unité une des variables $v_1, \ldots, v_p$; car son terme général se reproduit, multiplié par une puissance de $e^{2\pi i} = 1$.

Remplaçons enfin un des indices de sommation, tel que m_l, par $m_l - 1$, et changeons en même temps $v_1, \ldots, v_p$ en $v_1 + d_{1l}, \ldots, v_p + d_{pl}$; $\varphi + \psi$ sera changé en $\varphi + \psi - 2v_l - d_{ll}$. Nous obtenons donc la relation

$$(8)\quad \Theta(v_1 + d_{1l}, \ldots, v_p + d_{pl}) = e^{\pi i(-2v_l - d_{ll})}\,\Theta(v_1, \ldots, v_p).$$

Donc, si nous remplaçons plus généralement $v_1, \ldots, v_p$ par de nouvelles quantités $v'_1, \ldots, v'_p$ définies par les relations

$$(9)\qquad v'_k = v_k + g_k + \sum_l h_l d_{kl} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

g_k et h_l étant des entiers, Θ se reproduira, multiplié par un facteur exponentiel.

Nous dirons que deux systèmes de quantités v et v', liés par des relations de la forme (9) sont *équivalents;* et nous représenterons l'équivalence par le signe $\equiv$.

620. On peut prendre pour constantes d_{kl} les secondes périodes cycliques des p intégrales normales de première espèce $E_1, \ldots, E_p$. Elles satisfont en effet (599) à la relation $d_{kl} = d_{lk}$. Il faut, en outre, pour la convergence, que la forme φ'' soit positive. Mais cette condition sera également remplie.

Considérons, en effet, l'intégrale de première espèce

$$E = m_1 E_1 + \ldots + m_p E_p = P + Qi.$$

Ses périodes cycliques sont, pour la première moitié,

$$m_1, \quad \ldots, \quad m_p$$

et pour la seconde moitié

$$m_1 d_{11} + \ldots + m_p d_{p1}, \quad \ldots, \quad m_1 d_{1p} + \ldots + m_p d_{pp}.$$

L'intégrale $\int_K P\,dQ$ sera positive (575). Or nous avons trouvé (583) l'expression de cette intégrale; ici elle se réduit à

$$m_1(m_1 d''_{11} + \ldots + m_p d''_{p1}) + \ldots \\ + m_p(m_1 d''_{1p} + \ldots + m_p d''_{pp}) = \varphi''.$$

621. Les coefficients d_{kl} étant ainsi choisis, posons

$$v_1 = E_1(z) - e_1, \quad \ldots, \quad v_p = E_p(z) - e_p,$$

$e_1, \ldots, e_p$ étant des paramètres. Par cette substitution, Θ se changera en une fonction de la seule variable indépendante z

$$\Theta[E_1(z) - e_1, \ldots, E_p(z) - e_p] = \theta(z),$$

dont nous allons étudier les propriétés.

A une position donnée a du point z sur la surface de Riemann correspondent, suivant le chemin suivi par la variable pour parvenir en a, une infinité de systèmes de valeurs des intégrales $E_1, \ldots, E_p$. Désignons par $E_1(a), \ldots, E_p(a)$ l'un de ces systèmes, choisi à volonté; les autres lui seront évidemment équivalents. Donc les diverses valeurs que θ peut acquérir au point a ne diffèrent que par des facteurs exponentiels. Ceux-ci n'étant ni nuls ni infinis, on voit que la fonction θ s'annulera toujours aux mêmes points de la surface de Riemann, quel que soit le chemin suivi.

Elle ne peut d'ailleurs s'annuler en un point donné a que pour des valeurs spéciales des paramètres; car $\theta(a)$, se présentant sous la forme d'une série de puissances positives et négatives des exponentielles $e^{2\pi i e_1}, \ldots, e^{2\pi i e_p}$, dont les

coefficients ne sont pas nuls (car ce sont des exponentielles) ne peut s'annuler quels que soient $e_1, \ldots, e_p$.

A fortiori, $\theta(z)$ ne peut s'annuler identiquement que pour des systèmes particuliers de valeurs de $e_1, \ldots, e_p$, que nous écarterons provisoirement.

622. Les zéros $a_1, a_2, \ldots$ de $\theta(z)$ sont des points isolés. En effet, aux environs d'un point quelconque a, $E_1, \ldots, E_p$, restant finies, sont développables suivant les puissances entières et positives d'un paramètre t; on en déduit pour θ un développement

$$\theta = S(t, e_1, \ldots, e_p)$$

suivant les puissances entières et positives de $t, e_1, \ldots, e_p$. Ce développement permet de suivre la variation de θ aux environs de a; et en utilisant des développements contigus à celui-là, on pourra suivre cette variation tout le long d'une ligne quelconque (t. I, n° 341 et suivants).

D'ailleurs, le développement S ne peut s'annuler qu'en des points isolés, s'il n'est pas identiquement nul (t. I, n° 339). Mais, dans ce cas, les développements contigus le seraient aussi; θ serait donc nul sur toute la surface de Riemann, hypothèse que nous avons exclue.

Ces zéros étant isolés, il n'en existera qu'un nombre fini dans toute portion finie de la surface de Riemann; mais ils sont également en nombre fini dans les environs de chacun des n points à l'infini; leur nombre total est donc borné.

Enfin, ils varient d'une manière continue avec $e_1, \ldots, e_p$. Soient, en effet, a l'un de ces zéros, μ son ordre de multiplicité. L'équation

$$S(t, e_1, \ldots, e_p),$$

ayant μ racines nulles, admettra, pour des valeurs de $e_1, \ldots, e_p$ infiniment voisines de celles que l'on considère, μ racines infiniment petites (332).

623. Pour déterminer le nombre q des zéros $a_1, a_2, \ldots$, joignons un point arbitraire O aux p rétrosections, par des lacets $M_l C_l D_l C_l^{-1} D_l^{-1} M_l^{-1}$ tracés de manière à éviter ces zéros. Soit, comme précédemment, K le contour constitué par ces lacets. Il transforme la surface de Riemann en une surface s simplement connexe, dans l'intérieur de laquelle $E_1, \ldots, E_p$, et par suite, θ, seront synectiques. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K d\log\theta$$

sera donc égale à la somme des résidus de $\frac{d\log\theta}{dt}$ pour les points $a_1, \ldots, a_q$. Or, à un zéro a de multiplicité μ, correspond un résidu μ. La valeur de l'intégrale sera donc égale à q.

Pour la calculer directement, cherchons la valeur de l'intégrale prise le long des lacets $M_l C_l D_l C_l^{-1} D_l^{-1} M_l^{-1}$.

Lorsqu'on décrit la partie $C_l D_l C_l^{-1} D_l^{-1}$ du lacet qui sépare M_l de M_l^{-1}, $E_1, \ldots, E_p$ et, par suite, θ, $\frac{d\log\theta}{dz}$, reprennent au retour leurs valeurs primitives. Donc

$$\int_{M_l} + \int_{M_l^{-1}} = 0.$$

Lorsqu'on décrit le contour C_l^{-1}, les intégrales $E_1, \ldots, E_p$ reprennent leurs valeurs primitives, sauf E_l qui diminue d'une unité; θ, $\frac{d\log\theta}{dz}$ ne changent pas; donc

$$\int_{D_l} + \int_{D_l^{-1}} = 0.$$

Mais, lorsqu'on décrit D_l, $E_1, \ldots, E_p$ s'accroissent respectivement de $d_{1l}, \ldots, d_{pl}$; θ se reproduit, multiplié par

$$e^{\pi i[-2(E_l - e_l) - d_{ll}]};$$

$\frac{d\log\theta}{dz}$ diminue de $2\pi i\frac{dE_l}{dz}$; donc

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{C_l} + \int_{C_l^{-1}}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_l} 2\pi i\, dE_l = c_{ll} = 1.$$

Chaque lacet donnant un résultat analogue, l'intégrale totale est égale à p. Donc *la fonction* θ *admet* p *zéros.*

624. Calculons de même l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K E_k d\log\theta.$$

Elle sera égale à la somme des résidus de la fonction $E_k \frac{d\log\theta}{dt}$, soit à

$$\sum_i (E_k)_{a_i} \quad (i = 1, \ldots, p),$$

$(E_k)_{a_i}$ désignant la valeur de E_k au point a_i lorsque la variable z se rend de sa position initiale au point a_i en restant dans la région s.

Calculons directement cette intégrale. On a encore

$$\int_{M_l} + \int_{M_l^{-1}} = 0,$$

et de même

$$\int_{D_l} + \int_{D_l^{-1}} = 0 \qquad (\text{si } l \gtrless k),$$

car E_k, $\frac{d\log\theta}{dz}$ ne changent pas quand on décrit C_l^{-1}. Mais si $l = k$, E_k diminuant d'une unité, on aura

$$\int_{D_k} + \int_{D_k^{-1}} = \int_{D_k} d\log\theta.$$

Or, le long de D_k, $\log\theta$ s'accroît de

$$\pi i[-2(\varepsilon_k - e_k) - d_{kk}] + 2g_k\pi i,$$

g_k désignant un entier et ε_k la valeur de E_k au commencement du contour D_k. Donc

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{D_k} + \int_{D_k^{-1}}\right) = e_k - \varepsilon_k - \frac{1}{2}d_{kk} + g_k.$$

Enfin, lorsqu'on décrit D_l, E_k s'accroît de d_{kl} et $\frac{d\log\theta}{dz}$

décroît de $2\pi i \frac{dE_l}{dz}$. Donc

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{C_l}+\int_{C_l^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_l}[E_k\, d\log\theta - (E_k + d_{kl})(d\log\theta - 2\pi i\, dE_l)]$$

$$= -\frac{d_{kl}}{2\pi i}\int_{C_l} d\log\theta + d_{kl}\int_{C_l} dE_l + \int_{C_l} E_k\, dE_l.$$

Or, lorsqu'on décrit C_l, E_l s'accroît d'une unité, et $\frac{1}{2\pi i}\log\theta$ d'un nombre entier, qu'on peut représenter par $-h_l - 1$. L'expression précédente se réduit donc à

$$\int_{C_l} E_k\, dE_l + h_l d_{kl}.$$

Si donc nous posons, pour abréger,

$$\varepsilon_k + \frac{1}{2} d_{kk} - \sum_l \int_{C_l} E_k\, dE_l = \sigma_k,$$

quantité indépendante des paramètres $e_1, \ldots, e_p$, nous aurons finalement l'égalité

$$\sum_i (E_k)_{a_i} = e_k - \sigma_k + g_k + \sum_l h_l d_{kl} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

et, par suite, l'équivalence

$$(10) \qquad \sum_i E_k(a_i) \equiv e_k - \sigma_k \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

$E_1(a_i), \ldots, E_p(a_i)$ désignant l'un quelconque des systèmes de valeurs que les intégrales $E_1, \ldots, E_p$ peuvent prendre au point a_i.

625. Supposons que les paramètres $e_1, \ldots, e_p$ varient progressivement à partir des valeurs initiales $e_{10}, \ldots, e_{p0}$. Soient $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, les zéros de la fonction θ à l'instant initial. Ils varient en même temps que les paramètres en

décrivant des lignes continues $L_1, \ldots, L_p$. On aura à l'instant initial

$$\sum_i E_k(a_{io}) \equiv e_{k0} - \sigma_k \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Retranchons ces relations des précédentes, il viendra

$$\sum_i [E_k(a_i) - E_k(a_{io})] \equiv e_k - e_{k0},$$

et par suite

$$\sum_i \int_{L_i} dE_k \equiv e_k - e_{k0} \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Mais, dans ces dernières relations, les deux membres ont des valeurs entièrement déterminées; ils varient d'une manière continue et s'annulent tous deux à l'instant initial. Ils sont donc non seulement équivalents, mais égaux (590).

Nous retombons ainsi sur le système des équations (2). Nous avons vu que celles-ci permettent de suivre le déplacement des points $a_1, \ldots, a_p$ lorsque $e_1, \ldots, e_p$ varient, tant que ces paramètres ne passent pas par un système de valeurs $e'_1, \ldots, e'_p$, de la forme (6).

Nous avons vu, en outre, que pour un système de valeurs de cette forme, les positions des points $a_1, \ldots, a_p$ cessent d'être déterminées. La fonction

$$\Theta(E_1 - e'_1, \ldots, E_p - e'_p),$$

au lieu d'avoir p zéros, en aura une infinité; elle sera donc identiquement nulle.

626. On peut construire une fonction θ admettant p zéros $a_1, \ldots, a_p$ donnés arbitrairement. Il suffira pour cela de déterminer $e_1, \ldots, e_p$ par les équations (2). Les lignes L_i pouvant être tracées à volonté entre les points a_{i0} et a_i, on pourra satisfaire à la question par une infinité de systèmes de valeurs de $e_1, \ldots, e_p$, tous équivalents entre eux.

627. Nous avons ainsi établi l'existence d'un système de

valeurs des paramètres tel que la fonction θ s'annule aux points donnés $a_1, \ldots, a_p$. Mais les équations (2) qui nous ont fourni ce résultat seraient peu propres au calcul effectif de ces valeurs, car elles contiennent les constantes $a_{10}, \ldots, a_{p0}$, qu'il serait malaisé de déterminer. Il vaut mieux recourir aux équivalences (10), le calcul des constantes σ_k étant plus facile. Ces formules donnent

$$e_k \equiv \sum_i \mathrm{E}_k(a_i) + \sigma_k.$$

D'après ce que nous venons de voir, il faut et il suffit que les e_k aient cette forme pour que la fonction

$$(11) \qquad \Theta[\mathrm{E}_1(z) - e_1, \ldots, \mathrm{E}_p(z) - e_p]$$

ait pour zéros les points $a_1, \ldots, a_p$.

Supposons $e_1, \ldots, e_p$ ainsi choisis. Par les points $a_2, \ldots, a_p$ faisons passer une adjointe d'ordre $n-3$; elle coupera f en $p-1$ nouveaux points $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et, d'après le théorème d'Abel, les expressions

$$\sum_2^p \mathrm{E}_k(a_i) + \sum_2^p \mathrm{E}_k(\alpha_i) = \tau_k \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

resteront constantes si $a_2, \ldots, a_p$ varient (ou du moins seront équivalentes à un système de constantes). Pour les calculer, on pourra assigner à $a_2, \ldots, a_p$ un système de valeurs particulières; par des opérations algébriques on déterminera les points $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$; et par des quadratures, on obtiendra les quantités τ_k.

Cela posé, considérons $z, a_2, \ldots, a_p$ comme constants, et a_1 comme une variable. L'expression (11) s'annulera pour $a_1 = z$; mais elle s'annule aussi, que ue soit z, lorsque $a_1, \ldots, a_p$ sont sur une même adjointe d'ordre $n-3$ (625). Donc elle admet aussi les zéros $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$. D'ailleurs, la fonction Θ étant paire, elle pourra se mettre sous la forme

$$\Theta[e_1 - \mathrm{E}_1(z), \ldots, e_p - \mathrm{E}_p(z)]$$

ou

$$\Theta[E_1(a_1)-\varepsilon_1, \ldots, E_p(a_1)-\varepsilon_p]$$

en posant

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= E_k(z) - \sum_2^p E_k(a_i) - \sigma_k \\ &= E_k(z) + \sum_2^p E_k(\alpha_i) - \tau_k - \sigma_k \end{aligned} \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Pour qu'elle admette les zéros z, α_2, ..., α_p, il faudra qu'on ait

$$-\tau_k - \sigma_k \equiv \sigma_k \qquad \text{d'où} \qquad \sigma_k \equiv -\frac{1}{2}\tau_k.$$

628. Soient comme précédemment (z_1, u_1), ..., (z_p, u_p) les coordonnées des zéros a_1, ..., a_p de la fonction θ; et soit

$$\chi(z, u) = \frac{\Psi(z, u)}{\Phi(z, u)}$$

une fraction rationnelle quelconque en z, u. Les p quantités

$$\chi_i = \chi(z_i, u_i)$$

sont les racines d'une équation de degré p

$$\Pi(X - \chi_i) = X^p + A_1 X^{p-1} + \ldots + A_p = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions uniformes de $e_1, \ldots, e_p$; et le problème de l'inversion consiste à trouver l'expression de ces coefficients.

Nous pouvons évidemment supposer, pour traiter cette question, que le degré de Φ est au moins égal à celui de Ψ; car dans le cas contraire il suffirait de former l'équation qui a pour racines les quantités $\frac{1}{\chi_i}$.

629. Considérons la fraction

$$\lambda - \chi = \frac{\lambda\Phi - \Psi}{\Phi},$$

λ désignant une constante. Elle a évidemment pour zéros ceux des points d'intersection de f et de $\lambda\Phi - \Psi$ dont la position dépend du paramètre λ. Désignons-les par $b_1^\lambda, \ldots, b_q^\lambda$. Si λ varie de manière à tendre vers ∞, ces points décriront des lignes $L_1, \ldots, L_q$ aboutissant à des points $b_1, \ldots, b_q$ qui sont ceux des points d'intersection de f et de Φ qui ne sont pas sur la courbe Ψ. Ces points $b_1, \ldots, b_q$ seront les pôles de la fraction.

Soit E_k une intégrale normale de première espèce; désignons par $E_k(b_m)$ l'une quelconque des valeurs qu'elle prend au point b_m et par $\overline{E}_k(b_m^\lambda)$ celle de ces valeurs au point b_m^λ qui est déterminée par la relation

$$\overline{E}_k(b_m^\lambda) + \int_{L_m} dE_k = E_k(b_m).$$

On aura, d'après le théorème d'Abel,

$$0 = \sum_m \int_{L_m} dE_k = \sum_m \left[\overline{E}(b_m^\lambda) - E_k(b_m)\right].$$

630. Cela posé, considérons l'expression

$$H = \prod_1^q \frac{\Theta[\overline{E}_1(b_m^\lambda) - e_1, \ldots, \overline{E}_p(b_m^\lambda) - e_p]}{\Theta[E_1(b_m) - e_1, \ldots, E_p(b_m) - e_p]}. \tag{12}$$

Remplaçons les quantités $e_1, \ldots, e_p$ par leurs valeurs

$$\begin{aligned} e_k &\equiv \sum E_k(a_i) + \sigma_k \equiv E_k(a_1) - \sum_2^p E_k(\alpha_i) + \tau_k + \sigma_k \\ &\equiv E_k(a_1) - \sum_2^p E_k(\alpha_i) - \sigma_k, \end{aligned}$$

et changeons les signes de tous les arguments, ce qui n'altère pas les fonctions paires Θ. Cette expression prendra la forme

$$\prod_1^q \frac{\Theta[E_1(a_1) - \varepsilon_{m1}^\lambda, \ldots, E_p(a_1) - \varepsilon_{mp}^\lambda]}{\Theta[E_1(a_1) - \varepsilon_{m1}, \ldots, E_p(a_1) - \varepsilon_{mp}]},$$

en posant, pour abréger,

$$\varepsilon_{mk} = \mathrm{E}_k(b_m) + \sum_2^p \mathrm{E}_k(\alpha_i) + \sigma_k,$$

$$\varepsilon_{mk}^\lambda = \overline{\mathrm{E}}_k(b_m^\lambda) + \sum_2^p \mathrm{E}_k(\alpha_i) + \sigma_k.$$

Considérée comme fonction de a_1, elle est uniforme sur toute la surface de Riemann; car chacun de ses facteurs reste inaltéré si l'on accroît d'un entier l'une des intégrales $\mathrm{E}_1(a_1), \ldots, \mathrm{E}_p(a_1)$; et si on les accroît simultanément des périodes $d_{1l}, \ldots, d_{pl}$, ils sont respectivement multipliés par des exponentielles, ayant pour somme de leurs exposants

$$2\pi i \sum_1^q (\varepsilon_{mk}^\lambda - \varepsilon_{mk}) = 2\pi i \sum_1^q [\overline{\mathrm{E}}_k(b_m^\lambda) - \mathrm{E}(b_m)] = 0.$$

Chaque facteur du numérateur admet d'ailleurs pour zéros les points $\alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et l'un des points b_m^λ. Le facteur correspondant du dénominateur a les mêmes zéros, sauf b_m^λ, qui est remplacé par b_m.

Donc H, considéré comme dépendant de a_1, est une fonction rationnelle des coordonnées z_1, u_1, ayant les mêmes zéros et les mêmes pôles que la fonction

$$\lambda - \chi(z_1, u_1).$$

Donc elle est égale au produit de cette fonction par un facteur indépendant de z_1, u_1.

Comme on peut faire le même raisonnement pour chacun des points $a_2, \ldots, a_p$, on aura finalement

$$\mathrm{H} = \mathrm{C}\Pi_1^p(\lambda - \chi_i) = \mathrm{C}[\lambda^p + \mathrm{A}_1\lambda^{p-1} + \ldots], \tag{13}$$

C étant une constante, qu'on pourra déterminer en assignant à $a_1, \ldots, a_p$ un système de valeurs particulières.

En donnant successivement à λ p valeurs particulières $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, nous obtiendrons p relations de la forme

$$\lambda_k^p + \mathrm{A}_1\lambda_k^{p-1} + \ldots + \mathrm{A}_p = \frac{\mathrm{H}_k}{\mathrm{C}_k} \qquad (k = 1, \ldots, p),$$

dont la résolution donnera les coefficients $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$.

631. Soient $(z_1, u_1), \ldots, (z_p, u_p)$ p points variables, décrivant des lignes $L_1, \ldots, L_p$ entre leurs positions initiales $a_1, \ldots, a_p$ et leurs positions finales $b_1, \ldots, b_p$. Posons

$$E_k(a_i) + \int_{L_i} dE_k = \overline{E}_k(b_i)$$

et considérons la fonction

$$(14) \qquad I = \log \frac{\Theta[\ldots, E_k(z) - \Sigma_i \overline{E}_k(b_i) - \sigma_k, \ldots]}{\Theta[\ldots, E_k(z) - \Sigma_i E_k(a_i) - \sigma_k, \ldots]}.$$

C'est une intégrale abélienne. En effet, si l'on fait décrire à z un contour fermé quelconque, les valeurs initiales de $E_1(z), \ldots, E_p(z)$ seront remplacées par des valeurs finales équivalentes; le quotient des deux fonctions Θ se reproduira multiplié par une exponentielle dont l'exposant est une constante, et sa dérivée logarithmique $\frac{dI}{dz}$ restera inaltérée. C'est donc une fonction uniforme. D'ailleurs $\frac{dI}{dz}\frac{dz}{dt}$ a pour points critiques les pôles simples a_i et b_i, les résidus correspondants étant -1 et $+1$. Donc I est bien une intégrale abélienne, ayant les points logarithmiques a_i et b_i.

D'ailleurs, lorsque z décrit un des contours C_l, les fonctions Θ ne sont pas altérées, et I ne peut varier que de multiples de $2\pi i$. Ses premières périodes cycliques seront donc des multiples de $2\pi i$. Elles varient d'ailleurs d'une manière continue lorsque les points b_i se déplacent (tant que les lignes L_i ne rencontrent pas les coupures C_l). Mais, dans leur position initiale, I se réduit à la constante $\log 1 = 0$.

Les premières périodes cycliques, étant nulles à cet instant, resteront telles dans toute la suite du mouvement; on aura donc

$$(15) \qquad I = \Sigma G_{a_i}^{b_i} + C,$$

C étant une constante, car elle n'a plus de pôle, et ses premières périodes cycliques sont nulles. On pourra, si l'on

veut, faire disparaître cette constante en changeant l'origine des intégrales $G_{a_i}^{b_i}$.

L'égalité (15) étant ainsi établie tant que les points z et b_i ne traversent pas les coupures C_l, subsistera de quelque manière que varient ces quantités, car ses deux membres sont des fonctions analytiques des coordonnées des points z et b_i.

632. Supposons que les points a_i se réunissent en un même point a, et les points b_i en un même point b.

L'équation précédente deviendra

$$(16) \qquad p G_a^b = \log \frac{\Theta[\ldots, E_k(z) - p\,E_k(b) - \sigma_k, \ldots]}{\Theta[\ldots, E_k(z) - p\,E_k(a) - \sigma_k, \ldots]}.$$

633. On peut également exprimer les intégrales de seconde espèce F_a^μ au moyen de la transcendante Θ.

Soit en effet z' un point situé dans le voisinage du point fixe a; considérons l'expression

$$I = \log \Theta[\ldots, E_k(z) - p\,E_k(z') - \sigma_k, \ldots].$$

On pourra développer $E_k(z')$ suivant les puissances entières et positives d'un paramètre t', qui s'annule pour $z' = a$.

Si z décrit un lacet $M_l C_l M_l^{-1}$ aboutissant à un contour C_l, Θ ne sera pas changé; son logarithme ne pourra varier que d'un multiple de $2\pi i$, et la dérivée $\frac{d^\mu I}{dt'^\mu}$ restera invariable.

Si z décrit un lacet aboutissant à un contour D_l, E_k s'accroîtra de d_{kl}; $\log\Theta$ s'accroîtra d'une quantité de la forme

$$\pi i[-2\,E_l(z) + 2p\,E_l(z') + 2\sigma_l - d_{ll}] + 2m\pi i$$

(m étant entier); et $\frac{d^\mu I}{dt'^\mu}$ s'accroîtra d'une constante.

Donc si cette fonction n'a pour points critiques que des pôles, ce sera une intégrale réduite de seconde espèce.

Or son seul point critique est le point z' où Θ s'annule. Lorsque z se meut aux environs de ce point, il sera dans les environs du point a; on pourra donc développer $E_k(z)$ de la même manière que $E_k(z')$; il n'y aura de changé que la valeur du paramètre, qui sera différente de t'; appellons-la t.

Le point z' étant un zéro de multiplicité p pour la fonction Θ, le développement de cette fonction suivant les puissances de t, t' sera de la forme

$$\Theta = (t - t')^p(\alpha_{00} + \alpha_{10} t + \alpha_{01} t' + \ldots).$$

La partie infinie de I sera $p \log(t - t')$ et celle de $\dfrac{d^\mu I}{dt'^\mu}$ sera $\dfrac{(\mu - 1)!\, p}{(t - t')^\mu}$.

On aura donc

$$\frac{d^\mu I}{dt'^\mu} = (\mu - 1)!\, p F_{z'}^\mu + C,$$

C désignant une constante (car c'est une intégrale réduite qui n'a plus de pôle).

Faisons enfin tendre z' vers a; nous aurons pour déterminer F_a^μ la relation

$$\left[\frac{d^\mu I}{dt'^\mu}\right]_{t'=0} = (\mu - 1)!\, p F_a^\mu + C. \tag{17}$$

FIN DU TOME DEUXIÈME.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de.*	*Lisez.*
9	11 en descendant	M	M_1
92	10 en remontant	$x\|$	$\|x\|$
94	5 id.	$f\|$	$\|f\|$
114	7 id.	$-$	$=$
153	8 en descendant	ds_1, ds_2	$d\sigma_1, d\sigma_2$
154	9 id.	ds_1, ds_2	$d\sigma_1, d\sigma_2$
255	1 en remontant	Ω	Ω_1
266	5 id.	$\int_A$	$\int_A^B$
295	4 en descendant	$\alpha\Sigma\alpha^n X_n$	$\alpha\Sigma\alpha^n X'_n$
316	8 en remontant	f'_z	$f'_z =$
366	7 id.	$\|z - a$	$\|z - a\|$
433	7 en descendant	$(-u)$	$f(-u)$
442	7 id.	$\psi_n^2 \psi_n^2$	$\psi_n^2 \psi_m^2$
475	5 id.	$\theta'_a(0)$	$\theta_\alpha(0)$
505	10 id.	$\psi(v + \tau$	$\psi(v + \tau)$
513	6 id.	quatités	quantités
518	3 id.	$1 - q^{m^2}$	$1 - q^{2m}$
548	3 id.	représente	présente
551	3 id.	φ_{18}	φ_{13}
556	13 id.	celle	cette
580	6 en remontant	$(n + \omega_1)$	$(u + \omega_1)$
601	1 en descendant	J soit	$\bar{J}$ soit
601	12 id.	$\bar{J}$	J
604	5 en remontant	$Cx + D$	$\frac{Cx + D}{\sqrt{X}}$
622	4 id.	vertu des vertu	vertu
672	9 en descendant	appliquant	(reporter ce mot à la ligne 8)

TABLE DES MATIÈRES.

SECONDE PARTIE.

CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE I.

INTÉGRALES INDÉFINIES.

I. — *Intégration des fonctions rationnelles.*

II. — *Intégration des différentielles algébriques.*

III. — *Intégration des fonctions transcendantes.*

CHAPITRE II.

INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — *Intégrales définies généralisées.*

II. — *Intégrales multiples.*

III. — *Calcul des intégrales définies.*

CHAPITRE III.

DES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES.

I. — *Dérivation des intégrales définies.*

II. — *Intégrales eulériennes.*

CHAPITRE IV.

POTENTIELS NEWTONIENS.

I. — *Étude analytique des potentiels.*

II. — *Applications physiques.*

CHAPITRE V.

SÉRIES DE FOURIER.

I. — *Intégrales de Fourier.*

II. — *Séries trigonométriques.*

CHAPITRE VI.

INTÉGRALES COMPLEXES.

CHAPITRE VIII.

INTÉGRALES ABÉLIENNES.

I. — *Surfaces de Riemann.*

II. — *Intégrales abéliennes. — Périodicité.*

III. — *Réduction des intégrales abéliennes.*

IV. — *Inversion.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

49015 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

49015. — Paris, Imp Gauthier-Villars, 55, Quai des Grands-Augustins

COURS D'ANALYSE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COURS
D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR C. JORDAN,

MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME ÉDITION.

TOME TROISIÈME.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1915

PRÉFACE DE LA TROISIÈME ÉDITION.

La présente édition se distingue de la précédente par l'adjonction de Notes relatives :

1° Aux nouvelles méthodes introduites par M. Weierstrass dans le calcul des variations (Notes I et II);

2° A l'équation de Fredholm (Note III).

Signalons encore quelques additions de détail : détermination du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant; intégration de l'équation des télégraphistes par la méthode de Riemann; etc.

COURS

D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE I.

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

I. — Notions préliminaires.

1. Nous avons vu dans le *Calcul différentiel* (Chap. I, § XIII) que, lorsqu'on a un certain nombre de relations entre une ou plusieurs variables indépendantes x_1, x_2, ... et des fonctions y_1, y_2, ... de ces variables, on pouvait, en combinant ces équations avec celles qui s'en déduisent par dérivation, en déduire une infinité d'équations différentielles auxquelles satisfont ces fonctions.

Il nous reste à traiter le problème inverse, en cherchant à remonter des équations différentielles aux relations qui existent entre les variables elles-mêmes.

Nous nous occuperons d'abord des équations différentielles *ordinaires*, où ne figure qu'une variable indépendante x.

2. Soit proposé un système de m équations différentielles entre x et m fonctions $y_1, \ldots, y_m$ de cette variable. On pourra, par l'introduction de variables auxiliaires, ramener le système proposé à un autre système équivalent, où ne figurent que des dérivées du premier ordre.

En effet, supposons, pour fixer les idées, que nous ayons deux équations différentielles simultanées :

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0,$$

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0.$$

Posons

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \qquad \frac{dz}{dx} = z'.$$

On aura évidemment

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = y'', \qquad \frac{dz}{dx} = z',$$

$$F\left(x, y, y', y'', \frac{dy''}{dx}, z, z', \frac{dz'}{dx}\right) = 0,$$

$$F_1\left(x, y, y', y'', \frac{dy''}{dx}, z, z', \frac{dz'}{dx}\right) = 0.$$

Ces cinq équations différentielles forment un système manifestement équivalent aux deux équations primitives, mais où ne figurent plus que des dérivées du premier ordre.

3. Considérons donc un système de m équations simultanées du premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z, \frac{dz}{dx}, u, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, z, \frac{dz}{dx}, u, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

entre la variable indépendante x et m fonctions inconnues $y, z, u, \ldots$.

Si parmi ces équations il en figure une, $F = 0$, qui ne contienne pas de dérivée, soit y une des variables qu'elle contient; l'équation résolue par rapport à y donnera un résultat de la forme

$$y = \varphi(x, z, u, \ldots). \tag{1}$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \ldots.$$

Substituant ces valeurs dans les équations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots,$$

on aura un système de $m - 1$ équations différentielles pour déterminer les $m - 1$ variables z, u, ...; on calculera ensuite y par l'équation (1).

Supposons, au contraire, que l'équation $F = 0$ contienne au moins une dérivée, telle que $\frac{dy}{dx}$. Résolvant par rapport à cette dérivée, il viendra

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}, \ldots\right).$$

Substituons cette valeur dans les équations suivantes; on obtiendra un système

$$\frac{dy}{dx} = f,$$

$$\varphi_1\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, u, \frac{du}{dx}, \ldots\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

équivalent au proposé.

Si l'une des équations $\varphi_1 = 0$, ... ne contenait aucune dérivée, on pourrait s'en servir, comme il a été expliqué,

pour éliminer une variable et ramener l'étude du système proposé à celle d'un système de $m-1$ équations différentielles seulement.

Si, au contraire, l'équation $\varphi_1=0$ contient une dérivée $\frac{dz}{dx}$, on en déduira

$$\frac{dz}{dx}=f_1\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{du}{dx}, \ldots\right),$$

et l'on substituera cette valeur dans les équations suivantes.

Continuant ainsi, on arrivera à mettre le système sous la forme

$$\frac{dy}{dx}=f, \qquad \frac{dz}{dx}=f_1, \qquad \frac{du}{dx}=f_2, \qquad \ldots,$$

f ne contenant plus $\frac{dy}{dx}$, f_1 ne contenant ni $\frac{dy}{dx}$ ni $\frac{dz}{dx}$, ...

Portant maintenant dans chaque équation les valeurs des dérivées fournies par les équations suivantes, on obtiendra un nouveau système d'équations, de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx}=\psi\,(x, y, z, u, \ldots),$$

$$\frac{dz}{dx}=\psi_1(x, y, z, u, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Un système d'équations simultanées du premier ordre, ainsi résolu par rapport aux dérivées, est dit ramené à sa *forme normale*.

On voit, par ce qui précède, que l'étude d'un système quelconque d'équations différentielles simultanées peut être ramenée à celle d'un système normal. Le nombre des équations de ce système normal équivalent au proposé servira de définition à l'*ordre* de ce dernier.

En particulier, si l'on n'a qu'une équation différentielle

$$\frac{d^m y}{dx^m}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right),$$

elle sera équivalente au système normal

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \ldots, \qquad \frac{dy^{m-2}}{dx^{m-2}} = y^{m-1},$$
$$\frac{dy^{m-1}}{dx} = f(x, y, y', \ldots, y^{m-1}).$$

Son ordre sera donc égal à m.

4. D'un système de m équations différentielles entre x et les m fonctions y, z, u, ..., on peut déduire, ainsi que nous allons le voir, une équation différentielle où ne figurent que x et y.

En général, le nombre des équations données n'est pas suffisant pour éliminer z, u, ... et leurs dérivées. Mais, si nous prenons la dérivée de chacune des équations données, nous obtiendrons m équations nouvelles, en introduisant au plus $m - 1$ inconnues de plus, à savoir une dérivée nouvelle de chacune des fonctions z, u, ... En répétant cette opération, on arrivera évidemment à se procurer assez d'équations pour effectuer l'élimination.

Considérons, par exemple, un système de trois équations

$$F = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0$$

entre x, y, z, u. Supposons que l'ordre de la plus haute dérivée de chaque variable, dans chacune de ces équations, soit donné par le Tableau suivant :

(2)

	y	z	u
F	m	n	p
F_1	m_1	n_1	p_1
F_2	m_2	n_2	p_2

Différentions les trois équations respectivement A, A_1, A_2 fois. Nous obtiendrons ainsi un total de $A + A_1 + A_2 + 3$ équations, entre lesquelles on aura à éliminer z et ses B premières dérivées, u et ses C premières dérivées, B désignant

le plus grand des nombres $A + n$, $A_1 + n_1$, $A_2 + n_2$, et C le plus grand des nombres $A + p$, $A_1 + p_1$, $A_2 + p_2$; soit en tout $B + C + 2$ inconnues.

En thèse générale, l'élimination ne pourra se faire que si le nombre des équations surpasse celui des inconnues. On devra donc avoir

$$A + A_1 + A_2 \geqq B + C$$

et, comme on a

$$B \geqq A_1 + n_1, \qquad C \geqq A_1 + p_1,$$
$$B \geqq A_2 + n_2, \qquad C \geqq A_2 + p_2,$$

on en déduit

$$A \geqq n_1 + p_2, \qquad A \geqq n_2 + p_1.$$

On voit de même que A_1 est au moins égal au plus grand des deux nombres $n + p_2$, $n_2 + p$, et A_2 au moins égal au plus grand des nombres $n + p_1$, $n_1 + p$.

Il est d'ailleurs aisé de voir qu'en prenant A, A_1, A_2 précisément égaux aux limites inférieures trouvées ci-dessus, on aura juste le nombre d'équations nécessaires pour l'élimination.

Soit en effet, pour fixer les idées,

$$A = n_1 + p_2 \geqq n_2 + p_1,$$
$$B = A + n \geqq A_1 + n_1 \geqq A_2 + n_2.$$

On en déduira

$$A + n = n + n_1 + p_2 = A_1 + n_1;$$

d'où

$$B = A + n = A_1 + n_1;$$

et, d'autre part,

$$A + p = p + n_1 + p_2 \leqq A_2 + p_2.$$

On trouvera de même

$$A_1 + p_1 \leqq A_2 + p_2 \qquad \text{ou} \qquad \leqq A + p,$$

suivant que A_1 sera égal à $n + p_2$ ou à $n_2 + p$.

On aura donc, dans tous les cas,

$$C = A_2 + p_2 \overline{\overline{>}} A_1 + p_1 \overline{\overline{>}} A + p,$$

et, par suite,

$$B + C = A_1 + n_1 + A_2 + p_2 = A + A_1 + A_2.$$

En donnant à A, A_1, A_2 les valeurs ci-dessus, on aura donc une équation de plus qu'il n'est nécessaire pour déterminer z, u et leurs dérivées au moyen de y et de ses dérivées. Ces valeurs, substituées dans la dernière équation, donneront une équation finale ne contenant que y et ses dérivées jusqu'à l'ordre D, D désignant le plus grand des nombres $A + m$, $A_1 + m_1$, $A_2 + m_2$.

Ce nombre D, qui représente l'ordre du système, sera évidemment égal au plus grand des nombres $m + n_1 + p_2$, $m_1 + n + p_2$, ..., qu'on obtient en associant ensemble trois nombres du Tableau (2) appartenant à la fois à des horizontales et à des verticales différentes.

5. Ce résultat, qu'on étendrait sans difficulté au cas d'un nombre quelconque d'équations, peut se trouver en défaut si z, u et leurs dérivées figurent dans les équations proposées de telle sorte que l'élimination puisse se faire avant qu'on ait formé toutes les équations auxiliaires qui paraissent au premier abord nécessaires, d'après le nombre des quantités à éliminer.

On obtiendra, même dans ce cas, une équation finale en y de la forme

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{\alpha-1} y}{dx^{\alpha-1}}\right);$$

mais z, u, au lieu d'être immédiatement donnés en fonction de y et de ses dérivées, pourront être déterminés par de nouvelles équations différentielles, de la forme

$$\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, z, u, \ldots, \frac{d^{\lambda-1} z}{dx^{\lambda-1}}, \frac{d^{\mu-1} u}{dx^{\mu-1}}\right),$$

$$\frac{d^\mu u}{dx^\mu} = \varphi_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, z, u, \ldots, \frac{d^{\lambda-1} z}{dx^{\lambda-1}}, \frac{d^{\mu-1} u}{dx^{\mu-1}}\right).$$

Éliminant u entre ces équations par la répétition du même procédé, on arrivera à faire dépendre l'étude du système primitif de celle d'un système de la forme suivante :

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = f\left(x, y, \ldots, \frac{d^{\alpha-1} y}{dx^{\alpha-1}}\right),$$

$$\frac{d^\beta z}{dx^\beta} = f_1\left(x, y, \ldots, z, \ldots, \frac{d^{\beta-1} z}{dx^{\beta-1}}\right),$$

$$\frac{d^\gamma u}{dx^\gamma} = f_2\left(x, y, \ldots, z, \ldots, u, \ldots, \frac{d^{\gamma-1} u}{dx^{\gamma-1}}\right).$$

6. Considérons, en particulier, les fonctions déterminées par une équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right) = 0,$$

algébrique par rapport à $x, y, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$.

Toute solution d'une semblable équation satisfait évidemment à une infinité d'équations analogues résultant de la combinaison de F et de ses dérivées.

Réciproquement, soit y une fonction de x qui satisfasse à une série d'équations différentielles algébriques.

$$F = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots.$$

Toutes ces équations résulteront de la combinaison de l'une d'entre elles avec ses dérivées.

Considérons, en effet, parmi toutes les équations de ce genre auxquelles y satisfait, celles dont l'ordre est minimum, et parmi celles-ci choisissons celle où la plus haute dérivée est élevée à la puissance minimum. Soient α et μ cet ordre et ce degré, $F = 0$ l'équation correspondante; $F_1 = 0$ une autre équation quelconque du système.

De l'équation $F = 0$ et de ses dérivées on pourra déduire les valeurs de $\frac{d^{\alpha+1} y}{dx^{\alpha+1}}, \ldots$ et des puissances de $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$ de degré $\geqq \mu$ en fonction rationnelle de $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}, \ldots, \left(\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right)^{\mu-1}$.

Substituant ces valeurs dans F_1, on obtiendra une nouvelle équation $\Phi = 0$, qui ne contiendra plus que $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}, \ldots, \left(\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right)^{\mu-1}$. Mais, d'après notre hypothèse, y ne satisfait à aucune équation de ce genre. Donc l'équation $\Phi = 0$ est une identité.

Nous dirons que la fonction y est une solution *propre* de l'équation $F = 0$ et une solution *impropre* des autres équations $F_1 = 0, \ldots$; et nous appellerons *ordre* de la fonction l'ordre de l'équation $F = 0$.

D'après cette définition, les fonctions algébriques seront d'ordre zéro; les fonctions d'ordre > 0 seront transcendantes.

Une équation différentielle algébrique $F = 0$ est dite *irréductible,* si elle n'admet que des solutions propres.

7. Soient $y, z, \ldots$ des solutions des équations différentielles algébriques

$$(3)\qquad \begin{cases} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right) = 0, \\ F_1\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^\beta z}{dx^\beta}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

de degrés $\mu, \nu, \ldots$, par rapport à $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}, \frac{d^\beta z}{dx^\beta}, \ldots$.

Soient, d'autre part, $Y, Z, \ldots$ d'autres fonctions satisfaisant à des équations analogues

$$(4)\qquad \Phi = 0, \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots.$$

Supposons qu'il existe entre ces diverses fonctions et leurs dérivées une relation algébrique

$$\Psi = 0.$$

Si nous éliminons $Y, Z, \ldots$ entre cette équation et les équations (4), nous obtiendrons une équation différentielle

$G = 0$ entre y, z, ..., qui représentera la condition nécessaire et suffisante pour que ces fonctions, associées à des solutions convenablement choisies des équations (4), satisfassent à l'équation $\Psi = 0$.

Si donc l'équation $G = 0$ n'est qu'une conséquence des équations (3) et de leurs dérivées, tout système de solutions de (3), associé à un système convenable de solutions de (4), satisfera encore à l'équation $\Psi = 0$.

Ce cas se présentera nécessairement s'il n'existe entre les solutions y, z, ..., primitivement données, aucune relation algébrique de la forme

$$\text{(5)} \qquad H\left(x, y, \ldots, \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}, z, \ldots, \frac{d^\beta z}{dx^\beta}, \ldots\right) = 0,$$

où $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$, $\frac{d^\beta z}{dx^\beta}$, ... figurent avec des degrés respectivement inférieurs à μ, ν, ...

En effet, au moyen des équations (3) et de leurs dérivées, on peut éliminer de G les dérivées $\frac{d^{\alpha+1} y}{dx^{\alpha+1}}$, ..., $\frac{d^{\beta+1} z}{dx^{\beta+1}}$, ... et les puissances $\left(\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}\right)^\mu$, $\left(\frac{d^\beta z}{dx^\beta}\right)^\nu$, ... On obtiendra ainsi une équation de la forme (5), laquelle devra, par hypothèse, se réduire à une identité.

8. Comme application des considérations qui précèdent, cherchons la forme la plus générale des relations algébriques qui peuvent exister entre des intégrales abéliennes $y_1, \ldots, y_m$ définies par les équations différentielles algébriques

$$F_1\left(x, \frac{dy_1}{dx}\right) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m\left(x, \frac{dy_m}{dx}\right) = 0.$$

Soit

$$\text{(6)} \qquad \Psi(x, y_1, \ldots, y_m) = 0$$

une semblable relation. Nous pouvons évidemment admettre

qu'il n'existe aucune relation de même nature entre les fonctions $y_1, \ldots, y_{m-1}$ et la variable indépendante.

L'équation (6), résolue par rapport à y_m, pourra s'écrire

$$y_m = \varphi(x, y_1, \ldots, y_{m-1}).$$

D'après le théorème précédent, cette équation subsistera si l'on y remplace $y_1, \ldots, y_{m-1}$ par des solutions quelconques des équations $F_1, \ldots, F_{m-1}$, pourvu qu'on remplace en même temps y_m par une solution convenable de l'équation F_m. Mais il est clair que les solutions de chacune de ces équations s'obtiennent toutes en ajoutant à l'une d'elles une constante d'ailleurs arbitraire. On aura donc

$$y_m + c_m = \varphi(x, y_1 + c_1, \ldots, y_{m-1} + c_{m-1}),$$

$c_1, \ldots, c_{m-1}$ étant des constantes arbitraires, et c_m une autre constante, dépendant de celles-là.

Prenant la dérivée de cette équation par rapport à la constante c_1, il viendra

$$\frac{\partial c_m}{\partial c_1} = \frac{\partial \varphi(x, y_1 + c_1, \ldots)}{\partial c_1} = \frac{\partial \varphi(x, y_1 + c_1, \ldots)}{\partial y_1},$$

et, en posant $c_1 = \ldots = c_{m-1} = 0$,

$$\frac{\partial \varphi(x, y_1, \ldots)}{\partial y_1} = k_1,$$

k_1 désignant la valeur constante que prend dans cette hypothèse la dérivée $\frac{\partial c_m}{\partial c_1}$.

Cette dernière équation doit se réduire à une identité, puisque nous supposons que $x, y_1, \ldots, y_{m-1}$ ne sont liées par aucune relation algébrique. On aura de même identiquement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = k_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} = k_{m-1},$$

$k_2, \ldots, k_{m-1}$ étant des constantes. On en déduit

$$\varphi = k_1 y_1 + \ldots + k_{m-1} y_{m-1} + X,$$

X étant une fonction algébrique de x. La relation cherchée sera donc de la forme

$$y_m = k_1 y_1 + \ldots + k_{m-1} y_{m-1} + X.$$

9. Ces préliminaires posés, il nous reste à indiquer les procédés par lesquels on peut *intégrer* une équation différentielle (ou un système de semblables équations), c'est-à-dire déterminer ses solutions.

Il est aisé de voir, par des exemples, que ce problème est indéterminé.

Considérons, en effet, une équation

$$\varphi(x, y, c) = 0 \tag{7}$$

entre la variable indépendante x, la fonction y et la constante arbitraire c. On en déduit par différentiation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0. \tag{8}$$

Tirons la valeur de c de l'équation (7) pour la substituer dans (8); il viendra, en représentant par des parenthèses le résultat de cette substitution,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dy = 0. \tag{9}$$

Cette équation différentielle admet pour solution la fonction y définie par l'équation (7), quelle que soit la constante c. A chaque valeur de cette constante répond une solution particulière. L'ensemble de ces solutions se nomme la *solution générale*.

Pour reconnaître s'il existe d'autres solutions, en dehors de celles que nous venons de déterminer, introduisons une

variable auxiliaire c définie par l'équation (7). Cette équation différentiée donne

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial c}dc = 0,$$

ou, en substituant pour c sa valeur tirée de (7),

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)dc = 0$$

ou enfin, en tenant compte de l'équation (9),

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right)dc = 0.$$

On peut satisfaire à cette équation de deux manières :

1° En posant

$$dc = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c = \text{const.},$$

la valeur correspondante de y étant donnée par l'équation (7); on retombe ainsi sur la solution générale;

2° En posant

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) = 0.$$

Cette équation détermine la valeur de y en fonction de x. L'inconnue auxiliaire c sera ensuite déterminée par l'équation (7).

La nouvelle solution ainsi obtenue se nomme la *solution singulière* de l'équation différentielle.

En considérant x, y comme les coordonnées d'un point, chaque solution particulière

$$\varphi(x, y, c) = 0,$$

où c est supposé constant, représente une courbe.

La solution générale représente l'ensemble de ces courbes. Enfin la solution singulière, définie par l'équation

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial c}\right) = 0,$$

résultat de l'élimination de c entre les équations

$$\varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0, \tag{10}$$

représentera l'enveloppe de ce système de courbes.

Il arrivera parfois que les deux équations (10) soient incompatibles, auquel cas il n'y aura pas de solution singulière ; ou que la valeur de c en fonction de x, déduite de ces équations, se réduise à une constante ; dans ce cas, la solution singulière se confondra avec l'une des solutions particulières contenues dans la solution générale.

10. Les considérations précédentes peuvent aisément s'étendre à des systèmes d'équations différentielles simultanées.

Soient, par exemple,

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0 \tag{11}$$

deux équations entre la variable indépendante x, les deux fonctions y_1, y_2 et deux constantes c_1, c_2 ; on en déduira, en différentiant et éliminant c_1, c_2, les deux équations différentielles

$$\left\{\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1}\right) dy_1 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2}\right) dy_2 = 0, \\ \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}\right) dy_1 + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2}\right) dy_2 = 0, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

dont les équations (11) représentent la solution générale.

Pour obtenir les autres solutions s'il en existe, prenons pour inconnues auxiliaires les quantités c_1, c_2 définies par les équations (11).

La différentiation de ces équations donnera

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial c_2} dc_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial c_1} dc_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial c_2} dc_2 = 0$$

ou, en éliminant c_1, c_2 et tenant compte des équations (12),

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_1}\right) dc_1 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_2}\right) dc_2 = 0,\\ &\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial c_1}\right) dc_1 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial c_2}\right) dc_2 = 0.\end{aligned}\right.$$

On peut satisfaire à ces équations :

1° En posant

$$dc_1 = 0, \qquad dc_2 = 0,$$

d'où

$$c_1 = \text{const.}, \qquad c_2 = \text{const.};$$

on retombe ainsi sur la solution générale;

2° En posant

$$\Delta = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_1}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial c_2}\right) - \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_2}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial c_1}\right) = 0,$$

auquel cas les équations (13) se réduisent à une seule d'entre elles, par exemple à

$$(14)\quad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_1}\right) dc_1 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_2}\right) dc_2 = 0.$$

Cela posé, des trois équations

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \Delta = 0$$

on pourra déduire les valeurs de c_1, c_2, y_2 en fonction de x et de y_1. Substituant ces valeurs et leurs différentielles dans l'équation (14), elle prendra la forme

$$X\,dx + Y\,dy_1 = 0,$$

où X, Y sont des fonctions de x et de y_1.

Toute solution y_1 de cette équation, combinée avec la valeur correspondante de y_2 tirée de $\Delta = 0$, donnera une solution singulière des équations différentielles (12).

3° Enfin, si les équations

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_1}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial c_2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial c_1}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial c_2}\right) = 0$$

étaient satisfaites par un même système de valeurs de y_1, y_2,

elles fourniraient une nouvelle solution; mais le système de ces équations est généralement surabondant.

11. Le problème de l'intégration des équations différentielles (ou des systèmes d'équations différentielles) peut être envisagé sous deux points de vue différents.

On peut se proposer d'obtenir une solution générale. Celle-ci trouvée, les solutions singulières s'en déduiront immédiatement si l'on a affaire à une seule équation, ou s'il s'agit d'un système d'équations différentielles, par l'intégration d'un nouveau système d'ordre moindre que le proposé. On pourra ainsi former le tableau de toutes les solutions possibles.

Mais, dans les applications du Calcul intégral, la question de l'intégration se présente autrement. Les fonctions inconnues sont assujetties, non seulement à satisfaire aux équations différentielles données, mais à d'autres conditions accessoires qui achèvent de les préciser, de telle sorte que le problème ne présente plus rien d'indéterminé.

Considérons, par exemple, le mouvement d'un point dans l'espace. D'après les principes de la Mécanique, ce mouvement sera défini par les six équations suivantes :

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x', & \dfrac{dy}{dt} = y', & \dfrac{dz}{dt} = z', \\ m\dfrac{dx'}{dt} = X, & m\dfrac{dy'}{dt} = Y, & m\dfrac{dz'}{dt} = Z, \end{cases}$$

où m désigne la masse du point; x, y, z ses coordonnées à l'époque t; X, Y, Z les composantes de la force qui le sollicite.

Il est clair que la question ainsi posée est encore indéterminée. Mais on pourra achever de la préciser en se donnant, par exemple, la position du point, et les composantes de sa vitesse à l'instant initial t_0. Le problème deviendra, en général, déterminé, et pourra se formuler ainsi :

Trouver six fonctions x, y, z, x', y', z' de la variable t,

qui satisfassent aux équations différentielles (15), *et qui prennent des valeurs données* $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$ *pour* $t = t_0$.

La question ainsi posée sera facile à résoudre si l'on peut déterminer la solution générale du système (15). Cette solution sera, en effet, donnée par un système de six équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_6 = 0$$

entre x, y, z, x', y', z', t et six constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_6$. En exprimant que ces six équations sont satisfaites lorsqu'on y pose $t = t_0$, $x = x_0$, ..., $z' = z'_0$, on obtiendra six équations de condition pour déterminer les valeurs de $a_1, \ldots, a_6$ correspondantes à la solution particulière qu'on cherche.

Mais ce n'est que dans des cas très spéciaux qu'on sait obtenir la solution générale d'un système d'équations différentielles. On se trouvera donc réduit le plus souvent à étudier la solution particulière qui satisfait au problème déterminé qu'on a en vue. Il existe pour traiter cette nouvelle question des procédés d'approximation numérique que nous exposerons plus tard, et qui seraient inapplicables au problème plus étendu, mais plus vague, de la recherche de la solution générale.

II. — Équations du premier ordre.

12. Considérons une équation différentielle du premier ordre ramenée à la forme normale

$$\frac{dy}{dx} = X$$

ou

$$dy - X\,dx = 0. \tag{1}$$

Au lieu de cette équation, on peut considérer, avec Euler.

la suivante

$$\mu\, dy - \mu X\, dx = 0, \tag{2}$$

où μ est une fonction de x, y choisie à volonté.

L'équation (2) est, en effet, équivalente à (1), tant que μ n'est ni nul ni infini. La seule différence est qu'elle pourra admettre la solution nouvelle $\mu = 0$, ou perdre la solution $\frac{1}{\mu} = 0$.

Supposons le facteur μ choisi de manière que le premier membre de l'équation (2) soit une différentielle exacte. On pourra déterminer, par de simples quadratures (t. II, n° 174), une fonction φ, telle qu'on ait

$$d\varphi = \mu\, dy - \mu X\, dx.$$

Lors même que ces quadratures ne pourraient s'effectuer exactement, il sera toujours possible de déterminer, avec telle approximation qu'on voudra, la valeur de φ pour chaque système de valeurs de x, y.

Cela posé, l'équation (2) se réduit à

$$d\varphi = 0$$

et donne immédiatement

$$\varphi = \text{const.}$$

Le problème de l'intégration sera donc résolu dès qu'on aura déterminé, soit la fonction φ, soit le multiplicateur μ, d'où φ peut se déduire par quadrature.

13. L'équation

$$d\varphi = \mu\, dy - \mu X\, dx$$

se décompose dans les deux suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\mu X.$$

Éliminant μ, on obtiendra l'équation aux dérivées par-

tielles

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + X\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

L'intégration de cette équation aux dérivées partielles et celle de l'équation (1) sont deux problèmes entièrement équivalents.

En effet, soit φ une solution (ou *intégrale*) quelconque de l'équation (3). On aura

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(dy - X\,dx).$$

L'équation

$$dy - X\,dx = 0$$

sera donc équivalente à $d\varphi = 0$ et admettra la solution générale

$$\varphi = \text{const.}$$

Réciproquement, supposons que, par un procédé quelconque, on ait obtenu une solution générale de l'équation (1), telle que

$$f(x, y, c) = 0,$$

c étant une constante arbitraire. Cette équation, résolue par rapport à c, prendra la forme

$$\varphi_1(x, y) = c.$$

Différentiant, il viendra

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy = 0.$$

Cette équation devant être équivalente à l'équation primitive (1), les coefficients de dx et dy doivent être proportionnels; d'où la relation

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + X\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Donc φ_1 est une intégrale de l'équation (3).

Cette intégrale une fois connue, on pourra en déduire toutes les autres. Soit, en effet, φ une autre intégrale quelconque; des deux équations (3) et (4) on déduit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

équation qui exprime que φ est une fonction, d'ailleurs arbitraire, de φ_1.

14. Quant au multiplicateur μ, il doit satisfaire à la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu X}{\partial y} = 0, \tag{5}$$

et réciproquement, toute solution de cette équation donnera un multiplicateur.

Connaissant un multiplicateur μ et l'intégrale φ correspondante, on en déduira aisément tous les autres. Soit, en effet, $\mu' = \mu\nu$ un autre multiplicateur; on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mu\nu}{\partial x} + \frac{\partial \mu\nu X}{\partial y} \\ &= \nu\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu X}{\partial y}\right) + \mu\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} + X\frac{\partial \nu}{\partial y}\right) \\ &= \mu\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} + X\frac{\partial \nu}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Donc ν sera une intégrale de l'équation (3), et l'on aura $\nu = F(\varphi)$, F désignant une fonction arbitraire.

15. Si, dans le premier membre de l'équation différentielle

$$dy - X\,dx = 0,$$

nous remplaçons x, y par $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, ε désignant un paramètre infiniment petit et ξ, η des fonctions de x et de y,

nous obtiendrons l'équation transformée

$$dy + \varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \varepsilon\frac{\partial\eta}{\partial y}dy$$
$$-\left(X + \varepsilon\xi\frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon\eta\frac{\partial X}{\partial y} + \ldots\right)\left(dx + \varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial x}dx + \varepsilon\frac{\partial\xi}{\partial y}dy\right) = 0,$$

ou, en développant et négligeant le carré de ε,

$$\left[1 + \varepsilon\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - X\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right]dy$$
$$-\left[X + \varepsilon\left(X\frac{\partial\xi}{\partial x} + \xi\frac{\partial X}{\partial x} + \eta\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\right]dx = 0.$$

Si cette équation transformée reproduit à un facteur près l'équation primitive, nous dirons que cette dernière admet la transformation infinitésimale ξ, η.

Cette condition est exprimée par la relation

$$X\frac{\partial\xi}{\partial x} + \xi\frac{\partial X}{\partial x} + \eta\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x} - X\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - X\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) = 0.$$

Posons

$$\eta = X\xi + z;$$

cette équation se réduira à

$$0 = z\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - X\frac{\partial z}{\partial y} = z^2\left(\frac{\partial\frac{1}{z}}{\partial x} + \frac{\partial\frac{X}{z}}{\partial y}\right).$$

Cette relation montre que, lorsque z n'est pas nul, son inverse $\frac{1}{z} = \frac{1}{\eta - X\xi}$ est un multiplicateur.

On voit donc que la recherche des multiplicateurs et celle des transformations infinitésimales de l'équation différentielle en elle-même ne constituent au fond qu'un seul et même problème.

16. Les équations différentielles que les principes précé-

dents permettent d'intégrer se ramènent pour la plupart aux trois types fondamentaux suivants :

1° Les équations de la forme

$$dy - XY\,dx = 0,$$

où X est une fonction de x et Y une fonction de y. Ces équations admettent le multiplicateur $\frac{1}{Y}$; car les deux termes de l'expression

$$\frac{dy}{Y} - X\,dx,$$

ne contenant chacun qu'une seule variable, sont des différentielles exactes.

17. 2° Les équations *homogènes*

$$dy - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0.$$

Leur premier membre se reproduisant à un facteur près quand on y remplace x, y par $(1+\varepsilon)x$, $(1+\varepsilon)y$, elles admettront comme multiplicateur la quantité $\dfrac{1}{y - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)x}$.

On peut le vérifier aisément par un changement de variable. Posons, en effet,

$$y = ux, \qquad \text{d'où} \qquad dy = u\,dx + x\,du;$$

l'équation deviendra

$$u\,dx + x\,du - \varphi(u)\,dx = 0,$$

et, si nous la divisons par le facteur

$$y - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)x = x[u - \varphi(u)],$$

il viendra

$$\frac{dx}{x} + \frac{du}{u - \varphi(u)} = 0,$$

équation dont le premier membre est une différentielle exacte, les variables étant séparées.

Soient u_0 une valeur particulière de la variable auxiliaire u; x_0 la valeur correspondante de x, laquelle pourra être choisie arbitrairement. L'équation précédente, intégrée de u_0 à u, donnera

$$\log \frac{x}{x_0} + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u - \varphi(u)} = 0;$$

d'où

$$x = x_0 e^{-\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u - \varphi(u)}}.$$

On aura donc exprimé x et $y = ux$ en fonction de la variable auxiliaire u et de la constante arbitraire x_0.

18. 3° Les *équations linéaires*, de la forme

$$\frac{dy}{dx} = Py + Q,$$

P et Q désignant des fonctions de x seul.

L'équation ne change pas si l'on y remplace y par $y + \varepsilon\eta$, η étant une fonction de x définie par l'équation

$$\frac{d\eta}{dx} = P\eta. \tag{6}$$

Elle admet donc le multiplicateur $\frac{1}{\eta}$. On a effectivement

$$\frac{dy - (Py + Q)\,dx}{\eta} = \frac{dy}{\eta} - \frac{y\,d\eta}{\eta^2} - \frac{Q}{\eta}dx = d\frac{y}{\eta} - \frac{Q}{\eta}dx = 0.$$

Intégrant, il viendra

$$\frac{y}{\eta} - \int_{x_0}^{x} \frac{Q}{\eta}dx = C,$$

d'où

$$y = C\eta + \eta \int_{x_0}^{x} \frac{Q}{\eta}\,dx.$$

La fonction auxiliaire η qui figure dans cette formule est

une solution choisie à volonté de l'équation (6), qui ne diffère de la proposée que par la suppression du dernier terme. Cette équation s'intègre immédiatement en séparant les variables. Il viendra

$$\frac{d\eta}{\eta} = \mathrm{P}\,dx,$$

d'où

$$\log\eta = \int_{x_0}^{x} \mathrm{P}\,dx + \log \mathrm{C}_1,$$

$$\eta = \mathrm{C}_1 e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{P}\,dx},$$

C_1 désignant une constante arbitraire.

On voit que, dans l'expression de y, la constante arbitraire C figure linéairement.

Réciproquement, soit

$$y = \mathrm{CX} + \mathrm{X}_1$$

une fonction de x linéaire par rapport à la constante C. L'élimination de C entre cette équation et sa dérivée donnera une équation linéaire

$$\mathrm{X}\left(\frac{dy}{dx} - \mathrm{X}'_1\right) - \mathrm{X}'(y - \mathrm{X}_1) = 0.$$

19. Un grand nombre d'équations différentielles peuvent se ramener aux types précédents par des changements de variables.

Considérons d'abord l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right).$$

Si $ab' - ba'$ n'est pas nul, posons

$$ax + by + c = \xi, \qquad a'x + b'y + c' = \eta;$$

d'où

$$a\,dx + b\,dy = d\xi, \qquad a'\,dx + b'\,dy = d\eta,$$

$$dx = \mathrm{A}\,d\xi + \mathrm{B}\,d\eta, \qquad dy = \mathrm{A}'\,d\xi + \mathrm{B}'\,d\eta.$$

L'équation transformée

$$\frac{A' d\xi + B' d\eta}{A d\xi + B d\eta} = f\left(\frac{\xi}{\eta}\right)$$

sera manifestement homogène.

Soit, au contraire,

$$ab' - ba' = 0,$$

d'où

$$a'x + b'y + c' = m(ax + by + c) + n.$$

Le second membre de l'équation proposée sera de la forme

$$\varphi(ax + by + c).$$

Prenons $ax + by + c = \xi$ pour variable nouvelle, à la place de x par exemple. On aura

$$a\,dx + b\,dy = d\xi,$$

$$dx = \frac{1}{a}(d\xi - b\,dy),$$

et l'équation transformée deviendra

$$\frac{a\,dy}{d\xi - b\,dy} = \varphi(\xi)$$

ou

$$dy = \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{a + b\,\varphi(\xi)}.$$

Les variables sont séparées. On obtiendra donc y en fonction de ξ par une quadrature, et l'équation

$$ax + by + c = \xi$$

donnera la valeur correspondante de x.

20. L'équation de *Bernoulli*

$$\frac{dy}{dx} = Py + Qy^m,$$

où P et Q sont des fonctions de x, peut s'écrire

$$\frac{1}{1-m}\frac{dy^{1-m}}{dx} = Py^{1-m} + Q$$

et se changera immédiatement en une équation linéaire, si l'on prend y^{1-m} pour variable à la place de y.

21. L'équation

$$X\,dx + Y\,dy + Z(x\,dy - y\,dx) = 0,$$

où X, Y, Z sont des fonctions homogènes dont les deux premières sont du même degré, se ramène à l'équation de Bernoulli, en posant

$$y = ux, \qquad dy = u\,dx + x\,du.$$

On a, en effet,

$$X = x^m \varphi(u), \qquad Y = x^m \psi(u), \qquad Z = x^n \chi(u).$$

Substituant, et divisant par x^m, il viendra

$$\varphi(u)\,dx + \psi(u)(x\,du + u\,dx) + x^{n-m+2}\chi(u)\,du = 0$$

ou

$$\frac{dx}{du} = -\frac{\psi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)}x - \frac{\chi(u)}{\varphi(u) + u\psi(u)}x^{n-m+2}.$$

22. L'équation de *Riccati*

$$\frac{dy}{dx} = P + Qy + Ry^2,$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, peut s'intégrer par quadratures dès qu'on en connaît une solution particulière y_1. Posons, en effet,

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

L'équation transformée sera

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = P + Q\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + R\left(y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right),$$

et comme on a, par hypothèse,

$$\frac{dy_1}{dx} = P + Qy_1 + Ry_1^2,$$

on obtiendra après réduction et multiplication par $-z^2$

$$\frac{dz}{dx} = -(Q + 2Ry_1)z - R,$$

équation linéaire.

Intégrant celle-ci, on voit que l'intégrale générale y de l'équation de Riccati se présente sous la forme d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont linéaires par rapport à la constante arbitraire C.

Réciproquement, soit y une fonction déterminée par la relation

$$y = \frac{CF + G}{CH + K},$$

où F, G, H, K sont des fonctions de x, C une constante arbitraire. On en déduit

$$C = \frac{G - Ky}{Hy - F},$$

et en dérivant

$$(Hy - F)(G - Ky)' - (Hy - F)'(G - Ky) = 0.$$

Effectuons les dérivations indiquées; les termes en yy' se détruisant, on aura une équation de Riccati.

23. Considérons comme cas particulier l'équation

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = ax^m,$$

où a et m sont des constantes.

Changeons de variable en posant

$$x = \frac{1}{t}, \qquad y = t - t^2 z,$$

on aura l'équation transformée

$$-t^2 \frac{(1 - 2tz)\,dt - t^2\,dz}{dt} + (t - t^2 z)^2 = at^{-m}$$

ou, en réduisant et divisant par t^4,

$$(8) \qquad \frac{dz}{dt} + z^2 = at^{-m-4},$$

équation semblable à la proposée, sauf le remplacement de m par $-m-4$.

Faisons cet autre changement de variable

$$x = t^{\frac{1}{m+1}}, \qquad y = \frac{b}{z};$$

il viendra

$$\frac{-b(m+1)\,dz}{z^2 t^{-\frac{m}{m+1}}\,dt} + \frac{b^2}{z^2} = at^{\frac{m}{m+1}}$$

ou

$$\frac{dz}{dt} + \frac{a}{b(m+1)} z^2 = \frac{b}{m+1} t^{-\frac{m}{m+1}}.$$

Si nous prenons la constante b égale à $\frac{a}{m+1}$,

$$(9) \qquad \frac{dz}{dt} + z^2 = \frac{a}{(m+1)^2} t^{-\frac{m}{m+1}}.$$

Il résulte de là qu'on saura intégrer l'équation (7) dès qu'on aura intégré l'une des deux équations analogues (8) ou (9).

On en conclut que l'équation peut être intégrée si m a l'une des deux formes suivantes :

$$m_i = -\frac{4i}{2i+1}, \qquad m'_i = -\frac{4i}{2i-1},$$

i désignant un entier.

Le cas $m = m_i$ se ramène, en effet, au cas où

$$m = -\frac{m_i}{m_i + 1} = m'_i,$$

et celui-ci au cas où

$$m = -m'_i - 4 = m_{i-1}.$$

Poursuivant ces réductions on finira par arriver au cas où $m = m_0 = 0$, pour lequel l'intégration peut s'effectuer immédiatement en séparant les variables.

24. Considérons encore l'équation

$$\alpha x\, dy + \beta y\, dx + x^m y^n (a x\, dy + b y\, dx) = 0.$$

On a

$$(\alpha x\, dy + \beta y\, dx) x^{\beta-1} y^{\alpha-1} = d(x^\beta y^\alpha).$$

L'expression générale des multiplicateurs qui rendent intégrable $\alpha x\, dy + \beta y\, dx$ sera donc

$$x^{\beta-1} y^{\alpha-1}\, \varphi(x^\beta y^\alpha).$$

On voit de même que l'expression générale des multiplicateurs de $x^m y^n (a x\, dy + b y\, dx)$ sera

$$x^{b-1-m} y^{a-1-n}\, \psi(x^b y^a).$$

Il résulte de là que $x^\mu y^\lambda$ rendra séparément intégrable chacune des deux moitiés du premier membre de l'équation proposée et, par suite, sera un facteur intégrant, si l'on a

$$\lambda = \alpha - 1 + \alpha\xi = a - 1 - n + a\eta,$$
$$\mu = \beta - 1 + \beta\xi = b - 1 - m + b\eta.$$

Ces équations simultanées détermineront aisément ξ, η, λ, μ, si le déterminant $\alpha b - \beta a$ n'est pas nul.

Si ce déterminant était nul, on aurait

$$a = k\alpha, \qquad b = k\beta,$$

et l'équation se réduisant à

$$(1 + kx^m y^n)(\alpha x\, dy + \beta y\, dx) = 0$$

serait intégrable sans difficulté.

25. Considérons enfin, avec M. *Darboux*, les équations différentielles de la forme

$$A\, dX + B\, dY + C(Y\, dX - X\, dY) = 0,$$

où A, B, C désignent des fonctions rationnelles de X et de Y.

Ces équations prendront une forme plus symétrique si l'on remplace, comme dans la théorie des courbes algébriques, les variables X, Y par des coordonnées homogènes, en posant

$$X = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z}{\alpha x + \beta y + \gamma z}, \qquad Y = \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z}{\alpha x + \beta y + \gamma z}.$$

On en déduira sans peine pour dX, dY, $Y dX - X dY$ des expressions de la forme

$$\frac{a(y\, dz - z\, dy) + b(z\, dx - x\, dz) + c(x\, dy - y\, dx)}{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation proposée, donneront une transformée de la forme

$$(10) \quad L(y\, dz - z\, dy) + M(z\, dx - x\, dz) + N(x\, dy - y\, dx) = 0,$$

L, M, N étant des fonctions homogènes en x, y, z et d'un même degré, que nous désignerons par m.

Cette équation peut encore s'écrire ainsi

$$(11) \qquad P\, dx + Q\, dy + R\, dz = 0,$$

en posant

$$P = Mz - Ny,$$
$$Q = Nx - Lz,$$
$$R = Ly - Mx;$$

d'où

$$Px + Qy + Rz = 0. \tag{12}$$

26. Pour chaque point x, y, z du plan, la direction de la tangente à la courbe qui représente géométriquement l'intégrale sera donnée sans ambiguïté par l'équation (11). Il y a toutefois exception pour les points où l'on a simultanément

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0,$$

pour lesquels l'équation (11), étant identiquement satisfaite, n'établit plus aucune relation entre dx, dy, dz.

Ces points *singuliers* sont évidemment les seuls par lesquels puissent passer plusieurs branches de courbes distinctes satisfaisant à l'équation différentielle. On peut donc affirmer que tout point multiple d'une courbe intégrale ou tout point d'intersection de deux courbes intégrales est nécessairement un point singulier.

Cherchons le nombre ξ de ces points singuliers. Nous remarquerons, à cet effet, que les points communs à $P = 0$, $Q = 0$, en nombre $(m+1)^2$, satisfont en vertu de (12) à la relation $Rz = 0$. On aura donc

$$(m+1)^2 = \xi + \eta,$$

η étant le nombre des points communs à $P = 0$, $Q = 0$, $z = 0$.

D'autre part, les $m+1$ points communs à $P = 0$, $z = 0$ satisfont à la relation $Qy = 0$. D'ailleurs, un seul d'entre eux, savoir $z = 0$, $y = 0$, satisfait à $y = 0$. Les m autres donneront

$$Q = 0;$$

donc

$$\eta = m \qquad \text{et} \qquad \xi = m^2 + m + 1.$$

27. Cherchons maintenant la condition pour qu'une courbe

algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

soit une intégrale de l'équation différentielle. On trouvera, en différentiant l'équation ci-dessus,

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

On a d'autre part, pour tout point de la courbe,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = pf = 0,$$

p désignant le degré de la courbe $f = 0$.

Des deux équations précédentes on déduit celle-ci

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{y\,dz - z\,dy} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{z\,dx - x\,dz} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{x\,dy - y\,dx},$$

dont la combinaison avec l'équation différentielle (10) donnera

$$L \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un polynome entier. Puisqu'il s'annule pour tout système de valeurs de x, y, z, tel qu'on ait $f = 0$, il sera divisible par f; on aura donc identiquement

$$L \frac{\partial f}{\partial x} + M \frac{\partial f}{\partial y} + N \frac{\partial f}{\partial z} = Kf,$$

K étant un polynome entier, de degré évidemment égal à $m - 1$.

Telle est donc l'équation de condition cherchée, laquelle peut encore s'écrire ainsi

$$(13) \quad \left(L - \frac{Kx}{p}\right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(M - \frac{Ky}{p}\right) \frac{\partial f}{\partial y} + \left(N - \frac{Kz}{p}\right) \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

28. Pour tout point singulier de l'équation différentielle, on aura

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0,$$

d'où

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}.$$

Soit λ la valeur commune de ces rapports. On aura

$$L = \lambda x, \qquad M = \lambda y, \qquad N = \lambda z.$$

Substituant ces valeurs dans (13), il viendra

$$0 = \left(\lambda - \frac{K}{p}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) = (p\lambda - K)f.$$

Les points singuliers seront donc de deux sortes :

1° Ceux qui sont sur la courbe $f = 0$;

2° Ceux qui ne sont pas sur cette courbe, et pour lesquels on aura nécessairement

$$p\lambda - K = 0.$$

Dans le cas où la courbe f n'a pas de point multiple, il est aisé de déterminer le nombre des points singuliers de la première sorte. En effet, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne pouvant s'annuler simultanément, l'équation (13) donnera, d'après un théorème d'Algèbre connu (DARBOUX, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. II),

$$L - \frac{Kx}{p} = W\frac{\partial f}{\partial y} - V\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$M - \frac{Ky}{p} = U\frac{\partial f}{\partial z} - W\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$N - \frac{Kz}{p} = V\frac{\partial f}{\partial x} - U\frac{\partial f}{\partial y}$$

et, par suite,

$$P = \left(U\frac{\partial f}{\partial z} - W\frac{\partial f}{\partial x}\right)z - \left(V\frac{\partial f}{\partial x} - U\frac{\partial f}{\partial y}\right)y$$

$$= pUf - (Ux + Vy + Wz)\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$Q = pVf - (Ux + Vy + Wz)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$R = pWf - (Ux + Vy + Wz)\frac{\partial f}{\partial z},$$

U, V, W étant des polynomes de degré évidemment égal à $m - p + 1$.

Ces équations montrent immédiatement que les points singuliers cherchés sont les intersections de la courbe $f = 0$ avec la courbe de degré $m - p + 2$

$$Ux + Vy + Wz = 0.$$

Leur nombre sera donc

$$p(m - p + 2).$$

29. Cela posé, nous allons établir que, si l'on connaît un nombre suffisant d'intégrales particulières algébriques, on pourra en déduire l'intégrale générale de l'équation proposée.

Soient $f = 0$, $f_1 = 0$, ... ces intégrales particulières; p, p_1, ... leurs degrés respectifs. En posant, pour abréger,

$$L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z} = \Delta,$$

on aura (27)

$$\Delta f = Kf, \qquad \Delta f_1 = K_1 f_1, \qquad \dots.$$

La fonction $\varphi = f^\alpha f_1^{\alpha_1}$, ... satisfera à une équation analogue; on a, en effet,

$$\Delta\varphi = \alpha\frac{\varphi}{f}\Delta f + \alpha_1\frac{\varphi}{f_1}\Delta f_1 + \dots = (\alpha K + \alpha_1 K_1 + \dots)\varphi.$$

Si les constantes α, α_1, ... peuvent être déterminées de

telle sorte qu'on ait

$$(14)\qquad \alpha K + \alpha_1 K_1 + \ldots = -\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

et

$$(15)\qquad \alpha p + \alpha_1 p_1 + \ldots = -m-2,$$

l'expression φ sera un multiplicateur qui rend différentielle exacte le premier membre de l'équation différentielle.

En effet, il faut et il suffit pour cela qu'on ait les trois équations de condition

$$\frac{\partial\, \varphi(Mz - Ny)}{\partial y} = \frac{\partial\, \varphi(Nx - Lz)}{\partial x}, \qquad \ldots.$$

Développant et remarquant qu'en vertu de l'équation (15) φ est une fonction homogène de degré $-m-2$, d'où

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (-m-2)\varphi,$$

enfin tenant compte de la relation

$$x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y} + z\frac{\partial N}{\partial z} = mN,$$

ces trois équations se réduiront à l'équation unique

$$\Delta\varphi = -\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right)\varphi,$$

que nous supposons satisfaite.

Les deux membres de l'équation (14) étant des polynomes homogènes de degré $m-1$, leur identification donnera $\frac{m(m+1)}{2}$ équations de condition distinctes, linéaires en α, α_1, ... Le nombre total des conditions à remplir sera donc $\frac{m(m+1)}{2}+1$, et il suffira, en général, d'avoir $\frac{m(m+1)}{2}+1$ intégrales particulières pour obtenir un multiplicateur et en déduire par quadrature l'intégrale générale.

30. Ce résultat serait en défaut si le déterminant des équations de condition était nul; mais, dans ce cas, on pourrait

déterminer les quantités α de telle sorte qu'on eût

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha K + \alpha_1 K_1 + \ldots = 0, \\ \alpha p + \alpha_1 p_1 + \ldots = 0. \end{cases}$$

Or il est aisé de voir que, si ces conditions sont satisfaites, $\varphi = \text{const.}$ sera l'intégrale générale de l'équation proposée. En effet, φ étant homogène et de degré zéro, on aura

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

D'autre part,

$$0 = \Delta\varphi = L\frac{\partial\varphi}{\partial x} + M\frac{d\varphi}{\partial y} + N\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{Mz - Ny} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{Nx - Lz} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{Ly - Mx}.$$

De ces relations combinées avec l'équation différentielle on déduit

$$0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi,$$

d'où

$$\varphi = \text{const.}$$

Les équations (16) équivalant à $\frac{m(m+1)}{2} + 1$ équations linéaires et homogènes en α, α_1, ... pourront toujours être satisfaites si le nombre de ces quantités est au moins égal à $\frac{m(m+1)}{2} + 2$. Mais, dans la plupart des cas, les équations de condition ne seront pas distinctes, ce qui réduira le nombre des solutions algébriques nécessaires pour l'application de la méthode.

En effet, pour que le polynome $\alpha K + \alpha_1 K_1 + \ldots$ soit identiquement nul, il suffit qu'il s'annule pour $\frac{m(m+1)}{2}$ points $x, y, z; x_1, y_1, z_1; \ldots$; car on obtiendra ainsi $\frac{m(m+1)}{2}$ équations linéaires et homogènes entre ses coeffi-

cients. Ceux-ci seront donc nuls, à moins que le déterminant de ces équations ne soit nul (ce qui aurait lieu dans le cas où les points considérés seraient tels que toute courbe d'ordre $m - 1$ qui passe par quelques-uns d'entre eux passe nécessairement par les autres).

Cela posé, soit x, y, z un point singulier qui n'appartienne à aucune des courbes $f, f_1, \dots$. On aura, pour ce point,

$$K = \lambda p, \quad K_1 = \lambda p_1, \quad \dots,$$

d'où

$$\alpha K + \alpha_1 K_1 + \dots = \lambda(\alpha p + \alpha_1 p_1 + \dots).$$

L'équation de condition $\alpha K + \alpha_1 K_1 + \dots = 0$, relative à ce point, fera donc double emploi avec l'équation

$$\alpha p + \alpha_1 p_1 + \dots = 0.$$

Si donc il existe q points singuliers qui n'appartiennent à aucune des courbes $f, f_1, \dots$ (et qui ne soient pas tels que toute courbe d'ordre $m - 1$, qui passe par quelques-uns d'entre eux, passe nécessairement par les autres), on pourra les prendre dans la série des points $x, y, z; x_1, y_1, z_1; \dots$, pour lesquels on doit exprimer que $\alpha K + \alpha_1 K_1 + \dots$ s'annule, et le nombre des équations de condition distinctes se réduira à $\frac{m(m+1)}{2} + 1 - q$. Il suffira, pour y satisfaire, d'avoir $\frac{m(m+1)}{2} + 2 - q$ intégrales particulières algébriques.

31. Supposons, par exemple, que l'on connaisse μ intégrales algébriques $f = 0, f_1 = 0, \dots$ sans points multiples, ne se touchant mutuellement nulle part, et telles que la somme $p + p_1 + \dots$ de leurs degrés soit égale à $m + 2$. Nous pourrons construire l'intégrale générale. Il suffit en effet, pour cela, qu'on ait

$$\mu \overset{=}{>} \frac{m(m+1)}{2} + 2 - q.$$

Pour vérifier que cette équation est satisfaite, nous remar-

querons que chacune des courbes données, telle que f, passe par $p(m+2-p)$ points singuliers, qui sont précisément ses points d'intersection avec les autres courbes du système. Chacun de ces points se trouvant sur deux de ces courbes, leur nombre total r sera

$$\sum \frac{p(m+2-p)}{2} = \frac{(m+2)^2}{2} - \frac{1}{2}\Sigma p^2.$$

Le nombre q des points singuliers qui ne sont sur aucune de ces courbes sera donc

$$m^2 + m + 1 - \frac{(m+2)^2}{2} + \frac{1}{2}\Sigma p^2.$$

Substituant dans l'équation de condition précédente, elle devient

$$\mu + \frac{1}{2}\Sigma p^2 \geqq \frac{3}{2} m + 3.$$

Le cas le plus défavorable pour l'existence de l'inégalité ci-dessus est celui où tous les nombres p sont égaux à l'unité. En effet, si nous remplaçons un de ces nombres p par deux autres p' et p'', tels que l'on ait $p'+p''=p$, μ sera accru d'une unité, et $\frac{1}{2}\Sigma p^2$ sera diminué de $\frac{1}{2}(p^2+p'^2-p''^2)=p'p''$, quantité au moins égale à 1.

Or, si tous les p sont égaux à l'unité, on aura

$$\mu = \Sigma p^2 = m+2,$$

et les deux membres de l'équation sont égaux.

32. Considérons, comme application, l'équation de Jacobi

$$\begin{aligned}(ax+by+cz)(y\,dz-z\,dy)\\ +(a'x+b'y+c'z)(z\,dx-x\,dz)\\ +(a''x+b''y+c''z)(x\,dy-y\,dx)=0.\end{aligned}$$

Cette équation admet trois droites comme solutions parti-

culières. En effet, la condition pour que la droite

$$f = ux + vy + wz = 0$$

soit une solution sera, d'après la théorie précédente,

$$(ax + by + cz)u + (a'x + b'y + c'z)v + (a''x + b''y + c''z)w$$
$$= k(ux + vy + wz),$$

k étant une constante.

Cette équation donne les trois suivantes

$$(17) \qquad \begin{cases} au + a'v + a''w = ku, \\ bu + b'v + b''w = kv, \\ cu + c'v + c''w = kw, \end{cases}$$

d'où l'on déduit pour k l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} a-k & a' & a'' \\ b & b'-k & b'' \\ c & c' & c''-k \end{vmatrix} = 0.$$

Soient k_1, k_2, k_3 ses trois racines. A chacune d'elles k_ρ correspond une droite f_ρ, pour laquelle les rapports des coefficients u, v, w seront déterminés en fonction de k_ρ par les équations (17).

Cela posé, l'intégrale générale sera

$$f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} = \text{const.},$$

α_1, α_2, α_3 étant déterminés par les relations

$$\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 = 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

auxquelles on satisfera en posant

$$\alpha_1 = k_2 - k_3, \qquad \alpha_2 = k_3 - k_1, \qquad \alpha_3 = k_1 - k_2.$$

33. Les équations différentielles

$$f(x, y, y') = 0,$$

où la dérivée y' se trouve à un degré supérieur au premier, exigent, pour être traitées par les méthodes qui précèdent, la résolution préalable de l'équation par rapport à y', ce qui peut présenter de graves difficultés. Mais on pourra, dans certains cas, se dispenser de cette opération par l'introduction de variables auxiliaires.

34. 1° Considérons d'abord les équations qui ne contiennent que la dérivée y' et une seule des variables x, y.

Ces équations sont des deux formes suivantes

$$f(x, y') = 0 \quad \text{ou} \quad f(y, y') = 0,$$

suivant qu'elles contiennent la variable indépendante x ou la fonction inconnue y. Mais ces deux types de fonctions se ramènent immédiatement l'un à l'autre en prenant la fonction pour variable indépendante, et réciproquement.

Nous nous bornerons donc à considérer les équations de la forme

$$f(y, y') = 0. \tag{18}$$

Si l'on sait exprimer y et y' au moyen d'une variable auxiliaire u par deux équations

$$y = \varphi(u), \qquad y' = \psi(u),$$

dont le système soit équivalent à l'équation unique (18), l'intégration sera ramenée aux quadratures. On aura, en effet,

$$dx = \frac{dy}{\psi(u)} = \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)} du,$$

d'où

$$x = \int_0^u \frac{\varphi'(u)}{\psi(u)} du + \text{const.}$$

avec

$$y = \varphi(u).$$

Ce cas se présentera en particulier si l'équation (18) représente une courbe de genre 0 ou 1, lorsqu'on y considère y,

y' comme les coordonnées d'un point. Les fonctions φ et ψ sont alors rationnelles ou elliptiques, de telle sorte que les intégrations pourront se faire.

Considérons, par exemple, l'équation

$$y'^3 - y'^2 + y^2 = 0.$$

Posons $y = uy'$; substituant et supprimant le facteur y'^2, il viendra

$$y' = 1 - u^2, \qquad y = u - u^3,$$

$$x = \int \frac{1 - 3u^2}{1 - u^2} du$$

$$= \int \left(3 + \frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right) du = 3u + \log \frac{u - 1}{u + 1} + c.$$

35. 2° Il existe une classe assez étendue d'équations différentielles qu'on peut intégrer à l'aide d'une différentiation préalable.

Considérons, en effet, l'équation

$$f(x, y, y') = 0.$$

On en déduira, par la différentiation,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial y'} dy' = 0.$$

Prenons y' pour variable auxiliaire; nous aurons la nouvelle équation

$$dy - y'\,dx = 0$$

qui, combinée à la précédente, donnera un système de deux équations simultanées pour déterminer y, y'.

Supposons qu'on soit parvenu à déterminer des multiplicateurs M, N, tels qu'on ait

$$\mathrm{M}\,df + \mathrm{N}(dy - y'\,dx) = d\varphi,$$

$d\varphi$ étant une différentielle exacte.

Les équations $f=0$, $dy-y'dx=0$ seront, en général, équivalentes aux deux suivantes :

$$f=0, \qquad d\varphi=0$$

ou

$$f=0, \qquad \varphi=c.$$

On n'aura plus qu'à éliminer y' entre ces deux dernières équations pour avoir la relation qui lie x, y et la constante arbitraire c.

Les deux systèmes d'équations cesseraient toutefois d'être équivalents pour les valeurs de x, y, y', qui rendraient N nul ou infini, ou M infini. De là peuvent naître des solutions singulières.

36. Considérons, par exemple, l'équation

$$y=xf(y')+\varphi(y')$$

linéaire en x et y.

On en déduit, par différentiation,

$$y'\,dx=f(y')\,dx+[xf'(y')+\varphi'(y')]\,dy'. \tag{19}$$

Cette équation étant linéaire en x et $\frac{dx}{dy'}$, on peut en déterminer un multiplicateur, et son intégration donnera x en fonction de la variable auxiliaire y'. Cette valeur, substituée dans l'équation primitive, donnera la valeur de y.

Un cas particulier digne de remarque est celui de l'équation de *Clairaut*,

$$y=xy'+\varphi(y').$$

L'équation auxiliaire (19) se réduit dans ce cas à

$$[x+\varphi'(y')]\,dy'=0.$$

En égalant à zéro le facteur dy', on aura

$$y'=c$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation primitive,

$$y = cx + \varphi(c).$$

La solution générale représente donc un système de droites. On aura une solution singulière en posant

$$x + \varphi'(y') = 0.$$

Cette équation, associée à l'équation primitive, représente évidemment l'enveloppe des droites fournies par l'intégrale générale

37. L'équation différentielle

$$(20) \qquad xyy'^2 + (x^2 - y^2 - A + B)y' - xy = 0$$

peut se ramener à l'équation de *Clairaut*, en posant

$$x^2 = u, \qquad y^2 = v,$$

d'où

$$2x\,dx = du, \qquad 2y\,dy = dv;$$

$$\frac{y\,dy}{x\,dx} = \frac{dv}{du} = v'.$$

$$y' = \frac{x}{y}v'.$$

Substituant dans la proposée et multipliant par $\frac{y}{x}$, il vient successivement

$$x^2v'^2 + (x^2 - y^2 - A + B)v' - y^2 = 0,$$

$$uv'^2 + (u - v - A + B)v' - v = 0,$$

$$v = uv' + \frac{B - A}{1 + v'}v'.$$

L'intégrale générale sera

$$v = cu + \frac{B - A}{1 + c}c$$

ou

$$y^2 = cx^2 + \frac{B - A}{1 + c}c.$$

Posons maintenant

$$c = -\frac{B+\lambda}{A+\lambda},$$

λ étant une nouvelle constante. L'équation précédente deviendra

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} = 1$$

et représentera un système de coniques homofocales, ce qui concorde avec un résultat trouvé dans le *Calcul différentiel* (t. I, n° 167).

38. Supposons qu'en intégrant par divers procédés une même équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = X,$$

on ait obtenu deux solutions générales de la forme

$$\varphi = \text{const.},$$
$$\varphi_1 = \text{const.}$$

On aura, comme nous l'avons vu (13), une relation de la forme

$$\varphi_1 = F(\varphi).$$

On peut déduire de cette remarque une démonstration nouvelle des propriétés fondamentales de plusieurs fonctions transcendantes.

39. Considérons, en effet, l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0.$$

L'intégration directe donnera

$$\log x + \log y = \text{const.}$$

D'autre part, l'équation peut s'écrire

$$0 = y\,dx + x\,dy = d\,xy$$

et donne

$$xy = \text{const}.$$

On aura donc

$$\log x + \log y = \varphi(xy).$$

Pour déterminer la forme de la fonction φ, posons

$$y = 1.$$

il viendra

$$\log x = \varphi(x).$$

On aura donc, en général,

$$\log x + \log y = \log xy.$$

40. Considérons en second lieu l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

L'intégration directe donne

$$\arcsin x + \arcsin y = \text{const}.$$

D'autre part, chassons les dénominateurs et intégrons; il viendra

$$\int dx\sqrt{1-y^2} + \int dy\sqrt{1-x^2} = \text{const}.$$

et, en intégrant par parties,

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = \text{const}.$$

L'intégrale qui reste ayant tous ses éléments nuls, en vertu de l'équation différentielle, on aura simplement

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{const}.$$

et, par suite,

$$\arcsin x + \arcsin y = \varphi(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

Posons

$$y = 0;$$

cette équation se réduira à

$$\arcsin x = \varphi(x).$$

Donc la fonction φ est un arc sinus, et l'on obtiendra la formule fondamentale

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

41. Considérons enfin l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\Delta(x)} + \frac{dy}{\Delta(y)} = 0,$$

où

$$\Delta(x) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2y^2)}.$$

L'intégration directe donne

$$F(x) + F(y) = \text{const.},$$

F désignant l'intégrale elliptique de première espèce.

Mais, d'autre part, cette équation étant un cas particulier de l'équation d'*Euler*, admet une intégrale générale algébrique (t. II, n°s 546-549). Voici un nouveau procédé pour l'obtenir, indiqué par M. *Darboux*.

Posons

$$\frac{dx}{\Delta(x)} = -\frac{dy}{\Delta(y)} = dt,$$

t étant une variable auxiliaire. On en déduira successivement

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2),$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$$

et, en dérivant par rapport à t,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 2k^2 x^3 - (1 + k^2)x,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 2k^2 y^3 - (1 + k^2)y,$$

puis

$$y\frac{d^2 x}{dt^2} - x\frac{d^2 y}{dt^2} = 2k^2 xy(x^2 - y^2),$$

$$y^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1 - k^2 x^2 y^2)(y^2 - x^2),$$

$$\frac{y\dfrac{d^2 x}{dt^2} - x\dfrac{d^2 y}{dt^2}}{y^2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} = -\frac{2k^2 xy}{1 - k^2 x^2 y^2},$$

$$\frac{y\dfrac{d^2 x}{dt^2} - x\dfrac{d^2 y}{dt^2}}{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}} = -\frac{2k^2 xy\left(y\dfrac{dx}{dt} + x\dfrac{dy}{dt}\right)}{1 - k^2 x^2 y^2}$$

et, en intégrant

$$\log\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = \log(1 - k^2 x^2 y^2) + \text{const.},$$

$$\frac{y\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dy}{dt}}{1 - k^2 x^2 y^2} = \text{const.},$$

et enfin

$$\frac{y\Delta(x) + x\Delta(y)}{1 - k^2 x^2 y^2} = \text{const.}$$

On aura donc

$$\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(y) = \varphi\left[\frac{y\Delta(x) + x\Delta(y)}{1 - k^2 x^2 y^2}\right].$$

Posons

$$y = 0;$$

cette équation se réduira à

$$\mathrm{F}(x) = \varphi(x).$$

On aura donc

$$F(x)+F(y)=F\left[\frac{y\,\Delta(x)+x\,\Delta(y)}{1-k^2x^2y^2}\right].$$

Posons

$$x=\operatorname{sn}u,\qquad y=\operatorname{sn}v,$$

d'où

$$\Delta x=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u,\qquad \Delta y=\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v.$$

Nous retomberons sur la formule connue

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}.$$

III. — Systèmes d'équations simultanées.

42. Tout système d'équations différentielles simultanées, entre $n+1$ variables $x_0, \ldots, x_n$, peut être ramené, comme on l'a vu, au type normal

$$\frac{dx_1}{dx_0}=X_1,\qquad \ldots,\qquad \frac{dx_n}{dx_0}=X_n,$$

$X_1, \ldots, X_n$ étant des fonctions de $x_0, \ldots, x_n$.

Ces équations étant mises sous la forme

$$(1)\qquad F_k=dx_k-X_k\,dx_0=0\qquad (k=1,\ldots,n),$$

cherchons à en déduire une combinaison

$$\sum_k \mu_k F_k=0,$$

dont le premier membre soit une différentielle exacte $d\varphi$.

L'identité

$$\sum_k \mu_k F_k=d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}dx_0+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n$$

donnera

$$-\sum_k \mu_k X_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\qquad \mu_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\qquad (k=1,\ldots,n).$$

Éliminant les μ, on aura, pour déterminer φ, l'équation aux

dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} + \sum_k X_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0.$$

43. L'intégration de l'équation (2) et celle du système (1) sont deux problèmes équivalents.

En effet, si, par un procédé quelconque, on est parvenu à obtenir une solution générale du système (1) ([1]), représentée par n équations

$$(3) \qquad \psi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_n = 0,$$

entre $x_0, \ldots, x_n$ et n constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_n$, on en déduira aisément toutes les solutions (ou *intégrales*) de l'équation (2). Résolvons, en effet, les équations (3) par rapport à $c_1, \ldots, c_n$; elles prendront la forme

$$(4) \qquad \varphi_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = c_n.$$

D'ailleurs, les premiers membres $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de ces équations seront des fonctions *distinctes* de $x_0, \ldots, x_n$, c'est-à-dire qu'elles ne seront liées par aucune relation; car, si une semblable relation existait, les équations (4) ou les équations équivalentes (3) seraient incompatibles, sauf pour les systèmes de valeurs des c qui satisfont à cette même relation, et, pour ces systèmes de valeurs, elles cesseraient d'être distinctes.

Cela posé, les équations (4) donnent, par différentiation,

$$d\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_n = 0.$$

Ce système devant être équivalent au système (1), on aura des équations de la forme

$$d\varphi_i = \sum_k \mu_k^i F_k.$$

Donc $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ seront des intégrales de l'équation (2).

([1]) On verra dans la Section V qu'il existe toujours de semblables solutions.

Soit maintenant y une autre fonction quelconque de $x_0, \ldots, x_n$, qui soit distincte des précédentes. Si nous transformons l'équation (2), en prenant pour variables indépendantes $y, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, elle prendra la forme

$$M_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + M_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_1} + \ldots + M_n \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_n} = 0.$$

Mais elle admet pour intégrales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$; donc

$$M_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad M_n = 0.$$

L'équation se réduira donc à $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Donc, pour qu'une fonction $\varphi = F(y, \ldots, \varphi_n)$ satisfasse à cette équation, il est nécessaire et suffisant qu'elle ne contienne pas y. La forme générale des intégrales cherchées sera donc

$$\varphi = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

où F est une fonction arbitraire.

Réciproquement, supposons que nous ayons déterminé n intégrales distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de l'équation (2); on aura

$$d\varphi_i = \sum_k \mu_k^i F_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$\mu_1^1, \ldots, \mu_n^n$ étant des fonctions de $x_0, \ldots, x_n$, dont le déterminant n'est pas nul, car il ne doit exister aucune relation linéaire entre $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_n$. Le système (1) sera donc équivalent [1] au système

$$d\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_n = 0$$

dont on obtient immédiatement la solution générale

$$\varphi_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = c_n.$$

---

[1] Sauf pour les systèmes de valeurs des variables qui rendraient infinis les coefficients μ ou qui annuleraient leur déterminant. Ces systèmes devront être considérés à part.

44. Nous appellerons, d'après *Jacobi*, *multiplicateur* le déterminant μ des coefficients

$$\mu_k^i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}.$$

Si l'on remplaçait le système des intégrales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ par un autre système d'intégrales distinctes $\psi_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \ldots, \psi_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, on obtiendrait évidemment un nouveau multiplicateur μJ, J désignant le jacobien de $\psi_1, \ldots, \psi_n$ par rapport à $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Ce jacobien est une fonction de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, qui peut d'ailleurs être arbitraire. En effet, F désignant une fonction arbitraire de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, que nous supposerons contenir φ_1 par exemple, il suffira de poser

$$\psi_1 = \int_0^{\varphi_1} F\, d\varphi_1, \qquad \psi_2 = \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad \psi_n = \varphi_n$$

pour avoir $J = F$.

45. Soit β l'un des nombres $1, \ldots, n$. Désignons par D_β ce que devient le déterminant

$$\mu = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

lorsqu'on y remplace les éléments $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_\beta}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ par les éléments $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$. Comme on a

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} = -\sum_k X_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k},$$

il viendra évidemment, en supprimant les termes qui se détruisent

$$D_\beta = -\mu X_\beta.$$

On en déduit

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_0}+\sum_k\frac{\partial\mu X_k}{\partial x_k}=\frac{\partial\mu}{\partial x_0}-\sum\frac{\partial D_k}{\partial x_k}\qquad (k=1,\ldots,n).$$

Or le second membre de cette égalité est nul; car, en effectuant les calculs, on voit immédiatement que c'est une fonction linéaire des dérivées secondes $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}, \ldots,$ et que l'une quelconque de ces dérivées a pour coefficient la somme de deux déterminants qui ne diffèrent que par l'échange de deux colonnes, et qui, par suite, se détruisent.

Le multiplicateur μ satisfait donc à l'équation aux dérivées partielles

$$(5)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_0}+\sum_k\frac{\partial\mu X_k}{\partial x_k}=0\qquad (k=1,\ldots,n).$$

Réciproquement, toute solution μ' de cette équation est un multiplicateur. Posons, en effet, $\mu'=\mu\nu$. L'équation deviendra, par la substitution de cette valeur de μ',

$$\begin{aligned}0&=\nu\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_0}+\sum_k\frac{\partial\mu X_k}{\partial x_k}\right)+\mu\left(\frac{\partial\nu}{\partial x_0}+\sum_k X_k\frac{\partial\nu}{\partial x_k}\right)\\&=\mu\left(\frac{\partial\nu}{\partial x_0}+\sum_k X_k\frac{\partial\nu}{\partial x_k}\right).\end{aligned}$$

Donc ν est une intégrale et $\mu'=\mu\nu$ un multiplicateur.

46. Supposons que nous ayons réussi à déterminer seulement i intégrales distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ de l'équation (2), i étant $< n$. Soient $y_0, \ldots, y_{n-i}$ des fonctions de $x_0, \ldots, x_n$, qui, jointes à celles-là, forment un système de $n+1$ fonctions distinctes. Si nous prenons les φ et les y pour variables indépendantes, les équations F_k prendront la forme

$$F_k=\sum_\alpha M_\alpha^k\,dy_\alpha+\sum_\beta N_\beta^k\,d\varphi_\beta=0$$
$$(\alpha=0,\ldots,n-i;\ \beta=1,2,\ldots,i).$$

En les résolvant par rapport à $dy_1, \ldots, d\varphi_1, \ldots$, on obtiendra un nouveau système équivalent

$$(6)\quad \begin{cases} G_1 = a_1^1 F_1 + \ldots + a_n^1 F_n = d\varphi_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_i = a_1^i F_1 + \ldots + a_n^i F_n = d\varphi_i = 0, \\ G_{i+1} = a_1^{i+1} F_1 + \ldots + a_1^{i+1} F_n = dy_1 - Y_1 dy_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_n = a_1^n F_1 + \ldots + a_n^n F_n = dy_{n-i} - Y_{n-i} dy_0 = 0. \end{cases}$$

Les i premières équations de ce nouveau système donnent immédiatement

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad \varphi_n = \text{const.}$$

Il ne restera donc plus qu'à intégrer le système d'ordre $n - i$ formé des équations

$$(7)\qquad G_{i+1} = 0, \quad \ldots, \quad G_n = 0,$$

où $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ doivent être considérés comme des constantes.

Les multiplicateurs μ' du système (6) s'obtiennent évidemment en divisant ceux du système (1) par le déterminant Δ des coefficients a.

D'ailleurs l'équation aux dérivées partielles qui les caractérise, se réduisant à

$$\frac{\partial \mu'}{\partial y_0} + \frac{\partial \mu' Y_1}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial \mu' Y_{n-i}}{\partial y_{n-i}} = 0,$$

montre qu'ils sont des multiplicateurs du système (7). Si donc on connaît un multiplicateur μ du système primitif, on en déduira un multiplicateur $\frac{\mu}{\Delta}$ du système réduit (7).

Il résulte de là que, si l'on connaît $n - 1$ intégrales et un multiplicateur du système (1), la fin de l'intégration s'obtiendra par de simples quadratures; car la question se ramène à intégrer une seule équation du premier ordre, dont on connaît un multiplicateur.

47. On a souvent à étudier des systèmes d'équations différentielles dont on peut déterminer facilement un multiplicateur. Le cas le plus simple et le plus important en même temps est celui des systèmes d'ordre $2n$ et de la forme suivante

$$(8)\quad dx_i = \frac{\partial\psi}{\partial p_i}dt, \qquad dp_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où ψ désigne une fonction connue des $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$.

Ces systèmes sont connus sous le nom de *systèmes canoniques*. Ils se rencontrent dans les plus importantes questions de la Mécanique.

D'après la théorie précédente, leurs intégrales φ et leurs multiplicateurs μ seront déterminés par les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_1^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) = 0$$

et

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \sum_1^n \left(\frac{\partial\mu\frac{\partial\psi}{\partial p_i}}{\partial x_i} - \frac{\partial\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{\partial p_i}\right) = 0.$$

Il est clair qu'on satisfera à cette dernière équation en posant simplement $\mu = 1$.

Parmi les intégrales, nous distinguerons de préférence celles qui sont indépendantes de t; elles seront données par l'équation

$$(9)\qquad \sum_1^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial p_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) = 0,$$

laquelle admet $2n - 1$ solutions distinctes, en fonction desquelles toutes les autres peuvent s'exprimer.

Si l'on a déterminé $2n-2$ de ces solutions, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-2}$, on pourra achever l'intégration par de simples quadratures. En effet, soient y, y_1 deux fonctions quelconques des $x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n$, distinctes de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-2}$. Prenons pour variables indépendantes les φ et les y à la place des x et des p.

Il nous restera à intégrer un système de deux équations, de la forme

$$\begin{aligned} dy_1 &= Y_1\, dy, \\ dt &= Y_2\, dy, \end{aligned}$$

et dont nous connaîtrons un multiplicateur.

Ce multiplicateur μ' satisfera à l'équation

$$\frac{\partial \mu'}{\partial y} + \frac{\partial \mu' Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \mu' Y_2}{\partial t} = 0.$$

Mais tous les éléments qui entrent dans le calcul de μ', Y_1, Y_2 sont indépendants de t; donc l'équation précédente se réduira à

$$\frac{\partial \mu'}{\partial y} + \frac{\partial \mu' Y_1}{\partial y_1} = 0,$$

et μ' sera un multiplicateur de l'équation

$$dy_1 = Y_1\, dy.$$

On pourra donc intégrer cette équation par quadrature, et obtenir ainsi y_1 en fonction de y. Substituant cette valeur dans la seconde équation, on aura t par une dernière quadrature.

48. L'expression

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right),$$

qui forme le premier membre de l'équation (9), se représente ordinairement par (ψ, φ). De la définition de ce symbole résultent plusieurs propriétés importantes, parmi lesquelles nous signalerons les suivantes :

$$(10)\quad (c, \varphi) = 0 \qquad (c \text{ étant une constante}),$$

$$(11)\quad (\psi, \varphi) = 0 \qquad (\text{si } \varphi \text{ et } \psi \text{ sont indépendantes des } p),$$

$$(12)\quad (\varphi, \psi) = -(\psi, \varphi),$$

$$(13)\quad (\varphi, \varphi) = 0,$$

$$(14)\quad (F(\psi_1, \psi_2, \ldots), \varphi) = \frac{\partial F}{\partial \psi_1}(\psi_1, \varphi) + \frac{\partial F}{\partial \psi_2}(\psi_2, \varphi) + \ldots,$$

$$(15)\quad ((\varphi_1, \varphi_2), \psi) + ((\varphi_2, \psi), \varphi_1)) + ((\psi, \varphi_1), \varphi_2) = 0.$$

Les formules (10) à (14) résultent immédiatement de la définition du symbole (ψ, φ). Pour vérifier la relation (15), on remarquera que son premier membre développé est formé de termes dont chacun est le produit d'une dérivée du second ordre de l'une des fonctions φ_1, φ_2, ψ par des dérivées du premier ordre de chacune des deux autres fonctions.

Considérons, par exemple, les termes qui contiennent les dérivées du second ordre de ψ; ils seront de l'une des formes

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial p_k}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial p_k}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_i},$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial p_i}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_k}, \qquad \frac{d^2\psi}{\partial p_i\,\partial p_k}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_k},$$

et proviendront exclusivement des deux derniers termes de l'équation (15).

On vérifie, d'ailleurs, aisément que chaque terme de l'une des formes ci-dessus provenant du second terme de l'équation est détruit par un terme correspondant provenant du troisième.

49. De la proposition que nous venons d'établir découle cette conséquence importante, connue sous le nom de *théorème de Poisson* :

Soient φ_1, φ_2 *deux intégrales quelconques de l'équation aux dérivées partielles*

$$(\psi, \varphi) = 0$$

(où ψ est une fonction donnée); *l'expression* (φ_1, φ_2) *sera une nouvelle intégrale.*

En effet, des identités

$$(\psi, \varphi_1) = 0, \qquad (\psi, \varphi_2) = 0,$$

qu'on suppose satisfaites, on déduit immédiatement

$$((\psi, \varphi_1), \varphi_2) = (0, \varphi_2) = 0,$$
$$((\varphi_2, \psi), \varphi_1) = -((\psi, \varphi_2), \varphi_1) = -(0, \varphi_1) = 0$$

et, par suite,

$$(\psi, (\varphi_1, \varphi_2)) = -((\varphi_1, \varphi_2), \psi) = 0.$$

Supposons donc que l'on connaisse un certain nombre d'intégrales distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ de l'équation proposée, on en déduira de nouvelles intégrales $(\varphi_1, \varphi_2), \ldots, (\varphi_{k-1}, \varphi_k)$. Si ces nouvelles intégrales sont des fonctions de $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. cela n'apprendra rien de nouveau; mais, si quelqu'une d'entre elles φ_{k+1} est distincte des précédentes, on pourra la leur adjoindre, puis refaire la même opération sur le système $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{k+1}$, et ainsi de suite, tant qu'on trouvera de nouvelles intégrales distinctes de celles déjà connues.

50. Revenons à la théorie générale des systèmes d'équations simultanées de la forme (1). Si, dans un semblable système

$$(16) \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_n = 0,$$

nous changeons $x_0, \ldots, x_n$ en $x_0 + \varepsilon\xi_0, \ldots, x_n + \varepsilon\xi_n$, $\xi_0, \ldots, \xi_n$ étant des fonctions de $x_0, \ldots, x_n$, et ε étant un paramètre infiniment petit dont nous négligerons le carré, nous obtiendrons de nouvelles équations

$$(17) \qquad G_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad G_n = 0.$$

Si ces équations transformées sont des combinaisons linéaires des équations primitives, telles que

$$(18) \qquad G_i = a_{1i} F_1 + \ldots + a_{ni} F_n \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

nous dirons que le système (16) admet la transformation infinitésimale $\xi_0, \ldots, \xi_n$.

L'étude de ces transformations infinitésimales se lie intimement à celle des intégrales et des multiplicateurs du système proposé. Nous remettrons l'examen de cette question à la Section suivante, où elle se présentera sous une forme plus générale. Nous nous bornerons pour le moment à montrer

que l'ordre du système peut être abaissé, si l'on connaît une transformation infinitésimale $\xi_0, \ldots, \xi_n$, telle que l'équation aux dérivées partielles

$$(19) \qquad \xi_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

puisse être intégrée.

Soient, en effet, $y_1, \ldots, y_n$ les n intégrales distinctes de cette équation. Lorsque $x_0, \ldots, x_n$ seront changés en $x_0 + \varepsilon\xi_0, \ldots, x_n + \varepsilon\xi_0$, $y_1, \ldots, y_n$ resteront invariables; car y_i se trouve accru de la quantité

$$\varepsilon\left(\xi_0 \frac{\partial y_i}{\partial x_0} + \ldots + \xi_n \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Soit, d'autre part, η ce que devient ξ_0 lorsqu'on l'exprime en fonction de $x_0, y_1, \ldots, y_n$ et posons

$$y_0 = \int \frac{dx_0}{\eta},$$

$y_1, \ldots, y_n$ étant traitées comme constantes dans l'intégration.

La transformation infinitésimale donnée, accroissant x_0 de $\varepsilon\eta$ sans altérer $y_1, \ldots, y_n$, accroîtra y_0 de $\varepsilon\eta \dfrac{\partial y_0}{\partial x_0} = \varepsilon$.

Si donc nous prenons pour variables indépendantes y_0, $y_1, \ldots, y_n$, le système transformé ne variera pas quand on accroîtra y_0 de ε, sans changer les autres variables.

Cela posé, les équations de ce nouveau système, résolues par rapport aux différentielles $dy_1, \ldots, dy_n$, donneront un résultat de la forme

$$dy_0 = \frac{dy_1}{Y_1} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}.$$

Pour que ce système se reproduise quand on accroît y_0 d'une constante ε sans altérer les autres variables, il faut évidemment que $Y_1, \ldots, Y_n$ soient indépendants de y_0.

Il suffira dès lors, pour intégrer ce système :

1° D'intégrer le système d'ordre $n - 1$

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n},$$

ce qui donnera $y_2, \ldots, y_n$ en fonction de y_1 ;

2° De substituer ces valeurs dans l'équation

$$dy_0 = \frac{dy_1}{Y_1},$$

laquelle donnera y_0 par simple quadrature.

51. Parmi les cas d'intégrabilité de l'équation (19), le plus simple est celui où les variables sont séparées, ξ_0 dépendant de x_0 seulement, ξ_1 de x_1 seulement, etc. Le système

$$(20) \qquad \frac{dx_0}{\xi_0} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n},$$

d'où dépend l'intégration de l'équation (19), s'intègre alors par de simples quadratures, et l'équation (19) admettra les intégrales suivantes :

$$y_1 = \int \frac{dx_1}{\xi_1} - \int \frac{dx_0}{\xi_0},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_n = \int \frac{dx_n}{\xi_n} - \int \frac{dx_0}{\xi_0}.$$

1° Supposons, par exemple, que $\xi_0, \ldots, \xi_n$ soient des constantes. Il faudra, pour réduire le système, prendre pour nouvelles variables les quantités

$$y_1 = \frac{x_1}{\xi_1} - \frac{x_0}{\xi_0}, \qquad \ldots, \qquad y_n = \frac{x_n}{\xi_n} - \frac{x_0}{\xi_0}$$

et

$$y_0 = \int \frac{dx_0}{\xi_0} = \frac{x_0}{\xi_0}.$$

2° Supposons, en second lieu, $\xi_0 = \dfrac{x_0}{a_0}, \ldots, \xi_n = \dfrac{x_n}{a_n}$,

$a_0, \ldots, a_n$ étant des constantes. Les équations (20) deviendront

$$\frac{a_0\,dx_0}{x_0} = \frac{a_1\,dx_1}{x_1} = \ldots = \frac{a_n\,dx_n}{x_n}.$$

On en déduit

$$a_0 \log x_0 - a_i \log x_i = \text{const.} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{x_i^{a_i}}{x_0^{a_0}} = \text{const.}$$

Il faudra donc prendre pour nouvelles variables

$$y_1 = \frac{x_1^{a_1}}{x_0^{a_0}}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{x_n^{a_n}}{x_0^{a_0}},$$

$$y_0 = \int a_0 \frac{dx_0}{x_0} = a_0 \log x_0.$$

52. Lorsqu'on a une équation unique

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{21}$$

il est généralement avantageux de la remplacer par le système simultané

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \frac{dy^{n-1}}{dx} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1}). \tag{22}$$

Ce système est susceptible d'abaissement, d'après ce qui précède :

1° Si l'équation primitive (21) est homogène par rapport à y et à ses dérivées; car le système (22) admettra évidemment la transformation infinitésimale qui remplace $y, y', \ldots$ par $y + \varepsilon y, y' + \varepsilon y', \ldots$, sans altérer x;

2° Si l'équation primitive se reproduit à un facteur près, lorsqu'on y change x et y en $x + \varepsilon x, y + \varepsilon y$; car le système (22) admettra la transformation infinitésimale qui remplace $x, y, y', y'', \ldots, y^{n-1}$ par $x + \varepsilon x$, $y + \varepsilon y$, y', $y'' - \varepsilon y''$, $\ldots$, $y^{n-1} - (n-2)\varepsilon y^{n-1}$;

3° Si l'une des deux variables x, y ne figure pas explicitement dans l'équation primitive; car cette variable ne figurera que par sa différentielle dans le système (22) et pourra se déterminer par une simple quadrature, quand on aura intégré le système d'ordre $n-1$, obtenu par l'élimination de cette différentielle.

53. Si nous supposons que, non seulement y, mais ses $k-1$ premières dérivées ne figurent pas explicitement dans l'équation primitive, on n'aura pour déterminer $y^k, \ldots, y^{n-1}$, qu'à intégrer un système d'ordre $n-k$:

$$\frac{dy^k}{dx} = y^{k+1}, \quad \ldots, \quad \frac{dy^{n-1}}{dx} = f(x, y^k, \ldots, y^{n-1}).$$

Ayant ainsi déterminé y^k, on trouvera, par une série de quadratures,

$$y^{k-1} = \int y^k\,dx,$$

puis

$$y^{k-2} = \int dx\left(\int y^k\,dx\right),$$

expression que nous représenterons par la notation suivante :

$$y^{k-2} = \int y^k\,dx^2.$$

On trouvera de même

$$y^{k-3} = \int y^{k-2}\,dx = \int y^k\,dx^3$$

et enfin

$$y = \int y^k\,dx^k.$$

54. Ces quadratures successives peuvent être remplacées par une quadrature simple.

Soit, en effet, $f(x)$ la valeur trouvée pour y^k en fonction de x. On aura, pour déterminer y, à intégrer l'équation

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f(x).$$

Or on reconnaît aisément que cette équation admet, comme solution, l'intégrale définie

$$y_1 = \frac{1}{1.2\ldots(k-1)} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-1}\,dt.$$

Prenons, en effet, les dérivées successives de cette expression par rapport au paramètre x; il viendra, en remarquant que $f(t)(x-t)^{k-1}$ et ses $k-2$ premières dérivées par rapport à x s'annulent pour $t = x$,

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{1.2\ldots(k-2)} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-2}\,dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{k-1}y_1}{dx^{k-1}} = \int_0^x f(t)\,dt_1,$$

$$\frac{d^k y_1}{dx^k} = f(x).$$

Posons maintenant $y = y_1 + z$ dans l'équation proposée; il viendra

$$\frac{d^k z}{dx^k} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = P_{k-1},$$

P_{k-1} désignant un polynome arbitraire de degré $k-1$.

La solution la plus générale de l'équation proposée sera donc

$$y = y_1 + P_{k-1}.$$

55. Considérons l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

On aura le système

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

$$\frac{dy'}{dx} = f(x, y, y').$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que l'intégration peut être ramenée aux quadratures, toutes les fois que la fonction f ne contient qu'une seule des trois quantités x, y, y' :

1° Si f ne dépend que de x, la seconde équation donnera

$$y' = \int_0^x f(x)\,dx + c,$$

et l'on trouvera ensuite

$$y = \int_0^x y'\,dx + c' = \int_0^x dx\left[\int_0^x f(x)\,dx\right] + cx + c'.$$

2° Si f ne dépend que de y', on aura

$$dx = \frac{dy'}{f(y')},$$
$$dy = \frac{y'\,dy'}{f(y')},$$

d'où

$$x = \int_0^{y'} \frac{dy'}{f(y')} + c,$$
$$y = \int_0^{y'} \frac{y'\,dy'}{f(y')} + c'.$$

On aura donc x et y, exprimés tous deux en fonction de la nouvelle variable y'.

3° Si f ne dépend que de y, on déduira des équations ci-dessus, la suivante :

$$y'\,dy' = f(y)\,dy$$

et, en intégrant

$$y'^2 = \int_0^y 2f(y)\,dy + c,$$
$$y' = \sqrt{\int_0^y 2f(y)\,dy + c},$$

et enfin

$$dx = \frac{dy}{y'},$$

d'où

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\int_0^y 2f(y)\,dy + c}} + c'.$$

Remarque. — Le procédé ci-dessus peut être appliqué avec le même succès à l'équation plus générale

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y) + \varphi(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

car en posant

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d(y'^2)}{dy} = y'\frac{dy'}{dy} = f(y) + \varphi(y)\,y'^2,$$

équation linéaire qui déterminera y'^2 en fonction de y au moyen de deux quadratures. Une dernière quadrature donnera

$$x = \int \frac{dy}{y'}.$$

56. Comme autre application, cherchons à déterminer les courbes dont le rayon de courbure en chaque point est proportionnel à la portion N de la normale interceptée par l'axe des x.

Le rayon de courbure R est donné par la formule

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

D'autre part, en désignant par α l'angle de la tangente

avec l'axe des x, on aura

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Les courbes cherchées auront donc pour équation différentielle

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = ny\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{ny}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Cette équation du second ordre équivaut aux deux suivantes :

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{1}{ny}(1 + y'^2),$$

$$\frac{dy}{dx} = y'.$$

On déduit de leur combinaison

$$\frac{y'\,dy'}{1 + y'^2} = \frac{dy}{ny}$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{2}\log(1 + y'^2) = \frac{1}{n}\log y + \text{const.}$$

ou

$$1 + y'^2 = \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}},$$

$$y' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}$$

et enfin

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}} - 1}} + c'.$$

Parmi les cas d'intégrabilité de cette expression, on doit signaler particulièrement les suivants :

1° $n = -1$, d'où

$$x = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = -\sqrt{c^2 - y^2} + c',$$

$$(x - c')^2 + y^2 = c^2.$$

La courbe est un cercle ayant son centre sur l'axe des y.

2° $n = 1$, d'où

$$x = \int \frac{c\,dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = c \log \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} + c',$$

d'où

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{\frac{x - c'}{c}},$$

$$y - \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{-\frac{x - c'}{c}}$$

et enfin

$$y = c\,\frac{e^{\frac{x - c'}{c}} + e^{-\frac{x - c'}{c}}}{2},$$

équation d'une chaînette.

3° $n = -2$, d'où

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{c - y}}\,dy.$$

Posons

$$y = \frac{c}{2}(1 - \cos\varphi),$$

$$dy = \frac{c}{2}\sin\varphi\,d\varphi;$$

il viendra

$$x = \int \sqrt{\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}}\,\frac{c}{2}\sin\varphi\,d\varphi = \int \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\,\frac{c}{2}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{c}{2}\int 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\,d\varphi = \frac{c}{2}\int (1 - \cos\varphi)\,d\varphi = \frac{c}{2}(\varphi - \sin\varphi) + c'.$$

La courbe est une cycloïde.

4° $n = 2$, d'où

$$x = \int \sqrt{\frac{c}{y - c}}\, dy = 2\sqrt{c(y - c)} + c',$$

équation d'une parabole.

57. Proposons-nous de déterminer le mouvement d'un point attiré vers un centre fixe par une force égale à $mf(r)$, r désignant le rayon vecteur et m la masse du point mobile.

Prenons pour origine des coordonnées le point attirant, et pour plan des xy celui de la vitesse initiale. D'après les principes de la Mécanique, la loi du mouvement sera donnée par les deux équations

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -f(r)\frac{x}{r}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -f(r)\frac{y}{r}.$$

On déduit de ces équations les combinaisons intégrables suivantes

$$0 = y\frac{d^2 x}{dt^2} - x\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)$$

et

$$0 = \frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} + f(r)\frac{x\,dx + y\,dy}{r\,dt}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + f(r)\frac{dr}{dt},$$

dont l'intégration donne deux équations du premier ordre

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = c,$$

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + \int f(r)\,dr = 0.$$

Remplaçons les variables x, y par des coordonnées polaires

$$x = r\cos\omega, \qquad y = r\sin\omega,$$

ces équations deviendront

$$(23)\qquad r^2\frac{d\omega}{dt}=c,$$

$$(24)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{dr^2+r^2\,d\omega^2}{dt^2}+\int f(r)\,dr=0;$$

d'où, en résolvant par rapport à $d\omega$ et dt et intégrant,

$$\omega=\int\frac{c\,dr}{r\sqrt{-c^2-2r^2\int f(r)\,dr}},$$

$$t=\int\frac{r\,dr}{\sqrt{-c^2-2r^2\int f(r)\,dr}}.$$

Le problème est ainsi ramené aux quadratures.

Les formules précédentes contiennent, comme cela devait être, quatre constantes arbitraires, à savoir c et les trois constantes introduites par les intégrations.

58. Appliquons ces formules au cas de l'attraction newtonienne, où $f(r)=\frac{kM}{r^2}$, k désignant une constante et M la masse du point attirant; on aura

$$\int f(r)\,dr=-\frac{kM}{r}+c',$$

d'où

$$\omega=\int\frac{c\,dr}{r\sqrt{-c^2+2kMr-2c'r^2}}$$

ou, en posant $r=\frac{1}{u}$, $dr=-\frac{du}{u^2}$,

$$\begin{aligned}
\omega&=-\int\frac{c\,du}{\sqrt{-2c'+2kMu-c^2u^2}}\\
&=-\int\frac{c^2\,du}{\sqrt{k^2M^2-2c'c^2-(c^2u-kM)^2}}\\
&=\arccos\frac{c^2u-kM}{\sqrt{k^2M^2-2c'c^2}}+c'',
\end{aligned}$$

$$c^2u=kM+\sqrt{k^2M^2-2c'c^2}\cos(\omega-c'')$$

ou

$$(25)\qquad r = \frac{c^2}{kM + \sqrt{k^2M^2 - 2c'c^2}\cos(\omega - c'')} = \frac{p}{1 + e\cos(\omega - c'')},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{c^2}{kM} = p, \qquad \sqrt{1 - \frac{2c'c^2}{k^2M^2}} = e.$$

On aura enfin

$$(26)\qquad dt = \frac{1}{c} r^2\, d\omega = \frac{p^2\, d\omega}{c[1 + e\cos(\omega - c'')]^2},$$

équation qui déterminera t par une quadrature.

Le problème deviendra complètement déterminé si l'on donne à un instant quelconque t_0 les coordonnées r_0, ω_0 du mobile, sa vitesse initiale v_0 et l'angle α_0 qu'elle fait avec le rayon vecteur. On a, en effet, en appelant v la vitesse à un instant quelconque, α l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur

$$\frac{dr^2 + r^2\, d\omega^2}{dt^2} = v^2, \qquad r^2 \frac{d\omega}{dt} = rv\sin\alpha.$$

Les équations (23) et (24) peuvent donc s'écrire

$$rv\sin\alpha = c,$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{kM}{r} + c' = 0.$$

On aura donc, en posant $t = 0$,

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha_0, \qquad c' = \frac{kM}{r_0} - \frac{1}{2}v_0^2.$$

On déterminera ensuite c'' en posant $t = t_0$ dans l'équation (25); enfin, l'équation (26), intégrée de t_0 à t, donnera

$$t - t_0 = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{p^2\, d\omega}{c[1 + e\cos(\omega - c'')]^2}.$$

L'équation (25) entre r et ω fait connaître la trajectoire du mobile. *C'est une conique ayant un foyer à l'origine.* Ce sera une ellipse si $c' > 0$, une parabole si $c' = 0$, une hyperbole si $c' < 0$.

On a, d'autre part, en désignant par A l'aire comprise entre la courbe et les rayons vecteurs r et r_0,

$$\frac{1}{2} r^2 \, d\omega = d\text{A}.$$

L'équation (23) peut donc s'écrire

$$2 \frac{d\text{A}}{dt} = c;$$

d'où, en intégrant t_0 à t,

$$\text{A} = \frac{c}{2}(t - t_0).$$

Les aires décrites par le rayon vecteur sont donc proportionnelles aux temps correspondants.

Supposons la trajectoire elliptique, et cherchons la durée T d'une révolution. L'aire A correspondant à cette période de temps sera l'aire totale πab de l'ellipse. On aura donc

$$\pi ab = \frac{c}{2}\text{T}.$$

D'ailleurs

$$c = \sqrt{k\text{M}p} = \sqrt{k\text{M}\frac{b^2}{a}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, il viendra

$$\text{T} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{k\text{M}}}.$$

La durée de la révolution est donc indépendante de l'excentricité de l'ellipse et proportionnelle à la puissance $\frac{3}{2}$ de son grand axe.

Nous avons ainsi retrouvé toutes les lois fondamentales énoncées par *Képler*.

59. Soit à intégrer l'équation

$$ay'^3 + byy'y'' + cy^2y''' = 0,$$

où a, b, c sont des constantes.

Prenant y', y'' comme variables auxiliaires, nous aurons le système

$$ay'^3 + byy'y'' + cy^2\frac{dy''}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = y'',$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{y''} = \frac{-cy^2\,dy''}{ay'^3 + byy'y''}.$$

On obtiendra donc x par une quadrature lorsqu'on aura déterminé les relations entre y, y', y'' au moyen des deux dernières égalités.

Or si l'on remplace y, y', y'' par $y\lambda^\alpha$, $y'\lambda^\beta$, $y''\lambda^\gamma$, les rapports $\frac{dy}{y'}$, $\frac{dy'}{y''}$, $\frac{cy^2\,dy''}{ay'^3 + byy'y''}$ seront multipliés par une même puissance de λ, pourvu que α, β, γ soient liés par la relation

$$2\beta = \alpha + \gamma.$$

On peut y satisfaire en posant soit

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 0;$$

soit

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 2.$$

Si donc nous changeons de variables en posant

$$y = e^{2t}, \qquad y' = ze^{t+u}, \qquad y'' = e^{2u},$$

les équations transformées, devant rester invariables si l'on fait varier t ou u d'une constante, ne contiendront que les différentielles de ces variables.

Ces équations sont en effet

$$\frac{2\,dt}{z} = \frac{dz + z(dt + du)}{1} = \frac{-2c\,du}{az^3 + bz}.$$

On en tire

$$dt = \mathrm{R}(z)\,dz, \qquad du = \mathrm{R}_1(z)\,dz,$$

R, R_1 étant rationnels en z. On en déduit par quadrature t, u; puis y, y', et enfin x.

60. *Courbe de poursuite.* — Un mobile se meut sur l'axe des x avec une vitesse uniforme kv. Un second mobile situé en dehors de cet axe et de vitesse v se dirige à chaque instant vers le premier. Quelle est sa trajectoire?

La tangente au point x, y de cette courbe rencontre l'axe des x au point d'abscisse kvt, d'où la condition

$$-y = y'(kvt - x).$$

On doit y joindre celle-ci :

$$v\,dt = ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

La première équation donne

$$kvt = x - \frac{y}{y'},$$

$$kv\,dt = \left[1 - \left(\frac{y}{y'}\right)'\right]dx = \frac{yy''}{y'^2}\,dx.$$

Éliminant $v\,dt$, on obtient l'équation différentielle

$$k\sqrt{1 + y'^2} = \frac{yy''}{y'^2},$$

qui peut s'écrire ainsi :

$$\frac{k\,dy}{y} = \frac{y'\,dy'}{y'^2\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Posons

$$1 + y'^2 = z^2, \qquad y'\,dy' = z\,dz,$$

il vient

$$k\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z^2 - 1},$$

et, en intégrant,

$$k\log y = \frac{1}{2}\log(z-1) - \frac{1}{2}\log(z+1) + \text{const.}$$

ou

$$cy^{2k} = \frac{z-1}{z+1} = \frac{\sqrt{1+y'^2}-1}{\sqrt{1+y'^2}+1}.$$

On en tire

$$y' = \frac{2\sqrt{c}\,y^k}{1-cy^{2k}},$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(y^{-k}-cy^k)\,dy,$$

et enfin

$$x = \frac{1}{2\sqrt{c}}\left(\frac{y^{1-k}}{1-k} - c\,\frac{y^{1+k}}{1+k}\right) + c'.$$

61. Problème. — *Un point pesant se meut sur une courbe située dans un plan vertical. La pression sur la courbe étant supposée constante, déterminer l'équation de la courbe.*

Soient P le poids du mobile; kP la pression; x, y un point de la trajectoire; ds l'élément de son arc; ω l'angle de la tangente avec l'axe des x; ρ le rayon de courbure. On aura

$$dx = ds\cos\omega = dy\,\text{tang}\,\omega,$$

$$dy = ds\sin\omega,$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\omega}{ds} = \frac{d\omega\sin\omega}{dy}.$$

Enfin la force vive du mobile au point x, y sera, d'après les lois de la Mécanique,

$$2P(h-y),$$

h désignant une constante.

Cela posé la pression kP se compose :

1° De la pression statique $P\cos\omega$;

2° De la force centrifuge

$$\frac{2\,\mathrm{P}(h-y)}{\rho}=\frac{2\,\mathrm{P}(h-y)\sin\omega\,d\omega}{dy}.$$

L'équation différentielle de la trajectoire sera donc

$$k=\cos\omega+\frac{2(h-y)\sin\omega\,d\omega}{dy}$$

ou

$$\frac{dy}{h-y}=\frac{2\sin\omega\,d\omega}{k-\cos\omega}.$$

Intégrant, il vient

$$-\log(h-y)=2\log(k-\cos\omega)+\text{const.},$$

$$h-y=\frac{c}{(k-\cos\omega)^2}.$$

On trouve ensuite

$$dx=\frac{dy}{\operatorname{tang}\omega}=\frac{2c\cos\omega\,d\omega}{(k-\cos\omega)^3},$$

et x s'en déduit par une quadrature facile.

62. *Courbe élastique*. — Elle a pour équation différentielle

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2y}{a^2}.$$

Multipliant par y' et intégrant, il vient

$$-(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{y^2-c}{a^2},$$

d'où

$$y'=\pm\sqrt{\frac{a^4-(y^2-c)^2}{(y^2-c)^2}},$$

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{y^2-c}{\sqrt{a^4-(y^2-c)^2}}\,dy.$$

Il reste à effectuer une quadrature, qui dépend des fonctions elliptiques.

Pour l'exécuter, posons

$$y^2 = c - t, \qquad \text{d'où} \qquad dy = -\frac{dt}{2\sqrt{c-t}};$$

il viendra

$$dx = \pm \frac{t\,dt}{\sqrt{4(t-c)(t^2-a^4)}},$$

ou, en posant

$$t = \frac{c}{3} + z,$$

$$e_\alpha = \frac{2}{3}c, \qquad e_\beta = a^2 - \frac{1}{3}c, \qquad e_\gamma = -a^2 - \frac{1}{3}c,$$

$$dx = \pm \frac{\left(z + \frac{c}{3}\right)dz}{\sqrt{4(z-e_\alpha)(z-e_\beta)(z-e_\gamma)}}.$$

Posant enfin $z = \wp u$, on aura

$$\pm x = \int\left(\wp u + \frac{c}{3}\right)du = -\zeta u + \frac{c}{3}u + c'.$$

D'autre part,

$$\pm y = \sqrt{c-t} = \sqrt{\frac{2}{3}c - z} = \sqrt{e_\alpha - \wp u}.$$

Pour $u = \omega_\alpha$, y s'annule, et si nous déterminons c' de telle sorte que x s'annule aussi, nous aurons

$$\pm x = -(\zeta u - \zeta\omega_\alpha) + \frac{c}{3}(u - \omega_\alpha).$$

Posons enfin

$$u = v + \omega_\alpha,$$

d'où

$$\zeta u = \zeta v + \zeta\omega_\alpha + \frac{1}{2}\frac{\wp' v}{\wp v - e_\alpha},$$

et

$$\wp u - e_\alpha = \frac{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}{\wp v - e_\alpha} = -\frac{(a^2-c)(a^2+c)}{\wp v - e_\alpha},$$

il viendra finalement

$$x = -\zeta v - \frac{1}{2}\frac{\wp' v}{\wp v - e_\alpha} + \frac{c}{3} v,$$

$$y = \frac{\sqrt{a^4 - c^2}}{f_\alpha v}.$$

63. *Mouvement d'un projectile dans un milieu résistant.* — Soient v la vitesse du projectile à l'instant t, $\varphi(v)$ la loi de la résistance. Prenons pour axe des y la verticale descendante et le temps t comme variable indépendante. La masse du projectile étant prise pour unité, les équations du mouvement seront

$$(27) \qquad x'' = -\varphi v \frac{dx}{ds} = -\frac{\varphi v}{v} x',$$

$$(28) \qquad y'' = -\frac{\varphi v}{v} y' + g.$$

On en déduit

$$x' y'' - y' x'' = g x'.$$

En prenant pour variable auxiliaire

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'},$$

d'où

$$p' = \frac{x' y'' - y' x''}{x'^2},$$

cette équation devient

$$(29) \qquad p' x' = g.$$

D'autre part

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} = x' \sqrt{1 + p^2}.$$

Si φv est proportionnel à une puissance de la vitesse, le problème se ramène aux quadratures. Soit en effet

$$\varphi v = k v^{2m+1}.$$

L'équation (27) pourra s'écrire ainsi :

$$g x'' = -p' x' k (1 + p^2)^m x'^{2m+1}.$$

Séparant les variables et intégrant, il vient

$$\frac{g}{2m+1}\,\frac{1}{x'^{2m+1}} = \int k(1+p^2)^m\,dp,$$

d'où

$$(30)\qquad x' = \psi(p),$$

en posant pour abréger

$$\frac{(2m+1)k}{g}\int(1+p^2)^m\,dp = f(p) = \psi^{-(2m+1)}(p).$$

Des équations (29) et (30) combinées entre elles on déduit

$$g = \psi(p)p',$$

ou

$$g\,dt = \psi(p)\,dp,$$

puis

$$g\,dx = g x'\,dt = \psi^2(p)\,dp,$$

et enfin

$$g\,dy = gp\,dx = p\,\psi^2(p)\,dp;$$

t, x, y s'obtiendront donc par quadratures en fonction de p.

Si m est entier, $f(p)$ sera un polynome et $\psi(p)$ une fonction algébrique ; t, x, y seront donc des intégrales abéliennes.

En particulier, si $m = 1$ (cas où la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse), $f(p)$ sera du troisième degré ; $f(p)^{\frac{1}{3}}$ représentant l'ordonnée d'une cubique, le problème pourra se ramener à des intégrales elliptiques.

M. *Greenhill* a réalisé cette réduction de la manière suivante :

Mettons en évidence une racine a du polynome $f(p)$. On pourra écrire

$$f(p) = (p-a)(\mathrm{A}p^2 + 2\mathrm{B}p + \mathrm{C}),$$

ou, en posant $p = a + \tau$, $dp = d\tau$,

$$f(p) = \tau(\mathrm{A}\tau^2 + 2\mathrm{B}_1\tau + \mathrm{C}_1).$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$f(p) = \tau\left[(\alpha\tau+\beta)^2 + \frac{1}{4}g_3\tau^2\right] = f_1(\tau),$$

α, β, g_3 étant de nouvelles constantes.

Posons

$$z = \frac{1}{\tau}f_1(\tau)^{\frac{1}{3}},$$

on aura

$$4z^3 - g_3 = 4\frac{(\alpha+\beta\tau)^2}{\tau^2},$$

d'où

$$\sqrt{4z^3-g_3} = \frac{2(\alpha+\beta\tau)}{\tau},$$

$$\frac{6z^2\,dz}{\sqrt{4z^3-g_3}} = -\frac{2\alpha\,d\tau}{\tau^2},$$

$$-\frac{3}{\alpha}\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_3}} = f_1(\tau)^{-\frac{2}{3}}\,d\tau = f(p)^{-\frac{2}{3}}\,dp = g\,dx.$$

Posons

$$z = \wp u, \qquad \sqrt{4z^3-g_3} = \wp' u,$$

il viendra

$$-\frac{3}{\alpha}du = g\,dx;$$

d'où

$$gx = -\frac{3}{\alpha}u + c.$$

D'autre part,

$$g(dy - a\,dx) = g\tau\,dx = -\frac{3}{\alpha}\tau\,du.$$

Mais on a

$$\tau = \frac{2\alpha}{\sqrt{4z^3-g_3} - 2\beta} = \frac{2\alpha}{\wp' u - \wp' v},$$

v étant une racine de l'équation transcendante

$$\wp' v = 2\beta.$$

Substituant cette valeur de τ et intégrant, il viendra

$$g(y - ax) = -6\int\frac{du}{\wp' u - \wp' v}.$$

Reste à calculer cette dernière intégrale. Ici l'invariant g_2 est nul, ce qui simplifie le calcul.

En effet, si dans l'équation de définition

$$u = \int_{\infty}^{pu} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}},$$

on change z en $\frac{z}{\theta}$, θ étant une racine cubique de l'unité, il viendra

$$u = \int_{\infty}^{\theta pu} \frac{1}{\theta} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_3}};$$

d'où

$$p(\theta u) = \theta p u.$$

Dérivant, il vient

$$p'(\theta u) = p' u,$$

Intégrant, il vient

$$\zeta(\theta u) = \frac{1}{\theta} \zeta u.$$

Cela posé, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p'u - p'v} &= \frac{p'u + p'v}{p'^2 u - p'^2 v} = \frac{p'u + p'v}{4(p^3 u - p^3 v)} \\
&= \frac{1}{4}(p'u + p'v)\left(\frac{1}{3p^2 v}\frac{1}{pu - pv} + \frac{1}{3\theta^2 p^2 v}\frac{1}{pu - \theta pv}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{3\theta p^2 v}\frac{1}{pu - \theta^2 pv}\right) \\
&= \frac{1}{12 p^2 v}\left(\frac{p'u + p'v}{pu - pv} + \theta\frac{p'u + p'\theta v}{pu - p\theta v} + \theta^2\frac{p'u + p'\theta^2 v}{pu - p\theta^2 v}\right).
\end{aligned}$$

Or si, dans la formule d'addition de la fonction ζu, on change le signe de v, elle donne

$$\frac{1}{2}\frac{p'u + p'v}{pu - pv} = \zeta(u - v) - \zeta u + \zeta v.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{6p^2 v}{p'u - p'v} = {} & \zeta(u - v) - \zeta u + \zeta v \\
& + \theta\,[\zeta(u - \theta v) - \zeta u + \zeta\theta v] \\
& + \theta^2[\zeta(u - \theta^2 v) - \zeta u + \zeta\theta^2 v].
\end{aligned}$$

Réduisant et intégrant, il vient

$$6\wp^2 v \int \frac{du}{\wp' u - \wp' v} = \log \sigma(u - v) + \theta \log \sigma(u - \theta v)$$
$$+ \theta^2 \log \sigma(u - \theta^2 v) + 3 u \zeta v + \text{const.}$$

IV. — Équations linéaires aux différentielles totales.

64. Les systèmes d'équations différentielles simultanées étudiés dans la Section précédente ne sont évidemment qu'un cas particulier des systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales, de la forme

$$(1) \qquad F_k = dx_k - \sum_h X_k^h \, dx_h = 0$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m; \; k = m+1, \ldots, m+n).$$

Cherchons à déduire de ces équations une combinaison intégrable

$$0 = \sum \mu_k F_k = d\varphi.$$

On aura évidemment

$$\mu_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \qquad -\sum_k \mu_k X_k^h = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h}.$$

Éliminant les μ, on voit que φ sera une intégrale commune aux m équations aux dérivées partielles

$$(2) \qquad E_h = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_k X_k^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m; \; k = m+1, \ldots, m+n).$$

Supposons que ces équations admettent n intégrales communes distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (nous verrons plus loin dans quel cas il en est ainsi). Soient $y_1, \ldots, y_m$ de nouvelles fonctions des x, formant avec les φ un système de fonctions distinctes. En prenant les φ et les y pour variables, les équa-

tions (2) prendront la forme

$$E_h = M_1^h \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \ldots + M_m^h \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} = 0$$

et seront manifestement équivalentes aux suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y_m} = 0.$$

La forme la plus générale des fonctions qui satisfont à ces équations est évidemment

$$\varphi = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

F désignant une fonction arbitraire.

Les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des intégrales du système (2), on aura des relations de la forme

$$d\varphi_i = \sum_k \mu_k^i F_k,$$

et le système (1) équivaudra au suivant

$$d\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_n = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\varphi_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n = \text{const.}$$

65. Le déterminant μ des coefficients $\mu_k^i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ se nomme le *multiplicateur* correspondant aux intégrales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. En remplaçant ce système d'intégrales par d'autres systèmes d'intégrales distinctes, on obtiendra une infinité de multiplicateurs, et l'on voit, comme au n° **44**, qu'ils ont pour forme générale $\mu F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Soient α l'un des nombres $1, 2, \ldots, m$; β l'un des nombres $m+1, \ldots, m+n$. Désignons par D_β^α ce que devient le déterminant μ lorsqu'on y remplace les éléments $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\beta}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ par les éléments $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\alpha} = -\sum_k X_k^\alpha \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$;

on aura évidemment

$$D_\beta^\alpha = -\mu X_\beta^\alpha.$$

On en déduit par différentiation, comme au n° 45,

$$(3) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta=m+1}^{\beta=m+n} \frac{\partial \mu X_\beta^\alpha}{\partial x_\beta} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Réciproquement, toute solution commune μ' des équations (3) est un multiplicateur; car, en posant $\mu' = \mu\nu$, on verra que ν est une intégrale des équations (2); donc ν sera de la forme $F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, et μ' sera un multiplicateur.

66. Si l'on a réussi à déterminer i intégrales distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ du système (2), on pourra, comme au n° 46, en les prenant pour variables indépendantes avec d'autres fonctions $y_1, \ldots, y_{m+n-i}$ choisies à volonté, remplacer le système (1) par un système équivalent, de la forme

$$(4) \qquad d\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_i = 0,$$

$$(5) \qquad dy_k - \sum_{h=1}^{h=m} Y_k^h dy_h = 0 \qquad (k = m+1, \ldots, m+n-i).$$

On en déduit

$$\varphi_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_i = \text{const.},$$

et il ne restera plus qu'à intégrer le système des $n - i$ équations (5).

D'ailleurs, si l'on connaît un multiplicateur du système (1), on en déduira, comme au n° 46, un multiplicateur de ce nouveau système.

Si donc on a réussi à déterminer $n - 1$ intégrales et un multiplicateur du système (1), il ne restera plus qu'à intégrer une seule équation. dont on connaîtra un multiplicateur. Le problème sera donc ramené aux quadratures.

67. Les considérations qui précèdent nous conduisent à

chercher les intégrales communes à un système d'équations aux dérivées partielles de la forme (2). Mais il conviendra de généraliser la question, en cherchant les intégrales communes à un système d'équations de la forme plus symétrique

$$X_1^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \ldots + X_{m+n}^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Si nous désignons par X^h l'opération

$$X_1^h \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_{m+n}^h \frac{\partial}{\partial x_{m+n}},$$

ces équations pourront s'écrire ainsi

$$X^h \varphi = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Cela posé, toute solution commune à deux de ces équations

$$X^i \varphi = 0, \qquad X^k \varphi = 0$$

satisfera à l'équation nouvelle

$$0 = X^i X^k \varphi - X^k X^i \varphi = \sum_\rho \sum_\sigma \left(X_\rho^i \frac{\partial X_\sigma^k}{\partial x_\rho} - X_\rho^k \frac{\partial X_\sigma^i}{\partial x_\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\sigma}$$
$$(\rho = 1, \ldots, m + n;\ \sigma = 1, \ldots, m + n);$$

car on a séparément

$$X^i X^k \varphi = X^i(0) = 0, \qquad X^k X^i \varphi = X^k(0) = 0.$$

Si d'ailleurs nous désignons pour plus de clarté par $p_1, \ldots, p_{m+n}$ les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{m+n}}$, on aura

$$X^i \varphi = X_1^i p_1 + \ldots + X_{m+n}^i p_{m+n},$$
$$X^k \varphi = X_1^k p_1 + \ldots + X_{m+n}^k p_{m+n},$$

et le symbole $(X^i \varphi, X^k \varphi)$, défini comme au n° 48, aura pour valeur

$$\sum_\rho \sum_\sigma \left(X_\rho^i \frac{\partial X_\sigma^k}{\partial x_\rho} - X_\rho^k \frac{\partial X_\sigma^i}{\partial x_\rho} \right) p_\sigma = X^i X^k \varphi - X^k X^i \varphi.$$

Ainsi, toute intégrale commune aux équations

$$X^1\varphi = 0, \quad \ldots, \quad X^m\varphi = 0$$

satisfera, en outre, aux équations

$$X^iX^k\varphi - X^kX^i\varphi = (X^i\varphi, X^k\varphi) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$

lesquelles sont, comme les précédentes, linéaires et homogènes par rapport aux dérivées partielles de φ.

Si parmi ces équations nouvelles il en est qui soient linéairement distinctes des équations primitives, on pourra les leur adjoindre et recommencer les mêmes opérations sur le système ainsi complété. En continuant à suivre cette marche, deux cas pourront se présenter :

1° On arrivera à un système contenant $m + n$ équations distinctes; on en déduira

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \text{d'où} \quad \varphi = \text{const.}$$

En dehors de cette solution banale, les équations proposées n'auront donc aucune intégrale commune.

2° On arrivera à un système

$$X^1\varphi = 0, \quad \ldots, \quad X^l\varphi = 0 \quad (l < m + n),$$

tel que toutes les nouvelles équations qu'on peut en déduire soient des combinaisons linéaires des précédentes. Ce système satisfera donc à des relations de la forme

$$X^iX^k\varphi - X^kX^i\varphi = (X^i\varphi, X^k\varphi) = \alpha_1^{ik}X^1\varphi + \ldots + \alpha_l^{ik}X^l\varphi$$
$$(i = 1, 2, \ldots, l;\ k = 1, 2, \ldots, l),$$

où les α sont des fonctions des x.

Un semblable système se nomme *système complet*.

68. Si dans un système complet nous prenons pour variables à la place de $x_1, x_2, \ldots$ de nouvelles variables y_1,

$y_2, \ldots,$ le système transformé

$$Y^i\varphi = Y_1^i \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + Y_2^i \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

sera encore un système complet; car les opérations $Y^1, \ldots,$ Y^l n'étant autre chose que les opérations $X^1, \ldots, X^l$, différemment exprimées, on aura encore

$$Y^iY^k\varphi - Y^kY^i\varphi = \alpha_1^{ik}Y^1\varphi + \ldots + \alpha_l^{ik}Y^l\varphi,$$

et il ne restera qu'à exprimer les quantités α en fonction des nouvelles variables y.

D'autre part, tout système

$$A^i\varphi = a_1^i X^1\varphi + \ldots + a_l^i X^l\varphi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

équivalent au système complet

$$X^1\varphi = 0, \qquad \ldots, \qquad X^l\varphi = 0$$

est lui-même complet.

En effet, l'expression

$$(A^i\varphi, A^k\varphi)$$

est une somme de termes de la forme

$$(a_\lambda^i X^\lambda\varphi, a_\mu^k X^\mu\varphi) = a_\lambda^i a_\mu^k (X^\lambda\varphi, X^\mu\varphi) + a_\lambda^i (X^\lambda\varphi, a_\mu^k) X^\mu\varphi$$
$$+ a_\mu^k (a_\lambda^i, X^\mu\varphi) X^\lambda\varphi + (a_\lambda^i, a_\mu^k) X^\lambda\varphi X^\mu\varphi.$$

Or (a_λ^i, a_μ^k) est évidemment nul, puisque les a ne contiennent pas les variables p; d'autre part, $(a_\lambda^i, X^\mu\varphi)$, $(X^\lambda\varphi, a_\mu^k)$ se réduisent à des fonctions des x; enfin $(X^\lambda\varphi, X^\mu\varphi)$ s'exprime linéairement au moyen des $X^1\varphi, \ldots, X^l\varphi$. Donc $(A^i\varphi, A^k\varphi)$ est une fonction linéaire de ces quantités, qui sont elles-mêmes des fonctions linéaires de $A^1\varphi, \ldots, A^l\varphi$.

69. Étant donné un système complet, contenant m équations par exemple, où figurent $m+n$ variables $x_1, \ldots,$ x_{m+n}, on obtiendra, en résolvant ces équations par rapport

à $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$, un système équivalent de la forme

$$(6) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_h} + \sum_k X_k^h \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = X^h\varphi = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots m;\ k = m+1, \ldots, m+n).$$

D'après ce qui précède, ce nouveau système sera encore complet.

Les systèmes complets de la forme (6), auxquels nous pouvons dorénavant borner notre étude, ont reçu le nom de *systèmes jacobiens*.

Pour ces systèmes particuliers, les équations de condition

$$(X^i\varphi, X^k\varphi) = \alpha_1^{ik} X^1\varphi + \alpha_2^{ik} X^2\varphi + \ldots,$$

qui caractérisent en général les systèmes complets, se réduisent à la forme la plus simple

$$(X^i\varphi, X^k\varphi) = 0.$$

En effet, $(X^i\varphi, X^k\varphi)$ est évidemment indépendant de $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$, tandis que $\alpha_1^{ik} X^1\varphi + \alpha_2^{ik} X^2\varphi + \ldots$ contient ces dérivées respectivement affectées des coefficients $\alpha_1^{ik}, \alpha_2^{ik}, \ldots$. Ces expressions ne pourront donc être identiques que si les α sont tous nuls.

70. Théorème. — *Un système jacobien formé de m équations entre $m + n$ variables admet n intégrales distinctes.*

Nous avons admis provisoirement dans la Section précédente la vérité de ce théorème pour le cas d'une seule équation; et nous pourrons évidemment supposer dans la démonstration qu'il ait été reconnu vrai pour les systèmes formés de moins de m équations.

Soit

$$(7) \qquad X^1\varphi = 0, \qquad \ldots, \qquad X^m\varphi = 0$$

le système proposé. La première équation, considérée isolé-

ment, admet $m+n-1$ intégrales distinctes $y_2, \ldots, y_{m+n}$. Soit y_1 une autre fonction quelconque, distincte de celles-là. En prenant les y pour variables indépendantes, nous obtiendrons un système transformé

$$X^h\varphi = M_1^h \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + M_2^h \frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + \ldots = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

dont la première équation, admettant $y_2, \ldots, y_{m+n}$ pour intégrales, se réduira à son premier terme

$$M_1^1 \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0.$$

Ces équations, résolues par rapport à $\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial y_m}$, donneront un système jacobien

$$(8) \qquad Y^1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y_1} = 0,$$

$$(9) \qquad Y^h\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y_h} + \sum_k Y_k^h \frac{\partial\varphi}{\partial y_k} = 0$$

$$(h = 2, \ldots, m;\ k = m+1, \ldots, m+n).$$

Or on a évidemment

$$(Y^1\varphi, Y^h\varphi) = \sum_k \frac{\partial Y_k^h}{\partial y_1} \frac{\partial\varphi}{\partial y_k};$$

et, pour que cette quantité s'annule identiquement, il faut qu'on ait

$$\frac{\partial Y_k^h}{\partial y_1} = 0.$$

Les équations (9) sont donc entièrement débarrassées de la variable y_1. Elles forment d'ailleurs un système jacobien de $m-1$ équations à $m+n-1$ variables $y_2, \ldots, y_{m+n}$, lequel système admettra par hypothèse n intégrales distinctes. Ces intégrales, ne dépendant pas de y_1, satisferont encore à l'équation (8). Il ne restera plus qu'à remplacer dans leur expression $y_2, \ldots, y_{m+n}$ par leurs valeurs en $x_1, \ldots, x_{m+n}$ pour obtenir les intégrales correspondantes du système primitif.

71. Soit

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{m+n}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

le système d'intégrales distinctes du système (7), dont l'existence vient d'être démontrée. Ces intégrales, considérées comme fonctions de $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ seulement, seront encore distinctes.

Admettons, en effet, qu'elles satisfissent à une relation de la forme

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n; x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

L'opération X^h, appliquée à cette identité donnerait

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1} X^h \varphi_1 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} X^h \varphi_n + \frac{\partial F}{\partial x_h} = \frac{\partial F}{\partial x_h}$$

(car $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des intégrales de l'équation $X^h \varphi = 0$). La fonction F serait donc indépendante de $x_1, \ldots, x_m$, et les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ne seraient pas distinctes, résultat contraire à leur définition.

Posons maintenant

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{m+n}) = \varphi_i(c_1, \ldots, c_m; \psi_1, \ldots, \psi_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$c_1, \ldots, c_m$ désignant des constantes arbitraires. Les quantités $\psi_1, \ldots, \psi_n$, définies par ces équations, seront des fonctions distinctes des intégrales primitives $\varphi_i(x_1, \ldots, x_{m+n})$. Elles formeront donc un nouveau système d'intégrales distinctes. Elles jouiront d'ailleurs de la propriété caractéristique de se réduire respectivement à $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$, lorsqu'on donne simultanément à $x_1, \ldots, x_m$ les valeurs particulières $c_1, \ldots, c_m$.

Cela posé, remplaçons les m premières variables $x_1, \ldots, x_m$ par de nouvelles variables $y_1, \ldots, y_m$ définies par les relations

$$(10) \qquad x_h = c_h + (y_1 - c_1) y_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

et résolvons les équations transformées par rapport à $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \ldots,$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y_m}$. Nous obtiendrons un nouveau système jacobien

$$Y^h \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y_h} + \sum_k Y_k^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \tag{11}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, m;\ k = m+1, \ldots, m+n).$$

Les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_n$, exprimées au moyen des nouvelles variables, donneront un système d'intégrales distinctes des équations (11). Elles se réduiront d'ailleurs respectivement à $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ lorsque $y_1 = c_1$, quels que soient $y_2, \ldots, y_m$; car, pour $y_1 = c_1$, les équations (10) donnent $x_1 = c_1, \ldots, x_m = c_m$.

72. Pour intégrer le système transformé (11), il suffira, comme l'a montré M. *Mayer*, d'intégrer l'équation unique

$$Y^1 \varphi = 0. \tag{12}$$

A cet effet, nous remarquerons que cette équation admet les intégrales $\psi_1, \ldots, \psi_n$, lesquelles, jointes aux intégrales évidentes $y_2, \ldots, y_m$, donneront un système de $m+n-1$ intégrales distinctes. Toute autre intégrale

$$f(y_1, \ldots, y_m;\ x_{m+1}, \ldots, x_{m+n})$$

de cette équation sera donc une fonction de celles-là, telle que

$$F(y_2, \ldots, y_m;\ \psi_1, \ldots, \psi_n).$$

Si dans l'égalité

$$f(y_1, \ldots, y_m;\ x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = F(y_2, \ldots, y_m;\ \psi_1, \ldots, \psi_n),$$

nous donnons à y_1 la valeur constante c_1, il viendra

$$f(c_1, \ldots, y_m;\ x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = F(y_2, \ldots, y_m;\ x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}),$$

et, par suite,

$$f(c_1, \ldots, y_m;\ \psi_1, \ldots, \psi_n) = F(y_2, \ldots, y_m;\ \psi_1, \ldots, \psi_n).$$

On voit par là qu'une intégrale quelconque f de l'équa-

tion (12) étant supposée connue, on obtiendra immédiatement son expression en fonction de $y_2, \ldots, y_m, \psi_1, \ldots, \psi_n$, en remplaçant dans la fonction f les variables $y_1, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ par $c_1, \psi_1, \ldots, \psi_n$.

Cela posé, admettons que nous soyons parvenus à intégrer l'équation (12), en considérant $y_1, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$ comme seules variables, et $y_2, \ldots, y_m$ comme des paramètres (ce qui revient, comme nous l'avons vu, à déterminer une solution générale d'un système de n équations différentielles ordinaires). Soit $f_1, \ldots, f_n$ un système d'intégrales distinctes de cette équation; on aura, ainsi qu'on vient de le voir,

$$f_1 = F_1, \quad \ldots, \quad f_n = F_n,$$

$F_1, \ldots, F_n$ étant des fonctions connues de $y_2, \ldots, y_m$; $\psi_1, \ldots, \psi_n$; et il suffira de résoudre ces équations par rapport à $\psi_1, \ldots, \psi_n$ pour déterminer ces fonctions, lesquelles forment un système d'intégrales des équations (11). D'ailleurs, la résolution de ces équations ne sera jamais impossible, car les fonctions $y_2, \ldots, y_m; f_1, \ldots, f_n$ étant distinctes, $f_1, \ldots, f_n$ sont nécessairement des fonctions distinctes par rapport à $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

73. On peut aller plus loin et montrer que la connaissance d'une seule intégrale f_1 de l'équation (12) permet de déterminer une ou même plusieurs intégrales du système (11). On aura, en effet,

$$f_1 = F_1(y_2, \ldots, y_m; \psi_1, \ldots, \psi_n),$$

F_1 étant une fonction connue. Résolvons cette équation par rapport à ψ_1, on aura une relation de la forme

$$\psi_1 = \theta_1(y_1, \ldots, x_{m+n}; \psi_2, \ldots, \psi_n),$$

où θ_1 est une fonction connue.

Effectuons sur cette identité l'opération Y^h, h désignant l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, m$. Il viendra, en

remarquant que $\psi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des intégrales de $Y^h\varphi = 0$,

$$0 = Y^h\theta_1 = \frac{\partial\theta_1}{\partial y_1} Y^h y_1 + \ldots + \frac{\partial\theta_1}{\partial x_{m+n}} Y^h x_{m+n}.$$

Le second membre de cette équation est une fonction connue de $y_1, \ldots, x_{m+n}$; $\psi_2, \ldots, \psi_n$. S'il ne s'annule pas identiquement, il contiendra l'une au moins des quantités ψ, par exemple ψ_2; car les variables $y_1, \ldots, x_{m+n}$ sont indépendantes. En résolvant par rapport à ψ_2, on obtiendra une relation de la forme

$$\psi_2 = \theta_2(y_1, \ldots, x_{m+n}; \psi_3, \ldots, \psi_n).$$

Effectuons sur cette équation l'opération Y^h, on en déduira une nouvelle équation pour déterminer ψ_3, et ainsi de suite jusqu'à une dernière équation qui donnera ψ_n. Le système (11) sera dès lors intégré.

On ne pourra se trouver arrêté dans cette suite d'opérations que si l'on arrive à une équation

$$\psi_i = \theta_i(y_1, \ldots, x_{m+n}; \psi_{i+1}, \ldots, \psi_n),$$

pour laquelle on ait identiquement

$$Y^h\theta_i = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Mais alors, en remplaçant dans θ_i les fonctions inconnues $\psi_{i+i}, \ldots, \psi_n$ par des constantes quelconques, on obtiendra une fonction φ_i qui satisfait évidemment aux mêmes équations, et qui sera, par suite, une intégrale du système (11).

74. Nous pouvons énoncer, comme résultat de cette étude, le théorème suivant :

Pour qu'un système d'équations aux différentielles totales

$$(1) \qquad F_k = dx_k - \sum_k X_k^h dx_h = 0$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m;\ k = m+1, \ldots, m+n)$$

admette n intégrales distinctes

$$\varphi_1 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad \varphi_n = \text{const.},$$

il faut et il suffit que les équations aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_k X_k^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

forment un système jacobien.

Cette condition étant supposée remplie, la recherche des intégrales du système dépend de l'intégration d'un système de n équations différentielles simultanées.

Chaque intégrale de ce dernier système fournira au moins une intégrale du système proposé.

75. Soit S un système d'équations aux différentielles totales de la forme (1) et admettant n intégrales distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si nous y changeons $x_1, \ldots, x_{m+n}$ en $x_1 + \varepsilon\xi_1, \ldots, x_{m+n} + \varepsilon\xi_{m+n}$, ε étant un paramètre infiniment petit, dont nous négligeons le carré, et $\xi_1, \ldots, \xi_{m+n}$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_{m+n}$, nous obtiendrons un autre système S'.

A toute intégrale φ du système S correspondra évidemment pour le système S' une intégrale

$$\varphi(x_1 + \varepsilon\xi_1, \ldots, x_{m+n} + \varepsilon\xi_{m+n}) = \varphi + \varepsilon A\varphi,$$

en désignant par A l'opération

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{m+n} \frac{\partial}{\partial x_{m+n}}.$$

Cette opération est complètement définie quand $\xi_1, \ldots, \xi_{m+n}$ sont donnés, et réciproquement. Soient d'ailleurs $y_1, \ldots, y_{m+n}$ de nouvelles variables quelconques, fonctions des x. Lorsque $x_1, \ldots, x_{m+n}$ s'accroissent respectivement de $\varepsilon\xi_1, \ldots, \varepsilon\xi_{m+n}$, y_i s'accroîtra de

$$\varepsilon\left(\xi_1 \frac{\partial y_i}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{m+n} \frac{\partial y_i}{\partial x_{m+n}}\right),$$

quantité que nous désignerons par $\varepsilon\eta_i$. D'autre part, on a évidemment

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial y_1}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_2} + \ldots$$

On déduit immédiatement de là l'égalité

$$\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{m+n}\frac{\partial}{\partial x_{m+n}} = \eta_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \eta_{m+n}\frac{\partial}{\partial y_{m+n}}.$$

L'opération associée à la transformation infinitésimale considérée reste donc la même, lorsqu'on change de variables indépendantes.

Nous désignerons, pour abréger, par $A\varphi$ la transformation infinitésimale qui correspond à l'opération A, et qui, par suite change l'intégrale φ en $\varphi + \varepsilon A\varphi$; et nous dirons que le système S *admet cette transformation infinitésimale* $A\varphi$ si le système transformé S′ est équivalent à S.

Pour cela, il faut et il suffit que le système S′ soit équivalent au système

$$d\varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad d\varphi_n = 0,$$

auquel S est équivalent; et, par suite, que les systèmes S et S′ admettent les mêmes intégrales.

Or à toute intégrale φ de S correspond une intégrale $\varphi + \varepsilon A\varphi$ de S′. Celle-ci devra être une intégrale de S, ou, ce qui revient au même, $A\varphi$ sera une intégrale de S.

Si donc nous désignons, comme précédemment, par

$$X^h\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_h} + \sum_k X_k^h \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

les équations aux dérivées partielles qui caractérisent les intégrales de S, ces équations devront entraîner comme conséquences les suivantes

$$X^h A\varphi = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

ou, ce qui revient au même, celles-ci

$$X^h A\varphi - A X^h \varphi = (X^h\varphi, A\varphi) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

[car on a identiquement $AX^h\varphi = A(0) = 0$].

Cela posé, le système formé des équations

$$X^h\varphi = 0, \qquad (X^h\varphi, A\varphi) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

admettant n intégrales distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, ne pourra contenir plus de m équations linéairement distinctes. On aura donc

$$(13)\quad (X^h\varphi, A\varphi) = \alpha_1^h X^1\varphi + \ldots + \alpha_m^h X^m\varphi \quad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

les coefficients α étant des fonctions des x. D'ailleurs il est évident que ces conditions seront suffisantes.

76. Toute expression de la forme

$$\sum_i \xi_i X^i\varphi \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

représente une transformation infinitésimale de S en lui-même.

En effet, on a

$$\left(X^h\varphi, \sum_i \xi_i X^i\varphi\right) = \sum_i [\xi_i(X^h\varphi, X^i\varphi) + (X^h\varphi, \xi_i)X^i\varphi]$$
$$= \sum_i X^h\xi_i X^i\varphi,$$

car $(X^h\varphi, X^i\varphi)$ est nul; et, d'autre part, on a

$$(X^h\varphi, \xi_i) = \frac{\partial\xi_i}{\partial x_h} + \sum_k X_k^h \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} = X^h\xi_i.$$

Si donc S admet une transformation infinitésimale

$$A\varphi = \sum_i \xi_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n),$$

il admettra évidemment la transformation

$$B\varphi = A\varphi - \xi_1 X'\varphi - \ldots - \xi_m X^m \varphi,$$

laquelle se réduit à la forme

$$\xi_{m+1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+1}} + \ldots + \xi_{m+n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{m+n}}.$$

Il nous suffira évidemment d'étudier les transformations de cette sorte, toutes les autres pouvant s'en déduire par l'adjonction d'une fonction linéaire de $X'\varphi, \ldots, X^m\varphi$.

Pour les transformations de la forme $B\varphi$, les équations de condition (13) prendront la forme la plus simple

$$(X^h\varphi, B\varphi) = 0;$$

car le premier membre de ces équations, ne contenant pas les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_m}$, ne pourra se réduire à une fonction linéaire de $X'\varphi, \ldots, X^m\varphi$ que s'il s'annule identiquement.

77. Si S admet deux transformations $B\varphi$, $B'\varphi$, il admettra la transformation $(B\varphi, B'\varphi)$.

On a, en effet (48), l'identité

$$(X^h\varphi, (B\varphi, B'\varphi)) + (B\varphi, (B'\varphi, X^h\varphi)) + (B'\varphi, (X^h\varphi, B\varphi)) = 0.$$

Mais $(X^h\varphi, B\varphi)$ et $(B'\varphi, X^h\varphi)$ sont nuls par hypothèse; donc cette égalité se réduira à

$$(X^h\varphi, (B\varphi, B'\varphi)) = 0.$$

78. Soient $B'\varphi, \ldots, B^l\varphi$ des transformations du système S qui ne soient liées par aucune relation linéaire; si l'expression

$$B\varphi = \sum_i \beta_i B^i\varphi \qquad (i = 1, 2, \ldots, l)$$

est une autre transformation du même système, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ seront des intégrales, et réciproquement.

On a, en effet,

$$(X^h\varphi, B\varphi) = \sum_i (X^h\varphi, \beta_i B^i\varphi)$$

$$= \sum_i [(X^h\varphi, \beta_i)B^i\varphi + (X^h\varphi, B^i\varphi)\beta_i] = \sum_i X^h\beta_i B^i\varphi,$$

expression qui ne peut s'annuler, par hypothèse, que si tous les coefficients $X^h\beta_i$ sont nuls, ce qui montre que β_i est une intégrale.

79. Enfin, si l'on connaît un multiplicateur μ du système S et une transformation infinitésimale $B\varphi$, on en déduira une intégrale.

Soit, en effet,

$$B\varphi = \sum_i \xi_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \qquad (i = m+1, \ldots, m+n).$$

Nous aurons, quel que soit h,

$$0 = (X^h\varphi, B\varphi)$$

$$= \sum_i \frac{\partial\xi_i}{\partial x_h}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \sum_i\sum_k \left(X_k^h \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial X_i^h}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

i et k variant de $m+1$ à $m+n$.

Dans cette identité, les coefficients de chacune des dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ doivent être nuls séparément; nous aurons donc

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial x_h} + \sum_k \left(X_k^h \frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial X_i^h}{\partial x_k}\right) = 0 \quad (i = m+1, \ldots, m+n).$$

Différentions cette équation par rapport à x_i; sommons par rapport à i et supprimons les termes qui se détruisent; il viendra

$$0 = \sum_i \frac{\partial^2\xi_i}{\partial x_h\,\partial x_i} + \sum_i\sum_k \left(X_k^h \frac{\partial^2\xi_i}{\partial x_i\,\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial^2 X_i^h}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)$$

$$= X^h\left(\sum_i \frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}\right) - B\left(\sum_i \frac{\partial X_i^h}{\partial x_i}\right).$$

Mais on a, d'autre part,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_h} + \sum_i \frac{\partial \mu X_i^h}{\partial x_i} = 0$$

ou, en développant et divisant par μ,

$$\sum_i \frac{\partial X_i^h}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial \mu}{\partial x_h} + \sum_i X_i^h \dfrac{\partial \mu}{\partial x_i}}{\mu} = -X^h \log \mu.$$

L'équation précédente pourra donc s'érire

$$\begin{aligned} 0 &= X^h\left(\sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right) + BX^h \log \mu, \\ &= X^h\left(\sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right) + X^h B \log \mu. \end{aligned}$$

Cette équation, qui a lieu pour $h = 1, \ldots, m$, montre que

$$\sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + B \log \mu$$

est une intégrale.

80. Admettons qu'en combinant les procédés ci-dessus, ou autrement, on ait réussi à obtenir p intégrales distinctes $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ du système S. En prenant $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ pour variables à la place de $x_{m+1}, \ldots, x_{m+p}$ par exemple, les équations $X^h \varphi = 0$ seront transformées en de nouvelles équations de même forme, mais ne contenant pas les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_p}$, puisque $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sont des solutions.

On aura donc

$$X^h \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_k X_k^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots, m;\ k = m+p+1, \ldots, m+n),$$

les X_k^h étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_m;\ \varphi_1, \ldots, \varphi_p;\ x_{m+p+1}, \ldots, x_{m+n}$.

Soient $B'\varphi, \ldots, B^\lambda\varphi, \ldots$ les transformations infinitésimales qu'on suppose connues. On aura

$$B^\lambda\varphi = \sum_i \beta_i^\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_i} + \sum_k \xi_k^\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p;\ k = m+p+1, \ldots, m+n).$$

D'ailleurs, φ_i étant une intégrale, $B^\lambda\varphi_i = \beta_i^\lambda$ sera également une intégrale. Si nous admettons que nous ayons tiré tout le parti possible des procédés ci-dessus indiqués, cette intégrale ne sera pas nouvelle, mais se réduira à une fonction de $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$.

Posons, pour abréger,

$$\sum_i \beta_i^\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_i} = A^\lambda,$$

et supposons que, parmi ces expressions, il y en ait q qui soient linéairement distinctes, à savoir $A', \ldots, A^q$.

Les suivantes $A^{q+1}, \ldots$ seront de la forme

$$A^{q+\mu} = \gamma'_\mu A' + \ldots + \gamma_\mu^q A^q,$$

les coefficients γ étant des fonctions des β, et par suite étant des intégrales.

Cela posé, on aura évidemment

$$B^{\lambda+\mu}\varphi = \gamma'_\mu B'\varphi + \ldots + \gamma_\mu^q B^q\varphi + D^\mu\varphi,$$

$D^\mu\varphi$ étant une nouvelle transformation infinitésimale, qui se réduit à la forme la plus simple

$$D^\mu\varphi = \sum_k \xi_k^\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

Admettons que, parmi les transformations de cette sorte ainsi déterminées, il y en ait r linéairement distinctes $D'\varphi, \ldots, D^r\varphi$.

Toutes les autres seront de la forme

$$\varepsilon_1 D'\varphi + \ldots + \varepsilon_r D^r\varphi,$$

où les quantités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ devront être des intégrales, et par suite des fonctions de $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$.

Réciproquement, toute expression de cette forme représentera une transformation infinitésimale du système S.

En particulier, les transformations

$$(\mathrm{D}^i\varphi, \mathrm{D}^k\varphi),$$

ne contenant pas dans leur expression les dérivées $\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}, \ldots,$ $\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_p}$, devront être de cette forme.

81. Cela posé, deux cas pourront se présenter :

1° Si $p + r < n$, les équations

$$\mathrm{X}^h\varphi = 0, \qquad \mathrm{D}^i\varphi = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, r)$$

entre les $m + n - p$ variables $x_1, \ldots, x_m, x_{m+p+1}, \ldots, x_{m+n}$ ($\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ étant traités comme des paramètres) forment un système complet, en vertu des relations

$$(\mathrm{X}^i\varphi, \mathrm{X}^k\varphi) = 0, \qquad (\mathrm{D}^i\varphi, \mathrm{X}^k\varphi) = 0,$$
$$(\mathrm{D}^i\varphi, \mathrm{D}^k\varphi) = \varepsilon_1^{ik}\mathrm{D}'\varphi + \ldots + \varepsilon_r^{ik}\mathrm{D}^r\varphi.$$

Ce système admettra donc $n - p - r$ intégrales, $\varphi_{p+1}, \ldots,$ φ_{n-r} qui sont évidemment celles des intégrales du système S qui ne sont pas altérées par les transformations $\mathrm{D}'\varphi, \ldots, \mathrm{D}^r\varphi$. Lorsqu'on les aura trouvées (par l'intégration d'un système de $n - p - r$ équations différentielles ordinaires), les r intégrales encore inconnues dépendront de l'intégration d'un second système de r équations différentielles.

L'avantage obtenu dans ce cas consistera donc à décomposer en deux le problème de la recherche des intégrales $\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n$ encore inconnues.

2° Si $p + r = n$, la connaissance des transformations $\mathrm{D}'\varphi, \ldots, \mathrm{D}^r\varphi$ fournira un multiplicateur du système.

Soit, en effet,

$$\mathrm{D}^i\varphi = \sum_k \xi_k^i \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \qquad (k = m + p + 1, \ldots, m + n),$$

et désignons par Δ le déterminant des coefficients ξ_k^i; par J le jacobien des intégrales inconnues $\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n$ par rapport aux variables x_k.

Formons le produit ΔJ par la règle connue; on obtiendra un nouveau déterminant I, dont les éléments sont les quantités $D^i\varphi_k$. Or ces expressions sont des intégrales; donc $\frac{1}{I}$ sera une intégrale; d'autre part, J est un multiplicateur; donc $\frac{J}{I}$ sera également un multiplicateur.

Or cette quantité est égale à $\frac{1}{\Delta}$, quantité connue.

V. — Étude directe des intégrales.

82. Les méthodes que nous avons exposées jusqu'à présent avaient pour but de trouver l'intégrale générale des équations différentielles. Mais elles ne réussissent, comme on l'a vu, que dans des cas fort limités, et nous ne pouvons même assurer que l'intégrale cherchée existe en général, car son existence a été admise saus démonstration.

Il est donc nécessaire de reprendre le problème de l'intégration, en le précisant, de manière à le rendre déterminé. La question ainsi posée peut se formuler ainsi :

1° *Étant donné un système d'équations différentielles normales*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z, \ldots), \qquad \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z, \ldots), \qquad \ldots,$$

démontrer qu'il existe, sous certaines conditions à préciser, un système unique de fonctions $y, z, \ldots$ jouissant de la double propriété de satisfaire à ces équations, et de prendre respectivement des valeurs données $y_0, z_0, \ldots$ pour une valeur donnée x_0 de la variable indépendante;

2° *Donner une méthode qui permette de calculer, avec telle approximation qu'on voudra, la valeur de ces fonctions pour toute valeur réelle ou imaginaire de x;*

3° *Enfin, discuter les cas d'exception où les résultats établis se trouvent en défaut.*

83. Supposons tout d'abord que les variables et les fonctions considérées soient réelles; et considérons, pour éviter des longueurs, le cas de deux équations

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z).$$

Nous devrons admettre pour la démonstration :

1° Que, dans le domaine défini par les inégalités

$$|x - x_0| \leqq a, \qquad |y - y_0| \leqq b, \qquad |z - z_0| \leqq b,$$

les modules des fonctions f, f_1 ne surpassent pas un nombre fixe M;

2° Que si (x, y, z), $(x, y+h, z+k)$ sont deux points quelconques de ce domaine, on ait

$$|f(x, y+h, z+k) - f(x, y, z)| < m|h| + n|k|,$$
$$|f_1(x, y+h, z+k) - f_1(x, y, z)| < m|h| + n|k|,$$

m et n étant des constantes positives.

Ces conditions très générales seront sûrement vérifiées si f, f_1 ont des dérivées partielles.

Cela posé, soient $y_1, z_1, \ldots, y_i, z_i, \ldots$ une suite de fonctions définies par les relations suivantes :

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0, z_0)\, dx,$$
$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, z_0)\, dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_{i+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_i, z_i)\, dx,$$
$$z_{i+1} = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_i, z_i)\, dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit δ une quantité quelconque moindre que a et que $\frac{b}{M}$.

1° Tant que $|x - x_0|$ sera $< \delta$, les quantités $|y_i - y_0|$, $|z_i - z_0|$ seront moindres que b.

La chose étant évidente pour $i = 0$, il suffit de le démontrer pour y_{i+1}, z_{i+1} en la supposant vraie pour y_i, z_i.

Or on a

$$|y_{i+1} - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_i, z_i)\, dx \right| \leqq M\,|x - x_0| < M\delta < b.$$

De même pour $|z_{i+1} - z_0|$.

2° On a

$$\begin{aligned} |y_{i+1} - y_i| &= \int_{x_0}^{x} [f(x, y_i, z_i) - f(x, y_{i-1}, z_{i-1})]\, dx \\ &< [m\,|y_i - y_{i-1}| + n\,|z_i - z_{i-1}|]\,\delta \end{aligned}$$

et de même pour $|z_{i+1} - z_i|$. On en déduit l'inégalité

$$|y_{i+1} - y_i| \leqq (m+n)^i\, \delta^{i+1} M,$$

et de même pour $|z_{i+1} - z_i|$.

En effet, la formule précédente montre que ces inégalités ont lieu pour $i + 1$ si elles ont lieu pour i. Or elles ont lieu pour $i = 0$.

Les termes généraux des séries

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_{i+1} - y_i) + \ldots, \\ z &= z_0 + (z_1 - z_0) + \ldots + (z_{i+1} - z_i) + \ldots \end{aligned}$$

ont donc leurs modules moindres que les termes d'une progression géométrique de raison $(m + n)\delta$. Si l'on prend $\delta < \frac{1}{m+n}$, ces séries seront convergentes, et définiront dans le domaine

$$|x - x_0| < \delta$$

des fonctions

$$y = \lim_{i=\infty} y_i, \qquad z = \lim_{i=\infty} z_i.$$

3° Ces fonctions y, z satisfont aussi aux conditions du

problème. En effet, l'équation

$$y_{i+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_i, z_i)\, dx$$

peut s'écrire ainsi :

$$y + (y_{i+1} - y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx + \int_{x_0}^{x} [f(x, y_i, z_i) - f(x, y, z)]\, dx.$$

Si l'on fait tendre i vers ∞, $y_{i+1} - y$ tend vers zéro. Il en est de même du dernier terme, dont le module a pour limite supérieure

$$[m|y_i - y| + n|z_i - z|]\delta$$

quantité infiniment petite.

On aura donc à la limite

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx.$$

On trouvera de même

$$z = z_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y, z)\, dx.$$

Dérivons ces équations : il vient

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z).$$

D'ailleurs pour $x = x_0$, on a bien $y = y_0$, $z = z_0$.

84. La solution que nous venons de trouver est la seule possible.

Soient, en effet, Y, Z deux fonctions jouissant comme y, z de la double propriété de satisfaire aux équations différentielles et de se réduire à y_0, z_0 pour $x = x_0$. Les fonc-

tions $Y - y$, $Z - z$ auront respectivement pour dérivées

$$f(x, Y, Z) - f(x, y, z),$$
$$f_1(x, Y, Z) - f_1(x, y, z).$$

Elles sont donc continues et, comme elles s'annulent pour $x = x_0$, elles ne pourront acquérir une valeur différente de zéro qu'après avoir passé par toutes les valeurs intermédiaires.

D'autre part, en vertu de nos hypothèses, tant que $Y - y$, $Z - z$ seront moindres que ε en valeur absolue, le module de leur dérivée sera $< (m + n)\varepsilon$, et le module des fonctions elles-mêmes sera moindre que $(m + n)\varepsilon\,|x - x_0|$.

Il en résulte que dans tout l'intervalle de $x_0 - \frac{1}{2(m+n)}$ à $x_0 + \frac{1}{2(m+n)}$ les modules de nos fonctions seront $< \frac{\varepsilon}{2}$ tant qu'ils seront $< \varepsilon$. Ils ne pourront donc atteindre aucune des valeurs comprises entre $\frac{\varepsilon}{2}$ et ε, ce qu'ils devraient faire pour pouvoir atteindre ou dépasser ε. Donc ils resteront toujours moindres que ε, quantité arbitraire. Ils sont donc nécessairement nuls.

Le même raisonnement montre qu'étant nuls au point $x_0 + \frac{1}{2(m+n)}$, ils le seront encore de $x_0 + \frac{1}{2(m+n)}$ à $x_0 + \frac{1}{m+n}$, $\ldots$, et enfin dans tout le domaine de $x_0 - \delta$ à $x_0 + \delta$, où nous avons pu définir les fonctions y, z.

85. Passons au cas des fonctions et des variables complexes. Soit encore

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_1(x, y, z) \tag{1}$$

un système de deux équations différentielles.

Nous admettrons ici que (x_0, y_0, z_0) soit un point ordinaire pour les fonctions f, f_1. On pourra donc, par définition,

tracer autour de x_0, y_0, z_0 des contours fermés K, K′, K″, tels que f, f_1, et leurs dérivées partielles restent monodromes et continues, tant que x, y, z ne sortiront pas de ces contours.

Soient :

d, d', d'' les distances minima des points x_0, y_0, z_0 à K, K′, K″;
S, S′, S″ les périmètres de ces contours ;
M une limite supérieure du module de f et de f_1, lorsque x, y, z décrivent respectivement ces contours.

On pourra écrire

$$f(x, y, z) = \sum a_{\alpha\beta\gamma}(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta (z - z_0)^\gamma,$$

$$f_1(x, y, z) = \sum b_{\alpha\beta\gamma}(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta (z - z_0)^\gamma,$$

ces développements restant convergents tant que les modules de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ resteront inférieurs à d, d', d''. D'ailleurs

$$a_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x_0^\alpha\,\partial y_0^\beta\,\partial z_0^\gamma},$$

et l'on aura (T. I, n° 208)

$$|a_{\alpha\beta\gamma}| \leqq \frac{\mathrm{MSS'S''}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{d^{\alpha+1}\,d'^{\beta+1}\,d''^{\gamma+1}}$$

et, *a fortiori*,

$$|a_{\alpha\beta\gamma}| \leqq \frac{\mathrm{N}}{r^{\alpha+\beta+\gamma+3}},$$

en désignant par r la plus petite des quantités d, d', d'', et posant, pour abréger,

$$\frac{\mathrm{MSS'S''}}{(2\pi)^3} = \mathrm{N}.$$

On obtiendrait la même limite pour le module de $b_{\alpha\beta\gamma}$.

Soient enfin x_0+h, y_0+k, z_0+l des points assez voisins de x_0, y_0, z_0 pour que les droites qui les joignent à ces derniers points soient respectivement comprises dans l'intérieur des contours K, K′, K″, et soient δ, δ', δ'' les plus courtes distances de ces droites à ces contours ; on aura

$$
\begin{aligned}
(2)\quad & |[f(x_0+h, y_0+k, z_0+l)-f(x_0, y_0, z_0)]| \\
&= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0+ht, y_0+kt, z_0+lt)\,dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 \left(h\frac{\partial}{\partial x_0}+k\frac{\partial}{\partial y_0}+l\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x_0+ht, y_0+kt, z_0+lt)\,dt\right| \\
&\leqq \left(\frac{|h|}{\delta}+\frac{|k|}{\delta'}+\frac{|l|}{\delta''}\right)\frac{N}{\delta\delta'\delta''}.
\end{aligned}
$$

86. Ces préliminaires posés, cherchons à déterminer des fonctions y, z qui satisfassent aux équations données

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z) = \sum a_{\alpha\beta\gamma}(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta(z-z_0)^\gamma, \\
\dfrac{dz}{dx} = f_1(x, y, z) = \sum b_{\alpha\beta\gamma}(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta(z-z_0)^\gamma,
\end{cases}
$$

et qui, pour $x=x_0$, se réduisent respectivement à y_0+k et à z_0+l, k et l désignant des constantes très petites.

Nous poserons, à cet effet,

$$
(4)\quad \left.\begin{aligned}
y-y_0 &= k+\sum c_{\lambda\mu\nu}(x-x_0)^\lambda k^\mu l^\nu \\
z-z_0 &= l+\sum d_{\lambda\mu\nu}(x-x_0)^\lambda k^\mu l^\nu
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&(\lambda = 1, 2, \ldots, \infty), \\
&(\mu, \nu = 0, 1, \ldots, \infty).
\end{aligned}
$$

Substituons ces valeurs dans les équations (3), développons le second membre suivant les puissances de $x-x_0$, k, l, et égalons les coefficients du terme général ; il viendra

$$
(\lambda+1)c_{\lambda+1.\mu,\nu} = F, \qquad (\lambda+1)d_{\lambda+1,\mu,\nu} = \Phi,
$$

F et Φ étant des polynomes à coefficients positifs, formés

avec ceux des coefficients a, b, c, d, où la somme des indices ne surpasse pas $\lambda + \mu + \nu$.

Les équations précédentes déterminent, successivement et sans ambiguïté, les coefficients c et d ; ils seront donnés par des expressions de la forme

$$c_{\lambda\mu\nu} = F_{\lambda\mu\nu}, \qquad d_{\lambda\mu\nu} = \Phi_{\lambda\mu\nu}, \tag{5}$$

$F_{\lambda\mu\nu}$ et $\Phi_{\lambda\mu\nu}$ étant des polynomes à coefficients positifs, formés avec les quantités a, b.

Les expressions (4), où les coefficients c, d seront déterminés par les équations (5), satisfont évidemment aux conditions du problème. Si l'on y groupe ensemble les termes affectés des mêmes puissances de k et de l, on obtiendra un résultat de la forme

$$y - y_0 = \sum S_{\mu\nu} k^{\mu} l^{\nu}, \qquad z - z_0 = \sum T_{\mu\nu} k^{\mu} l^{\nu},$$

$S_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ étant des séries qui procèdent suivant les puissances de $x - x_0$.

En supprimant dans les expressions précédentes les termes qui dépendent de k et de l, il viendra

$$y - y_0 = S_{00}, \qquad z - z_0 = T_{00},$$

et il est clair : 1° que ces équations donnent un système d'intégrales qui se réduisent à y_0, z_0 pour $x = x_0$; 2° qu'on aura

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\,\nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} S_{00}}{\partial y_0^{\mu}\, \partial z_0^{\nu}}, \qquad T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu!\,\nu!} \frac{\partial^{\mu+\nu} T_{00}}{\partial y_0^{\mu}\, \partial z_0^{\nu}}.$$

87. La méthode que nous venons de suivre suppose évidemment que les séries sur lesquelles nous opérons sont absolument convergentes. Nous allons vérifier qu'il en est ainsi tant que k, l, $x - x_0$ seront suffisamment petits.

Remplaçons, en effet, dans les séries (4) chacun des coef-

ficients $a_{\alpha\beta\gamma}$, $b_{\alpha\beta\gamma}$ par la quantité $\frac{N}{r^{\alpha+\beta+\gamma+3}}$; limite supérieure de son module, et les quantités k, l par une même quantité positive m, au moins égale à $|k|$ et à $|l|$. Nous obtiendrons de nouvelles séries, à coefficients positifs, et dont chaque terme aura un module au moins égal à celui du terme correspondant des séries primitives. Celles-ci seront donc absolument convergentes si les nouvelles séries le sont.

Mais ces séries sont évidemment celles qu'on obtiendrait si l'on cherchait à déterminer des fonctions Y, Z qui se réduisent à $y_0 + m$, $z_0 + m$ pour $x = x_0$, et qui satisfassent aux équations différentielles

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = \sum \dfrac{N}{r^{\alpha+\beta+\gamma+3}}(x - x_0)^\alpha (Y - y_0)^\beta (Z - z_0)^\gamma \\ \qquad = \dfrac{N}{[r - (x - x_0)][r - (Y - y_0)][r - (Z - z_0)]}, \\ \dfrac{dZ}{dx} = \dfrac{N}{[r - (x - x_0)][r - (Y - y_0)][r - (Z - z_0)]}. \end{cases}$$

Or on peut intégrer directement ces équations et s'assurer que ces fonctions Y, Z existent, et sont développables en séries convergentes quand m et $x - x_0$ sont suffisamment petits.

On en déduit, en effet,

$$dZ = dY$$

et, en intégrant de x_0 à x,

$$Z - z_0 = Y - y_0.$$

Substituant dans la première équation, il vient

$$\frac{dY}{dx} = \frac{N}{[r - (x - x_0)][r - (Y - y_0)]^2}$$

ou, en séparant les variables et intégrant de x_0 à x,

$$\frac{1}{3}[r - (Y - y_0)]^3 - \frac{1}{3}(r - m)^3 = N \log\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right),$$

et enfin

$$(7)\quad Y-y_0=r-\sqrt[3]{(r-m)^3+3N\log\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)}.$$

La fonction de m et de $x-x_0$ ainsi définie n'a évidemment de points critiques que ceux pour lesquels on aurait

$$1-\frac{x-x_0}{r}=0,\qquad \text{d'où}\qquad x-x_0=r$$

ou

$$(r-m)^3+3N\log\left(1-\frac{x-x_0}{r}\right)=0,$$

d'où

$$x-x_0=r-re^{-\frac{(r-m)^3}{3N}}.$$

Si donc on assujettit m et $x-x_0$ aux conditions suivantes (où q désigne une quantité positive $<r$)

$$m \overline{\overline{<}} q,$$
$$|x-x_0|<r-re^{-\frac{(r-q)^3}{3N}},$$

$Y-y_0$ restant monodrome et continu pour tous les systèmes de valeurs considérés, sera développable en une série procédant suivant les puissances de m et de $x-x_0$ et convergente dans les limites ci-dessus.

Cette série se déduirait d'ailleurs de la série (4), qui donne $y-y_0$, en remplaçant k, l par m et les coefficients $c_{\lambda\mu\nu}$ par une limite supérieure de leurs modules. On obtiendra une limite supérieure de la somme des modules de ses termes, et *a fortiori* une limite supérieure du module de $y-y_0$, en remplaçant m par q, et $x-x_0$ par son module dans la série, ou dans l'expression équivalente (7). Donc

$$|y-y_0| \overline{\overline{<}} r-\sqrt[3]{(r-q)^3+3N\log\left[1-\frac{|x-x_0|}{r}\right]},$$

et l'on obtiendra la même limite pour le module de $z-z_0$.

Si nous supposons maintenant que q tende vers zéro, la limite du module de $x - x_0$, en deçà de laquelle la convergence est assurée, tendra vers la quantité fixe

$$r - re^{-\frac{r^3}{3N}},$$

que nous désignerons par ρ. Et, si $|x - x_0|$ est assujetti à rester $< \rho - \delta$, δ étant une quantité positive quelconque, $|y - y_0|$ et $|z - z_0|$ resteront constamment moindres que $r - \varepsilon$, ε étant une quantité positive, déterminée par la relation

$$\varepsilon = \sqrt[3]{r^3 + 3N \log\left(1 - \frac{\rho - \delta}{r}\right)}.$$

Nous obtenons donc, comme conséquence de toute cette analyse, le théorème suivant :

Les équations (1) *admettent un système d'intégrales* y, z *qui se réduisent à* y_0, z_0, *pour* $x = x_0$. *Ces intégrales et leurs dérivées successives par rapport aux paramètres* y_0, z_0, *sont développables suivant les puissances entières et positives de* $x - x_0$, *en séries convergentes, tant que le module de* $x - x_0$ *sera moindre que la quantité fixe*

$$\rho = r\left(1 - e^{-\frac{r^3}{3N}}\right).$$

Enfin, si ce module reste inférieur à $\rho - \delta$, *les modules de* $y - y_0$ *et de* $z - z_0$ *resteront inférieurs à* $r - \varepsilon$, ε *étant une quantité positive, dépendante de* δ.

88. Les séries y, z, que nous venons de déterminer, constituent le seul système de solutions des équations différentielles qui se réduisent à y_0, z_0 pour $x = x_0$.

Pour le montrer, considérons une ligne rectifiable quelconque L partant du point x_0 et supposons x astreint à parcourir cette ligne. Soient Y, Z deux fonctions définies le long de cette ligne, lesquelles satisfassent aux équations dif-

férentielles, et se réduisent à y_0, z_0 pour $x = x_0$. Nous allons établir que dans toute la partie de L où $|x - x_0| < \rho - \eta$, η étant une quantité fixe quelconque, on aura nécessairement $Y = y$, $Z = z$.

On a, en effet, dans toute cette portion de L,

$$|y - y_0| < r - \delta, \qquad |z - z_0| < r - \delta,$$

δ désignant une quantité fixe qui dépend de η.

Les fonctions $Y - y$, $Z - z$ admettent, par hypothèse, les dérivées

$$f(x, Y, Z) - f(x, y, z),$$
$$f_1(x, Y, Z) - f_1(x, y, z).$$

Elles ne peuvent donc varier que d'une façon continue, et leurs modules, nuls au point x_0, origine de L, ne pourront atteindre ou dépasser un nombre ε (que nous supposerons infiniment petit) sans avoir franchi toutes les valeurs intermédiaires.

Or, tant que ces modules seront $< \varepsilon$, on aura

$$\begin{aligned} Y - y| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f(x, Y, Z) - f(x, y, z] \, dx \right| \\ &\leqq \frac{|Y - y| + |Z - z|}{\delta - \varepsilon} \; \frac{N}{(\delta - \varepsilon)^2 \eta} s, \end{aligned}$$

s désignant l'arc de L compris entre x_0 et x.

Si nous prenons $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$, cette expression sera moindre que

$$\frac{16 \varepsilon N}{\delta^3 \eta} s,$$

et si l'arc s est moindre que la quantité finie $\frac{\delta^3 \eta}{32 N}$, elle sera moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc sur cet arc fini s, $|Y - y|$ (et aussi $|Z - z|$) ne pour-

ront prendre aucune des valeurs comprises entre $\frac{\varepsilon}{2}$ et ε. Ils ne pourront donc atteindre ni dépasser la valeur ε; celle-ci étant arbitraire, ils seront nécessairement nuls.

On verra de même que $|Y-y|$ et $|Z-z|$ seront nuls le long d'un second arc de même longueur que le précédent et lui faisant suite; ils seront donc nuls tant que $|x-x_0|$ sera $<|\rho-\eta|$, et enfin, η étant arbitraire, tant que $|x-x_0|$ sera $<\rho$.

89. Nous avons établi, par ce qui précède, qu'il existe un système unique d'intégrales y, z satisfaisant aux conditions du problème. Elles sont données sous forme de séries, dont la convergence est assurée dans un cercle C de rayon ρ décrit autour du point x_0.

Si la variable x sort de ce cercle, on pourra déterminer leur valeur de proche en proche par le procédé déjà employé au Tome I pour suivre la marche d'une fonction analytique.

Supposons que x décrive une ligne L issue du point x_0; soient x_1 un point de cette ligne, encore situé à l'intérieur de C; y_1, z_1 les valeurs correspondantes de y, z. On aura $|x_1-x_0|<r$, $|y_1-y_0|<r$, $|z_1-z_0|<r$. Le point (x_1, y_1, z_1) sera donc un point ordinaire pour f, f_1 et les équations différentielles admettront un système de solutions se réduisant à y_1, z_1 pour $x=x_1$. Ces solutions seront des séries de puissances de $x-x_1$; soient C_1 leur cercle de convergence certaine; ρ_1 son rayon.

Ces éléments de fonction analytique ayant pour centre x_1 seront contigus à ceux qui avaient pour centre x_0 et permettront de déterminer les valeurs de y, z, de x_1 à x_2, x_2 étant un point choisi à volonté sur L, au delà de x_1, mais encore à l'intérieur de C_1.

Au delà de x_2, l'intégrale sera représentée par de nouveaux éléments de fonctions analytiques ayant leur centre en x_2.

En continuant ainsi, on finira par arriver jusqu'à l'extré-

mité de la ligne L, à moins que les rayons des cercles successifs ρ, ρ_1, ρ_2, ... ne forment une suite convergente; auquel cas il pourrait arriver que le procédé ne permette de suivre la marche des intégrales que jusqu'à un point déterminé x' de la ligne L.

Lorsque x se rapprochera de x' en suivant la ligne L, diverses circonstances pourront se présenter :

1° L'une au moins des deux quantités y, z ne tendra vers aucune limite, ou tendra vers l'infini;

2° Elles tendront toutes deux vers des limites finies y', z'. Dans ce cas (x', y', z') sera un point critique pour l'une au moins des deux fonctions f, f_1. En effet, si ce point était ordinaire, il lui correspondrait un certain rayon de convergence ρ'. Pour un point x_n infiniment voisin de x', pris sur la ligne L, y, z prendraient des valeurs y_n, z_n, infiniment voisines de y', z', et le rayon de convergence ρ_n, correspondant au point (x_n, y_n, z_n), serait infiniment voisin de ρ', au lieu d'être infiniment petit. On pourrait donc, au moyen du cercle C_n, déterminer les valeurs de y, z au delà du point x'.

Le procédé indiqué ci-dessus pour suivre la marche des intégrales est peu satisfaisant au point de vue pratique. En effet, chacune des valeurs successives y_1, z_1, y_2, z_2, ... exige, pour sa détermination, un développement en série, puis la sommation de cette série, opération compliquée et dont le résultat ne peut en général s'obtenir exactement. Or chaque erreur commise influe sur toute la suite des calculs. Il faudra donc opérer avec une très grande approximation, sous peine d'altérer beaucoup le résultat final.

90. La méthode dite des *quadratures*, que nous allons exposer, est sujette à ce même inconvénient, mais donne lieu à des calculs plus faciles. Voici en quoi elle consiste.

Marquons sur la ligne L une série de points $x_1, x_2, \ldots, x_m$ intermédiaires entre x_0 et X, et suffisamment voisins les uns des autres; puis, déterminons deux séries de quantités

$y'_1, y'_2, \ldots, y'_m$, Y' et $z'_1, z'_2, \ldots, z'_m$, Z' par les relations

$$\begin{aligned}
y'_{i+1} - y'_i &= f(x_i, y'_i, z'_i)\,(x_{i+1} - x_i),\\
Y' - y'_m &= f(x_m, y'_m, z'_m)\,(X - x_m),\\
z'_{i+1} - z'_i &= f_1(x_i, y'_i, z'_i)\,(x_{i+1} - x_i),\\
Z' - z'_m &= f_1(x_m, y'_m, z'_m)\,(X - x_m);
\end{aligned}$$

Y' et Z' seront des valeurs approchées de Y, Z, et l'erreur commise tendra vers zéro à mesure que l'on multipliera les points intermédiaires.

91. Nous justifierons cette méthode en cherchant une limite supérieure du module de l'erreur commise.

Soient ξ un point quelconque de la ligne L; η, ζ les valeurs correspondantes des intégrales.

On peut déterminer par hypothèse une quantité r, telle que f et f_1 soient développables suivant les puissances de $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ tant que les modules de ces quantités ne surpassent pas r. Ce nombre r est une fonction de ξ.

Si ξ se déplace sur L d'une manière continue, η, ζ variant aussi d'une manière continue, il en sera évidemment de même de r, lequel admettra un minimum différent de zéro. Soit R un nombre inférieur à ce minimum.

Si le point (x, y, z) se déplace, de telle sorte qu'on ait constamment sur la ligne L un point (ξ, η, ζ) fixe ou variable pour lequel on ait

$$|x - \xi| \leqq R, \qquad |y - \eta| \leqq R, \qquad |z - \zeta| \leqq R,$$

le point (x, y, z) décrira un ensemble borné et parfait où les fonctions f et f_1 restent finies et continues. Leur module ne pourra donc surpasser un nombre fixe μ.

D'ailleurs, si $|x - \xi|$, $|y - \eta|$, $|z - \zeta|$ sont $< R - \delta$, δ désignant un nombre fixe, on aura

$$|f(x, y, z) - f(\xi, \eta, \zeta)| \leqq \left[\frac{|x - \xi| + |y - \eta| + |z - \zeta|}{\delta}\right]\frac{N}{\delta^3},$$

N étant égal à $\dfrac{\mu(2\pi R)^3}{(2\pi)^3}$.

Cela posé, supposons les intervalles $x_0 x_1, \ldots, x_k x_{k+1}, \ldots$, tous $< \lambda$ et cherchons une limite supérieure des modules des différences entre les valeurs $y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k, \ldots, Y, Z$ des intégrales aux points $x_1, \ldots, x_k$, X et les valeurs approchées $y'_1, z'_1, \ldots, Y', Z'$. On a

$$y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y, z)\, dx,$$

$$\begin{aligned} y'_{k+1} - y'_k &= f(x_k, y'_k, z'_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y'_k, z'_k)\, dx, \end{aligned}$$

d'où

$$y'_{k+1} - y_{k+1} = y'_k - y_k - \int_{x_k}^{x_{k+1}} [f(x, y, z) - f(x_k, y'_k, z'_k)]\, dx.$$

Si nous supposons $|y'_k - y_k|$, $|z'_k - z_k|$ moindres que $R - \delta$, le module de la quantité entre parenthèses ne pourra surpasser

$$[\lambda + |y'_k - y_k| + |z'_k - z|] \frac{N}{\delta^4}$$

($|x - x_k|$ étant $< \lambda$); on aura donc

$$\begin{aligned} |y'_{k+1} - y_{k+1}| \overline{\overline{<}} |y'_k - y_k| \\ + [\lambda + |y'_k - y_k| + |z'_k - z_k|] \frac{N}{\delta^4} |x_{k+1} - x_k|. \end{aligned}$$

On a une inégalité semblable pour $z'_{k+1} - z'_k$.

Ajoutons ces deux relations, et posons pour abréger

$$|y'_k - y_k| + |z'_k - z_k| + \lambda = U_k,$$

nous obtiendrons la relation

$$U_{k+1} \overline{\overline{<}} U_k \left[1 + \frac{2N}{\delta^4} |x_{k+1} - x_k|\right] < U_k e^{\frac{2N}{\delta^4} |x_{k+1} - x_k|} < U_0 e^{\frac{2N}{\delta^4} s},$$

s désignant la longueur de la ligne L.

D'ailleurs, au point x_0, on a $y'_0 = y_0$, $z'_0 = z_0$, d'où $U_0 = \lambda$.

Chacune des quantités U_k et *a fortiori* chacune des quantités $|y'_k - y_k|$, $|z'_k - z_k|$ et enfin $|Y' - Y|$, $|Z' - Z|$ seront donc moindres que

$$\lambda e^{\frac{2N}{\delta^4}s},$$

si les précédentes sont moindres que $R - \delta$.

Cette condition sera satisfaite, si l'on prend λ assez petit pour satisfaire à l'inégalité

$$\lambda e^{\frac{2N}{\delta^4}s} < R - \delta.$$

La limite d'erreur ainsi trouvée tend bien vers zéro avec λ, comme nous voulions l'établir. La formule montre toutefois l'imperfection de la méthode, car l'arc s figure sous une exponentielle dans l'expression de l'erreur à craindre. Pour peu que le champ d'intégration soit étendu, il sera difficile de multiplier assez les points de division pour obtenir une approximation suffisante.

92. On a souvent avantage à transformer les équations différentielles proposées par un changement de variables, avant de recourir aux quadratures. Ce procédé constitue la *méthode de la variation des constantes*, dont nous allons indiquer le principe.

Soient

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = M + \alpha N, \qquad \frac{dz}{dx} = M' + \alpha N',$$

deux équations différentielles simultanées, où M, M', N, N' sont des fonctions de x, y, z et α une constante très petite. Proposons-nous de trouver un système d'intégrales y, z se réduisant à y_0, z_0 pour $x = x_0$.

Si l'on négligeait les termes en α, les équations se réduiraient à

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} = M, \qquad \frac{dz}{\partial x} = M'.$$

Supposons qu'on puisse déterminer, par un procédé quelconque, une intégrale générale de ces deux équations, représentée par deux équations

$$y = f(x, c, c'), \qquad z = \varphi(x, c, c'). \tag{10}$$

Le système d'intégrales particulières des équations (9) qui, pour $x = x_0$, se réduisent à y_0, z_0 sera fourni par ces équations, en y donnant à c, c' les valeurs c_0, c'_0 qui se déduisent des équations

$$y_0 = f(x_0, c_0, c'_0), \qquad z_0 = \varphi(x_0, c_0, c'_0).$$

Le système des intégrales particulières des équations (8) qu'on demande de trouver pourra de même être représenté par les équations (10), à la condition d'y considérer c, c' non plus comme des constantes, mais comme de nouvelles inconnues à déterminer en fonction de x. Ces nouvelles variables devront : 1° se réduire à c_0, c'_0 pour $x = x_0$; 2° satisfaire aux équations différentielles qu'on obtient en substituant dans les équations (8), à la place de y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, leurs valeurs

$$y = f(x, c, c'), \qquad z = \varphi(x, c, c'),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{dc}{dx} + \frac{\partial f}{\partial c'}\frac{dc'}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial c'}\frac{dc'}{dx}.$$

Les équations ainsi obtenues, résolues par rapport à $\frac{dc}{dx}$, $\frac{dc'}{dx}$, prendront la forme suivante :

$$\frac{dc}{dx} = P + \alpha Q, \qquad \frac{dc'}{dx} = P' + \alpha Q',$$

où P, Q, P', Q' sont des fonctions de x, c, c'.

Mais, si α était nul, c et c' seraient constants et leurs dérivées $\frac{dc}{dx}$, $\frac{dc'}{dx}$ se réduiraient à zéro. Donc P et P' sont nuls, et

les équations précédentes se réduisent à la forme plus simple

$$\frac{dc}{dx} = \alpha Q, \qquad \frac{dc'}{dx} = \alpha Q'.$$

On en déduit

$$c - c_0 = \alpha \int_{x_0}^{x} Q\, dx, \qquad c' - c_0 = \alpha \int_{x_0}^{x} Q'\, dx.$$

Les fonctions Q et Q′ contiennent, outre la variable d'intégration x, les fonctions inconnues c, c'. Mais les dérivées $\frac{dc}{dx}$, $\frac{dc'}{dx}$, contenant en facteur la quantité α supposée très petite, sont elles-mêmes très petites ; donc c, c' varient lentement, et, si le champ d'intégration n'est pas trop étendu, on pourra, sans altérer sensiblement les fonctions Q, Q′, y remplacer les variables c, c' par leurs valeurs initiales c_0, c'_0. On n'aura plus alors qu'à intégrer une fonction de x seul, ce qui est facile.

Si le résultat obtenu n'est pas jugé assez exact, on pourra remplacer c et c' dans les fonctions Q et Q′ par les valeurs fournies par cette première approximation, et recommencer l'intégration, et ainsi de suite.

93. Nous ne nous sommes occupé jusqu'à présent que de calculer les valeurs numériques des fonctions y, z pour une valeur donnée de la variable. Il nous reste à tirer les conséquences des résultats trouvés au point de vue des propriétés analytiques de ces fonctions intégrales.

Leurs valeurs finales Y, Z en un point quelconque X dépendent, d'après notre mode de procéder, non seulement de la position de ce point, mais de la ligne L par laquelle la variable x se rend de x_0 à X. Toutefois, si cette ligne est telle que la valeur x de la variable indépendante en chacun de ses points, associée aux valeurs correspondantes y, z des fonctions intégrales, donne un point ordinaire des fonctions f et f_1, on pourra lui faire subir une déformation infiniment petite quelconque sans altérer les valeurs finales Y et Z.

En effet, chacun de ces points x est le centre d'un cercle dans l'intérieur duquel y et z sont des fonctions monodromes de x. Le rayon R de ce cercle, variant d'une manière continue quand x se déplace sur L et n'étant jamais nul, ne pourra s'abaisser au-dessous d'un minimum fixe R'. Si l'on trace autour de chacun des points de L un cercle de rayon R', ces cercles recouvriront une région du plan dans l'intérieur de laquelle y et z seront évidemment monodromes. On n'altérera donc pas leurs valeurs finales Y, Z, si l'on remplace la ligne d'intégration L par une autre ligne quelconque L' ne sortant pas de cette région.

On pourra ainsi, sans altérer Y, Z, déformer la ligne L d'une façon continue, aussi longtemps que les valeurs simultanées de x, y, z correspondant à chacun de ses points seront un point ordinaire de f et de f_1. Mais, si L prend dans le cours des déformations une forme telle qu'en un de ses points x, y, z soient un système de valeurs critique pour l'une au moins des deux fonctions f et f_1, le raisonnement se trouvera en défaut et il pourra même arriver que dans cette position de la ligne d'intégration Y, Z ne puissent plus être calculés par nos procédés.

Les points pour lesquels les valeurs simultanées de x, y, z forment un système critique pour f ou f_1 pourront donc être (et seront le plus souvent) des points critiques pour les fonctions intégrales y, z.

94. Pour obtenir les éléments nécessaires à l'étude approfondie des fonctions intégrales, il resterait : 1° à déterminer la position de leurs points critiques ; 2° à étudier les variations de ces fonctions aux environs de ces points critiques.

Le premier de ces deux problèmes est malheureusement inabordable dans la plupart des cas ; car y et z figurant, ainsi que x, dans la définition de ces points, on n'a, en général, aucune méthode pour fixer leur position *a priori*. On ne pourra les connaître qu'après avoir achevé l'étude des intégrales, qu'ils auraient dû servir à faciliter. Il y a là un cercle

vicieux, qui constitue la principale difficulté du problème de l'intégration.

Suivant les circonstances, ces points seront isolés ou non; ils pourront même constituer des lignes entières, auquel cas les fonctions y, z n'auraient une existence définie que dans la région du plan que l'on peut atteindre, en partant du point initial x_0, sans traverser ces lignes critiques.

95. Il existe toutefois un cas extrêmement important, où l'on peut déterminer d'avance la position des points critiques: c'est celui où les seconds membres des équations différentielles sont linéaires par rapport aux fonctions inconnues.

Considérons, pour fixer les idées, un système de deux équations de ce genre

$$(11) \qquad \frac{dy}{dx} = \mathrm{A}y + \mathrm{B}z + \mathrm{C}, \qquad \frac{dz}{dx} = \mathrm{A}'y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C}',$$

où A, B, ..., C′ sont des fonctions de x. Soit x_0 un point ordinaire de ces fonctions; on aura, tant que le module de $x - x_0$ ne surpasse pas une quantité fixe r, des développements convergents

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \Sigma\, a_\alpha (x - x_0)^\alpha, \\ \mathrm{B} &= \Sigma\, b_\alpha (x - x_0)^\alpha, \\ \mathrm{C} &= \Sigma\, c_\alpha (x - x_0)^\alpha, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les coefficients a_α, b_α, ... ayant pour limite supérieure de leurs modules une expression de la forme $\frac{\mathrm{M}}{r^\alpha}$.

Cherchons un système d'intégrales

$$y = y_0 + \Sigma\, d_\lambda (x - x_0)^\lambda, \qquad z = z_0 + \Sigma\, e_\lambda (x - x_0)^\lambda,$$

qui, pour $x = x_0$, se réduisent à y_0, z_0. On déterminera les coefficients d, e en substituant ces valeurs dans les équations différentielles. Il viendra, en égalant les coefficients des

termes en $(x - x_0)^\lambda$,

$$(\lambda + 1) d_{\lambda+1} = a_0 d_\lambda + a_1 d_{\lambda-1} + \ldots + a_{\lambda-1} d_1 + b_0 e_\lambda + \ldots$$
$$+ b_{\lambda-1} e_1 + a_\lambda y_0 + b_\lambda z_0 + c_\lambda,$$
$$(\lambda + 1) e_{\lambda+1} = a'_0 d_\lambda + \ldots + a'_{\lambda-1} d_1 + b'_0 e_\lambda + \ldots$$
$$+ b'_{\lambda-1} e_1 + a'_\lambda y_0 + b'_\lambda z_0 + c'_\lambda.$$

Ces formules récurrentes donneront, pour les coefficients d, e, des expressions de la forme

$$d_\lambda = F_\lambda, \qquad e_\lambda = \Phi_\lambda,$$

où F_λ et Φ_λ sont des polynomes linéaires et homogènes par rapport à y_0, z_0 et aux coefficients c, c', les coefficients de chacune de ces quantités étant des polynomes à coefficients positifs, formés avec les a, b, a', b'.

Nous obtenons ainsi cet important résultat, que *les intégrales cherchées y, z dépendent linéairement de y_0, z_0.*

96. Cherchons le rayon de convergence certaine de ces séries. Le cas le plus défavorable est évidemment celui où les coefficients a, b, c, a', b', c' sont remplacés par les limites supérieures de leurs modules, et y_0, z_0 par une limite supérieure m de leur module. Dans cette hypothèse, les équations différentielles se réduisent à

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{M}{1 - \dfrac{x - x_0}{r}} (y + z + 1).$$

On en déduit

$$z = y \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{M}{1 - \dfrac{x - x_0}{r}} (2y + 1),$$

et en intégrant, après séparation des variables,

$$\frac{1}{2} \log \frac{2y + 1}{2m + 1} = - M r \log\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right),$$
$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2m + 1)\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)^{-2Mr}.$$

Cette fonction n'a qu'un point critique, $x = x_0 + r$. La convergence est donc assurée dans tout le cercle de rayon r.

Donc, quels que soient y_0, z_0, les intégrales y, z seront continues et monodromes dans toute région du plan où les fonctions A, B, C, A′, B′, C′ sont elles-mêmes continues et monodromes, et ne pourront avoir d'autres points critiques que ceux de ces fonctions. Encore n'est-il pas certain que ces derniers points soient critiques pour y et z.

97. Les exemples suivants, que nous empruntons à *Briot* et *Bouquet*, montrent comment on peut effectuer l'étude des intégrales, aux environs de leurs points critiques.

Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{12}$$

$f(x, y)$ s'annulant pour $x = 0$, $y = 0$ et admettant ces valeurs comme point ordinaire.

Cherchons celles de ses intégrales qui s'annulent pour $x = 0$.

Si nous considérons x comme fonction de y, il viendra

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y). \tag{13}$$

Cette équation admet une seule intégrale monodrome x, s'annulant pour $y = 0$. Sa dérivée s'annulant également, elle sera développable en une série de la forme

$$x = \sum_{2}^{\infty} a_\alpha y^\alpha.$$

Supposons que a_m soit le premier coefficient de la série qui ne s'annule pas. L'équation précédente, résolue par rapport à y, donnera un résultat de la forme

$$y = \lambda_1 x^{\frac{1}{m}} + \lambda_2 x^{\frac{2}{m}} + \ldots.$$

Cette fonction a m valeurs correspondantes aux diverses déterminations du radical $x^{\frac{1}{m}}$; elles se permutent les unes dans les autres lorsqu'on tourne autour du point $x = 0$, qui sera un point critique algébrique.

Le cas où tous les coefficients a_α s'annuleraient à la fois échappe à l'analyse précédente. Il faut et il suffit, pour cela, que $x = 0$ soit une solution de l'équation (13) et, par suite, que $f(x, y)$ contienne x en facteur. Dans ce cas l'équation $x = 0$, ne contenant pas y, ne permettra pas de tirer la valeur de y en fonction de x. L'équation (12) n'admettra donc aucune intégrale qui s'annule avec x.

98. Considérons, en second lieu, l'équation différentielle

$$x\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{14}$$

où $f(x, y)$ a la même forme que dans l'exemple précédent. Cherchons à déterminer les intégrales de cette équation, qui s'annulent pour $x = 0$.

Soit

$$f(x, y) = \lambda y + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + \ldots.$$

Substituons, dans l'équation différentielle, à la place de y, une série

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots, \tag{15}$$

et égalons les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres. Nous obtiendrons une suite d'équations de la forme

$$\mu c_\mu = \lambda c_\mu + \varphi_\mu,$$

où φ_μ est un polynome à coefficients entiers positifs, formé avec les coefficients a, et les quantités $c_1, \ldots, c_{\mu-1}$.

Si λ n'est pas un entier positif, on pourra résoudre ces équations par rapport aux c, et l'on en déduira un résultat de la forme

$$c_\mu = \psi_\mu,$$

ψ_μ étant une somme de termes ayant pour numérateur un produit de coefficients a, multiplié par un entier positif, et pour dénominateur un produit de facteurs de la forme $\mu - \lambda$. Ces derniers facteurs sont tous différents de zéro, et leur module croît indéfiniment quand μ augmente. On pourra donc déterminer une limite inférieure l de leurs modules.

Cela posé, la série (15) satisfait à l'équation (14); mais il faut prouver qu'elle a un rayon de convergence certaine. Or on accroîtra les modules de ses termes, en y remplaçant, d'une part, les coefficients $a_{\alpha\beta}$ par les quantités $\frac{M}{r^{\alpha+\beta}}$, limites supérieures de leurs modules, et, d'autre part, les facteurs en dénominateur par l, limite inférieure de leurs modules. Mais la nouvelle série, ainsi obtenue, est évidemment celle que l'on trouverait en cherchant à développer la racine infiniment petite de l'équation algébrique

$$ly = \frac{M}{r}x + \frac{M}{r^2}x^2 + \frac{M}{r^2}xy + \ldots$$

et converge pour des valeurs de x suffisamment petites.

99. Pour reconnaître s'il existe d'autres intégrales que la série que nous venons de déterminer, et s'annulant également pour $x = 0$, posons

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + z,$$

z étant une nouvelle variable. Substituant cette valeur dans l'équation différentielle et supprimant les termes indépendants de z, qui se détruisent, nous obtiendrons l'équation transformée

$$(16) \qquad x\frac{dz}{dx} = z(\lambda + b_{10}x + b_{01}z + b_{10}x^2 + \ldots).$$

Nous avons à chercher une solution z de cette équation, qui ne soit pas constamment nulle aux environs du point $x = 0$,

mais qui tende vers zéro lorsque x tend vers zéro suivant une loi convenable.

Soient donc

x_0 un point voisin de l'origine ;

$z_0 \gtrless 0$ la valeur correspondante de z;

L une ligne allant de x_0 à l'origine, et telle que z tende vers zéro quand x décrit cette ligne.

L'équation (16) pourra s'écrire

$$\frac{dz}{z(\lambda + b_{01}z + b_{02}z^2 + \ldots)} - \frac{dx}{x} = \frac{b_{10} + b_{20}x + b_{11}z + \ldots}{\lambda + b_{01}z + b_{02}z^2 + \ldots} dx$$

ou, en supposant que λ ne soit pas nul et développant en série le dénominateur de dz,

$$\frac{dz}{\lambda z} - \frac{dx}{x} = (c_0 + c_1 z + \ldots) dz + \frac{b_{10} + b_{20}x + \ldots}{\lambda + b_{01}z + \ldots} dx$$

et, en intégrant de x_0 à x le long de la ligne L,

$$\frac{1}{\lambda} \log \frac{z}{z_0} - \log \frac{x}{x_0}$$
$$= \int_{z_0}^{z} (c_0 + c_1 z + \ldots) dz + \int_{x_0}^{x} \frac{b_{10} + b_{20}x + \ldots}{\lambda + b_{01}z + \ldots} dx.$$

Si x tend vers zéro, z tendant également vers zéro, les intégrales du second membre tendront vers des limites finies et déterminées. Le second membre sera donc de la forme $A + \varepsilon$, A étant une constante et ε s'annulant avec x. On aura par suite

$$\frac{1}{\lambda} \log \frac{z}{z_0} - \log \frac{x}{x_0} = A + \varepsilon;$$

d'où, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\frac{z}{x^\lambda} = \frac{z_0}{x_0^\lambda} e^{\lambda(A+\varepsilon)}, \qquad \lim \frac{z}{x^\lambda} = \frac{z_0}{x_0^\lambda} e^{\lambda A} = c,$$

c désignant une quantité finie et différente de zéro.

Pour que z tende vers zéro, il est donc nécessaire que x^λ tende vers zéro en même temps que x. Discutons cette condition.

Soient

$$\lambda = p + qi, \qquad x = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

on aura

$$x^\lambda = e^{\lambda \log x} = e^{(p+qi)(\mathrm{Log}\rho + i\theta)},$$

$$|x^\lambda| = e^{p\,\mathrm{Log}\rho - q\theta}.$$

Quand x tend vers zéro, son module ρ tend vers zéro, son argument θ pouvant varier d'une manière arbitraire, suivant la nature de la ligne suivie L. Pour que x^λ tende vers zéro, il faut et il suffit que $p\,\mathrm{Log}\rho - q\theta$ tende vers $-\infty$.

Soit d'abord $q = 0$. Cette condition sera toujours satisfaite, quelle que soit la ligne L, si p est positif; mais elle ne pourra jamais l'être si p est négatif. Dans ce dernier cas, il n'existera donc aucune intégrale de l'espèce cherchée.

Si q n'est pas nul, on pourra toujours déterminer θ en fonction de ρ, de telle sorte que la condition

$$\lim(p\,\mathrm{Log}\rho - q\theta) = -\infty$$

soit satisfaite ou ne le soit pas. Mais ici il convient encore de distinguer le cas où p est positif de celui où il est négatif.

Si $p > 0$, la condition précédente sera satisfaite toutes les fois que λ sera assujetti à varier entre des limites finies. Pour que x^λ ne tendît pas vers zéro avec x, il faudrait donc que la ligne L fût une spirale décrivant un nombre infini de révolutions autour de l'origine.

Si $p < 0$, le contraire aura lieu et x^λ ne pourra tendre vers zéro avec x que si L est une semblable spirale.

100. Ces préliminaires posés, nous allons démontrer qu'à chaque valeur de la constante c correspond une intégrale de l'équation (16), développable en une série à double entrée suivant les puissances de x et de x^λ et convergente tant que ces deux quantités seront suffisamment petites.

Posons en effet

$$z = x^{\lambda} u ;$$

l'équation (16) deviendra

$$(17) \qquad x \frac{du}{dx} = u(b_{10} x + b_{01} x^{\lambda} u + b_{20} x^2 + \ldots).$$

Substituons pour u une série à double entrée

$$u = \Sigma c_{\mu\nu} x^{\mu+\lambda\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, il viendra

$$(\mu + \lambda\nu) c_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

$F_{\mu\nu}$ étant un polynome à coefficients positifs, formé avec ceux des b et des c où la somme des indices est moindre que $\mu + \nu$.

Celle de ces équations qui donnerait c_{00} est identique ; ce coefficient reste donc indéterminé, et l'on pourra lui assigner la valeur donnée c.

La résolution des autres équations donnera

$$c_{\mu\nu} = \varphi_{\mu\nu},$$

$\varphi_{\mu\nu}$ étant un polynome dont chaque terme est un produit de facteurs b, multiplié par une puissance de c et par un entier positif et divisé par un produit de facteurs de la forme $s + \lambda t$, s et t étant des entiers positifs, dont l'un peut être nul.

Le module des facteurs $s + \lambda t = s + pt + iqt$ est différent de zéro et croît indéfiniment avec s ou t (l'hypothèse $q = 0$, $p < 0$ étant exclue par ce qui précède). On pourra donc trouver une limite inférieure m, telle que l'on ait

$$|s + \lambda t > m$$

pour toute valeur de s et de t.

La série que nous venons de déterminer est une solution de l'équation différentielle (17) satisfaisant aux conditions posées, solution admissible tant que la série sera convergente. Or on diminue évidemment la convergence en remplaçant partout les facteurs $s + \lambda t$ par m, c par son module C et les coefficients $b_{\alpha\beta}$ par les quantités $\frac{M}{r^{\alpha+\beta}}$, limites supérieures de leur module. Or on voit sans peine que la nouvelle série obtenue est celle que l'on trouverait en cherchant à développer suivant les puissances de x et de x^λ celle des deux racines de l'équation

$$\begin{aligned} mv &= m\mathrm{C} + v\left(\frac{\mathrm{M}}{r}x + \frac{\mathrm{M}}{r}x^\lambda v + \frac{\mathrm{M}}{r^2}x^2 + \ldots\right) \\ &= m\mathrm{C} - \mathrm{M}v\left[1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x^\lambda v}{r}\right)}\right] \end{aligned}$$

qui se réduit à C pour $x = 0$, $x^\lambda = 0$.

Mais cette racine est évidemment continue et monodrome tant que les modules de x et de x^λ resteront au-dessous d'une certaine limite. Donc, tant que cette condition sera satisfaite, v sera développable en série convergente suivant les puissances de x et de x^λ, et la série qui donne u sera *a fortiori* convergente.

101. Supposons maintenant λ entier et positif. S'il est > 1, posons

$$y = \frac{a_{10}}{1 - \lambda}x + xz.$$

L'équation transformée en z, divisée par le facteur commun x, prendra la forme

$$x\frac{dz}{dx} = (\lambda - 1)z + b_{10}x + b_{20}x^2 + b_{11}xz + \ldots$$

et sera semblable à la primitive, le premier coefficient λ étant diminué d'une unité.

Par une série de transformations analogues nous pourrons réduire ce coefficient à l'unité. Reste donc à considérer l'équation

$$(18)\qquad x\frac{dy}{dx} - y + a_{10}x = a_{20}x^2 + a_{11}xy + \ldots.$$

Nous allons démontrer qu'elle admet pour intégrale une série procédant suivant les puissances entières de x et $x\log x$ et contenant une constante arbitraire.

Désignons à cet effet par A_{10}, ..., $A_{\alpha\beta}$, ... les modules des coefficients a_{10}, ..., $a_{\alpha\beta}$, ...; par λ une quantité positive un peu moindre que l'unité, et considérons d'abord, au lieu de l'équation proposée, la suivante :

$$(19)\qquad x\frac{dy}{dx} - \lambda y + A_{10}x = A_{20}x^2 + A_{11}xy + \ldots.$$

D'après ce que nous venons de voir, elle admet comme intégrale une série procédant suivant les puissances de x et de x^λ et contenant une constante arbitraire.

Posons

$$x^\lambda = x + (1-\lambda)t.$$

Par cette substitution, nous obtiendrons, comme nouvelle forme de cette intégrale, une série procédant suivant les puissances de x et de t, et qui sera encore convergente quand ces variables seront assez petites. Pour calculer directement les coefficients de cette nouvelle série, nous remarquerons qu'on a

$$\lambda x^{\lambda-1} = 1 + (1-\lambda)\frac{dt}{dx};$$

d'où

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{\lambda x^\lambda - x}{1-\lambda} = \lambda t - x.$$

Posons maintenant

$$(20)\qquad y = C_{10}x + C_{01}t + \ldots + C_{\mu\nu}x^\mu t^\nu + \ldots = \Sigma C_{\mu\nu}x^\mu t^\nu;$$

on aura

$$x\frac{dy}{dx} = \sum C_{\mu\nu} x\left[\mu x^{\mu-1} t^{\nu} + \nu x^{\mu} t^{\nu-1}\frac{dt}{dx}\right]$$
$$= \sum C_{\mu\nu}[(\mu+\lambda\nu)x^{\mu}t^{\nu} - \nu x^{\mu+1}t^{\nu-1}].$$

Substituons ces valeurs de y et $x\frac{dy}{dx}$ dans l'équation proposée et égalons les coefficients des mêmes puissances de x et de t dans les deux membres. Les termes en t se détruisent identiquement; ceux en x donneront

$$(1-\lambda)C_{10} - C_{01} + A_{10} = 0.$$

Enfin on aura généralement, lorsque $\mu + \nu > 1$,

$$(21)\qquad (\mu + \lambda\nu - \lambda)C_{\mu\nu} - (\nu+1)C_{\mu-1,\nu+1} = \varphi_{\mu\nu},$$

$\varphi_{\mu\nu}$ étant le coefficient du terme en $x^{\mu}t^{\nu}$ dans le second membre de l'équation. D'ailleurs on voit sans peine que $\varphi_{\mu\nu}$ est une somme de termes de la forme

$$KA_{\alpha\beta}C_{\mu_1\nu_1}C_{\mu_2\nu_2}\ldots C_{\mu_\beta\nu_\beta},$$

où K est un coefficient binomial et où les indices α, β, μ_1, ν_1, ... satisfont aux relations

$$\alpha + \beta \geqq 2,$$
$$\mu_1 + \ldots + \mu_\beta = \mu - \alpha,$$
$$\nu_1 + \ldots + \nu_\beta = \nu.$$

Ces équations permettent de déterminer de proche en proche tous les coefficients $C_{\mu\nu}$ en fonction de C_{10}, qui reste arbitraire.

Ce premier coefficient étant supposé réel et positif, la résolution des équations précédentes donnera pour $C_{\mu\nu}$ une expression de la forme

$$C_{\mu\nu} = F_{\mu\nu},$$

$F_{\mu\nu}$ étant une somme de termes positifs dont chacun est le produit : 1° d'une puissance de C_{10}; 2° d'une puissance de

$C_{01} = A_{10} + (1 - \lambda)C_{10}$; 3° d'un produit de coefficients $A_{\alpha\beta}$; 4° d'un facteur numérique indépendant de λ; le tout divisé par un produit de facteurs de la forme

$$\mu + \lambda\nu - \lambda, \qquad \mu' + \lambda\nu' - \lambda, \qquad \ldots.$$

On remarquera d'ailleurs que le nombre de ces facteurs, qui figurent ainsi au dénominateur de chaque terme, ne peut surpasser $2\mu + \nu - 1$.

Supposons en effet que ce théorème soit vrai pour tous ceux des coefficients dont le premier indice est $< \mu$ et pour tous ceux dont le premier indice est égal à μ et le second indice $< \nu$. Si nous substituons pour ces coefficients leurs valeurs dans l'équation (21), elle donnera pour $C_{\mu\nu}$ une somme de termes dont le premier contiendra en dénominateurs un nombre de facteurs au plus égal à

$$1 + 2(\mu - 1) + \nu + 1 - 1 = 2\mu + \nu - 1.$$

Dans chacun des autres termes, le nombre des facteurs en dénominateur sera au plus égal à

$$1 + 2\mu_1 + \nu_1 - 1 + \ldots + 2\mu_\beta + \nu_\beta - 1 = 1 + 2(\mu - \alpha) + \nu - \beta$$
$$\leqq 2\mu + \nu - 1 - \alpha.$$

D'ailleurs la proposition se vérifie immédiatement pour C_{02}; donc elle est vraie généralement.

Cela posé, faisons tendre λ vers l'unité.

L'expression $t = \dfrac{x^\lambda - x}{1 - \lambda}$ aura pour limite celle-ci :

$$t' = -\left(\frac{dx^\lambda}{d\lambda}\right)_{\lambda=1} = x \log x,$$

laquelle satisfait à l'équation

$$x\frac{dt'}{dx} = t' - x.$$

L'équation (19) sera changée en

$$x\frac{dy}{dx} - y + A_{01}x = A_{20}x^2 + A_{11}xy + \ldots,$$

et, si l'on cherche à satisfaire à cette dernière par une série de la forme

$$(22) \qquad y = C_{10}x + C'_{01}t' + \ldots + C'_{\mu\nu}x^{\mu}t'^{\nu} + \ldots,$$

les nouveaux coefficients C' seront évidemment donnés par les mêmes formules que les C, sauf le remplacement de λ par l'unité.

Pour montrer la convergence de cette nouvelle série, comparons un terme quelconque T' de $C'_{\mu\nu}$ au terme correspondant T de $C_{\mu\nu}$. Les facteurs $A_{10} + (1 - \lambda)C_{10}$, qui figuraient au numérateur de T sont remplacés par la quantité moindre A_{10}. Quant aux facteurs $\mu + \lambda\nu - \lambda$ du dénominateur, ils sont remplacés par des facteurs $\mu + \nu - 1$, qui leur seront au moins égaux si ν n'est pas nul. D'autre part, si ν est nul, auquel cas $\mu \geqq 2$, on aura

$$\frac{\mu - \lambda}{\mu - 1} \leqq 2 - \lambda.$$

Le nombre total des facteurs du dénominateur étant

$$\leqq 2\mu + \nu - 1 < 2(\mu + \nu),$$

on aura donc

$$\frac{T'}{T} < (2 - \lambda)^{2(\mu+\nu)}$$

et, par suite,

$$\frac{C'_{\mu\nu}}{C_{\mu\nu}} < (2 - \lambda)^{2(\mu+\nu)}.$$

Cela posé, soit r le rayon d'un cercle dans lequel la série (20) soit convergente : on aura, en désignant par M une constante,

$$C_{\mu\nu} < \frac{M}{r^{\mu+\nu}}$$

et, par suite,

$$C'_{\mu\nu} \leqq \frac{M}{[(2 - \lambda)^{-2}r]^{\mu+\nu}}.$$

La série (22) sera donc convergente dans un cercle de rayon $(2 - \lambda)^{-2}r$.

Revenons enfin à l'équation primitive (18) et cherchons à y satisfaire par une série

$$y = c_{01}x + c'_{01}t' + \ldots + c'_{\mu\nu}x^{\mu}t'^{\nu} + \ldots,$$

c_{01} étant une quantité arbitraire ayant pour module C_{01}. Il est clair que les coefficients $c'_{\mu\nu}$ seront déterminés par les mêmes formules que les coefficients $C'_{\mu\nu}$, sauf le remplacement des quantités

$$C_{10},\quad A_{10},\quad \ldots,\quad A_{\alpha\beta},\quad \ldots$$

par

$$c_{10},\quad a_{10},\quad \ldots,\quad a_{\alpha\beta}$$

et que les coefficients $c'_{\mu\nu}$ auront les $C'_{\mu\nu}$ pour limites supérieures de leurs modules. La nouvelle série sera donc convergente pour des valeurs assez petites de x et de t'.

102. Considérons, en dernier lieu, une équation algébrique irréductible

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

entre y et sa dérivée, et de degré n par rapport à celle-ci.

Une intégrale y de cette équation sera complètement définie si l'on donne pour la valeur initiale x_0 de la variable indépendante x : 1° la valeur initiale y_0 de y, laquelle peut être prise arbitrairement; 2° la valeur initiale de $\frac{dy}{dx}$, laquelle devra être choisie parmi les n racines de l'équation

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y_0\right) = 0.$$

Si l'on fait décrire à x une ligne continue quelconque, y et $\frac{dy}{dx}$ varieront également d'une manière continue tant que x ne passera par aucun point critique.

Soit ξ l'une de ces valeurs critiques. Nous avons vu que lorsque x tend vers ξ trois cas peuvent se présenter :

1° y ne tend vers aucune limite;

2° y tend vers une valeur finie η pour laquelle l'équation

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \eta\right) = 0$$

admette une racine multiple ou infinie, et $\frac{dy}{dx}$ tend vers cette racine;

3° y tend vers ∞.

La première de ces hypothèses doit être rejetée. On pourrait, en effet, assigner à x une valeur ξ' plus voisine de ξ qu'une quantité arbitraire ε et telle : 1° que la valeur correspondante η' de y eût son module au plus égal à une quantité fixe Δ; 2° que la distance du point η' à chacun des points η pour lesquels l'équation $f = 0$ donne pour $\frac{dy}{dx}$ une racine multiple ou infinie soit au moins égale à une quantité fixe δ.

Soit r une quantité positive moindre que δ.

Pour toute valeur η' de y qui satisfait à ces conditions, les m racines de l'équation $f = 0$ seront développables en série convergente suivant les puissances de $y - \eta'$ dans l'intérieur d'un cercle de rayon r décrit autour de η' et sur sa circonférence. Elles resteront donc finies et continues. La région du plan couverte par ces cercles est d'ailleurs bornée et parfaite. Le module d'aucune de ces racines ne pourra donc surpasser un maximum fini M.

Cela posé, l'élément de fonction analytique, qui permet de déterminer la variation de y au delà du point ξ', a un rayon de convergence certaine, qui peut être assigné en fonction des deux nombres fixes r et M et qui, par suite, est lui-même un nombre fixe, plus grand que l'infiniment petit ε, qui représente la distance des points ξ' et ξ. Ce dernier point ne peut donc être critique, comme nous l'avions supposé.

Nous connaissons donc *a priori* les valeurs de y, finies ou infinies, qui correspondent aux points critiques.

103. Soit η l'une de ces valeurs, supposée finie. Nous savons qu'en faisant tendre y vers η suivant une ligne con-

venable, nous pourrons faire en sorte que $\frac{dy}{dx}$, ou son inverse $\frac{dy}{dx}$, tende vers l'une quelconque des n valeurs fournies par l'équation

$$f\left(\frac{dy}{dx}, \eta\right) = 0.$$

Chacune de ces racines peut être développée aux environs du point η suivant les puissances croissantes, entières ou fractionnaires de $y - \eta$.

Soit

$$(23) \qquad \frac{dx}{dy} = A(y-\eta)^{\frac{\alpha}{p}} + B(y-\eta)^{\frac{\beta}{p}} + \ldots,$$

l'un de ces développements; p, α, β, ... étant des entiers sans diviseur commun.

Si $p + \alpha \leqq 0$, l'intégrale du second membre, prise de y à η, aura une valeur infinie; y ne pourra donc atteindre la valeur η $\left(\text{avec cette détermination de } \frac{dy}{dx}\right)$ pour aucune valeur finie de x.

Si $p + \alpha > 0$, l'intégration donnera, en désignant par ξ la valeur finale de x,

$$(24) \quad x - \xi = \frac{pA}{p+\alpha}(y-\eta)^{\frac{p+\alpha}{p}} + \frac{pB}{p+\beta}(y-\eta)^{\frac{p+\beta}{p}} + \ldots,$$

et ξ pourra être un point critique de l'intégrale y.

Pour nous en assurer, développons, suivant les puissances croissantes de $x - \xi$, celles des valeurs de $(y-\eta)^{\frac{1}{p}}$ qui s'annulent avec $x - \xi$. Ces développements seront de la forme

$$(y-\eta)^{\frac{1}{p}} = c_1 u + c_2 u^2 + \ldots,$$

où u représente successivement les diverses valeurs du radical $(x-\xi)^{\frac{1}{p+\alpha}}$.

On en déduit

$$y - \eta = (c_1 u + c_2 u^2 + \ldots)^p = c'_p u^p + c'_{p+1} u^{p+1} + \ldots.$$

On voit par là que le point ξ est en général un point critique algébrique pour l'intégrale y. Ce sera un point ordinaire, au moins lorsqu'on y arrive avec la détermination de $\frac{dy}{dx}$ que nous avons adoptée, si le développement de y ne contient que des puissances de u multiples de $p + \alpha$.

Ce cas se présentera si $p + \alpha = 1$. Cette condition est d'ailleurs nécessaire. Supposons en effet qu'on obtienne, pour $y - \eta$, un développement suivant les puissances entières et positives de $x - \xi$, tel que

$$y - \eta = c_q (x - \xi)^q + c_{q+1}(x - \xi)^{q+1} + \ldots.$$

On en déduira, en renversant la série,

$$x - \xi = c_q^{-\frac{1}{q}} (y - \eta)^{\frac{1}{q}} + d(y - \eta)^{\frac{2}{q}} + \ldots.$$

Comparant avec le développement (24), on voit qu'on doit avoir

$$p = \mu q, \qquad p + \alpha = \mu, \qquad p + \beta = \mu\nu, \qquad \ldots,$$

$\mu, \nu, \ldots$ étant des entiers. Mais $p, p + \alpha, p + \beta, \ldots$ n'ayant pas de facteur commun, on aura $\mu = 1$, d'où $p + \alpha = 1$.

Considérons maintenant une valeur infinie de y. Posant $y = \frac{1}{z}$, nous obtiendrons une équation transformée

$$0 = f\left(-\frac{dz}{z^2\, dx}, \frac{1}{z}\right) = f_1\left(\frac{dx}{dz}, z\right),$$

et nous développerons les diverses valeurs de $\frac{dx}{dz}$ suivant les puissances croissantes de z. Soit

$$\frac{dx}{dz} = \mathrm{A} z^{\frac{\alpha}{p}} + \mathrm{B} z^{\frac{\beta}{p}} + \ldots \tag{25}$$

un de ces développements. Intégrons-le de z à zéro. Si $p + \alpha \lesseqgtr 0$, l'intégrale du second membre sera infinie. Donc z

ne pourra devenir nul ou y infini, avec cette détermination de la dérivée, pour aucune valeur finie de x.

Si $p+\alpha>0$, on aura, en appelant ξ la valeur de x pour $z=0$,

$$x-\xi=\frac{p\mathrm{A}}{p+\alpha}z^{\frac{p+\alpha}{p}}+\frac{p\mathrm{B}}{p+\beta}z^{\frac{p+\beta}{p}}+\ldots;$$

d'où, en posant $(x-\xi)^{\frac{1}{p+\alpha}}=u$,

$$z=c'_p u^p+c'_{p+1}u^{p+1}+\ldots,$$

et enfin

$$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{c'_p}u^{-p}+du^{-p+1}+\ldots.$$

Donc ξ sera, en général, un point critique algébrique pour la fonction y, lorsqu'on y arrive avec la détermination de la dérivée que nous considérons. Ce sera un pôle si $p+\alpha=1$.

Nous avons ainsi déterminé la manière dont la fonction y se comporte aux environs de chaque point critique; mais la position de ces points critiques reste encore inconnue.

104. Considérons, en particulier, le cas où y est une fonction uniforme. D'après ce qui précède, ce cas est caractérisé par la condition que, dans chacun des développements précédents, $p+\alpha$ est nul ou négatif ou égal à l'unité.

Si cette condition est remplie, y, n'ayant que des pôles, sera une fonction méromorphe. Nous allons montrer qu'on peut la déterminer par des opérations purement algébriques.

En effet, $\frac{dx}{dy}$ étant une fonction algébrique de y, x considéré comme fonction de y sera une intégrale abélienne et aura, pour chaque valeur Y de y, n systèmes de valeurs

$$\mathrm{X}_1+2m\omega+2m'\omega'+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mathrm{X}_n+2m\omega+2m'\omega'+\ldots,$$

où m, m', ... sont des entiers et 2ω, $2\omega'$, ... des constantes

linéairement distinctes, chacun de ces systèmes de valeurs correspondant d'ailleurs à une des n déterminations de $\frac{dx}{dy}$ pour $y = Y$.

L'intégrale y, considérée comme fonction de x, admettra donc les périodes 2ω, $2\omega'$, ..., et, comme une fonction méromorphe ne peut avoir plus de deux périodes linéairement distinctes, trois cas pourront se présenter.

105. Premier cas : *Il existe deux périodes distinctes, 2ω et $2\omega'$.* — L'intégrale y sera une fonction méromorphe et doublement périodique d'ordre n.

A chaque valeur de y, finie ou infinie, et à chacune des déterminations de $\frac{dx}{dy}$ correspondront des valeurs finies de x, une dans chaque parallélogramme des périodes. Pour que ce cas se présente, il faudra donc que, dans chacun des développements (23) et (25), $p + \alpha$ soit égal à 1; car, s'il était nul ou négatif, ce développement ne pourrait fournir aucune valeur finie pour x.

Cela posé, soit $\wp(u, g_2, g_3)$ la fonction elliptique de Weierstrass qui admet les deux périodes 2ω et $2\omega'$. La fonction $\wp(x - x_0, g_2, g_3)$, elliptique du second ordre, sera liée à y par une équation algébrique

$$F[y, \wp(x - x_0, g_2, g_3)] = 0$$

du second degré en y et de degré n en $\wp(x - x_0, g_2, g_3)$. Il reste à déterminer : 1° les coefficients A, B, ... du polynome F; 2° les invariants g_2, g_3. On y parviendra en développant le premier membre suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et identifiant le résultat à zéro.

On a, en effet,

$$\wp(x - x_0, g_2, g_3) = \frac{1}{(x - x_0)^2} + \frac{1}{20} g_2 (x - x_0)^2 + \frac{1}{28} g_3 (x - x_0)^4 + \ldots$$

D'autre part, l'équation

$$f\left(\frac{dy}{dx}, y\right) = 0$$

donne, par différentiation, les dérivées successives de y exprimées au moyen de y et $\frac{dy}{dx}$. Or, pour $x = x_0$, on connaît la valeur y_0 de y et l'on a précisé, en outre, celle des racines de l'équation ci-dessus que l'on choisit comme valeur initiale de $\frac{dy}{dx}$. On peut donc déterminer, pour $x = x_0$, la valeur de y et de toutes ses dérivées et, par suite, développer y suivant la série de Taylor.

Les équations, fournies par cette identification à zéro, sont évidemment linéaires et homogènes par rapport aux coefficients A, B, ... et algébriques par rapport à g_2, g_3.

106. Deuxième cas : *Il n'existe qu'une seule période* 2ω. — Ceux des développements (25) dans lesquels $p + \alpha > 0$ donneront chacun une série de pôles de la fonction y, ayant pour formule générale $x_0 + 2m\omega$ (x_0 restant à déterminer). Aux environs de chacun d'eux, on aura pour y un développement de la forme

$$y = \frac{a_p}{(x - x_0 - 2m\omega)^p} + \ldots + \frac{a_1}{x - x_0 - 2m\omega} + a_0 + \ldots,$$

où p et les coefficients $a_p, \ldots, a_0, \ldots$ sont donnés par l'analyse précédente et ne dépendent pas de m.

Cela posé, l'expression

$$u = \frac{\frac{\pi i}{\omega} e^{\frac{\pi i x_0}{\omega}}}{e^{\frac{\pi i x}{\omega}} - e^{\frac{\pi i x_0}{\omega}}}$$

admet la période 2ω. Elle a pour pôles les points $x_0 + 2m\omega$, les résidus correspondants se réduisant à l'unité.

Sa dérivée d'ordre k admettra les mêmes pôles et sera, aux

environs du pôle $x_0 + 2m\omega$, de la forme

$$\frac{(-1)^k 1.2\ldots k}{(x - x_0 - 2m\omega)^{k+1}} + R,$$

R ne devenant plus infini.

On aura donc

$$y = a_1 u - a_2 \frac{du}{dx} + \ldots + a_p \frac{(-1)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} \frac{d^{p-1}u}{dx^{p-1}} + y',$$

le reste y' admettant la période 2ω et les pôles de y, sauf ceux de la série $x_0 + 2m\omega$. On trouvera de même

$$y' = S + y'',$$

S désignant une nouvelle fraction rationnelle formée avec $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$ et y'' une autre fonction périodique où une seconde série de pôles a disparu. Continuant ainsi, on pourra mettre y sous la forme

$$y = T + Y,$$

T étant une fraction rationnelle en $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$ et Y une fonction périodique qui n'a plus de points critiques à distance finie, et qui, par suite, sera développable par la formule de Fourier en une série procédant suivant les puissances positives et négatives de $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$. Or M. *Picard* a démontré que, si cette série contenait un nombre infini de termes, l'équation précédente donnerait en général, pour chaque valeur de y, une infinité de valeurs de $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$. Mais à chaque valeur de y correspondent n séries de valeurs de x; et, comme les diverses valeurs d'une même série donnent la même valeur pour $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$, cette quantité n'a que n valeurs pour chaque valeur de y. Donc la série Y sera limitée et y sera une fraction rationnelle en $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$; on aura donc

$$Py + Q = 0, \tag{26}$$

P et Q étant deux polynomes entiers en $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$, l'un de degré n, l'autre de degré $\leqq n$.

Les coefficients de ces deux polynomes se détermineront comme dans le cas précédent.

Il est aisé de trouver le critérium qui caractérise ce second cas. En effet, pour chaque valeur de y, l'équation (26) donne en général, pour $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$, n valeurs finies et différentes de zéro; d'où résultent pour x, n classes de valeurs $x_0 + 2m\omega, \ldots, x_{n-1} + 2m\omega$, $x_0, \ldots, x_{n-1}$ étant des quantités finies.

Il y a toutefois exception pour les deux valeurs (finies ou infinies) de y qui annulent le coefficient de $e^{\frac{n\pi i x}{\omega}}$ ou le terme indépendant de $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$; car ces valeurs donnent pour $e^{\frac{\pi i x}{\omega}}$ une racine, ou un groupe de racines, nulles ou infinies, auxquelles ne correspond aucune valeur finie de x.

Soit, par exemple, y_1 la valeur de y qui annule une ou plusieurs racines de l'équation. Soit q le nombre de ces racines. Aux environs du point y_1 on pourra les développer en séries de la forme

$$e^{\frac{\pi i x}{\omega}} = \beta_1 (y - y_1)^{\frac{1}{q}} + \beta_2 (y - y_1)^{\frac{2}{q}} + \ldots.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\pi i x}{\omega} &= \log\left[\beta_1 (y - y_1)^{\frac{1}{q}} + \beta_2 (y - y_1)^{\frac{2}{q}} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{q}\log(y - y_1) + \log\left[\beta_1 + \beta_2 (y - y_1)^{\frac{1}{q}} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{q}\log(y - y_1) + \gamma_1 + \gamma_2 (y - y_1)^{\frac{1}{q}} + \ldots; \end{aligned}$$

d'où, en prenant la dérivée par rapport à y,

$$(27) \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{\omega}{\pi i q}\,\frac{1}{y - y_1} + \frac{\gamma_2 \omega}{\pi i q}(y - y_1)^{-1+\frac{1}{q}} + \ldots.$$

Soit de même y_2 la valeur de y qui donne des racines infinies, en nombre q'. On pourra développer leurs inverses en séries de la forme

$$e^{-\frac{\pi i x}{\omega}} = \beta'_1 (y - y_2)^{\frac{1}{q'}} + \beta'_2 (y - y_2)^{\frac{2}{q'}} + \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$(28)\quad \frac{dx}{dy} = -\frac{\omega}{\pi i q'}\,\frac{1}{y-y_2} + \frac{\gamma'_2\,\omega}{\pi i q'}(y-y_2)^{-1+\frac{1}{q'}} + \ldots.$$

Si les racines nulles ou infinies correspondaient à une valeur infinie de y, ces développements suivant les puissances de $y - y_1$ ou de $y - y_2$ devraient être remplacés par des développements analogues suivant les puissances de $\frac{1}{y} = z$.

Les deux développements précédents doivent évidemment faire partie de la série des développements (23) et (25). Donc parmi ces derniers il en existera deux qui commencent par un terme de degré -1 et pour lesquels $p + \alpha$ sera nul, cette quantité étant égale à 1 pour tous les autres, qui doivent donner pour x des valeurs finies.

L'identification de ces deux développements avec (27) et (28) fera d'ailleurs connaître la période ω, et les entiers q, q'.

107. Troisième cas : *Il n'y a aucune période*. — Dans ce cas, x ayant n valeurs seulement pour chaque valeur de y et n'ayant que des points critiques algébriques sera une fonction algébrique de y. Réciproquement, y sera algébrique en x et, comme il est uniforme, il sera rationnel. On aura donc

$$\mathrm{P}y + \mathrm{Q} = 0,$$

P et Q étant des polynomes entiers en x, l'un de degré n, l'autre de degré $\overline{\gtrless} n$, dont on pourra déterminer les coefficients comme précédemment.

Pour chaque valeur de y, on aura n valeurs de x, généralement finies. Il n'y aura d'exception que pour la valeur (finie ou infinie) de y qui annule le coefficient de x^n, et à laquelle correspondra une racine, ou un groupe de q racines, infinies. Les inverses de ces racines pourront être développées en séries de la forme

$$\frac{1}{x} = \beta_1(y-y_1)^{\frac{1}{q}} + \beta_2(y-y_1)^{\frac{2}{q}} + \ldots,$$

d'où

$$x = \gamma_1(y-y_1)^{-\frac{1}{q}} + \gamma_2 + \gamma_3(y-y_1)^{\frac{1}{q}} + \ldots;$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\gamma_1}{q}(y-y_1)^{-\frac{q+1}{q}} + \ldots.$$

Donc, l'un des développements (23) [ou des développements (25) si la valeur de y qui rend x infini est elle-même infinie] commencera par un terme d'exposant $-\frac{q+1}{q}$. On aura donc pour ce développement $p+\alpha = -1$, et pour tous les autres $p+\alpha = 1$.

Les divers caractères dont nous avons reconnu la nécessité dans chaque cas, étant contradictoires entre eux, seront en même temps suffisants. On pourra donc *a priori* reconnaître dans quel cas on se trouve, sans qu'il soit besoin de tâtonnement.

108. Comme application des résultats qui précèdent, cherchons, parmi les équations binomes de la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n = \mathrm{A}(y-a_1)^{\lambda_1}(y-a_2)^{\lambda_2}\ldots,$$

$n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ étant des entiers sans diviseur commun, celles dont l'intégrale est monodrome.

Les points critiques de

$$\frac{dx}{dy} = \mathrm{A}^{-\frac{1}{n}}(y-a_1)^{-\frac{\lambda_1}{n}}(y-a_2)^{-\frac{\lambda_2}{n}}\ldots$$

sont $a_1, a_2, \ldots$. Pour l'un d'entre eux a_1, on aura comme développement

$$\frac{dx}{dy} = \beta_1(y-a_1)^{-\frac{\lambda_1}{n}} + \ldots.$$

D'autre part, si l'on pose $y = \frac{1}{z}$, on aura l'équation transformée

$$\frac{(-1)^n}{z^{2n}}\left(\frac{dz}{dx}\right)^n = \mathrm{A}\left(\frac{1}{z}-a_1\right)^{\lambda_1}\left(\frac{1}{z}-a_2\right)^{\lambda_2}\ldots,$$

d'où

$$\frac{dx}{dz} = \gamma_1 z^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\dots}{n}-2} + \dots$$

Si donc nous posons, pour abréger,

$$\frac{\lambda_1}{n} = \mu_1, \qquad \frac{\lambda_2}{n} = \mu_2, \qquad \dots, \qquad \frac{\lambda_1+\lambda_2+\dots}{n} - 2 = -\mu,$$

il sera nécessaire et suffisant que μ, μ_1, μ_2, ... soient de la forme $\frac{p-1}{p}$, 1 ou $\frac{p+1}{p}$. Ces quantités satisfont d'ailleurs à la relation

$$(29) \qquad \mu + \mu_1 + \mu_2 + \dots = 2.$$

Premier cas : *L'intégrale est doublement périodique.* — Dans ce cas, μ, μ_1, μ_2, ... seront tous de la forme $\frac{p-1}{p}$, et, par suite, au moins égaux à $\frac{1}{2}$, sauf μ, qui peut être nul.

Supposons d'abord $\mu = 0$. Il résulte de l'équation (29) que le nombre des quantités μ_1, μ_2, ..., qui sont toutes $\geqq \frac{1}{2}$, mais < 1, sera 4 ou 3.

S'il y en a quatre, on aura nécessairement

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \tfrac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \qquad n = 2.$$

S'il y en a trois, on aura, en substituant dans (29), pour μ_1, μ_2, μ_3, leurs valeurs $\frac{p_1-1}{p_1}$, $\frac{p_2-1}{p_2}$, $\frac{p_3-1}{p_3}$,

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1.$$

Les quantités p_1, p_2, p_3 étant supposées rangées par ordre de grandeur croissante, on en déduira

$$\frac{3}{p_1} \geqq 1, \qquad \text{d'où} \qquad p_1 = 3 \text{ ou } 2.$$

Si $p_1 = 3$, on devra avoir

$$p_2 = p_3 = 3,$$

d'où

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \qquad n = 3.$$

Si $p_1 = 2$, il viendra

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$p_2 > 2 \overline{\overline{<}} 4.$$

Si $p_2 = 4$, on aura aussi

$$p_3 = 4.$$

Si $p_2 = 3$, on aura

$$p_3 = 6,$$

ce qui donne les deux solutions

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = 3, \qquad n = 4,$$
$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 4, \qquad \lambda_3 = 5, \qquad n = 6.$$

Les solutions où μ n'est pas nul se déduisent évidemment des précédentes par la suppression d'un facteur. On obtient ainsi les nouvelles solutions

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \qquad n = 2,$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \qquad n = 3,$$
$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \qquad n = 4,$$
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 3, \qquad n = 4,$$
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4, \qquad n = 6,$$
$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 5, \qquad n = 6,$$
$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 5, \qquad n = 6.$$

Deuxième cas : *L'intégrale est simplement périodique.* — L'un au moins des nombres $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ sera égal à 1. Soit d'abord $\mu = 0$, $\mu_1 = 1$. L'équation (29) deviendra

$$\mu_2 + \mu_3 + \ldots = 1,$$

les quantités $\mu_2, \mu_3, \ldots$ étant égales à 1 ou de la forme $\frac{p-1}{p}$.

On voit par cette équation que le nombre des quantités μ_2, μ_3, ... ne peut surpasser deux.

Si ces quantités sont au nombre de deux, on aura nécessairement

$$\mu_2 = \mu_3 = \tfrac{1}{2},$$

d'où

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \qquad n = 2.$$

S'il n'existe qu'une seule quantité μ_2, on aura

$$\mu_2 = 1,$$

d'où

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \qquad n = 1.$$

Les solutions où μ n'est pas nul s'obtiendront encore par la suppression d'un facteur et seront les suivantes :

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 1, \qquad && n = 2, \\ &\lambda_1 = \lambda_2 = 1, && n = 2, \\ &\lambda_1 = 1, && n = 1. \end{aligned}$$

Troisième cas : *L'intégrale est rationnelle.* — Une des quantités μ, μ_1, ... sera de la forme $\dfrac{q+1}{q}$, et les autres de la forme $\dfrac{p-1}{p}$.

Si $\mu = 0$ et $\mu_1 = \dfrac{q+1}{q}$, $\mu_2 = \dfrac{p_2 - 1}{p_2}$, ..., il viendra

$$\frac{p_2 - 1}{p_2} + \ldots = \frac{q-1}{q}.$$

On aura donc

$$\mu_3 = \ldots = 0 \qquad \text{et} \qquad p_2 = q,$$

d'où

$$\lambda_1 = q + 1, \qquad \lambda_2 = q - 1, \qquad n = q,$$

l'entier q restant arbitraire.

Enfin, si μ n'est pas nul, on aura les solutions

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= q + 1, \qquad & n &= q, \\ \lambda_1 &= q - 1, & n &= q. \end{aligned}$$

109. Les considérations développées dans cette Section permettent de définir, d'une manière plus précise, les diverses sortes d'intégrales que peut présenter une équation différentielle

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y).$$

Soit x_0 une valeur particulière de la variable indépendante. A toute valeur initiale y_0 donnée à y, et telle que (x_0, y_0) soit un point ordinaire pour la fonction f, correspond, comme nous l'avons vu, une intégrale de l'équation différentielle, dont on pourra suivre la variation, soit dans tout le plan, soit dans une région limitée par des lignes singulières. Outre ces intégrales, *ordinaires par rapport au point* x_0, et qui diffèrent les unes des autres par la valeur de la constante y_0, il peut en exister d'autres, qui deviennent infinies ou indéterminées pour $x=x_0$, ou prennent en ce point une valeur y_0, telle que (x_0, y_0) soit un point critique pour la fonction f. Ces intégrales seront dites *singulières par rapport au point* x_0.

Cela posé, nous appellerons *intégrale générale* l'ensemble des intégrales particulières qui sont ordinaires pour quelque valeur de x; *intégrales singulières* celles qui seraient singulières par rapport à toute valeur de x.

Il est clair que l'existence de ces intégrales singulières sera un phénomène exceptionnel. Soit en effet $F(x,y)=0$ la relation qui doit exister entre x et y pour que f présente un point critique en x, y; il faudra, pour qu'il y ait une intégrale singulière, que la valeur de y en fonction de x, tirée de l'équation $F=0$, satisfasse à l'équation différentielle proposée, ce qui n'aura lieu qu'accidentellement.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. — Généralités.

110. On nomme *équations différentielles linéaires* celles où les fonctions inconnues et leurs dérivées ne figurent qu'au premier degré.

Ces équations jouissent de plusieurs propriétés que nous allons exposer.

111. 1° *Toute équation linéaire reste linéaire si l'on change la variable indépendante.*

Soit, en effet,

$$p_0 \frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n x = \mathrm{T}$$

une semblable équation, p_0, p_1, ..., T désignant des fonctions connues de la variable indépendante t.

Posons $t = \varphi(u)$, u désignant une nouvelle variable. On en déduira

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt} \varphi'(u),$$

$$\frac{d^2 x}{du^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \varphi'^2(u) + \frac{dx}{dt} \varphi''(u),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

équations qui donnent $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2 x}{dt^2}$, ... en fonction linéaire

de $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2x}{du^2}$, ... Substituant ces valeurs, ainsi que celle de t, dans l'équation proposée, on obtiendra l'équation transformée, qui sera évidemment linéaire en x, $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2x}{du^2}$, ...

112. 2° *Soient $x, y, \ldots$, n fonctions d'une même variable indépendante t, satisfaisant à un système de n équations linéaires*

$$E_1 = 0, \quad \ldots, \quad E_n = 0, \tag{1}$$

et soit V un polynome entier par rapport à $x, y, \ldots$ et à leurs dérivées successives, dont les divers termes aient pour coefficients des fonctions quelconques de t. La fonction V satisfera à une équation linéaire dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction des coefficients de $E_1, \ldots, E_n$, V et de leurs dérivées successives.

En effet, soient respectivement $m, m', \ldots$ les ordres des plus hautes dérivées de $x, y, \ldots$ qui figurent dans les équations (1); k le degré du polynome V. Formons les dérivées successives de V. Chacune d'elles sera un polynome de degré k par rapport à $x, y, \ldots$ et à leurs dérivées successives. D'ailleurs les dérivées $\frac{d^m x}{dt^m}$, $\frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}}$, ..., $\frac{d^{m'}y}{dt^{m'}}$, $\frac{d^{m'+1}y}{dt^{m'+1}}$, ... peuvent s'exprimer linéairement par les dérivées précédentes, au moyen des équations (1) et de celles qui s'en déduisent par dérivation.

Substituant ces valeurs, on aura, pour V, $\frac{dV}{dt}$, ..., des expressions de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} V = T_1 P_1 + T_2 P_2 + \ldots, \\ \frac{dV}{dt} = T'_1 P_1 + T'_2 P_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{2}$$

$T_1, T_2, \ldots, T'_1, T'_2, \ldots$ étant des fonctions de t, de l'espèce

indiquée à l'énoncé, et P_1, P_2, ... des produits de la forme

$$x^\alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right)^{\alpha_{m-1}} y^\beta\left(\frac{dy}{dt}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{d^{m'-1}y}{dt^{m'-1}}\right)^{\beta_{m'-1}}\cdots,$$

où le nombre total des facteurs est au plus égal à k. Soient P_1, P_2, ..., P_l les divers produits de ce genre qu'on peut former et dont le nombre est évidemment limité. L'élimination de ces quantités entre les expressions (2) donne une relation linéaire entre $V, \frac{dV}{dt}, \ldots, \frac{d^lV}{dt^l}$.

113. 3° On sait que tout système d'équations différentielles simultanées peut être ramené par l'adjonction de variables auxiliaires et la résolution par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, à un système normal. Si les équations sont linéaires, il est clair que ces opérations laisseront subsister le caractère linéaire.

L'étude d'un système linéaire quelconque se ramène donc à celle d'un système linéaire normal de la forme

$$\frac{dx}{dt} + ax + by + \ldots = T,$$

$$\frac{dy}{dt} + a_1x + b_1y + \ldots = T_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où $a, b, \ldots, a_1, b_1, \ldots, T, T_1, \ldots$ sont des fonctions de t.

Nous considérerons en premier lieu les systèmes dits *sans second membre*, où l'on a

$$T = T_1 = \ldots = 0.$$

114. Théorème. — *Si $x_1, y_1, \ldots; x_2, y_2, \ldots; \ldots$ sont des solutions particulières d'un système d'équations linéaires sans second membre, les expressions*

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots, \quad C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots, \quad \ldots,$$

où $C_1, C_2, \ldots$ sont des constantes arbitraires, satisferont au même système d'équations.

En effet, le résultat de la substitution de ces expressions dans le premier membre de l'une quelconque des équations proposées sera évidemment de la forme

$$C_1 H_1 + C_2 H_2 + \ldots,$$

H_1 désignant le résultat de la substitution de $x_1, y_1, \ldots$; H_2 le résultat de la substitution de $x_2, y_2, \ldots$. Mais $x_1, y_1, \ldots; x_2, y_2, \ldots; \ldots$ étant des solutions, on aura

$$H_1 = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots,$$

d'où

$$C_1 H_1 + C_2 H_2 + \ldots = 0.$$

115. Considérons spécialement un système canonique formé de n équations linéaires du premier ordre et sans second membre. Ce système admet la solution évidente $x = 0$, $y = 0, \ldots$, mais il admet une infinité d'autres solutions particulières.

Nous dirons que k solutions particulières d'un semblable système, telles que

$$\begin{array}{cccc} x_1, & y_1, & z_1, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\ x_k, & y_k, & z_k, & \ldots \end{array}$$

sont *indépendantes*, si l'un au moins des déterminants d'ordre k formés avec les diverses colonnes du Tableau ci-dessus n'est pas identiquement nul.

Théorème. — *Si l'on connaît k solutions indépendantes d'un système de n équations linéaires du premier ordre et sans second membre* (k étant $< n$), *on pourra ramener l'intégration du système proposé à celle d'un système analogue ne contenant plus que $n - k$ équations et à des quadratures.*

Chaque solution de ce nouveau système fournira une solution du système primitif, indépendante de celles qui sont déjà connues.

Nous admettrons, pour fixer les idées, qu'on ait quatre équations

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + ax + by + cz + du = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u = 0, \\ \dfrac{du}{dt} + a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u = 0, \end{cases}$$

et que l'on connaisse deux solutions indépendantes

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1, \quad u_1;$$
$$x_2, \quad y_2, \quad z_2, \quad u_2.$$

Admettons qu'on ait, par exemple,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

On pourra poser

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$
$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \zeta,$$
$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \upsilon,$$

C_1, C_2, ζ, υ étant de nouvelles variables. Effectuant la substitution et remarquant que les termes en C_1, C_2 s'annulent (car les équations proposées seraient satisfaites si ζ, υ étaient nuls et C_1, C_2 constants), il viendra

$$\frac{dC_1}{dt} x_1 + \frac{dC_2}{dt} x_2 + c\zeta + d\upsilon = 0,$$
$$\frac{dC_1}{dt} y_1 + \frac{dC_2}{dt} y_2 + c_1\zeta + d_1\upsilon = 0;$$

$$\frac{dC_1}{dt} z_1 + \frac{dC_2}{dt} z_2 + \frac{d\zeta}{dt} + c_2\zeta + d_2\upsilon = 0,$$
$$\frac{dC_1}{dt} u_1 + \frac{dC_2}{dt} u_2 + \frac{d\upsilon}{dt} + c_3\zeta + d_3\upsilon = 0.$$

Résolvant par rapport aux dérivées $\frac{dC_1}{dt}$, $\frac{dC_2}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, $\frac{d\upsilon}{dt}$, on aura un résultat de la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{dC_1}{dt} = A\zeta + B\upsilon, \\ \frac{dC_2}{dt} = A_1\zeta + B_1\upsilon; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} = A_2\zeta + B_2\upsilon, \\ \frac{d\upsilon}{dt} = A_3\zeta + B_3\upsilon. \end{cases}$$

On obtiendra donc ζ et υ en intégrant les deux équations linéaires simultanées (5); C_1 et C_2 s'obtiendront ensuite par des quadratures.

Soient d'ailleurs ζ', υ' une solution particulière quelconque des équations (5) (autre que la solution évidente $\zeta = 0$, $\upsilon = 0$); et supposons, pour fixer les idées, que ζ' ne soit pas nul. Soient C'_1, C'_2 les valeurs correspondantes de C_1, C_2. La solution

$$\begin{aligned} x_3 &= C'_1 x_1 + C'_2 x_2, \\ y_3 &= C'_1 y_1 + C'_2 y_2, \\ z_3 &= C'_1 z_1 + C'_2 z_2 + \zeta', \\ u_3 &= C'_1 u_1 + C'_2 u_2 + \upsilon' \end{aligned}$$

sera indépendante des deux solutions déjà connues x_1, y_1, z_1, u_1; x_2, y_2, z_2, u_2; car le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \zeta' \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

116. Théorème. — *Tout système de n équations linéaires du premier ordre et sans second membre admet n solutions particulières indépendantes $x_1, y_1, \ldots; \ldots;$*

x_n, y_n, ... et sa solution la plus générale est la suivante :

$$x = C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n, \qquad y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n, \qquad \ldots,$$

où C_1, ..., C_n sont des constantes arbitraires.

La première partie de cette proposition résulte de ce que nous venons d'établir, que de l'existence de k solutions indépendantes (k étant $< n$) résulte celle d'une nouvelle solution indépendante des précédentes.

Pour démontrer le second point, posons

$$x = C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n, \qquad y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n, \qquad \ldots,$$

C_1, ..., C_n désignant de nouvelles variables. Effectuant la substitution et remarquant, comme au numéro précédent, que les termes en C_1, ..., C_n s'annulent, il viendra

$$\frac{dC_1}{dt} x_1 + \ldots + \frac{dC_n}{dt} x_n = 0,$$
$$\frac{dC_1}{dt} y_1 + \ldots + \frac{dC_n}{dt} y_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais le déterminant des quantités x_1, y_1, ...; ...; x_n, y_n, ... est $\gtrless 0$ par hypothèse, les n solutions données étant indépendantes ; donc

$$\frac{dC_1}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{dC_n}{dt} = 0$$

et C_1, ..., C_n seront des constantes, d'ailleurs arbitraires.

117. Soient

$$\xi_1 = C'_1 x_1 + \ldots + C'_n x_n, \qquad \eta_1 = C'_1 y_1 + \ldots + C'_n y_n, \qquad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots,$$
$$\xi_n = C^n_1 x_1 + \ldots + C^n_n x_n, \qquad \eta_n = C^n_1 y_1 + \ldots + C^n_n y_n, \qquad \ldots$$

n solutions particulières quelconques du système proposé. Leur déterminant est évidemment égal au produit du déterminant des solutions x_1, y_1 ...; ...; x_n, y_n, ... par le

déterminant des éonstantes $C'_1, \ldots, C_n^n$. La condition nécessaire et suffisante pour que ces solutions soient indépendantes est donc que ce dernier déterminant soit différent de zéro.

118. Les coefficients des équations différentielles proposées peuvent aisément s'exprimer au moyen d'un système quelconque de n solutions indépendantes, telles que $\xi_1, \eta_1, \ldots; \xi_n, \eta_n, \ldots$.

Soit, en effet,

$$\frac{dx}{dt} + ax + by + \ldots = 0$$

une de ces équations ; on aura identiquement

$$\frac{d\xi_1}{dt} + a\xi_1 + b\eta_1 + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d\xi_n}{dt} + a\xi_n + b\eta_n + \ldots = 0,$$

et de ce système d'équations on déduira $a, b, \ldots$ exprimés par des quotients de déterminants.

119. A tout système d'équations linéaires sans second membre, tel que

$$\frac{dx}{dt} + ax + by + cz = 0,$$
$$\frac{dy}{dt} + a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0,$$
$$\frac{dz}{dt} + a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0,$$

est associé un *système adjoint* défini par les équations

$$-\frac{dX}{dt} + aX + a_1 Y + a_2 Z = 0,$$
$$-\frac{dY}{dt} + bX + b_1 Y + b_2 Z = 0,$$
$$-\frac{dZ}{dt} + cX + c_1 Y + c_2 Z = 0.$$

Les solutions de ces deux systèmes ont entre elles une liaison remarquable. Pour la mettre en évidence, ajoutons les équations précédentes, respectivement multipliées par X, Y, Z, $-x$, $-y$, $-z$. Il viendra, toute réduction faite,

$$\begin{aligned} 0 &= X\frac{dx}{dt} + x\frac{dX}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + y\frac{dY}{dt} + Z\frac{dz}{dt} + z\frac{dZ}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(Xx + Yy + Zz), \end{aligned}$$

d'où

$$Xx + Yy + Zz = \text{const.}$$

La liaison entre les deux systèmes adjoints est évidemment réciproque. L'intégration complète de l'un d'eux entraînera celle de l'autre. Supposons, en effet, que l'on connaisse trois solutions indépendantes x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; x_3, y_3, z_3 du premier système. La solution générale X, Y, Z du système adjoint sera donnée par les relations

$$\begin{aligned} Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 &= C_1, \\ Xx_2 + Yy_2 + Zz_2 &= C_2, \\ Xx_3 + Yy_3 + Zz_3 &= C_3, \end{aligned}$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes arbitraires.

Si l'on connaissait seulement une ou deux solutions indépendantes du premier système, on aurait seulement une relation linéaire

$$Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 = C_1$$

ou deux relations

$$\begin{aligned} Xx_1 + Yy_1 + Zz_1 &= C_1, \\ Xx_2 + Yy_2 + Zz_2 &= C_2. \end{aligned}$$

Ces relations permettraient d'éliminer une ou deux des variables X, Y, Z des équations différentielles du système adjoint, et de ramener ainsi l'intégration de ce dernier système à celle d'un système plus simple, contenant une ou deux équations de moins.

120. *Systèmes d'équations linéaires à seconds membres.* — Soit à intégrer un système d'équations linéaires à seconds membres, tel que le suivant :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + ax + by + cz + du = \mathrm{T}, \\ \dfrac{dy}{dt} + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 u = \mathrm{T}_1, \\ \dfrac{dz}{dt} + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 u = \mathrm{T}_2, \\ \dfrac{du}{dt} + a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 u = \mathrm{T}_3. \end{cases}$$

Considérons le système linéaire analogue

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + ax + by + cz + du = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

obtenu en supprimant les seconds membres.

Nous avons vu (115) que, si l'on connaît deux solutions indépendantes de ce dernier système, on peut, par un changement de variables convenablement choisi, le ramener au système suivant :

$$\frac{d\mathrm{C}_1}{dt} = \mathrm{A}\zeta + \mathrm{B}\upsilon, \quad \frac{d\mathrm{C}_2}{dt} = \mathrm{A}_1\zeta + \mathrm{B}_1\upsilon,$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathrm{A}_2\zeta + \mathrm{B}_2\upsilon, \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \mathrm{A}_3\zeta + \mathrm{B}_3\upsilon.$$

Il est clair que le même changement de variables, appliqué au système (6), le ramènera à la forme

$$\frac{d\mathrm{C}_1}{dt} = \mathrm{A}\zeta + \mathrm{B}\upsilon + \theta, \quad \frac{d\mathrm{C}_2}{dt} = \mathrm{A}_1\zeta + \mathrm{B}_1\upsilon + \theta_1,$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \mathrm{A}_2\zeta + \mathrm{B}_2\upsilon + \theta_2, \quad \frac{d\upsilon}{dt} = \mathrm{A}_3\zeta + \mathrm{B}_3\upsilon + \theta_3,$$

$\theta, \dots, \theta_3$ étant des fonctions de t. On n'aura donc, pour déterminer ζ et υ, qu'à intégrer un système de deux équa-

tions linéaires simultanées; C_1, C_2 s'obtiendront ensuite par de simples quadratures.

Si l'on avait obtenu l'intégrale générale du système (7)

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 + C_4 x_4,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + C_4 u_4,$$

l'intégration du système (6) pourrait s'effectuer par de simples quadratures. Substituons, en effet, les valeurs précédentes dans les équations de ce système, en considérant $C_1, \dots, C_4$ comme de nouvelles variables. Ces équations deviendront

$$\frac{dC_1}{dt} x_1 + \frac{dC_2}{dt} x_2 + \frac{dC_3}{dt} x_3 + \frac{dC_4}{dt} x_4 = T,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{dC_1}{dt} u_1 + \frac{dC_2}{dt} u_2 + \frac{dC_3}{dt} u_3 + \frac{dC_4}{dt} u_4 = T_3,$$

et donnent immédiatement les dérivées $\frac{dC_1}{dt}, \dots, \frac{dC_4}{dt}$. On aura donc $C_1, \dots, C_4$ par des quadratures.

121. On pourra même se dispenser de ces quadratures, si l'on connaît une solution particulière x_0, y_0, z_0, u_0 du système (6). Posons, en effet,

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta, \qquad u = u_0 + \upsilon.$$

Le résultat de la substitution de x_0, y_0, z_0, u_0, dans les premiers membres des équations (6), détruira les seconds membres, et il restera

$$\frac{d\xi}{dt} + a\xi + b\eta + c\zeta + d\upsilon = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

On obtiendra donc la solution générale du système proposé en ajoutant la solution particulière x_0, y_0, z_0, u_0 à la solution générale du système sans seconds membres.

On peut enfin remarquer que, si les seconds membres sont de la forme

$$T = T' + T'' + \ldots, \qquad T_1 = T'_1 + T''_1 + \ldots, \qquad \ldots,$$

et si l'on connaît une solution particulière $x'_0, y'_0, \ldots$ pour un système analogue où les seconds membres se réduisent respectivement à $T', T'_1, \ldots$, une autre solution particulière $x''_0, y''_0, \ldots$ pour le cas où les seconds membres se réduiraient à $T'', T''_1, \ldots$, etc., on aura une solution particulière du système proposé, en posant

$$x = x'_0 + x''_0 + \ldots, \qquad y = y'_0 + y''_0 + \ldots, \qquad \ldots.$$

122. Une équation linéaire d'ordre n

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n x = T$$

peut être remplacée par le système équivalent

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} - x' = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{dx^{n-2}}{dt} - x^{n-1} = 0, \\ &\frac{dx^{n-1}}{dt} + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n x = T, \end{aligned}$$

qui rentre comme cas particulier dans ceux que nous venons de discuter. Il convient, toutefois, d'effectuer l'étude directe de cette équation, car elle fera paraître sous un nouveau jour quelques-uns des résultats déjà obtenus.

123. Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n x = 0. \tag{8}$$

Soient $x_1, \ldots, x_k$ des solutions particulières de cette équation. Nous dirons que ces solutions sont indépendantes,

si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

formé par ces fonctions et leurs $k-1$ premières dérivées n'est pas identiquement nul.

Toute équation linéaire d'ordre n sans second membre admet un système de n solutions indépendantes $x_1, \dots, x_n$, *et sa solution générale est*

$$C_1 x_1 + \dots + C_n x_n,$$

$C_1, \dots, C_n$ *étant des constantes arbitraires.*

Pour établir ce théorème, nous supposerons qu'il soit vrai pour les équations d'ordre $n-1$ et nous montrerons qu'il est encore vrai pour l'équation (8) d'ordre n.

Soit x_1 une solution de cette équation (autre que la solution évidente $x=0$). Posons $x = Cx_1$, C désignant une nouvelle variable. On aura

$$\frac{dx}{dt} = C' x_1 + C x'_1,$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = C'' x_1 + 2 C' x'_1 + C x''_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} = C^n x_1 + n C^{n-1} x'_1 + \frac{n(n-1)}{2} C^{n-2} x''_1 + \dots + C x_1^n.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on aura l'équation transformée

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l|l|l} x_1 C^n + n x'_1 & C^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x''_1 & C^{n-2} + \dots = 0. \\ \quad + p_1 x_1 & & \\ & \quad + n p_1 x'_1 & \\ & \quad + p_2 x_1 & \end{array} \right.$$

L'équation devant être satisfaite, par hypothèse, si l'on

suppose C constant, l'équation (9) ne contiendra aucun terme en C. Ce sera donc une équation linéaire d'ordre $n-1$ par rapport à sa dérivée C'. Elle admettra par hypothèse, $n-1$ solutions indépendantes $y_2, \ldots, y_n$, et sa solution générale sera de la forme

$$C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

où $C_2, \ldots, C_n$ sont des constantes arbitraires.

Intégrant cette expression, il viendra

$$C = C_1 + C_2 \int_\lambda^t y_2\,dt + \ldots + C_n \int_\lambda^t y_n\,dt,$$

λ étant une quantité choisie à volonté, et C_1 une nouvelle constante arbitraire.

On en déduit

$$x = Cx_1 = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n,$$

en posant, pour abréger,

$$x_2 = x_1 \int_\lambda^t y_2\,dt, \quad \ldots, \quad x_n = x_1 \int_\lambda^t y_n\,dt.$$

Il reste à prouver que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul.

Or ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \int_\lambda^t y_2\,dt & \ldots & x_1 \int_\lambda^t y_n\,dt \\ x'_1 & x'_1 \int_\lambda^t y_2\,dt + x_1 y_2 & \ldots & x'_1 \int_\lambda^t y_n\,dt + x_1 y_n \\ x''_1 & x''_1 \int_\lambda^t y_2\,dt + 2x'_1 y_2 + x_1 y'_2 & \ldots & x''_1 \int_\lambda^t y_n\,dt + 2x'_1 y_n + x_1 y'_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent, à

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1\int_\lambda^t y_2\,dt & \dots & x_1\int_\lambda^t y_n\,dt \\ 0 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ 0 & x_1 y'_2 & \dots & x_1 y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = x_1^n \begin{vmatrix} y_2 & \dots & y_n \\ y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Or chacun des deux facteurs qui composent ce produit est différent de zéro, par hypothèse.

124. Soient $x_1, \dots, x_n$ le système de solutions indépendantes dont nous venons de démontrer l'existence, et

$$\begin{gathered} \xi_1 = C'_1 x_1 + \dots + C'_n x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \xi_n = C^n_1 x_1 + \dots + C^n_n x_n \end{gathered}$$

un autre système de n solutions. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-1} & \dots & \xi_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est évidemment égal au produit du déterminant des solutions $x_1, \dots, x_n$ par celui des coefficients C.

Il est donc nécessaire et suffisant, pour que les solutions $\xi_1, \dots, \xi_n$ soient indépendantes, que le déterminant des C ne soit pas nul.

S'il en est ainsi, $x_1, \dots, x_n$, et par suite toutes les solutions de l'équation différentielle, seront des fonctions linéaires de $\xi_1, \dots, \xi_n$.

125. Soient d'ailleurs $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ un système quelconque de solutions indépendantes de l'équation (8); on aura

$$\begin{gathered} \frac{d^n\xi_1}{dt^n} + p_1\frac{d^{n-1}\xi_1}{dt^{n-1}} + \dots + p_n\xi_1 = 0, \\ \frac{d^n\xi_2}{dt^n} + p_1\frac{d^{n-1}\xi_2}{dt^{n-1}} + \dots + p_n\xi_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Ces équations permettront d'exprimer les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ en fonction de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et de leurs dérivées.

126. On peut remarquer que la condition

$$\begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'existe entre les fonctions $x_1, \ldots, x_n$ aucune relation linéaire à coefficients constants, telle que

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0.$$

En effet, s'il existait une relation de ce genre, on obtiendrait, en la différentiant,

$$\begin{gathered} \alpha_1 x_1' + \ldots + \alpha_n x_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1 x_1^{n-1} + \ldots + \alpha_n x_n^{n-1} = 0, \end{gathered}$$

et, en éliminant les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, il viendrait

$$\begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_1' & \ldots & x_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, si ce déterminant est nul, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seront n solutions particulières de l'équation linéaire d'ordre $n - 1$

$$\begin{vmatrix} X & x_2 & \ldots & x_n \\ X' & x_2' & \ldots & x_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

On aura donc, en désignant par $X_1, \ldots, X_{n-1}$ des solutions indépendantes de cette équation, et par $C_1', \ldots, C_{n-1}^n$

des constantes,

$$x_1 = C'_1 X_1 + \ldots + C'_{n-1} X_{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_n = C_1^n X_1 + \ldots + C_{n-1}^n X_{n-1}.$$

Éliminant $X_1, \ldots, X_{n-1}$ entre ces équations, on en déduira une relation linéaire entre $x_1, \ldots, x_n$.

127. Si l'on connaît k solutions indépendantes $x_1, \ldots, x_k$ de l'équation linéaire sans second membre

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n x = 0,$$

on pourra ramener son intégration à celle d'une équation linéaire d'ordre $n - k$, suivie de k quadratures.

Posons en effet

$$x = \sum_1^k C_i x_i,$$

les C désignant k nouvelles variables, liées entre elles par les $k - 1$ relations

$$(10) \quad \sum_1^k C'_i x_i = 0, \quad \sum_1^k C'_i x'_i = 0, \quad \ldots, \quad \sum_1^k C'_i x_i^{k-2} = 0.$$

On aura, en tenant compte de ces relations,

$$x' = \sum_1^k C_i x'_i, \quad \ldots, \quad x^{k-1} = \sum_1^k C_i x_i^{k-1},$$

puis

$$x^k = F_1, \quad \ldots, \quad x^n = F_{n-k+1},$$

F_r désignant une fonction linéaire de $C_1, \ldots, C_k$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre r.

Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on aura un résultat de la forme

$$G = 0,$$

G désignant une fonction linéaire de $C_1, \ldots, C_k$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n - k + 1$. D'ailleurs, l'équation étant satisfaite en supposant $C_1, \ldots, C_k$ constants, les termes qui contiennent ces quantités disparaîtront, et G ne

contiendra que les dérivées $C'_1, \ldots, C'_k$ et leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre $n-k$.

Cela posé, on peut tirer des équations (10) les valeurs de $C'_2, \ldots, C'_k$ en fonction de C'_1. Substituant ces valeurs, ainsi que leurs dérivées, dans G, on aura pour déterminer C'_1 une équation linéaire d'ordre $n-k$.

Cette équation intégrée, on aura $C'_1, \ldots, C'_k$, et l'on en déduira $C_1, \ldots, C_k$ par quadratures.

128. Supposons, par exemple, que l'on connaisse une solution particulière x_1 de l'équation du second ordre

$$x'' + p_1 x' + p_2 x = 0.$$

Posons $x = C_1 x_1$; nous obtiendrons l'équation transformée

$$C''_1 x_1 + (2x'_1 + p_1 x_1) C'_1 = 0$$

ou

$$\frac{C''_1}{C'_1} = -\frac{2x'_1}{x_1} - p_1$$

et, en intégrant,

$$\log C'_1 = -2\log x_1 - \int p_1\, dt + \text{const.},$$

$$C'_1 = A\frac{e^{-\int p_1 dt}}{x_1^2},$$

$$C_1 = A\int \frac{e^{-\int p_1 dt}}{x_1^2} + B$$

et enfin

$$x = A x_1 \int \frac{e^{-\int p_1 dt}}{x_1^2} + B x_1,$$

A et B étant des constantes arbitraires.

129. L'intégrale générale de l'équation à second membre

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n x = T \tag{11}$$

se déduit, par de simples quadratures, de l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n x = 0. \tag{12}$$

Posons, en effet,

$$x = C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n,$$

$C_1, \ldots, C_n$ étant de nouvelles variables, assujetties aux conditions

$$(13)\quad \sum_1^n C_i' x_i = 0, \quad \sum_1^n C_i' x_i' = 0, \quad \ldots, \quad \sum_1^n C_i' x_i^{n-2} = 0.$$

On aura, en tenant compte de ces relations,

$$x' = \sum_1^n C_i x_i', \quad \ldots, \quad x^{n-1} = \sum_1^n C_i x_i^{n-1}$$

et enfin

$$x^n = \sum_1^n C_i x_i^n + \sum_1^n C_i' x_i^{n-1}.$$

Substituant dans l'équation proposée, les termes en $C_1, \ldots, C_n$ disparaîtront et il restera simplement

$$\sum_1^n C_i' x_i^{n-1} = T.$$

Cette équation, jointe aux relations (13), donnera $C_1', \ldots, C_n'$; et l'on en déduira $C_1, \ldots, C_n$ par des quadratures.

On pourra d'ailleurs se dispenser de ces quadratures si l'on connaît une solution x_0 de l'équation (11). Il suffira, dans ce cas, de l'ajouter à l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

130. Revenons à l'équation sans second membre

$$(14)\quad x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n x = 0.$$

Multiplions-la par une fonction indéterminée y et intégrons. Il viendra, en appliquant aux termes qui contiennent les dérivées de x, l'intégration par parties

$$\begin{aligned} & y x^{n-1} - y' x^{n-2} + y'' x^{n-3} - \ldots \\ & + p_1 y x^{n-2} - (p_1 y)' x^{n-3} + \ldots + p_2 y x^{n-3} + \ldots \\ & + (-1)^n \int x [y^n - (p_1 y)^{n-1} + (p_2 y)^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n y] \, dt = \text{const.} \end{aligned}$$

Si la fonction y est une solution de l'équation linéaire

$$(15)\quad y^n - (p_1 y)^{n-1} + (p_2 y)^{n-2} - \ldots + (-1)^n p_n y = 0,$$

l'intégrale disparaîtra de la formule précédente, et l'on aura, pour déterminer x, une équation linéaire d'ordre $n-1$, contenant une constante arbitraire.

Si l'on connaît k solutions $y_1, \ldots, y_k$ de l'équation (15), on obtiendra, en posant successivement $y = y_1, \ldots, y = y_k$, k équations linéaires d'ordre $n-1$ en x. Éliminant entre ces équations les dérivées $x^{n-1}, \ldots, x^{n-k+1}$, on aura, pour déterminer x, une équation linéaire d'ordre $n-k$, contenant k constantes arbitraires.

L'équation (15) se nomme l'*équation adjointe* de l'équation (14). Il est clair que réciproquement l'équation (14) est adjointe à l'équation (15).

131. On aurait pu arriver à l'équation adjointe (15) en remplaçant l'équation primitive (14) par le système d'équations du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{dx^{n-1}}{dt} + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n x &= 0, \\ \frac{dx^{n-2}}{dt} - x^{n-1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ \frac{dx}{dt} - x' &= 0, \end{aligned}$$

qui lui est équivalent.

Ce système a pour adjoint le suivant :

$$\begin{aligned} -\frac{dX^{n-1}}{dt} + p_1 X^{n-1} - X^{n-2} &= 0, \\ -\frac{dX^{n-2}}{dt} + p_2 X^{n-2} - X^{n-3} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&, \\ -\frac{dX}{dt} + p_n X &= 0. \end{aligned}$$

On peut aisément éliminer X^{n-2}, ..., X entre ces équations. Il suffira de les différentier respectivement $n-1$ fois, $n-2$ fois, etc., et de retrancher la somme des équations de rang impair de celle des équations de rang pair ; il viendra

$$\frac{d^n X^{n-1}}{dt^n} - \frac{d^{n-1} p_1 X^{n-1}}{dt^{n-1}} + \frac{d^{n-2} p_2 X^{n-1}}{dt^{n-2}} - \ldots = 0,$$

équation qui ne diffère de (15) que par la notation.

II. — Équations linéaires à coefficients constants.

132. Une équation linéaire à coefficients constants et sans second membre

$$a \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = 0$$

peut être mise sous la forme symbolique

$$Fx = 0$$

où

$$F = a D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n,$$

chaque facteur symbolique D représentant une dérivation.

133. Soit

$$G = b D^m + b_1 D^{m-1} + \ldots + b_m$$

une autre opération analogue à F_1, (b, b_1, ..., b_m étant des constantes comme a, a_1, ..., a_n).

Effectuons successivement ces deux opérations ; l'opération résultante sera

$$ba D^{m+n} + (ba_1 + ab_1) D^{m+n-1} + \ldots.$$

Cette expression est la même que l'on obtiendrait en multipliant les deux polynomes F et G comme si D représentait une quantité et non un symbole de dérivation. L'opération

résultante sera donc indépendante de l'ordre des deux opérations F et G et pourra être représentée indifféremment par FG ou par GF.

D'ailleurs, une opération quelconque de l'espèce considérée, effectuée sur une quantité identiquement nulle, donne un résultat nul. Donc l'équation

$$o = FGx = GFx$$

admet comme solutions celles des équations

$$Fx = o, \quad Gx = o.$$

134. Soient donc $s_1, s_2, \ldots$ les racines de l'*équation caractéristique*

$$o = F = aD^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n;$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots$ leurs ordres de multiplicité. L'équation différentielle

$$o = Fx = (D - s_1)^{\mu_1} (D - s_2)^{\mu_2} \ldots x = o$$

admettra comme solutions celles des équations

$$(D - s_1)^{\mu_1} x = o, \quad (D - s_2)^{\mu_2} x = o, \quad \ldots.$$

Il est aisé de trouver ces dernières. Posons, en effet,

$$x = e^{s_1 t} y.$$

On aura

$$(D - s_1) x = s_1 e^{s_1 t} y + e^{s_1 t} Dy - s_1 e^{s_1 t} y$$
$$= e^{s_1 t} Dy,$$

et en répétant cette opération

$$(D - s_1)^{\mu_1} x = e^{s_1 t} D^{\mu_1} y.$$

Pour que le second membre soit nul, il faut et il suffit que y soit un polynome arbitraire de degré $\mu_1 - 1$.

Réunissant les solutions particulières ainsi trouvées, on

voit que l'équation

$$Fx = 0$$

admet la solution

$$P_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t} + \dots,$$

où P_1, P_2, ... sont des polynomes arbitraires de degrés $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$, ...

Cette solution contient $\mu_1 + \mu_2 + \dots = n$ constantes arbitraires. Ce sera donc la solution générale, si elle ne peut s'annuler que lorsque toutes ces constantes sont nulles. Nous allons prouver qu'il en est ainsi.

En effet, supposons qu'on ait

$$P_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t} + \dots = 0.$$

Posons

$$H = (D - s_2)^{\mu_2} (D - s_3)^{\mu_3} \dots.$$

On aura

$$0 = H(P_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t} + \dots) = H(P_1 e^{s_1 t}).$$

Mais on a, d'autre part,

$$(D - s_1)^{\mu_1} (P_1 e^{s_1 t}) = 0.$$

Or les polynomes $(D - s_1)^{\mu_1}$ et H étant premiers entre eux, on pourra déterminer deux nouveaux polynomes M et N tels que l'on ait

$$M(D - s_1)^{\mu_1} + NH = 1$$

et, par suite,

$$0 = [M(D - s_1)^{\mu_1} + NH](P_1 e^{s_1 t}) = P_1 e^{s_1 t}.$$

Donc P_1 doit être identiquement nul. De même pour les autres polynomes P_2, ...

135. Si les coefficients a_1, a_2, ... étant réels, l'équation caractéristique $F = 0$ a des racines imaginaires, la solution générale que nous venons d'obtenir renfermera des imaginaires ; mais il est aisé de les faire disparaître.

Soient, en effet, $s_1 = \alpha + \beta i$, $s_2 = \alpha - \beta i$ un couple de

racines conjuguées, μ leur ordre de multiplicité; nous aurons dans l'intégrale générale les deux termes

$$\begin{aligned} & P_1 e^{(\alpha+\beta i)t} + P_2 e^{(\alpha-\beta i)t} \\ & \quad = e^{\alpha t}[P_1(\cos\beta t + i\sin\beta t) + P_2(\cos\beta t - i\sin\beta t)] \\ & \quad = Q_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + Q_2 e^{\alpha t}\sin\beta t, \end{aligned}$$

Q_1, Q_2 étant des polynomes de degré $\mu - 1$, arbitraires comme l'étaient P_1 et P_2.

136. Connaissant, par ce qui précède, l'intégrale de l'équation sans second membre

$$(1) \qquad Fx = 0,$$

on obtiendra, par des quadratures, celle de l'équation à second membre

$$(2) \qquad Fx = T.$$

On sera, d'ailleurs, dispensé de ces quadratures si l'on peut déterminer une solution particulière de cette dernière équation.

Ce cas se présentera si T est un polynome entier en t, $e^{\alpha t}$, $e^{\beta t}$, ..., $\sin\gamma t$, $\cos\gamma t$, ... Car en remplaçant les sinus et cosinus par des exponentielles, T sera une somme de termes de la forme

$$\Pi e^{st},$$

s désignant une constante et Π un polynome, dont nous désignerons le degré par λ.

Nous aurons donc à chercher une solution particulière de l'équation

$$(3) \qquad Fx = \Pi e^{st}.$$

Les solutions de cette équation satisfont à l'équation

$$(4) \qquad (D-s)^{\lambda+1} Fx = (D-s)^{\lambda+1}\Pi e^{st} = 0$$

qui n'a plus de second membre.

Deux cas seront à distinguer ici :

1° Si s diffère de $s_1, s_2, \ldots,$ l'équation (4) a pour intégrale générale

$$P e^{st} + P_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t} + \ldots,$$

où P est un polynome de degré λ.

Supprimant les termes qui appartiennent à l'intégrale de $Fx = 0$, on voit que l'équation (3) doit admettre une intégrale particulière de la forme $P e^{st}$.

2° Si $s = s_1$, l'intégrale générale de (4) sera

$$P'_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t} + \ldots,$$

P'_1 étant un polynome de degré $\mu_1 + \lambda$.

Supprimant encore les termes qui appartiennent à l'intégrale de $Fx = 0$, on voit que l'équation (3) admet une intégrale particulière de la forme $t^{\mu_1} P e^{s_1 t}$, où P désigne encore un polynome de degré λ.

La forme de la solution particulière étant assignée dans chaque cas, il restera à déterminer les coefficients du polynome P. Pour cela on substituera $P e^{st}$ (ou $t^{\mu_1} P e^{s_1 t}$) à la place de x dans l'équation (3) ; l'identification des deux membres donnera un système d'équations linéaires pour calculer les coefficients inconnus.

137. *Exemple.* — Soit à intégrer l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + m^2 x = \cos nt. \tag{5}$$

Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + m^2 x = (D^2 + m^2) x = 0.$$

Son équation caractéristique

$$D^2 + m^2 = 0$$

admet les deux racines simples $\pm mi$. Elle aura donc pour

intégrale générale

$$C\cos mx + C_1 \sin mx,$$

ou C, C_1 sont des constantes arbitraires (des polynomes de degré zéro).

Revenons à l'équation à second membre (5)

$$(D^2 + m^2)x = \cos nt.$$

On en déduit

$$(6) \qquad (D^2 + n^2)(D^2 + m^2)x = (D^2 + n^2)\cos nt = 0 :$$

1° Si $n^2 \gtrless m^2$, cette dernière équation aura pour intégrale générale

$$A\cos nx + A_1 \sin nx + C\cos mx + C_1 \sin mx,$$

où A, A_1, C, C_1 sont des constantes arbitraires. L'équation (5) a donc une intégrale particulière de la forme

$$A\cos nx + A_1 \sin nx.$$

Substituons cette expression dans (5), il viendra

$$(-n^2 + m^2)(A\cos nx + A_1 \sin nx) = \cos nx,$$

d'où

$$A = \frac{1}{m^2 - n^2}; \quad A_1 = 0.$$

L'intégrale générale de (5) sera donc

$$C\cos mx + C_1 \sin mx + \frac{\cos nx}{m^2 - n^2};$$

2° Si $n^2 = m^2$, les équations (5) et (6) deviennent

$$(5)' \qquad (D^2 + m^2)\,x = \cos mt,$$

$$(6)' \qquad (D^2 + m^2)^2\,x = 0.$$

Cette dernière a pour intégrale générale

$$(C + At)\cos mt + (C_1 + A_1 t)\sin mt$$

et (5)′ admettra une intégrale particulière de la forme

$$t(A\cos mt + A_1 \sin mt).$$

Cette expression, substituée dans $(5)'$, donne

$$2m(-\mathrm{A}\sin mt + \mathrm{A}_1\cos mt) = \cos mt,$$

d'où

$$\mathrm{A} = 0, \quad \mathrm{A}_1 = \frac{1}{2m}.$$

L'intégrale générale de $(5)'$ sera donc

$$\mathrm{C}\cos mx + \mathrm{C}_1\sin mx + \frac{t\sin mt}{2m}.$$

138. Considérons un système d'équations linéaires à coefficients constants et sans seconds membres. Nous supposerons, pour fixer les idées, que ces équations soient au nombre de trois. Elles seront de la forme

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{L}\,x + \mathrm{M}\,y + \mathrm{N}\,z = 0, \\ \mathrm{L}_1 x + \mathrm{M}_1 y + \mathrm{N}_1 z = 0, \\ \mathrm{L}_2 x + \mathrm{M}_2 y + \mathrm{N}_2 z = 0, \end{cases}$$

L, M, ... désignant des facteurs symboliques tels que

$$a\mathrm{D}^m + a_1\mathrm{D}^{m-1} + \ldots + a_m.$$

Soit

$$\lambda = \alpha\mathrm{D}^\mu + \alpha_1\mathrm{D}^{\mu-1} + \ldots$$

une autre opération différentielle à coefficients constants. On a évidemment

$$\lambda(\mathrm{L}x + \mathrm{M}y + \mathrm{N}z) = 0.$$

....

On pourra donc remplacer le système (7) par le système obtenu en multipliant symboliquement une de ses équations par λ, et l'ajoutant à une autre, par exemple, par le système

$$(\mathrm{L} + \lambda\mathrm{L}_1)x + (\mathrm{M} + \lambda\mathrm{M}_1)y + (\mathrm{N} + \lambda\mathrm{N}_1)z = 0,$$
$$\mathrm{L}_1 x + \mathrm{M}_1 y + \mathrm{N}_1 z = 0,$$

....

On peut faire subir au système un autre genre de transformation.

Soit x' une nouvelle variable définie par la relation

$$x = x' + \lambda y.$$

On pourra remplacer le système proposé par le suivant

$$\begin{aligned} &L\,x' + (L\,\lambda + M\,)y + N\,z = 0, \\ &L_1 x' + (L_1\lambda + M_1)y + N_1 z = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Ces deux sortes d'opérations (combinaison des équations données et changements de variables) vont nous permettre d'intégrer le système.

139. Soit Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix}.$$

Soient

$$\begin{matrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{matrix}$$

ses mineurs ; δ leur plus grand commun diviseur.

Multiplions la première équation (7) par $\frac{l}{\delta}$, la seconde par $\frac{l_1}{\delta}$, la troisième par $\frac{l_2}{\delta}$ et ajoutons ; il vient

$$0 = \frac{Ll + L_1 l_1 + L_2 l_2}{\delta} x + \frac{Ml + M_1 l_1 + M_2 l_2}{\delta} y + \frac{Nl + N_1 l_1 + N_2 l_2}{\delta} z,$$

ou, d'après les propriétés des mineurs,

$$\frac{\Delta}{\delta} x = 0.$$

On trouvera de même

$$\frac{\Delta}{\delta} y = 0, \quad \frac{\Delta}{\delta} z = 0.$$

Donc x, y, z satisfont à l'équation différentielle unique

$$\frac{\Delta}{\delta} x = 0,$$

dont nous savons déterminer l'intégrale générale. On aura donc, en désignant par $s_1, s_2, \ldots$ les racines de l'équation caractéristique; par $\mu_1, \mu_2, \ldots$ leurs ordres de multiplicité :

$$x = P_1 e^{s_1 t} + P_2 e^{s_2 t} + \ldots,$$
$$y = Q_1 e^{s_1 t} + Q_2 e^{s_2 t} + \ldots,$$
$$z = R_1 e^{s_1 t} + R_2 e^{s_2 t} + \ldots,$$

P_1, Q_1, R_1 étant des polynomes de degré $\mu_1 - 1$; P_2, Q_2, R_2 des polynomes de degré $\mu_2 - 1, \ldots$.

Substituons ces valeurs dans les premiers membres des équations (7) et identifions le résultat à zéro. Nous obtiendrons un certain nombre de relations linéaires entre les coefficients de ces polynomes, et la solution contiendra autant de constantes arbitraires qu'il restera de coefficients indéterminés.

140. Si les équations proposées avaient des seconds membres de la forme

$$\Pi e^{st}, \quad \Pi_1 e^{st}, \ldots,$$

Π, Π_1 étant des polynomes de degré $\overline{\gtrless} \lambda$, on les ferait disparaître en multipliant les équations données par le facteur symbolique

$$(D - s)^{\lambda+1}$$

et l'on serait ramené au problème précédent.

Cette analyse sommaire suffit pour obtenir la solution générale, sauf le cas où Δ est identiquement nul. Mais pour traiter ce cas exceptionnel, et aussi pour déterminer *a priori* dans le cas général le nombre des constantes arbitraires, il nous faut serrer la question de plus près.

141. Nous considérerons le système proposé comme d'autant plus simple que le degré minimum de ceux des coefficients $L, \ldots, N_2$ qui ne sont pas identiquement nuls sera

plus petit. Ceci admis, proposons-nous de simplifier progressivement le système par les opérations indiquées ci-dessus (addition de lignes ou de colonnes).

Soit, pour fixer les idées, M_1 le coefficient de degré minimum dans le Tableau

$$\begin{matrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2. \end{matrix}$$

Divisant M par M_1, on pourra écrire

$$M = \lambda M_1 + R,$$

R étant de degré moindre que M_1 si M_1 ne divise pas M et pouvant être pris égal à M_1 si M_1 divise M.

Dans le premier cas, le système

$$\begin{matrix} L - \lambda L_1 & M - \lambda M_1 = R & N - \lambda N_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{matrix}$$

sera plus simple que le proposé. Dans le cas cas contraire, il aura deux coefficients égaux à la seconde colonne.

On pourra de même, ou simplifier le système, ou le remplacer par un autre, où M_2 soit remplacé par M_1. On obtiendra ainsi un système de la forme

$$\begin{matrix} L' & M_1 & N' \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L'_2 & M_1 & N'_2. \end{matrix}$$

Si l'un des coefficients L', N', L_1, N_1, L'_2, N'_2 n'est pas divisible par M_1, on pourra simplifier le système (par des additions de colonnes). Sinon on pourra rendre L' et N' égaux à M_1.

Nous sommes ainsi parvenu à un système où tous les coefficients sont des multiples du premier.

Soit généralement

$$\begin{matrix} \Lambda & A_1\Lambda & A_2\Lambda \\ B\Lambda & B_1\Lambda & B_2\Lambda \\ C\Lambda & C_1\Lambda & C_2\Lambda \end{matrix}$$

un semblable système. Par des soustractions de lignes, puis de colonnes, on pourra faire disparaître les coefficients de la première ligne ou de la première colonne, sauf le premier, et l'on obtiendra un système de la forme

$$\begin{matrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & B'_1\Lambda & B'_2\Lambda \\ 0 & C'_1\Lambda & C'_2\Lambda. \end{matrix}$$

Si B'_1, B'_2, C'_1, C'_2 ne sont pas nuls à la fois, on pourra de même remplacer le Tableau partiel

$$\begin{matrix} B'_1\Lambda & B'_2\Lambda \\ C'_1\Lambda & C'_2\Lambda \end{matrix}$$

par un autre, où le premier coefficient sera un multiple de Λ, tel que $\Lambda\Lambda_1$; le second et le troisième seront nuls, et le dernier sera un multiple de $\Lambda\Lambda_1$ tel que $\Lambda\Lambda_1\Lambda_2$.

Le Tableau sera ainsi ramené à la forme canonique

$$\begin{matrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda\Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda\Lambda_1\Lambda_2. \end{matrix}$$

Une partie des transformations que nous avons fait subir au Tableau sont dues à des changements de variables. Soient ξ, η, ζ les dernières variables indépendantes adoptées. Elles seront définies indépendamment les unes des autres par les équations linéaires

$$(8) \qquad \Lambda\xi = 0 \quad \Lambda\Lambda_1\eta = 0, \quad \Lambda\Lambda_1\Lambda_2\zeta = 0.$$

Le nombre des constantes arbitraires sera égal à la somme des degrés des polynomes Λ, $\Lambda\Lambda_1$, $\Lambda\Lambda_1\Lambda_2$ ou au degré de leur produit. Or ce produit est égal à Δ, car les additions de lignes ou de colonnes ne changent pas le déterminant.

On voit aisément qu'elles laissent également inaltérés : 1° le plus grand commun diviseur δ_1 des mineurs du premier

ordre, 2° le plus grand commun diviseur δ_2 des mineurs du second ordre, etc. Or, sur la forme réduite du Tableau, on a

$$\Lambda = \Lambda^3 \Lambda_1^2 \Lambda_2,$$
$$\delta_1 = \Lambda^2 \Lambda_1,$$
$$\delta_2 = \Lambda.$$

Ces équations permettraient de déterminer *a priori* Λ, Λ_1, Λ_2 à l'inspection du Tableau primitif.

142. Si le premier coefficient Λ se réduit à une constante, la première équation (8) ne sera plus une équation différentielle, mais donnera $\xi = 0$. Si Λ_1 se réduit aussi à une constante, on aura de même $\eta = 0$, etc.

Enfin, si Δ est nul, un ou plusieurs coefficients Λ, Λ_1, Λ_2 seront nuls. Soit par exemple $\Lambda_2 = 0$. Les deux premières équations (8) détermineront encore ξ, η; mais la dernière devenant identique, la fonction ζ restera arbitraire.

143. On peut ramener aux équations à coefficients constants les équations linéaires de la forme

$$(9) \qquad (\alpha t + \beta)^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(\alpha t + \beta)^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_n x = 0.$$

Posons en effet

$$\alpha t + \beta = e^u, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha dt = e^u du;$$

on aura

$$\frac{dx}{dt} = \alpha e^{-u} \frac{dx}{du},$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \alpha e^{-u} \frac{d\dfrac{dx}{dt}}{du} = \alpha^2 e^{-u}\left(-e^{-u}\frac{dx}{du} + e^{-u}\frac{d^2 x}{du^2}\right)$$

et, en général,

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \alpha^k e^{-ku} \mathrm{P}_k,$$

P_k désignant une fonction linéaire à coefficients constants

de $\frac{dx}{du}, \ldots, \frac{d^k x}{du^k}$. En effet, si cette proposition est établie pour le nombre k, elle sera encore vraie pour $k+1$; car on aura

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}x}{dt^{k+1}} &= \alpha^{k+1} e^{-u} \frac{de^{-ku}\mathrm{P}_k}{du}\\ &= \alpha^{k+1} e^{-u}\left(-ke^{-ku}\mathrm{P}_k + e^{-ku}\frac{d\mathrm{P}_k}{du}\right)\\ &= \alpha^{k+1} e^{-(k+1)u}\mathrm{P}_{k+1}.\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on aura pour déterminer x en fonction de u une équation linéaire à coefficients constants.

Si l'équation caractéristique correspondante a ses racines inégales, l'intégrale générale sera de la forme

$$x = \mathrm{C}_1 e^{s_1 u} + \mathrm{C}_2 e^{s_2 u} + \ldots = \mathrm{C}_1(\alpha t + \beta)^{s_1} + \mathrm{C}_2(\alpha t + \beta)^{s_2} + \ldots.$$

S'il y a des racines multiples, à chacune d'elles, s_1, correspondra comme solution une expression de la forme

$$\begin{aligned}&e^{s_1 u}(\mathrm{C} + \mathrm{C}_1 u + \ldots + \mathrm{C}_{\mu-1} u^{\mu-1})\\ &= (\alpha t + \beta)^{s_1}[\mathrm{C} + \mathrm{C}_1 \log(\alpha t + \beta) + \ldots + \mathrm{C}_{\mu-1} \log^{\mu-1}(\alpha t + \beta)].\end{aligned}$$

III. — Intégration par des séries.

144. Considérons une équation linéaire sans second membre

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n x = 0$$

dont les coefficients soient uniformes en t et n'aient que des points critiques isolés.

Nous avons vu (**116**) que la forme générale de ses intégrales est la suivante

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n,$$

où $c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes, et $x_1, \ldots, x_n$ un système quelconque de n intégrales indépendantes. Nous savons

en outre (96) que ces intégrales n'ont pas d'autres points critiques que ceux des fonctions $p_1, \ldots, p_n$.

Cherchons comment se comportent ces intégrales lorsque la variable indépendante t tourne autour d'un de ces points critiques que, pour plus de simplicité, nous supposerons situé à l'origine des coordonnées.

L'intégrale considérée x' varie avec t, mais sans cesser de satisfaire à l'équation différentielle. Lorsque t revient à sa valeur initiale, $p_1, \ldots, p_n$ reprenant également leurs valeurs initiales, l'équation différentielle redevient ce qu'elle était primitivement; et l'intégrale transformée, devant satisfaire à cette équation, sera de la forme

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n.$$

En particulier, soit x_i l'une quelconque des intégrales indépendantes $x_1, \ldots, x_n$; elle sera transformée en une expression de la forme

$$c_{i1} x_1 + \ldots + c_{in} x_n,$$

de telle sorte que la rotation de t autour de l'origine aura pour résultat de faire subir aux intégrales $x_1, \ldots, x_n$ une substitution linéaire telle que

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & c_{11} x_1 + \ldots + c_{1n} x_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & c_{n1} x_1 + \ldots + c_{nn} x_n \end{vmatrix}.$$

Le déterminant des coefficients c sera d'ailleurs différent de zéro; car, s'il était nul, les intégrales transformées seraient liées par une relation linéaire, qui continuerait d'avoir lieu en faisant rétrograder t en sens contraire de son mouvement primitif. La même relation subsisterait donc entre les intégrales primitives $x_1, \ldots, x_n$, contrairement à l'hypothèse faite, que ces intégrales sont indépendantes.

145. Soit

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11} x_1 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \alpha_{n1} x + \ldots + \alpha_{nn} x_n \end{aligned}$$

un autre système quelconque d'intégrales indépendantes. La substitution S, opérée sur les x, remplacera les y par d'autres fonctions linéaires des x, ou, comme les x s'expriment linéairement au moyen des y, par des fonctions linéaires des y.

La rotation autour de l'origine aura donc également pour effet de faire subir aux y une substitution linéaire. Nous pouvons nous proposer de profiter de l'indétermination des coefficients α pour simplifier le plus possible l'expression de cette substitution.

Cherchons tout d'abord s'il existe quelque intégrale

$$y = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$$

qui se reproduise multipliée par un facteur constant s. Il faut pour cela qu'on ait

$$\alpha_1(c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n) + \ldots + \alpha_n(c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n) \\ = s(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n);$$

d'où les équations de condition

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (c_{11} - s)\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \ldots + c_{n1}\alpha_n = 0, \\ c_{12}\alpha_1 + (c_{22} - s)\alpha_2 + \ldots + c_{n2}\alpha_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{1n}\alpha_1 + c_{2n}\alpha_2 + \ldots + (c_{nn} - s)\alpha_n = 0. \end{array} \right.$$

Les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne pouvant être nuls à la fois, il faudra que le *déterminant caractéristique*

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} - s & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} - s & \ldots & c_{n2} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} - s \end{vmatrix}$$

s'annule.

Supposons d'abord que l'équation $\Delta = 0$ ait n racines inégales $s_1, \ldots, s_n$. Soit s_i l'une d'elles. En la substituant dans les équations (1) elles deviendront compatibles et détermineront les rapports des coefficients α. Il existera donc

une fonction y_i qui se reproduit multipliée par s_i. D'ailleurs les n fonctions $y_1, \ldots, y_n$ ainsi obtenues sont indépendantes; car, si elles étaient liées par une relation

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0,$$

la même relation devant subsister constamment entre leurs transformées, on aurait, en faisant faire $n - 1$ révolutions successives autour de l'origine à la variable t,

$$\begin{array}{l} c_1 s_1 y_1 + \ldots + c_n s_n y_n \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_1 s_1^{n-1} y + \ldots + c_n s_n^{n-1} y_n = 0, \end{array}$$

équations incompatibles, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^{n-1} & s_2^{n-1} & \ldots & s_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ étant inégaux ; et, d'autre part, les intégrales $c_1 y_1, \ldots, c_n y_n$ ne peuvent être toutes nulles.

Donc, en choisissant $y_1, \ldots, y_n$ comme système d'intégrales indépendantes, la substitution S prendra la forme très simple

$$S = \begin{vmatrix} y_1 & s_1 y_1 \\ \ldots & \ldots \\ y_n & s_n y_n \end{vmatrix}.$$

146. Si nous avions choisi un autre système quelconque d'intégrales indépendantes, tel que $z_1, \ldots, z_n$, la substitution S aurait pris une forme telle que

$$\begin{vmatrix} z_1 & d_{11} z_1 + \ldots + d_{1n} z_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n & d_{n1} z_1 + \ldots + d_{nn} z_n \end{vmatrix};$$

$y_1, \ldots, y_n$ deviendraient des fonctions linéaires de $z_1, \ldots, z_n$, lesquelles se reproduisent respectivement multipliées par $s_1, \ldots, s_n$.

Ces multiplicateurs devront satisfaire à l'équation

$$\begin{vmatrix} d_{11}-s & d_{21} & \dots & d_{n1} \\ d_{12} & d_{22}-s & \dots & d_{n2} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ d_{1n} & d_{2n} & \dots & d_{nn}-s \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation doit donc être identique à l'équation $\Delta = 0$, qui a les mêmes racines. On voit donc que les coefficients de l'équation en s ne dépendent pas du choix des intégrales indépendantes : ce sont des *invariants*.

147. Les résultats sont un peu plus compliqués lorsque l'équation en s a des racines égales. Nous allons établir la proposition suivante :

On peut toujours trouver un système d'intégrales indépendantes formant une ou plusieurs séries $y_1, \dots, y_m$; $y'_1, \dots, y'_{m'}$; ... telles que S *remplace les intégrales d'une même série, $y_1, \dots, y_\mu, \dots, y_m$ respectivement par $s_i y_1, \dots, s_i(y_\mu + y_{\mu-1}), \dots, s_i(y_m + y_{m-1})$, s_i étant une racine de l'équation caractéristique.*

Ce théorème étant supposé établi pour les substitutions à moins de n variables, nous allons démontrer qu'il subsiste pour une substitution S à n variables.

Soit s_1 une des racines de l'équation caractéristique. Il existe une intégrale y que S multiplie par s_1. En la prenant pour intégrale indépendante à la place d'une des intégrales primitives x_1, S prendra la forme

$$S = | y, x_2, \dots, x_n \quad s_1 y, X_2 + \lambda_2 y, \dots, X_n + \lambda_n y |,$$

$X_2, \dots, X_n$ étant des fonctions linéaires de $x_2, \dots, x_n$, et aura pour déterminant caractéristique

$$(s_1 - s)\Delta' = \Delta,$$

Δ' désignant le déterminant caractéristique de la substitution

$$S' = | x_2, \dots, x_n \quad X_2, \dots, X_n |.$$

Nous pourrons par hypothèse changer de variables, de manière à mettre S' sous la forme

$$S' = \begin{vmatrix} y_1, & \ldots, y_m & s_i y_1, & \ldots, s_i(y_m + y_{m-1}) \\ y'_1, & \ldots, y'_{m'} & s_{i'} y'_1, & \ldots, s_{i'}(y'_{m'} + y'_{m'-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

où s_i, $s_{i'}$, ... sont les racines de $\Delta' = 0$.

Ce même changement de variables, opéré sur S, la réduira à la forme

$$S = \begin{vmatrix} y & & s_1 y & \\ y_1, & \ldots, y_m & s_i y_1 + \lambda_1 y, & \ldots, s_i(y_m + y_{m-1}) + \lambda_m y \\ y'_1, & \ldots, y'_{m'} & s_{i'} y'_1 + \lambda'_1 y, & \ldots, s_{i'}(y'_{m'} + y'_{m'-1}) + \lambda'_{m'} y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Changeons de variables en posant

$$y_k + \alpha_k y = Y_k.$$

S remplacera $Y_1, \ldots, Y_k, \ldots$ par

$$\begin{gathered} s_i y_1 + \lambda_1 y + \alpha_1 s_1 y = s_i Y_1 + \mu_1 y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ s_i(y_k + y_{k-1}) + \lambda_k y + \alpha_k s_1 y = s_1(Y_k + Y_{k-1}) + \mu_k y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \alpha_1(s_1 - s_i) &= \mu_1, \\ \lambda_k + \alpha_k(s_1 - s_i) - \alpha_{k-1} s_i &= \mu_k. \end{aligned}$$

La substitution S aura donc conservé sa forme générale ; mais on peut disposer des indéterminées $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ de manière à annuler tous les coefficients μ si $s_1 \gtrless s_i$, tous ces coefficients, sauf le premier μ_1, si $s_1 = s_i$.

Nous pourrons faire disparaître de même les coefficients λ' (sauf le premier, si $s_{i'} = s_1$).

Nous pouvons ainsi ramener S à une forme telle que la

suivante :

$$S = \left| \begin{array}{ll} y & s_1 y \\ Y_1, \ldots, Y_m & s_1 Y_1 + \mu_1 y, \ldots, s_1(Y_m + Y_{m-1}) \\ Y'_1, \ldots, Y'_{m'} & s_1 Y'_1 + \mu'_1 y, \ldots, s_1(Y'_{m'} + Y'_{m'-1}) \\ \ldots, \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Z_1, \ldots, Z_p & s_2 Z_1, \qquad \ldots, s_2(Z_p + Z_{p-1}) \\ \ldots, \ldots, \ldots & \ldots, \qquad \ldots, \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|.$$

148. Supposons que, parmi les coefficients μ_1, μ'_1, ... que contient encore cette expression, il en existe au moins deux μ_1 et μ'_1 qui ne soient pas nuls, et soit, pour fixer les idées, $m' \overline{\gtrless} m$. Prenons pour intégrales indépendantes, à la place de $Y'_1, \ldots, Y'_{m'}$, les suivantes :

$$Y'_k - \frac{\mu'_1}{\mu_1} Y_k = U_k.$$

S remplacera évidemment $U_1, \ldots, U_k, \ldots$ par

$$s_1 U_1, \ \ldots, \ s_1(U_k + U_{k-1}), \ \ldots,$$

de telle sorte que le terme $\mu'_1 y$ aura disparu.

On pourra ainsi faire disparaître tous les termes en y, sauf un seul, tel que $\mu_1 y$.

Supposons donc que μ'_1, ... soient nuls. Si $\mu_1 \gtrless 0$, on n'aura qu'à poser

$$\mu_1 y = s_1 Y_0$$

pour ramener S à la forme canonique cherchée

$$= \left| \begin{array}{ll} Y_0, \ Y_1, \ \ldots; & s_1 Y_0, \ s_1(Y_1 + Y_0), \ \ldots \\ Y'_1, \ Y'_2, \ \ldots; & s_1 Y'_1, \ s_1(Y'_2 + Y'_1), \ \ldots \\ \ldots, \ \ldots, \ \ldots; & \ldots, \ \ldots\ldots\ldots, \ \ldots \\ Z_1, \ Z_2, \ \ldots; & s_2 Z_1, \ s_2(Z_2 + Z_1), \ \ldots \\ \ldots, \ \ldots, \ \ldots; & \ldots, \ \ldots\ldots\ldots, \ \ldots \end{array} \right|.$$

Si μ_1 était nul, S aurait déjà la forme demandée, la première série de variables étant formée de la seule variable y.

149. La substitution S étant ramenée à la forme canonique que nous venons d'indiquer, soient $y_0, y_1, \ldots, y_k$ une des séries formées par les nouvelles intégrales auxquelles elle est rapportée ; s la racine correspondante de l'équation $\Delta = 0$. Proposons-nous de déterminer la forme générale de ces intégrales.

Posons, pour abréger, $\frac{1}{2\pi i}\log s = r$ et faisons

$$y_0 = t^r z_0, \quad \ldots, \quad y_k = t^r z_k,$$

les z étant de nouvelles inconnues. Lorsqu'on tourne autour de l'origine, t^r se reproduit multiplié par $e^{2\pi i r} = s$; donc les z devront subir l'altération suivante :

$$| \, z_0, \ \ldots, \ z_k, \quad z_0, \ \ldots, \ z_k + z_{k-1} \, |.$$

Pour trouver la forme générale des fonctions qui jouissent de cette propriété, nous remarquerons que la fonction $\frac{1}{2\pi i}\log t$ s'accroît de l'unité par une rotation autour de l'origine. Si donc nous posons

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i}\log t, \quad \ldots, \quad \theta_k = \frac{\theta_1(\theta_1 - 1)\ldots(\theta_1 - k + 1)}{1.2\ldots k},$$

cette rotation changera θ_1 en $\theta_1 + 1$ et, plus généralement, θ_k en

$$\theta_k + \frac{(\theta_1 + 1)\theta_1\ldots(\theta_1 - k + 2)}{1.2\ldots k} - \frac{\theta_1(\theta_1 - 1)\ldots(\theta_1 - k + 1)}{1.2\ldots k} = \theta_k + \theta_{k-1}.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} z_0 &= u_0, \\ z_1 &= \theta_1 u_0 + u_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_k &= \theta_k u_0 + \theta_{k-1} u_1 + \ldots + u_k, \end{aligned}$$

$u_0, u_1, \ldots, u_k$ étant de nouvelles fonctions. Pour que $z_0, \ldots,$

z_k subissent la transformation demandée par une rotation autour de l'origine, il sera nécessaire et suffisant que $u_0, \ldots, u_k$ restent invariables.

On obtiendra donc, en remplaçant les fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_k$ par leurs valeurs en t, pour les intégrales cherchées $y_0, \ldots, y_k$, des expressions de la forme

$$\begin{aligned} y_0 &= t^r \mathrm{M}_0, \\ y_1 &= t^r(\mathrm{M}_1 \log t + \mathrm{N}_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_k &= t^r(\mathrm{M}_k \log^k t + \mathrm{N}_k \log^{k-1} t + \ldots), \end{aligned}$$

$\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{N}_1, \ldots$ étant des fonctions monodromes aux environs de l'origine. Ces fonctions s'expriment, d'ailleurs, linéairement au moyen des $k+1$ fonctions distinctes $u_0, \ldots, u_k$. En particulier, les fonctions $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k$ de la première colonne ne diffèrent que par des facteurs constants.

150. Les fonctions monodromes $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{N}_1, \ldots$ seront développables en série suivant les puissances positives et négatives de t. Si la série des puissances négatives est limitée pour toutes les fonctions qui figurent dans une des intégrales ci-dessus, cette intégrale sera dite *régulière* aux environs du point $t = 0$.

Il est intéressant de reconnaître dans quel cas l'équation proposée admet un système d'intégrales indépendantes toutes régulières. M. *Fuchs* a établi à cet égard le théorème suivant:

Pour que l'équation

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n = 0$$

admette n intégrales indépendantes régulières aux environs du point $t = 0$, il faut et il suffit que, pour chacun des coefficients de l'équation, tel que p_i, le point $t = 0$ soit un point ordinaire, ou un pôle dont l'ordre de multiplicité ne surpasse pas i.

Démontrons d'abord que cette condition est nécessaire.

Il est manifeste, en premier lieu : 1° que toute expression régulière, telle que

$$t^r(\mathrm{M}\log^i t + \mathrm{N}\log^{i-1} t + \ldots + \mathrm{R}),$$

a une dérivée

$$t^r\left(\frac{r}{t}(\mathrm{M}\log^i t + \ldots + \mathrm{R}) + \frac{i\mathrm{M}\log^{i-1} t + \ldots}{t} + \mathrm{M}'\log^i t + \ldots\right)$$

également régulière; 2° que tout produit d'expressions régulières est une expression régulière.

Si donc les intégrales $y_1, \ldots, y_n$ d'une équation d'ordre n sont régulières, les coefficients de l'équation, mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} x & y_1 & \ldots & y_n \\ x' & y'_1 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^n & y^n_1 & \ldots & y^n_n \end{vmatrix} = 0,$$

seront des sommes d'expressions régulières, telles que

$$(2)\qquad t^r(\mathrm{M}\log^i t + \ldots) + t^{r_1}(\mathrm{M}_1\log^{i_1} t + \ldots) + \ldots.$$

D'ailleurs, lorsque t tourne autour de l'origine, $y_1, \ldots, y_n$ subissant une substitution linéaire, leurs dérivées d'un ordre quelconque subissant la même substitution, les coefficients, qui sont des déterminants formés avec ces quantités, se reproduiront multipliés par le déterminant δ de la substitution.

Or, pour qu'une expression de la forme (2) jouisse de cette propriété, il faut manifestement que les logarithmes disparaissent et que les exposants $r, r_1, \ldots$ ne diffèrent de la quantité $\frac{1}{2\pi i}\log\delta = \beta$ que de nombres entiers. Les coefficients de l'équation seront donc de la forme $t^\beta \mathrm{P}$, P étant une fonction de la même espèce que M, M_1, ..., c'est-à-dire ayant un point ordinaire ou un pôle au point $t = 0$.

Si maintenant nous divisons l'équation par le coefficient

de la plus haute dérivée, t^β disparaîtra et il viendra

$$\frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n = 0,$$

les coefficients $p_1, \ldots, p_n$ étant des quotients de fonctions pour lesquelles $t = 0$ est un point ordinaire ou un pôle, et jouissant évidemment de la même propriété.

Il reste à montrer que l'ordre de multiplicité du pôle $t = 0$ pour le coefficient p_i ne peut surpasser i.

151. Posons à cet effet

$$x = T\xi,$$

ξ étant une nouvelle variable et T une fonction de t qui soit de la forme

$$T = ct^\beta + c_1 t^{\beta+1} + \ldots \tag{3}$$

Nous obtiendrons une équation transformée

$$T\frac{d^n\xi}{dt^n} + \left.\begin{array}{l} nT' \\ + p_1 T \end{array}\right| \frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}} + \left.\begin{array}{r} \frac{n(n-1)}{2}T'' \\ + (n-1)p_1 T' \\ + p_2 T \end{array}\right| \frac{d^{n-2}\xi}{dt^{n-2}} + \ldots = 0$$

ou, en divisant par T,

$$\frac{d^n\xi}{dt^n} + \left(n\frac{T'}{T} + p_1\right)\frac{d^{n-1}\xi}{dt^{n-1}} + \left[\frac{n(n-1)}{2}\frac{T''}{T} + (n-1)p_1\frac{T'}{T} + p_2\right]\frac{d^{n-2}\xi}{dt^{n-2}} + \ldots = 0.$$

Si l'équation primitive a ses intégrales régulières, il en sera de même de cette nouvelle équation, dont les intégrales s'obtiennent en multipliant les précédentes par l'expression régulière

$$\frac{1}{T} = t^{-\beta}(d + d_1 t + \ldots).$$

D'autre part, $t = 0$ étant un pôle d'ordre 1 pour $\frac{T'}{T}$,

d'ordre 2 pour $\frac{T''}{T}$, ..., on voit que, si ce point est un pôle d'ordre k au plus par rapport à chaque coefficient p_k de l'équation primitive, la même propriété subsistera pour l'équation transformée.

Réciproquement, si l'équation transformée jouit de cette propriété, l'équation primitive, qui s'en déduit par la substitution

$$\xi = \frac{1}{T} x,$$

la possédera également

Il suffira donc, pour établir le théorème pour l'équation primitive, de le démontrer pour l'équation transformée.

Cela posé, il résulte de l'analyse du n° **149** que l'équation en x admet nécessairement au moins une intégrale $y_0 = t^r M_0$ dépourvue de logarithmes. Cette intégrale étant régulière, par hypothèse, sera de la forme (3). En la prenant pour T, la transformée en ξ, admettant comme intégrale la constante 1, ne contiendra pas de terme en ξ et se réduira à la forme

$$\frac{d^n \xi}{dt^n} + q_1 \frac{d^{n-1} \xi}{dt^{n-1}} + \ldots + q_{n-1} \frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Posant $\frac{d\xi}{dt} = \xi'$, on aura l'équation d'ordre $n - 1$

$$\frac{d^{n-1} \xi'}{dt^{n-1}} + q_1 \frac{d^{n-2} \xi'}{dt^{n-2}} + \ldots + q_{n-1} \xi' = 0$$

dont les intégrales, étant les dérivées de celles de la précédente, seront encore régulières. Si donc le théorème est supposé vrai pour les équations d'ordre $n - 1$, $t = 0$ sera un pôle d'ordre k au plus pour q_k. Le théorème sera donc vrai pour l'équation en ξ et pour l'équation primitive en x.

Il suffit donc d'établir le théorème pour les équations du premier ordre. Or soit

$$\frac{dx}{dt} + p_1 x = 0$$

une semblable équation ; si elle admet une intégrale régulière, elle sera de la forme

$$T = ct^r + c_1 t^{r+1} + \dots.$$

Or, si $t = 0$ est pour p_1 un pôle dont l'ordre μ de multiplicité soit > 1, de telle sorte qu'on ait

$$p_1 = at^{-\mu} + a_1 t^{-\mu+1} + \dots$$

et qu'on substitue pour x une valeur de la forme T, le résultat de la substitution contiendra un terme $act^{-\mu+\beta}$ de degré moindre que tous les autres et qui ne pourra se réduire avec eux ; donc il ne pourra pas exister d'intégrale régulière.

152. Réciproquement, nous allons établir que toute équation différentielle qui satisfait aux conditions énoncées a n intégrales régulières.

Multiplions l'équation par t^n ; il viendra

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + p_1 t . t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + p_2 t^2 . t^{n-2} \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots = 0.$$

L'origine étant, par hypothèse, un point ordinaire pour les fonctions $p_1 t$, $p_2 t^2$, ..., on pourra écrire

$$p_1 t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots,$$
$$p_2 t^2 = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Soit ρ un rayon de convergence commun à ces séries ; on aura

$$|a_m| \leqq \frac{M}{\rho^m}, \qquad |b_m| \leqq \frac{M}{\rho^m}, \qquad \dots$$

M désignant une constante.

Si nous substituons dans le premier membre de l'équation proposée la valeur $x = t^r$, nous obtiendrons le résultat suivant

$$F(r) t^r + \varphi_1(r) t^{r+1} + \varphi_2(r) t^{r+2} + \dots = \Phi(t, r) t^r$$

en posant, pour abréger,

$$r(r-1)\dots(r-n+1)+a_0 r(r-1)\dots(r-n+2)$$
$$+b_0 r(r-1)\dots(r-n+3)+\dots=F(r).$$

$$a_m r(r-1)\dots(r-n+2)$$
$$+b_m r(r-1)\dots(r-n+3)+\dots=\varphi_m(r).$$

En substituant la valeur

$$x=t^r\log^\lambda t=\frac{d^\lambda}{dr^\lambda}t^r,$$

on obtiendrait évidemment comme résultat

$$\frac{d^\lambda}{dr^\lambda}\Phi(t,r)t^r=\Phi t^r\log^\lambda t+\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial r}t^r\log^{\lambda-1}t$$
$$+\frac{\lambda(\lambda-1)}{1.2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}t^r\log^{\lambda-2}t+\dots+\frac{\partial^\lambda\Phi}{\partial r^\lambda}t^r.$$

Nous nommerons *équation déterminante* l'équation de degré n

$$F(r)=0.$$

Groupons ses racines en séries, en réunissant ensemble toutes celles dont la différence est nulle ou égale à un entier réel. Nous allons démontrer qu'à chaque série contenant m racines correspondent m intégrales régulières de l'équation.

153. Admettons, pour fixer les idées, que nous ayons une série contenant quatre racines, dont deux égales à α et deux égales à $\alpha+i$, i désignant un entier positif. Nous allons obtenir une intégrale régulière de la forme suivante :

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}x&=\sum_0^{i-1}t^{\alpha+\mu}(c_\mu+c'_\mu\log t)\\&+\sum_i^\infty t^{\alpha+\mu}(c_\mu+c'_\mu\log t+\dots+c'''_\mu\log^3 t),\end{aligned}\right.$$

dans laquelle quatre des coefficients c resteront arbitraires, ce qui donne bien quatre intégrales particulières distinctes.

Substituons en effet la valeur précédente dans l'équation proposée, et égalons à zéro les coefficients des termes en

$$t^{\alpha+\mu}\log^3 t,\quad t^{\alpha+\mu}\log^2 t,\quad t^{\alpha+\mu}\log t,\quad t^{\alpha+\mu};$$

il viendra

$$(5)\left\{\begin{aligned}
&\mathrm{F}\,(\alpha+\mu)\,c'''_\mu+\varphi_1(\alpha+\mu-1)\,c'''_{\mu-1}+\varphi_2(\alpha+\mu-2)\,c'''_{\mu-2}+\ldots=0,\\
&\mathrm{F}\,(\alpha+\mu)\,c''_\mu+\varphi_1(\alpha+\mu-1)\,c''_{\mu-1}+\varphi_2(\alpha+\mu-2)\,c''_{\mu-2}+\ldots\\
&+3\,[\mathrm{F}'(\alpha+\mu)\,c'''_\mu+\varphi'_1(\alpha+\mu-1)\,c'''_{\mu-1}+\varphi'_2(\alpha+\mu-2)\,c'''_{\mu-2}+\ldots]=0,\\
&\mathrm{F}\,(\alpha+\mu)\,c'_\mu+\varphi_1(\alpha+\mu-1)\,c'_{\mu-1}+\varphi_2(\alpha+\mu-2)\,c'_{\mu-2}+\ldots\\
&+2\,[\mathrm{F}'(\alpha+\mu)\,c''_\mu+\varphi'_1(\alpha+\mu-1)\,c''_{\mu-1}+\varphi'_2(\alpha+\mu-2)\,c''_{\mu-2}+\ldots]\\
&+3\,[\mathrm{F}''(\alpha+\mu)\,c'''_\mu+\varphi''_1(\alpha+\mu-1)\,c'''_{\mu-1}+\varphi''_2(\alpha+\mu-2)\,c'''_{\mu-2}+\ldots]=0,\\
&\mathrm{F}\,(\alpha+\mu)\,c_\mu+\varphi_1(\alpha+\mu-1)\,c_{\mu-1}+\varphi_2(\alpha+\mu-2)\,c_{\mu-2}+\ldots\\
&+\mathrm{F}'(\alpha+\mu)\,c'_\mu+\varphi'_1(\alpha+\mu-1)\,c'_{\mu-1}+\varphi'_2(\alpha+\mu-2)\,c'_{\mu-2}+\ldots\\
&+\mathrm{F}''(\alpha+\mu)\,c''_\mu+\varphi''_1(\alpha+\mu-1)\,c''_{\mu-1}+\varphi''_2(\alpha+\mu-2)\,c''_{\mu-2}+\ldots\\
&+\mathrm{F}'''(\alpha+\mu)\,c'''_\mu+\varphi'''_1(\alpha+\mu-1)\,c'''_{\mu-1}+\varphi'_2(\alpha+\mu-2)\,c'''_{\mu-2}+\ldots=0.
\end{aligned}\right.$$

Dans les deux premières équations, on aura à donner à μ toutes les valeurs de i à ∞, dans les deux dernières toutes les valeurs de o à ∞; d'ailleurs les séries qui forment les premiers membres se limiteront d'elles-mêmes, ceux des coefficients c'', c''' dont l'indice serait $< i$ et ceux des coefficients c, c' dont l'indice serait <0 étant identiquement nuls.

Pour toute valeur de μ supérieure à i, $\mathrm{F}(\alpha+\mu)$ étant $\gtrless 0$, ces équations donneront c'''_μ, c''_μ, c'_μ, c_μ en fonction des coefficients d'indice moindre. Pour $\mu=i$ les deux premières équations deviennent identiques, car elles se réduisent à

$$\mathrm{F}(\alpha+i)\,c'''_i=0,\qquad \mathrm{F}(\alpha+i)\,c''_i+3\,\mathrm{F}'(\alpha+i)\,c'''_i=0;$$

et $\alpha+i$ étant racine double de l'équation déterminante, $\mathrm{F}(\alpha+i)$ et $\mathrm{F}'(\alpha+i)$ s'annulent; mais $\mathrm{F}''(\alpha+i)$ étant $\gtrless 0$, les deux dernières équations détermineront c'''_i, c''_i.

Si $i>\mu>0$, il ne reste plus que deux équations qui déterminent c'_μ, c_μ en fonction des coefficients précédents. Enfin, pour $\mu=0$, ces équations deviennent identiques. La détermination des coefficients peut donc toujours se faire, et il en reste quatre arbitraires, à savoir c'_i, c_i, c'_0, c_0.

154. Il reste toutefois à prouver la convergence de la série obtenue. Pour l'établir, nous remarquerons que $F(\alpha+\mu)$ étant un polynome en μ d'ordre n, les valeurs de $c'''_\mu, \ldots, c_\mu$ en fonction des coefficients précédents fournies par les équations (5), lorsque $\mu > i$, seront de la forme

$$\begin{aligned} c^k_\mu = \sum_{\lambda,\nu} \frac{1}{\mu^n} [& P_{0k\nu}\varphi_\lambda(\alpha+\mu-\lambda) \\ & + P_{1k\nu}\varphi'_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)+\ldots+P_{3k\nu}\varphi'''_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)] c^\nu_{\mu-\lambda} \\ & (\lambda=1,2,\ldots,\mu; \qquad \nu=0,1,2,3), \end{aligned}$$

$P_{0k\nu}, \ldots, P_{3k\nu}$ étant des fonctions rationnelles en μ, dont le dénominateur est d'un degré au moins égal à celui du numérateur (et dont quelques-unes sont nulles).

Nous obtiendrons évidemment une limite supérieure du module des coefficients cherchés en remplaçant les fonctions P, $\varphi_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)$, etc., et enfin les coefficients $c^\nu_{\mu-\lambda}$ par des limites supérieures de leurs modules.

Or les fonctions P tendant pour $\mu=\infty$ vers des limites déterminées, leurs modules seront constamment inférieurs à une quantité fixe θ_1.

Nous obtiendrons, d'autre part, une limite supérieure du module de l'expression

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\alpha+\mu-\lambda) \\ = \quad & a_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)(\alpha+\mu-\lambda-1)\ldots(\alpha+\mu-\lambda-n+2) \\ & + b_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)(\alpha+\mu-\lambda-1)\ldots(\alpha+\mu-\lambda-n+3) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en remplaçant a_λ, b_λ, ... par la limite supérieure de leurs modules $\frac{M}{\rho^\lambda}$ et les facteurs $\alpha+\mu-\lambda$, ... par $|\alpha|+\mu+n$.

On trouvera ainsi

$$\begin{aligned} |\varphi_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)| & \overline{\overline{<}} \frac{M}{\rho^\lambda}[(|\alpha|+\mu+n)^{n-1}+(|\alpha|+\mu+n)^{n-2}+\ldots \\ & \overline{\overline{<}} \frac{M}{\rho^\lambda}\theta_2\mu^{n-1}, \end{aligned}$$

θ_2 désignant une quantité limitée.

Le même procédé donnera

$$|\varphi'_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)| \overline{\overline{<}} \frac{M}{\rho^\lambda}\theta_3\mu^{n-2} \overline{\overline{<}} \frac{M}{\rho^\lambda}\theta_3\mu^{n-1},$$

$$|\varphi''_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)| \overline{\overline{<}} \frac{M}{\rho^\lambda}\theta_4\mu^{n-1},$$

$$|\varphi'''_\lambda(\alpha+\mu-\lambda)| \overline{\overline{<}} \frac{M}{\rho^\lambda}\theta_5\mu^{n-1}$$

et, par suite,

$$|c^k_\mu| \overline{\overline{<}} \sum_{\lambda,\nu} \frac{\theta}{\mu\rho^\lambda}|c^\nu_{\mu-\lambda}|,$$

θ désignant une quantité fixe.

Cette formule n'est établie que pour les coefficients dont l'indice inférieur surpasse i; mais, les précédents étant en nombre limité, on pourra toujours prendre θ assez grand pour qu'elle soit encore satisfaite pour ceux-ci.

Faisons successivement $k = 0, 1, 2, 3$, ajoutons et multiplions par ρ^μ; enfin posons, pour abréger,

$$\rho(|c_\mu| + |c'_\mu| + |c''_\mu| + |c'''_\mu|) = d_\mu;$$

il viendra

$$d_\mu \overline{\overline{<}} \frac{4\theta}{\mu}\sum_1^\mu d_{\mu-\lambda} \overline{\overline{<}} \frac{4\theta}{\mu}\sum_0^{\mu-1} d_\lambda.$$

Si donc nous posons pour abréger

$$\sum_0^\mu d_\mu = S_\mu,$$

et si nous désignons par m un entier moindre que μ choisi à volonté, nous aurons

$$S_\mu \overline{\overline{<}} \left(1+\frac{4\theta}{\mu}\right)S_{\mu-1} < \left(1+\frac{4\theta}{m}\right)S_{\mu-1} < \left(1+\frac{4\theta}{m}\right)^{\mu-m} S_m$$

et par suite

$$|c_\mu^k| \overline{<} \frac{1}{\rho^\mu} S_\mu < \frac{\left(1+\frac{4\theta}{m}\right)^{\mu-m}}{\rho^\mu} S_m,$$

$$\left(\frac{\rho}{1+\frac{4\theta}{m}}\right)^\mu |c_\mu^k| < S_m.$$

Cette inégalité prouve que la série (4) est convergente dans un cercle de rayon $\frac{\rho}{1+\frac{4\theta}{m}}$. D'ailleurs m peut être pris aussi grand qu'on veut; elle le sera donc dans un cercle de rayon ρ.

155. Si la valeur de c_i''' déduite des équations (5) s'annule (il faut pour cela qu'un certain déterminant, qu'il serait facile d'écrire, soit égal à zéro), tous les coefficients c''', qui s'expriment linéairement en fonction de celui-là, s'annuleront également, de sorte que tous les termes en $\log^3 t$ disparaîtront de l'expression (4).

Si l'on a en outre $c_i'' = 0$, les termes en $\log^2 t$ disparaîtront aussi; mais, c_0' et c_1' étant arbitraires, il restera toujours des termes en $\log t$.

Pour que les logarithmes pussent disparaître entièrement de l'intégrale, il serait évidemment nécessaire que la série de racines que nous avons considérée ne contînt que des racines simples.

Remarquons enfin qu'il peut se faire que les racines de l'équation déterminante soient des entiers positifs et que les intégrales ne contiennent pas de logarithmes. Dans ce cas, le point $t = 0$ ne sera pas un point critique pour les intégrales.

Ainsi l'équation

$$t\frac{dx}{dt} + (-m + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)x = 0,$$

où m est supposé entier et positif, a pour équation détermi-

nante

$$r - m = 0$$

et son intégrale sera de la forme

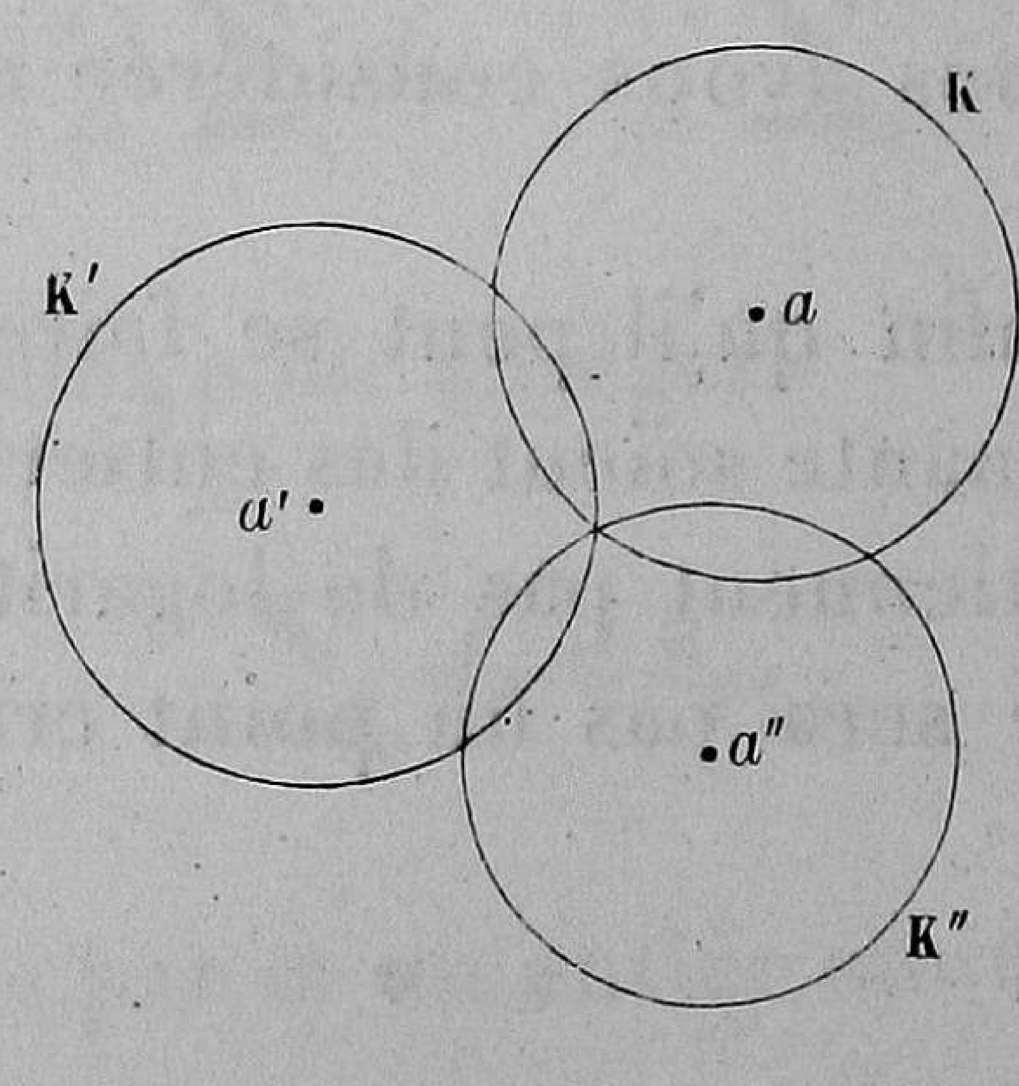
$$x = c_0 t^m + c_1 t^{m+1} + \ldots.$$

156. Nous venons d'établir que, lorsque l'équation différentielle proposée a toutes ses intégrales régulières, on peut les obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. Sachant d'ailleurs que, lorsque t tourne autour de l'origine, t^r se reproduit multiplié par $e^{2r\pi i}$ et $\log t$ se change en $\log t + 2\pi i$, on voit aisément, par la comparaison des développements obtenus, quelle est la substitution que cette rotation fait subir aux intégrales.

157. La question se présente moins simplement dans le cas général où l'équation différentielle admet des intégrales irrégulières, car on ne peut les obtenir par la méthode des coefficients indéterminés. On peut employer dans ce cas le procédé suivant :

Traçons trois cercles K, K', K'' se croisant à l'origine (*fig.* 1) et d'un rayon assez petit pour ne contenir aucun des autres points critiques. Soient a, a', a'' les centres de ces cercles.

Fig. 1.



Soit, d'autre part, $X_1, \ldots, X_n$ un système de n intégrales indépendantes. On peut supposer que chacune d'elles est définie par la valeur qu'elle prend, ainsi que ses $n - 1$ pre-

mières dérivées, en un point $t = b$ pris à volonté dans le cercle K.

Tant que t, partant de cette valeur initiale, restera compris dans le cercle K, l'intégrale générale de l'équation sera de la forme $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$; $x_1, \ldots, x_n$ étant des séries convergentes procédant suivant les puissances de $t - a$ et $c_1, \ldots, c_n$ des constantes. On aura donc, tant que t restera dans ce cercle,

$$\text{(6)} \qquad X_i = c_{1i} x_1 + \ldots + c_{ni} x_n.$$

En exprimant que le second membre de cette égalité et ses $n - 1$ premières dérivées prennent au point b les valeurs qui définissent X_i, on aura un système d'équations linéaires qui détermineront les coefficients c.

Supposons que t sorte de ce cercle pour entrer dans le cercle suivant K'. Dans ce second cercle les intégrales sont développables suivant les puissances de $t - a'$ et auront pour forme générale

$$d_1 y_1 + \ldots + d_n y_n,$$

$y_1, \ldots, y_n$ étant des séries, qu'il est aisé de calculer par la méthode des coefficients indéterminés. On aura donc, en particulier,

$$\text{(7)} \qquad X_i = d_{1i} y_1 + \ldots + d_{ni} y_n$$

et ce nouveau développement fera connaître la valeur de X_i dans tout l'intérieur du cercle K', lorsque les coefficients $d_{1i}, \ldots, d_{ni}$ seront connus.

Pour les déterminer, il suffit de remarquer que, dans la partie commune aux deux cercles, les deux développements (6) et (7) étant valables à la fois, on aura

$$c_{1i} x_1 + \ldots + c_{ni} x_n = d_{1i} y_1 + \ldots + d_{ni} y_n$$

et par une série de dérivations successives

$$\begin{array}{l} c_{1i} x'_1 \quad + \ldots + c_{ni} x'_n \quad = d_{1i} y'_1 \quad + \ldots + d_{ni} y'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_{1i} x_1^{n-1} + \ldots + c_{ni} x_n^{n-1} = d_{1i} y_1^{n-1} + \ldots + d_{ni} y_n^{n-1}. \end{array}$$

En donnant à t une valeur particulière arbitrairement choisie dans cette région commune, on obtiendra un système d'équations linéaires qui donnera les coefficients d.

Si t passe du cercle K' dans le troisième cercle K'', $X_1, \ldots, X_n$ y seront donnés par de nouveaux développements

$$X_i = e_{1i} z_1 + \ldots + e_{ni} z_n$$

suivant les puissances de $t - a''$; $z_1, \ldots, z_n$ étant des séries aisées à établir, et $e_{1i}, \ldots, e_{ni}$ des coefficients qu'on déterminera au moyen de l'équation

$$d_{1i} y_1 + \ldots + d_{ni} y_n = e_{1i} z_1 + \ldots + e_{ni} z_n$$

et de ses dérivées, en donnant à t une valeur comprise dans la région commune à K' et à K''.

Enfin, si t, achevant sa révolution autour de l'origine, sort du cercle K'' pour rentrer dans le cercle K, on aura dans ce nouveau cercle

$$X_i = f_{1i} x_1 + \ldots + f_{ni} x_n,$$

les coefficients f se déterminant encore de même.

En comparant ces valeurs finales de $X_1, \ldots, X_n$ à leurs valeurs initiales (6), on voit que la substitution produite sur les intégrales par une révolution de t autour de l'origine sera

$$| X_i, \quad g_{1i} X_1 + \ldots + g_{ni} X_n |,$$

les constantes g étant déterminées par les équations linéaires

$$f_{ki} = g_{1i} c_{k1} + \ldots + g_{ni} c_{kn} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cette substitution étant connue, on la ramènera aisément à la forme canonique en changeant le système d'intégrales distinctes que l'on considère.

Les nouvelles intégrales formeront une ou plusieurs séries. Soit $(Y_0, \ldots, Y_k)$ l'une de ces séries. Ces intégrales auront

(149) la forme suivante :

$$(8)\quad \begin{cases} Y_0 = t^r u_0, \\ \dots\dots\dots, \\ Y_k = t^r(\theta_k u_0 + \theta_{k-1} u_1 + \ldots + u_k). \end{cases}$$

Tout est connu dans ces développements, sauf les fonctions monodromes $u_0, \ldots, u_k$. Mais, en chaque point de la région occupée par les cercles K, K', K'', on connaît, par les développements précédents, la valeur numérique des intégrales $X_1, \ldots, X_n$ et par suite celle des intégrales $Y_1, \ldots, Y_k$. Les équations (8) permettent d'en déduire celle de $u_0, \ldots, u_k$. Le théorème de Laurent (t. II, n° 304) fournira dès lors les coefficients des séries, procédant suivant les puissances positives et négatives de t, qui représentent ces fonctions.

158. Des considérations analogues à celles qui viennent d'être exposées permettront d'intégrer par des séries toute équation linéaire qui n'a qu'un nombre limité de points critiques.

Soit, en effet, $F = 0$ une semblable équation. Il nous sera permis de supposer, pour plus de simplicité, que $t = \infty$ est un point ordinaire; car, s'il en était autrement, soient t_1, $t_2, \ldots$ les points critiques situés à distance finie; b un autre point quelconque; posons

$$t = b + \frac{1}{u}.$$

L'équation transformée en u admettra évidemment pour points critiques le point $u = 0$, qui correspond à $t = \infty$, et les points $u_1 = \frac{1}{t_1 - b}$, $u_2 = \frac{1}{t_2 - b}, \ldots$ correspondant à t_1, $t_2, \ldots$; mais $u = \infty$, correspondant à $t = b$, sera un point ordinaire.

Cette hypothèse admise, traçons un cercle K enveloppant tous les points critiques $t_1, t_2, \ldots, t_i$. A l'extérieur de ce cercle l'intégrale générale aura la forme

$$(9)\qquad c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

$x_1, \ldots, x_n$ étant des séries qui procèdent suivant les puissances de $\frac{1}{t}$.

Il est clair, d'autre part, qu'on pourra toujours recouvrir l'intérieur de K et les portions voisines de la région extérieure au moyen d'un nombre limité de cercles $K_1, K_2, \ldots$, dont chacun peut passer par un ou plusieurs points critiques, mais n'en contient aucun dans son intérieur, tout autre point situé sur K ou dans son intérieur étant au contraire intérieur à l'un au moins de ces cercles $K_1, K_2, \ldots$

Soient K_m l'un quelconque de ces cercles, a_m son centre. Dans l'intérieur de ce cercle, l'intégrale générale aura la forme

$$c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mn}x_{mn}, \tag{10}$$

$x_{m1}, \ldots, x_{mn}$ étant des séries procédant suivant les puissances de $t - a_m$.

Traçons maintenant une série de coupures $L_1, L_2, \ldots$ allant de chacun des points critiques $t_1, t_2, \ldots$ jusqu'à l'infini. Tant que t ne traversera aucune de ces coupures, les intégrales de l'équation resteront monodromes. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un système quelconque d'intégrales indépendantes. Chacune d'elles sera définie en un point quelconque par l'un ou l'autre des développements (9) ou (10) parmi lesquels il y en a au moins un de convergent. Les coefficients c qui figurent dans ce développement pourront d'ailleurs se déterminer comme au n° 157. La valeur de ces intégrales sera donc connue en chaque point du plan coupé.

D'ailleurs, lorsque t tourne autour d'un des points critiques, ces intégrales subissent une substitution linéaire que nous savons déterminer. Supposons donc que t se rende de la valeur initiale t_0 à une valeur finale quelconque T. Pour obtenir la valeur finale des intégrales $X_1, \ldots, X_n$, il suffira de réduire le chemin parcouru par la variable à une série de lacets $A', \ldots$ suivis d'un chemin Λ qui ne traverse plus les coupures. Lorsque t reviendra au point de départ t_0 après

avoir décrit le lacet A, les intégrales auront subi une substitution linéaire connue S; le lacet A′ leur fera subir une seconde substitution S′, etc. L'ensemble des lacets A, A′, ... successivement décrits leur fera donc subir la substitution résultante SS′ ..., de telle sorte que les intégrales auront passé de leurs valeurs initiales $X_1, \ldots, X_n$ à des valeurs finales $X'_1, \ldots, X'_n$ de la forme

$$X'_i = \lambda_{1i} X_1 + \ldots + \lambda_{ni} X_n.$$

Lorsque t décrira ensuite la ligne Λ, ces expressions varieront et prendront en T les valeurs suivantes

$$\lambda_{1i} \Xi_1 + \ldots + \lambda_{ni} \Xi_n,$$

$\Xi_1, \ldots, \Xi_n$ étant les valeurs finales de $X_1, \ldots, X_n$, lesquelles sont données sous forme de séries, ainsi que nous l'avons vu.

On peut donc déterminer *a priori* la valeur finale d'une intégrale quelconque lorsque la variable t décrit une ligne donnée, sans être obligé de calculer la série des valeurs successives par lesquelles elle passe, pour les points intermédiaires.

159. La méthode précédente est susceptible de nombreuses modifications, si l'on admet, pour représenter les fonctions intégrales, d'autres développements que ceux qui sont fournis par la série de Taylor. Supposons, par exemple, que, parmi les points critiques, il y en ait aux environs desquels les intégrales soient régulières. On pourra évidemment substituer à quelques-uns des cercles dont nous nous sommes servis des cercles décrits autour de ces points critiques (pourvu qu'ils ne contiennent dans leur intérieur aucun autre point critique); car on connaît un développement des intégrales dans ces cercles, et cela suffit.

On peut encore, dans beaucoup de cas, transformer l'équation différentielle par un changement de variable

$$t = \varphi(u), \qquad \text{d'où} \qquad u = \psi(t).$$

Soit a un point ordinaire de l'équation transformée : on

aura un développement de ses intégrales suivant les puissances de $u - a$, lequel sera convergent tant que le module de $u - a$ sera moindre qu'une constante donnée r. Les intégrales de l'équation primitive admettront un développement correspondant suivant les puissances de $\psi(t) - \psi(a)$, valable dans toute la région du plan où

$$|\psi(t) - \psi(a)| < r,$$

lequel développement pourra être utilisé au besoin.

160. Nous avons vu que lorsque la variable t revient à sa valeur initiale t_0, après avoir décrit un contour fermé quelconque, les intégrales $X_1, \ldots, X_n$ subissent une substitution linéaire. Considérons l'ensemble de ces substitutions $S, S', \ldots$ correspondant aux divers contours fermés possibles $K, K', \ldots$. Il est clair que, si $S, S', \ldots$ sont deux de ces substitutions correspondant respectivement aux contours K, K', on obtiendra, en décrivant successivement ces deux contours, un nouveau contour fermé KK' auquel correspondra la substitution SS', résultante des deux premières. Cette dernière substitution fera donc elle-même partie de la suite $S, S', \ldots$.

On dit qu'une suite de substitutions forme un *groupe* lorsqu'elle jouit de cette dernière propriété.

Nous appellerons *groupe de l'équation différentielle* celui qui est formé par l'ensemble des substitutions $S, S', \ldots$. Toutes ces substitutions résultent évidemment de la combinaison successive des substitutions correspondantes aux lacets relatifs aux divers points critiques.

161. La notion de ce groupe est d'une grande importance dans toutes les questions qui se rattachent à l'étude des équations qui nous occupent. Nous allons, par exemple, montrer comment on peut reconnaître, à l'inspection du groupe de l'équation différentielle

$$F = \frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n x = 0,$$

si elle est *réductible* ou non, c'est-à-dire si elle admet ou non des solutions communes avec une autre équation

$$G = \frac{d^m x}{dt^m} + q_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + q_m x = 0$$

à coefficients uniformes où $m \leqq n$.

Formons les dérivées successives de G; il viendra

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d^{m+1} x}{dt^{m+1}} + q_1 \frac{d^m x}{dt^m} + q'_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{n-m} G}{dt^{n-m}} = \frac{d^n x}{dt^n} + q_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots,$$

et, en tirant de ces équations les valeurs de $\frac{d^m x}{dt^m}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}$ pour les substituer dans F, il viendra

$$F = \frac{d^{n-m} G}{dt^{n-m}} + A_1 \frac{d^{n-m-1} G}{dt^{n-m-1}} + \ldots + A_{n-m} G + G_1,$$

$A_1, \ldots, A_{n-m}$ étant des fonctions uniformes de t, et G_1 une fonction linéaire de $\frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}}, \ldots, \frac{dx}{dt}, x$, à coefficients uniformes en t.

Les solutions communes à $F = 0$, $G = 0$ sont évidemment les mêmes que les solutions communes à $G = 0$, $G_1 = 0$.

Donc, si G_1 est identiquement nul, l'équation $F = 0$ admettra toutes les intégrales de G, et son premier membre sera une fonction linéaire de G et de ses dérivées.

Si G_1 n'est pas identiquement nul, mais ne contient aucune des dérivées de x, on n'aura $G_1 = 0$ qu'en posant $x = 0$. En dehors de cette solution évidente, les équations $F = 0$, $G = 0$ n'auront aucune intégrale commune.

Enfin, si $G_1 = B_0 \frac{d^k x}{dt^k} + \ldots + B_k x$, B_0 n'étant pas nul, on pourra opérer sur les équations

$$G = 0, \qquad \frac{1}{B_0} G_1 = 0,$$

comme sur les équations primitives et en déduire une nouvelle équation $G_2 = 0$, à laquelle les solutions communes devront encore satisfaire.

En poursuivant cette série d'opérations, toutes semblables à celles du plus grand commun diviseur, on arrivera évidemment à ce résultat :

Si deux équations linéaires $F = 0$, $G = 0$, *à coefficients uniformes, ont des intégrales communes, on pourra déterminer une équation de même espèce* $H = 0$, *ayant pour intégrales ces solutions communes; et* F, G *seront des fonctions linéaires de* H *et de ses dérivées.*

Donc, si l'équation $F = 0$ est réductible, il existera une équation d'ordre moindre, $H = 0$, dont elle admet toutes les intégrales.

162. Cela posé, soient $X_1, \ldots, X_n$ un système quelconque d'intégrales indépendantes de $F = 0$, $Y_1, \ldots, Y_m$ un système d'intégrales indépendantes de $H = 0$. Les intégrales de cette dernière équation auront pour forme générale

$$c_1 Y_1 + \ldots + c_m Y_m$$

et se permuteront les unes dans les autres lorsque t décrit un contour fermé quelconque. D'ailleurs $Y_1, \ldots, Y_m$ étant des intégrales de $F = 0$, seront des fonctions linéaires de $X_1, \ldots, X_n$.

Donc, si $F = 0$ est réductible, on pourra déterminer des fonctions linéaires $Y_1, \ldots, Y_m$ des intégrales $X_1, \ldots, X_n$, en nombre $< n$ et telles que les fonctions du faisceau

$$c_1 Y_1 + \ldots + c_m Y_m$$

soient exclusivement permutées les unes dans les autres par toutes les substitutions du groupe de l'équation $F = 0$.

Nous exprimerons, pour abréger, cette propriété du groupe de l'équation en disant qu'il n'est pas *primaire*.

Réciproquement, si le groupe de l'équation $F = 0$ n'est

pas primaire, l'équation sera réductible. En effet, les intégrales $Y_1, \ldots, Y_m$ satisfont à l'équation d'ordre m

$$\begin{vmatrix} x & Y_1 & \ldots & Y_m \\ \frac{dx}{dt} & Y'_1 & \ldots & Y'_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^m x}{dt^m} & Y_1^m & \ldots & Y_m^m \end{vmatrix} = 0,$$

dont les coefficients sont monodromes (après qu'on a divisé par le coefficient du premier terme). En effet, faisons décrire à t un contour fermé quelconque. Les fonctions $Y_1, \ldots, Y_m$ étant transformées en des fonctions linéaires de $Y_1, \ldots, Y_m$, les déterminants qui forment les coefficients de l'équation se reproduiront multipliés par le déterminant de la transformation. Leurs rapports reprendront donc la même valeur.

Pour reconnaître si l'équation $F = 0$ est irréductible, nous n'aurons plus qu'à chercher si son groupe Γ est primaire.

163. Soient $S, S', \ldots$ les substitutions relatives aux divers points critiques, et dont la combinaison reproduit Γ. Si chacune d'elles multiplie toutes les intégrales par un même facteur constant, il est clair que toutes les substitutions de Γ jouiront de cette même propriété et que ce groupe ne sera pas primaire.

Supposons au contraire que, parmi les substitutions $S, S', \ldots$, il en existe au moins une S qui ne multiplie pas toutes les intégrales par un même facteur. Prenons à la place de $X_1, \ldots, X_n$ un autre système d'intégrales indépendantes, choisi de manière à ramener S à la forme canonique. Supposons, pour fixer les idées, que l'équation caractéristique pour cette substitution ait deux racines a, b; qu'à la racine a correspondent quatre séries d'intégrales, dont trois contiennent k intégrales et la quatrième l intégrales, l étant $< k$, et qu'à la racine b corresponde une seule série

de i intégrales; la forme canonique de S sera la suivante :

$$S = \begin{vmatrix} y_1, y_2, & \ldots, y_k & a(y_1+y_2), a(y_2+y_3), \ldots, ay_k \\ y'_1, y'_2, & \ldots, y'_k & a(y'_1+y'_2), a(y'_2+y'_3), \ldots, ay'_k \\ y''_1, y''_2, & \ldots, y''_k & a(y''_1+y''_2), a(y''_2+y''_3), \ldots, ay''_k \\ z_1, z_2, & \ldots, z_l & a(z_1+z_2), a(z_2+z_3), \ldots, az_l \\ u_1, u_2, & \ldots, u_i & b(u_1+u_2), b(u_2+u_3), \ldots, bu_i \end{vmatrix}.$$

Soit

$$Y_1 = d_1 y_1 + d_2 y_2 + \ldots + d'_1 y'_1 + \ldots + e_1 z_1 + \ldots + f_1 u_1 + \ldots + f_i u_i$$

une intégrale quelconque. Effectuons sur cette expression les transformations S, S′, ... Nous obtiendrons de nouvelles expressions de la forme

$$D_1 y_1 + D_2 y_2 + \ldots + F_i u_i,$$

où $D_1, D_2, \ldots, F_i$ sont des fonctions linéaires de $d_1, d_2, \ldots, f_i$.

Si parmi ces expressions il en est qui ne soient pas linéairement distinctes de celles qui les précèdent lorsque d_1, $d_2, \ldots, f_i$ restent indéterminés, on pourra les supprimer et transformer de nouveau celles qui restent par les substitutions S, S′, ... Parmi ces transformées on supprimera celles qui ne sont pas distinctes, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'une nouvelle transformation ne donne plus aucune expression distincte de celles obtenues précédemment. Cette suite d'opérations est nécessairement limitée, car toutes les fonctions obtenues sont linéaires par rapport aux produits en nombre limité qu'on peut former en multipliant les intégrales $y_1, y_2, \ldots, u_i$ par les arbitraires $d_1, d_2, \ldots, f_i$.

Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ les diverses fonctions ainsi obtenues. Il est clair que toute substitution de Γ transforme les unes dans les autres les fonctions

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots$$

du faisceau Φ formé avec ces fonctions.

164. Cela posé cherchons à déterminer les arbitraires d_1,

$d_2, \ldots, f_i$, de telle sorte que dans chacune des fonctions $Y_1, Y_2, \ldots$ les coefficients D_1, D'_1, D''_1 des termes en y_1, y'_1, y''_1 disparaissent. Nous obtiendrons ainsi une série d'équations linéaires par rapport aux arbitraires $d_1, d_2, \ldots. f_i$.

Supposons d'abord que ces équations soient compatibles. Assignons à d_1, $d_2, \ldots, f_i$ un système de valeurs qui satisfasse à ces équations.

Les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots$ ne dépendant plus que des variables $y_2, \ldots, y_k, y'_2, \ldots, y'_k, y''_2, \ldots, y''_k, z_1, \ldots, u_i$ en nombre $< n$, celles de ces fonctions $Y_1, \ldots, Y_m$ qui restent encore linéairement distinctes seront en nombre $< n$. D'ailleurs les fonctions suivantes $Y_{m+1}, \ldots$ s'exprimant linéairement au moyen de celles-là, toutes les fonctions de Φ pourront se mettre sous la forme

$$c_1 Y_1 + \ldots + c_m Y_m,$$

et, comme elles sont transformées les unes dans les autres par toutes les substitutions de Γ, ce groupe ne sera pas primaire.

165. Supposons, au contraire, que les équations soient incompatibles. Quelle que soit l'intégrale Y_1 qui a servi de point de départ, le faisceau Φ, déduit de ses transformées, contiendra une intégrale

$$Y = D_1 y_1 + D'_1 y'_1 + D''_1 y''_1 + D_2 y_2 + \ldots + E_1 z_1 + \ldots + F_1 u_1 + \ldots$$

où l'un au moins des trois coefficients D_1, D'_1, D''_1 n'est pas nul. Il contiendra sa transformée par la substitution S; cette transformée, que nous désignerons par SY, est de la forme

$$SY = D_1 a(y_1 + y_2) + \ldots + E_1 a(z_1 + z_2) + \ldots + F_1 b(u_1 + u_2) + \ldots.$$

Le faisceau Φ contiendra encore la fonction

$$Y' = \frac{1}{a - b}(SY - bY),$$

où les coefficients de y_1, y'_1, y''_1 ont les mêmes valeurs que dans Y, mais où le coefficient de u_1 s'annule.

Il contiendra de même la fonction

$$Y'' = SY' - bY',$$

où D_1, D'_1, D''_1 ont encore conservé leurs valeurs primitives, mais où le terme en u_2 disparaîtra.

Continuant ainsi, on voit que Φ contiendra une fonction de la forme

$$Z = D_1 y_1 + D'_1 y'_1 + D''_1 y''_1 + \delta_2 y_2 + \ldots + \varepsilon_1 z_1 + \ldots + \varepsilon_l z_l,$$

d'où les u ont entièrement disparu.

Il contiendra encore la fonction

$$Z' = \frac{1}{a} SZ - Z = D_1 y_2 + D'_1 y'_2 + D''_2 y''_2 + \ldots + \varepsilon_1 z_2 + \ldots,$$

d'où y_1, y'_1, y''_1, z_1 ont disparu. Il contiendra de même la fonction

$$Z'' = \frac{1}{a} SZ' - Z' = D_1 y_3 + D'_1 y'_3 + D''_1 y''_3 + \ldots + \varepsilon_1 z_3 + \ldots.$$

Continuant ainsi, on voit que Φ contient la fonction

$$U = D_1 y_k + D'_1 y'_k + D''_1 y''_k.$$

Donc, quelle que soit l'intégrale initiale Y_1, il existe dans le faisceau Φ, dérivé de ses transformées, une intégrale φ de la forme plus simple

$$(11) \qquad \varphi = d y_k + d' y'_k + d'' y''_k.$$

Prenons pour point de départ cette nouvelle intégrale et formons le faisceau Φ' dérivé de ses transformées, lequel fait évidemment partie du faisceau Φ.

Les fonctions qu'il contient seront de la forme

$$D_1 y_1 + D_2 y_2 + \ldots + D'_1 y'_1 + \ldots + F_i u_i,$$

où les coefficients $D_1, \ldots, F_i$ sont linéaires et homogènes

en d, d', d''. D'ailleurs, de toute fonction de cette forme contenue dans Φ' on déduira, comme on vient de le voir, une fonction correspondante

$$D_1 y_k + D'_1 y'_k + D''_1 y''_k,$$

également contenue dans Φ'.

Formons successivement les diverses fonctions de cette dernière sorte qui sont contenues dans Φ', en supprimant à mesure qu'on les obtient toutes celles qui ne sont pas linéairement distinctes des précédentes, même lorsque d, d', d'' restent indéterminés. Il restera un nombre limité de fonctions

$$(12)\quad \begin{cases} \varphi_0 = \ d y_k \ + d' y'_k + d'' y''_k = \varphi, \\ \varphi_1 = D_1 y_k + D'_1 y'_k + D''_1 y''_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_\mu = D_\mu y_k + D'_\mu y'_k + D''_\mu y''_k, \end{cases}$$

dont toutes les autres sont des combinaisons linéaires.

Soit φ_α l'une quelconque de ces fonctions. Les coefficients D_α, D'_α, D''_α seront de la forme

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \lambda\ d + \lambda'\ d' + \lambda''\ d'', \\ D'_\alpha &= \lambda_1 d + \lambda'_1 d' + \lambda''_1 d'', \\ D''_\alpha &= \lambda_2 d + \lambda'_2 d' + \lambda''_2 d'', \end{aligned}$$

de telle sorte qu'on aura

$$\varphi_\alpha = \sigma_\alpha \varphi,$$

σ_α désignant la substitution

$$\sigma_\alpha = \left| \begin{matrix} y_k & \lambda\ y_k + \lambda_1 y'_k + \lambda_2 y''_k \\ y'_k & \lambda' y_k + \lambda'_1 y'_k + \lambda'_2 y''_k \\ y''_k & \lambda'' y_k + \lambda''_1 y'_k + \lambda''_2 y''_k \end{matrix} \right|.$$

Les opérations σ satisfont à l'équation symbolique

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + \ldots + c_\mu \sigma_\mu,$$

où $c_0, \ldots, c_\mu$ sont des constantes.

En effet, puisque de l'existence de la fonction φ dans le faisceau Φ on déduit l'existence dans ce même faisceau des transformées $\sigma_\alpha \varphi$ et $\sigma_\beta \varphi$, on déduira de l'existence de cette dernière fonction celle de la fonction $\sigma_\alpha \sigma_\beta \varphi$. Cette fonction, ne dépendant d'ailleurs que des variables y_k, y'_k, y''_k, sera de la forme

$$c_0 \varphi + c_1 \varphi_1 + \ldots + c_\mu \varphi_\mu = c_0 \sigma_0 \varphi + c_1 \sigma_1 \varphi + \ldots + c_\mu \sigma_\mu \varphi.$$

166. Cela posé, considérons le groupe γ dérivé des substitutions $\sigma_0, \ldots, \sigma_\mu$ entre les trois variables y_k, y'_k, y''_k. Il est clair que le faisceau résultant de la combinaison des fonctions $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ se confondra avec le faisceau déduit des transformées de φ par les diverses substitutions de γ.

Le groupe γ contenant moins de variables que le groupe Γ primitivement considéré, nous pouvons évidemment supposer que nous sachions reconnaître s'il est ou non primaire.

1° Si γ n'est pas primaire, nous pouvons assigner aux coefficients d, d', d'' de la fonction φ un système de valeurs tel que le nombre des fonctions $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ qui restent encore distinctes dans cette hypothèse soit moindre que celui des variables y_k, y'_k, y''_k. Dans ce cas Γ ne sera pas primaire. En effet, supposons, par exemple, qu'il reste deux fonctions distinctes; soient

$$\varphi = d y_k + d' y'_k + d'' y''_k = \varphi(y_k, y'_k, y''_k),$$
$$\varphi_1 = d_1 y_k + d'_1 y'_k + d''_1 y''_k = \varphi_1(y_k, y'_k, y''_k).$$

Considérons le faisceau Φ' dérivé des transformées de φ par les diverses substitutions de Γ. Soit

$$D_1 y_1 + D'_1 y'_1 + D''_1 y''_1 + D_2 y_2 + \ldots + F_i u_i$$

une quelconque des fonctions qu'il contient. Nous avons vu que ce faisceau contenait la fonction

$$D_1 y_k + D'_1 y'_k + D''_1 y''_k,$$

laquelle doit être une combinaison linéaire de φ et de φ_1. On

aura donc

$$D_1 y_1 + D'_1 y'_1 + D''_1 y''_1 = c\varphi(y_1, y'_1, y''_1) + c_1\varphi_1(y_1, y'_1, y''_1),$$

c, c_1 étant des constantes.

Les intégrales y_1, y'_1, y''_1 ne figurant dans Φ' que par les deux combinaisons $\varphi(y_1, y'_1, y''_1)$ et $\varphi_1(y_1, y'_1, y''_1)$, le nombre des fonctions linéairement distinctes dont Φ' dépend sera moindre que n. Donc Γ n'est pas primaire.

2° Si le groupe γ est primaire, de quelque manière qu'on choisisse d, d', d'', la suite φ, φ_1, ..., φ_μ contiendra toujours trois fonctions distinctes, φ, φ_1, φ_2; et chacune des intégrales y_k, y'_k, y''_k dont elles dépendent, y_k par exemple, pourra s'exprimer linéairement en fonction de φ, φ_1, φ_2. Elle appartiendra donc au faisceau Φ'.

Formons maintenant les transformées successives de y_k par les diverses substitutions de Γ.

Cette intégrale étant entièrement déterminée, il n'y aura aucune difficulté à reconnaître combien le faisceau Φ'', dérivé de ses transformées, contient de fonctions distinctes; si ce nombre est inférieur à n, Γ ne sera pas primaire; dans le cas contraire il sera primaire.

Soient, en effet,

$$\Psi = c_1 Y_1 + \ldots + c_m Y_m$$

un faisceau quelconque d'intégrales que les substitutions de Γ transforment les unes dans les autres; Y_1 l'une de ces intégrales. Le faisceau Ψ contiendra le faisceau Φ déduit des transformées de Y_1; dans celui-ci existe une intégrale φ de la forme (11), dont la combinaison avec ses transformées donne l'intégrale y_k. Donc Ψ contient cette intégrale et ses transformées, parmi lesquelles il y en a n linéairement distinctes.

167. Une seconde application de la notion du groupe nous sera fournie par la recherche des intégrales algébriques que peut offrir une équation linéaire.

Soit $F = 0$ une équation d'ordre n, admettant des intégrales algébriques. Il est clair que, si t décrit un contour fermé quelconque, ces intégrales, restant toujours algébriques, se transformeront les unes dans les autres. Soient donc $x_1, \ldots, x_m$ celles de ces intégrales qni sont linéairement distinctes; les intégrales algébriques cherchées auront pour forme générale

$$c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m$$

et seront les solutions d'une équation linéaire d'ordre m

$$G = \begin{vmatrix} x & x_1 & \ldots & x_m \\ \dfrac{dx}{dt} & x'_1 & \ldots & x'_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^m x}{dt^m} & x_1^m & \ldots & x_m^m \end{vmatrix} = 0$$

à coefficients uniformes, après division par le coefficient du terme en $\dfrac{d^m x}{dt^m}$. Si donc F est une équation irréductible, on aura $m = n$, et les équations $F = 0$, $G = 0$ se confondront.

168. Étudions les équations, telles qne G, à coefficients uniformes, et dont toutes les intégrales sont algébriques. Leurs coefficients, étant des fonctions algébriques et uniformes, seront des fonctions rationnelles.

D'ailleurs, aux environs de chaque point critique, les intégrales seront régulières. Considérons, en effet, un point critique quelconque a. Une intégrale quelconque x_0 sera développable suivant les puissances croissantes de $(t-a)^{\frac{1}{p}}$, p étant un entier convenable.

Soit

$$x_0 = c_\alpha (t-a)^{\frac{\alpha}{p}} + c_\beta (t-a)^{\frac{\beta}{p}} + \ldots$$

ce développement. Groupons ensemble tous les termes dont les exposants ne diffèrent que de nombres entiers ; on pourra

écrire

$$x_0 = (t-a)^{\frac{\alpha}{p}} u_\alpha + (t-a)^{\frac{\beta}{p}} u_\beta + \ldots,$$

u_α, u_β, ... étant des séries qui procèdent suivant les puissances entières de $t - a$.

Si l'on fait décrire à t un lacet autour du point a une fois, deux fois, etc., on obtiendra de nouvelles intégrales

$$x_1 = \theta^\alpha (t-a)^{\frac{\alpha}{p}} u_\alpha + \theta^\beta (t-a)^{\frac{\beta}{p}} u_\beta + \ldots,$$
$$x_2 = \theta^{2\alpha} (t-a)^{\frac{\alpha}{p}} u_\alpha + \theta^{2\beta} (t-a)^{\frac{\beta}{p}} u_\beta + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$e^{\frac{2\pi i}{p}} = \theta.$$

Résolvant ces équations par rapport à

$$(t-a)^{\frac{\alpha}{p}} u_\alpha, \quad (t-a)^{\frac{\beta}{p}} u_\beta, \quad \ldots,$$

on voit que ces quantités s'expriment linéairement en x_0, x_1, ... : ce sont donc des intégrales; d'ailleurs elles sont manifestement régulières.

On voit de même que les intégrales seront régulières pour $t = \infty$.

169. Ce premier résultat nous donne déjà quelque lumière sur la forme des équations cherchées. En effet, d'après le n° 150, chacun des points critiques $t_1, \ldots, t_\mu$ devant être un pôle d'ordre k tout au plus pour le coefficient de $\frac{d^{m-k}x}{dt^{m-k}}$, l'équation aura nécessairement la forme

$$\frac{d^m x}{dt^m} + \frac{M_1}{T}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \frac{M_2}{T^2}\frac{d^{m-2}x}{dt^{m-2}} + \ldots + \frac{M_m}{T^m} x = 0,$$

T désignant le produit $(t-t_1)\ldots(t-t_\mu)$ et $M_1, M_2, \ldots,$ étant des fonctions entières.

Il reste encore à exprimer que les intégrales sont régulières aux environs de $t = \infty$. A cet effet, posons

$$t = \frac{1}{u}, \qquad \text{d'où} \qquad dt = -\frac{du}{u^2},$$

on a

$$\frac{dx}{dt} = -u^2 \frac{dx}{du},$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -u^2 \frac{d}{du}\left(-u^2\frac{dx}{du}\right) = u^4 \frac{d^2x}{du^2} + 2u^3\frac{dx}{du}$$

et généralement

$$\frac{d^kx}{dt^k} = (-1)^k\left(u^{2k}\frac{d^kx}{du^k} + a_{k,k-1}u^{2k-1}\frac{d^{k-1}x}{dt^{k-1}} + a_{k,k-2}u^{2k-2}\frac{d^{k-2}x}{dt^{k-2}} + \ldots\right),$$

$a_{k,k-1}, a_{k,k-2}, \ldots$ étant des entiers, dont le premier est égal à $k(k-1)$; car on voit sans peine que cette formule, étant supposée vraie pour $\frac{d^kx}{dt^k}$, sera encore vraie pour la dérivée suivante.

Substituant ces valeurs des dérivées dans l'équation proposée, et divisant par $(-1)^m u^{2m}$, on aura l'équation transformée

$$\frac{d^mx}{du^m} + \left. \begin{array}{l} a_{m,m-1}\dfrac{1}{u} \\ -\dfrac{M_1}{T}\dfrac{1}{u^2} \end{array} \right| \frac{d^{m-1}x}{du^{m-1}} + \left. \begin{array}{l} a_{m,m-2}\dfrac{1}{u^2} \\ -a_{m-1,m-2}\dfrac{M_1}{T}\dfrac{1}{u^3} \\ +\dfrac{M_2}{T^2}\dfrac{1}{u^4} \end{array} \right| \frac{d^{m-2}x}{du^{m-2}} + \ldots = 0$$

où il ne restera plus qu'à substituer $t = \frac{1}{u}$ dans $T, M_1, M_2, \ldots$.

Le point $u = 0$ doit être un pôle d'ordre $1, 2, \ldots$ au plus pour les coefficients des dérivées $\frac{d^{m-1}x}{du^{m-1}}, \frac{d^{m-2}x}{du^{m-2}}, \ldots$. Il faut et il suffit pour cela que $\frac{M_1}{T}, \frac{M_2}{T^2}, \ldots$ soient développables

suivant les puissances croissantes de u et commencent respectivement par des termes de degrés 1, 2, ... Mais on a

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\left(\frac{1}{u} - t_1\right)\cdots\left(\frac{1}{u} - t_\mu\right)} = u^\mu + c_1 u^{\mu+1} + \ldots.$$

On devra donc avoir

$$M_1 = \frac{d_1}{u^{\mu-1}} + \frac{d_2}{u^{\mu-2}} + \ldots = d_1 t^{\mu-1} + d_2 t^{\mu-2} + \ldots,$$

$$M_2 = \frac{e_1}{u^{2\mu-2}} + \frac{e_2}{u^{2\mu-3}} + \ldots = e_1 t^{2\mu-2} + e_2 t^{2\mu-3} + \ldots,$$

....

Donc $M_1, \ldots, M_k, \ldots$ sont des polynomes entiers en t, de degrés au plus égaux à $\mu - 1, \ldots, k(\mu - 1), \ldots$.

170. Il est aisé d'établir que la somme des racines des équations déterminantes relatives aux points critiques $t_1, \ldots, t_\mu, \infty$ est égale à $(\mu - 1)\frac{m(m-1)}{2}$.

En effet, l'équation déterminante relative au point t_i sera évidemment

$$r(r-1)\ldots(r-m+1) + \frac{M_1(t_i)}{T'(t_i)} r(r-1)\ldots(r-m+2)$$
$$+ \frac{M_2(t_i)}{T'(t_i)^2} r(r-1)\ldots(r-m+3) + \ldots = 0$$

et la somme de ses racines sera

$$\frac{m(m-1)}{2} - \frac{M_1(t_i)}{T'(t_i)}.$$

D'autre part, l'équation déterminante relative au point $t = \infty$ sera

$$r(r-1)\ldots(r-m+1)$$
$$+ (a_{m,m-1} - d_1) r(r-1)\ldots(r-m+2) + \ldots = 0.$$

et la somme de ses racines sera

$$\frac{m(m-1)}{2} - a_{m,m-1} + d_1 = -\frac{m(m-1)}{2} + d_1.$$

La somme totale des racines de ces équations sera donc

$$(\mu-1)\frac{m(m-1)}{2} + d_1 - \sum \frac{M_1(t_i)}{T'(t_i)} = (\mu-1)\frac{m(m-1)}{2};$$

car on a, d'après une formule connue de la décomposition des fonctions rationnelles,

$$\sum \frac{M_1(t_i)}{T'(t_i)} \frac{1}{t-t_i} = \frac{M_1(t)}{T(t)};$$

d'où, en multipliant par t et posant $t=\infty$,

$$\sum \frac{M_1(t_i)}{T'(t_i)} = d_1.$$

171. Nous venons d'obtenir la forme générale des équations dont les intégrales sont partout régulières; mais il s'en faut de beaucoup que toutes les équations de ce genre aient leurs intégrales algébriques. Pour qu'il en soit ainsi, un second caractère est nécessaire : il faut que le groupe de l'équation ne contienne qu'un nombre fini de substitutions.

En effet, chacune des substitutions du groupe est définie par le système des fonctions dans lesquelles elle transforme les intégrales indépendantes $x_1, \ldots, x_m$; mais chacune de ces intégrales, étant algébrique, n'a qu'un nombre fini de transformées distinctes; le nombre des substitutions distinctes est donc fini.

Réciproquement, toute équation à intégrales régulières, dont le groupe ne contient qu'un nombre fini de substitutions, a toutes ses intégrales algébriques.

En effet, soient x_1 une quelconque de ces intégrales, $x_2, \ldots$ ses transformées par les substitutions du groupe. Toute fonction symétrique de ces transformées étant évidemment

uniforme, x_1 sera racine de l'équation

$$(13) \qquad (x - x_1)(x - x_2)\ldots = 0,$$

dont les coefficients sont uniformes.

Considérons d'ailleurs un point critique quelconque t_1. On aura aux environs de ce point un système d'intégrales distinctes dont les développements auront la forme

$$(t - t_1)^r[u_0 + u_1 \log(t - t_1) + \ldots + u_k \log^k(t - t_1)],$$

$u_0, \ldots, u_k$ étant monodromes aux environs de t_1.

Mais, pour qu'une expression de ce genre n'admette qu'un nombre limité de transformées distinctes lorsqu'on tourne autour de t_1, il faut évidemment : 1° que les logarithmes disparaissent, 2° que r soit rationnel. On aura donc un système d'intégrales distinctes

$$\xi_1 = (t - t_1)^{r_1} u_{01}, \qquad \xi_2 = (t - t_1)^{r_2} u_{02}, \qquad \ldots,$$

où $r_1, r_2, \ldots$ sont des fractions rationnelles.

Soit p le plus petit multiple de leurs dénominateurs. Les intégrales $\xi_1, \xi_2, \ldots$ seront développables suivant les puissances entières et croissantes de $(t - t_1)^{\frac{1}{p}}$; et il en sera de même de $x_1, x_2, \ldots$ qui s'expriment linéairement en ξ_1, $\xi_2, \ldots$. Le point t_1 sera donc un point critique algébrique pour chacune des intégrales $x_1, x_2, \ldots$ et, par suite, pour les coefficients de l'équation (13). Mais ces coefficients sont uniformes; donc t_1 sera un pôle (ou un point ordinaire) pour chacun d'eux.

On verra de même que ∞ est un pôle ou un point ordinaire pour ces coefficients.

Les coefficients de l'équation (13) étant uniformes et n'ayant d'autres points critiques que des pôles, même à l'infini, seront des fractions rationnelles, et $x_1, x_2, \ldots$ seront des fonctions algébriques.

Si donc on savait déterminer tous les groupes formés d'un nombre fini de substitutions entre m variables, on con-

naîtrait par là même les divers types possibles d'équations linéaires d'ordre m à intégrales algébriques, et il suffirait, pour reconnaître si une équation donnée appartient à cette catégorie, de chercher à identifier son groupe avec l'un de ceux dont on aurait dressé le tableau.

Le problème arithmétique de la construction des groupes d'un nombre fini de substitutions, auquel la question se trouve ainsi ramenée, n'est résolu d'une manière complète que pour $m = 2$ ou 3. On a toutefois démontré que, pour une valeur quelconque de m, le nombre de ces groupes est limité, et l'on en a déduit ce théorème :

Si l'équation $G = 0$, *d'ordre* m, *a toutes ses intégrales algébriques, elle admettra un système d'intégrales distinctes* $x_1, \ldots, x_m$ *de la forme*

$$x_1 = \sqrt[p]{U_1}, \qquad x_2 = \sqrt[p]{U_2}, \qquad \ldots,$$

p étant un entier et $U_1, U_2, \ldots$ *étant des fonctions rationnelles de t et d'une irrationnelle u définie par une équation*

$$f(t, u) = 0,$$

dont le degré est limité en fonction de m.

Nous nous bornerons à énoncer ce résultat dont la démonstration exigerait une exposition détaillée des principes de la théorie des substitutions.

172. Le cas où l'intégrale générale de l'équation $G = 0$ est non seulement algébrique, mais rationnelle, mérite une attention particulière. Il est aisé de le reconnaître.

En effet, les intégrales devant n'avoir d'autres points critiques que des pôles, l'équation déterminante relative à l'un quelconque des points critiques de G n'aura que des racines entières, et les développements des intégrales régulières ne contiendront pas de logarithmes.

Pour que cette dernière condition soit remplie, il faudra

tout d'abord qu'aucune des équations déterminantes n'ait de racines multiples (155).

Supposons qu'il en soit ainsi; soit $F(r) = 0$ l'équation déterminante relative au point t_1, et soient $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ ses racines, rangées par ordre de grandeur croissante. L'intégrale générale aux environs du point t_1 sera de la forme

$$\sum_0^\infty \begin{bmatrix} c_{\alpha+\mu}(t-t_1)^{\alpha+\mu} + c'_{\alpha'+\mu}(t-t_1)^{\alpha'+\mu}\log(t-t_1) \\ + c''_{\alpha''+\mu}(t-t_1)^{\alpha''+\mu}\log^2(t-t_1) + \ldots \end{bmatrix}.$$

et, en substituant cette valeur dans l'équation différentielle, comme au n° 153, on obtiendra une série d'équations linéaires et homogènes qui détermineront par voie récurrente tous les coefficients $c, c', c'', \ldots$ en fonction des m coefficients $c_\alpha, c_{\alpha'}, c_{\alpha''}, \ldots$ qui restent arbitraires. On voit d'ailleurs sans difficulté que tous les coefficients $c', c'', \ldots$ qui multiplient des termes logarithmiques s'expriment en fonction des $m-1$ coefficients $c'_{\alpha'}, c''_{\alpha''}, \ldots$, et que ceux-ci ont des expressions de la forme

$$c'_{\alpha'} = A c_\alpha, \quad c''_{\alpha''} = B c_\alpha + B' c_{\alpha'}, \quad c'''_{\alpha'''} = C c_\alpha + C' c_{\alpha'} + C'' c_{\alpha''}, \quad \ldots.$$

Donc, pour que les logarithmes disparaissent, il faut et il suffit qu'on ait les $\dfrac{m(m-1)}{2}$ équations de condition

$$0 = A = B = B' = C = \ldots.$$

173. Réciproquement, si l'ensemble des conditions qui précèdent est rempli, l'intégrale générale sera rationnelle. En effet, elle n'a pour points singuliers à distance finie que des pôles. Elle est donc uniforme.

Formons d'ailleurs l'équation déterminante pour $t = \infty$ et groupons ses racines en classes en réunissant celles dont les différences mutuelles sont entières. Soient $\rho, \rho', \ldots$ les plus petites racines de chaque classe; $\mu, \mu', \ldots$ le nombre des racines contenues dans leurs classes respectives. Pour des valeurs suffisamment grandes de t, on aura, pour l'inté-

grale générale, un développement de la forme

$$\frac{1}{t^\rho}\left[\varphi + \varphi_1 \log\frac{1}{t} + \ldots + \varphi_{\mu-1}\log^{\mu-1}\frac{1}{t}\right]$$
$$+ \frac{1}{t^{\rho'}}\left[\varphi' + \ldots + \varphi'_{\mu-1}\log^{\mu'-1}\frac{1}{t}\right] + \ldots,$$

les expressions $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi', \ldots$ étant des séries procédant suivant les puissances entières et croissantes de $\frac{1}{t}$. Mais, puisque cette expression est uniforme, les logarithmes disparaîtront nécessairement et les exposants $\rho, \rho', \ldots$ seront entiers. L'intégrale générale aura donc un simple pôle à l'infini; ce sera donc une fonction rationnelle $\frac{P}{Q}$.

On pourra d'ailleurs la déterminer par des opérations purement algébriques. En effet, on connaît, par ce qui précède, la situation des pôles à distance finie et l'ordre de multiplicité de chacun d'eux. On pourra donc former le dénominateur Q. L'ordre de multiplicité du pôle $t = \infty$ étant également connu par le développement obtenu suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, le degré du numérateur P sera déterminé. Pour déterminer ses coefficients, il suffira d'identifier le développement de $\frac{P}{Q}$ suivant les puissances de $\frac{1}{t}$ à celui qu'a fourni l'équation différentielle.

174. Considérons plus généralement, avec M. *Halphen*, les équations dont les intégrales sont partout régulières et sont monodromes dans toute région du plan qui ne contient pas le point t_1. Les autres points critiques $t_2, \ldots, t_\mu$ des coefficients de l'équation ne pouvant être que des pôles pour l'intégrale, les équations déterminantes qui leur correspondent n'auront que des racines entières et les logarithmes disparaîtront des développements correspondants, ce qui donnera $(\mu - 1)\frac{m(m-1)}{2}$ équations de condition, dont l'existence sera à vérifier.

Lorsque l'ensemble des conditions précédentes est rempli, on peut trouver l'intégrale générale. En effet, d'après l'analyse du n° **149**, on peut déterminer un système d'intégrales particulières formant une ou plusieurs séries, et telles qu'aux environs du point t_1 les intégrales $y_0, \ldots, y_k$ d'une même série soient de la forme

$$\begin{aligned} y_0 &= (t-t_1)^r u_0, \\ y_1 &= (t-t_1)^r(\theta_1 u_0 + u_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_k &= (t-t_1)^r(\theta_k u_0 + \theta_{k-1} u_1 + \ldots + u_k), \end{aligned}$$

$u_0, \ldots, u_k$ étant des fonctions monodromes aux environs du point t_1, r désignant une racine de l'équation caractéristique qui correspond à ce point, et les θ étant définis par les relations

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi i}\log(t-t_1), \qquad \ldots, \qquad \theta_k = \frac{\theta_1(\theta_1-1)(\theta_1-k+1)}{1.2\ldots k}.$$

Les fonctions $u_0, \ldots, u_k$, définies par les équations précédentes, seront des fractions rationnelles. En effet, les points $t_2, \ldots, t_\mu$ étant des points ordinaires pour les onctions $(t-t_1)^{-r}$ et $\log(t-t_1)$, et de simples pôles pour $y_0, \ldots, y_k$, seront de simples pôles pour $u_0, \ldots, u_k$. Donc ces fonctions sont monodromes non seulement aux environs de t_1, mais dans tout le plan. D'autre part,

$$(t-t_1)^{-r} = \frac{1}{t^r}\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^{-r}$$

et

$$\log(t-t_1) = -\log\frac{1}{t} + \log\left(1-\frac{t_1}{t}\right)$$

sont des expressions régulières pour $t=\infty$; il en est de même pour $y_0, \ldots, y_k$ et, par suite, pour $u_0, \ldots, u_k$. De ces deux propriétés réunies on déduit que $u_0, \ldots, u_k$ sont des fractions rationnelles de la forme $\frac{P_0}{Q}, \ldots, \frac{P_k}{Q}$.

On pourra d'ailleurs les déterminer par des opérations

algébriques. En effet, connaissant les pôles $t_2, \ldots, t_\mu$ des intégrales et leur ordre de multiplicité, on pourra former le dénominateur Q. Le développement de l'intégrale générale pour $t = \infty$ fera connaître le degré des numérateurs $P_0, \ldots, P_k$. Pour obtenir leurs coefficients, il ne restera plus qu'à substituer les expressions précédentes dans l'équation différentielle et à identifier le résultat à zéro.

175. Considérons encore les équations de la forme

$$P_0 \frac{d^m x}{dt^m} + P_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + P_m x = 0, \tag{14}$$

où $P_0, \ldots, P_m$ sont des polynomes dont le degré soit au plus égal à celui du premier d'entre eux, P_0.

Lorsque l'intégrale d'une équation de cette forme n'a pour points critiques à distance finie que des pôles, ce qu'on reconnaîtra aisément par les méthodes précédentes, on pourra obtenir l'intégrale générale par les considérations suivantes, également dues à M. *Halphen*.

Remarquons tout d'abord que la condition imposée aux degrés des polynomes P équivaut à dire que les développements de $\frac{P_1}{P_0}, \ldots, \frac{P_m}{P_0}$ suivant les puissances décroissantes de t ne contiennent pas de puissances positives.

Posons maintenant

$$x = Ry,$$

R désignant une fraction rationnelle en t. La transformée en y

$$P_0 R \frac{d^m y}{dt^m} + \left.\begin{array}{r} m P_0 R' \\ + \quad P_1 R \end{array}\right| \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \left.\begin{array}{r} \frac{m(m-1)}{2} P_0 R'' \\ + \quad (m-1) P_1 R' \\ + \quad P_2 R \end{array}\right| \frac{d^{m-2} y}{dt^{m-2}} + \ldots = 0$$

sera de la même forme que la primitive en x; car son intégrale n'a que des singularités polaires, et ses coefficients sont rationnels et pourront être rendus entiers en chassant

le dénominateur commun. Enfin, si nous admettons que R, développé suivant les puissances décroissantes de t, commence par un terme en t^p, ses dérivées, R', R'', ... commenceront par des termes d'ordre moindre en t^{p-1}, t^{p-2}, ... On en déduit sans peine que les développements des coefficients de l'équation (après division par $P_0 R$) ne contiendront pas de puissances positives de t.

176. Cela posé, on peut déterminer *a priori* les pôles t_1, t_2, ... de l'intégrale de l'équation (14) et leurs ordres de multiplicité μ_1, μ_2, ...

Posons

$$x = \frac{y}{(t-t_1)^{\mu_1}(t-t_2)^{\mu_2}\ldots}.$$

La transformée en y

$$Q_0 \frac{d^m y}{dt^m} + Q_1 \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \ldots + Q_m y = 0$$

appartiendra au même type que la primitive; mais ses intégrales n'auront plus de pôles.

Posons

$$y = e^{\lambda t} z.$$

La transformée en z (après suppression du facteur commun $e^{\lambda t}$) sera

$$\begin{aligned} 0 &= Q_0 \frac{d^m z}{dt^m} + \left.\begin{array}{r} m\lambda Q_0 \\ + \quad Q_1 \end{array}\right| \frac{d^{m-1} z}{d^{m-1}} + \ldots + \left.\begin{array}{r} \lambda^m \quad Q_0 \\ + \lambda^{m-1} Q_1 \\ + \quad \ldots \\ + \quad Q_m \end{array}\right| z \\ &= R_0 \frac{d^m z}{dt^m} + R_1 \frac{d^{m-1} z}{dt^{m-1}} + \ldots + R_m z, \end{aligned}$$

et appartiendra encore évidemment au même type. Mais on pourra disposer de l'indéterminée λ, de manière à annuler le coefficient du terme de degré le plus élevé dans R_m, qui sera dès lors un polynome de degré moindre que R_0.

177. Supposons ce résultat atteint, et cherchons à nous rendre compte de la forme des coefficients de l'équation en z.

Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots$ les racines de l'équation $R_0 = 0$; on aura par la décomposition en fractions simples, en remarquant que R_k est au plus du même degré que R_0,

$$\frac{R_k}{R_0} = A_k + \sum_{k,l} \frac{B_{ikl}}{(t-\theta_i)^l},$$

les A, B étant des constantes. (En particulier A_m sera nul.) D'ailleurs chacun des points θ_i étant un point ordinaire, aux environs duquel les intégrales sont régulières, l'indice l ne pourra prendre dans la sommation que les valeurs $1, 2, \ldots, k$.

L'équation déterminante relative au point θ_i sera

$$r(r-1)\ldots(r-m+1) + B_{i11}r(r-1)\ldots(r-m+2) \\ + B_{i22}r(r-1)\ldots(r-m+3) + \ldots = 0.$$

La somme de ses racines est

$$\frac{m(m-1)}{2} - B_{i11}.$$

D'ailleurs θ_i étant un point ordinaire pour les intégrales, ces racines seront nécessairement entières, non négatives et inégales. Leur somme est donc au moins égale à

$$0+1+\ldots+m-1 = \frac{m(m-1)}{2};$$

donc B_{i11} est un entier non positif. *A fortiori* la somme

$$S = \Sigma B_{i11},$$

étendue à tous les points critiques apparents, sera entière et non positive.

178. Cela posé, admettons d'abord que R_m ne soit pas nul et prenons pour variable auxiliaire la quantité $z' = \frac{dz}{dt}$.

L'équation en z pourra s'écrire

$$R_0 \frac{d^{m-1} z'}{dt^{m-1}} + R_1 \frac{d^{m-2} z'}{dt^{m-2}} + \ldots + R_m z = 0.$$

Différentiant, il viendra

$$R_0 \frac{d^m z'}{dt^m} + (R'_0 + R_1) \frac{d^{m-1} z'}{dt^{m-1}} + \ldots + R'_m z = 0.$$

Éliminant z entre ces deux équations, on aura la transformée en z'

$$R_0 R_m \frac{d^m z'}{dt^m} + [(R'_0 + R_1) R_m - R_0 R'_m] \frac{d^{m-1} z'}{dt^{m-1}} + \ldots$$
$$+ [(R'_{m-1} + R_m) R_m - R_{m-1} R'_m] z' = 0.$$

Cette équation est évidemment du même type que l'équation en z; et le rapport des deux premiers coefficients, qui dans l'équation primitive était $\frac{R_1}{R_0}$, sera devenu

$$\frac{(R'_0 + R_1) R_m - R_0 R'_m}{R_0 R_m} = \frac{R_1}{R_0} + \frac{R'_0}{R_0} - \frac{R'_m}{R_m}.$$

Or soient

$$R_0 = c_0 (t - \theta_1)^{\alpha_1} (t - \theta_2)^{\alpha_2} \ldots,$$
$$R_m = c_m (t - \tau_1)^{\beta_1} (t - \tau_2)^{\beta_2} \ldots;$$

on aura

$$\frac{R'_0}{R_0} = \frac{\alpha_1}{t - \theta_1} + \frac{\alpha_2}{t - \theta_2} + \ldots$$

et de même

$$\frac{R'_m}{R_m} = \frac{\beta_1}{t - \tau_1} + \frac{\beta_2}{t - \tau_2} + \ldots.$$

La somme S', analogue à S, formée pour l'équation en z', sera donc

$$S + \Sigma\alpha - \Sigma\beta$$

et sera $> S$, car $\Sigma\alpha$, degré de R_0, est supérieur à $\Sigma\beta$, degré de R_m.

La dérivée seconde z'' satisfera de même à une équation du même type, mais où la somme S'', analogue à S, sera $> S'$.

Si l'on pouvait poursuivre ainsi indéfiniment, on obtiendrait par là une suite illimitée de nombres entiers $S, S', S'', \ldots$ non positifs et croissants, ce qui est absurde. Or on ne peut se trouver arrêté qu'en arrivant à une équation où le coefficient du dernier terme soit nul. Supposons que cette circonstance se présente pour l'équation en z^n. Cette équation admettra, comme intégrale particulière, une constante; et l'équation en z aura pour intégrale correspondante un polynome Π de degré n; enfin l'équation en y admettra l'intégrale particulière $e^{\lambda t}\Pi$.

Posons maintenant

$$y = e^{\lambda t}\Pi \int y_1\, dt.$$

La nouvelle variable y_1 satisfait à une équation d'ordre $m - 1$, et qui, d'après ce qui précède, appartiendra au même type que l'équation en y. On pourra donc en déterminer une solution de la forme $e^{\lambda_1 t}\Pi_1$, Π_1 désignant un polynome.

Posant

$$y_1 = e^{\lambda_1 t}\Pi_1 \int y_2\, dt,$$

on continuera de même, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation du premier ordre, dont l'intégrale sera

$$y_{m-1} = c_m\, e^{\lambda_{m-1} t}\Pi_{m-1},$$

c_m désignant une constante arbitraire.

Les intégrations indiquées sont d'ailleurs de celles qu'on sait effectuer et fourniront un résultat de la forme

$$y = \Sigma\, c_k\, e^{\alpha_k t}\Psi_k,$$

les Ψ_k désignant des polynomes et les c_k des constantes arbitraires.

Divisant cette expression par le produit $(t-t_1)^{\mu_1}(t-t_2)^{\mu_2}, \ldots,$

on aura l'intégrale générale de l'équation en x, sous la forme

$$x = \Sigma c_k e^{\alpha_k t} f_k(t), \tag{15}$$

les f_k étant des fonctions rationnelles.

179. Réciproquement, toute équation différentielle dont l'intégrale générale est de cette forme appartient au type que nous avons considéré.

En effet, éliminant les constantes c_k entre l'équation (15) et ses dérivées et supprimant les facteurs communs exponentiels, on obtiendra une équation à coefficients rationnels, qu'on pourra rendre entiers en chassant les dénominateurs. Soit

$$P_0 \frac{d^m x}{dt^m} + \ldots + P_m x = 0$$

cette équation. Son intégrale n'a, à distance finie, que des singularités polaires. Reste à prouver que les degrés de $P_1, \ldots, P_m$ ne surpassent pas celui de P_0.

La chose est manifeste pour les équations du premier ordre; car de l'équation

$$x = c\, e^{\lambda t} f(t)$$

on déduira, en prenant la dérivée logarithmique, l'équation

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{x} = \lambda + \frac{f'(t)}{f(t)}$$

où le coefficient $\lambda + \frac{f'(t)}{f(t)}$, développé suivant les puissances décroissantes de t, ne contient pas de puissances positives.

Supposons d'ailleurs le théorème établi pour les équations d'ordre $m - 1$. Il sera vrai pour l'équation

$$Q_0 \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + Q_{m-1} u = 0$$

qui admet pour intégrale générale

$$c_2 \frac{d}{dt} e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} + \ldots + c_m \frac{d}{dt} e^{(\alpha_m-\alpha_1)t} \frac{f_m(t)}{f_1(t)},$$

car chaque terme de cette expression est le produit d'une exponentielle par une fraction rationnelle. Il sera encore vrai pour l'équation de degré m

$$Q_0 \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + Q_{m-1} \frac{du}{dt} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$c_1 + c_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} + \ldots + c_m e^{(\alpha_m-\alpha_1)t} \frac{f_m(t)}{f_1(t)},$$

et si nous posons

$$u = \frac{e^{-\alpha_1 t}}{f_1(t)} x,$$

il sera encore vrai (175 et 176) pour la transformée en x. Or celle-ci a précisément pour intégrale générale $\Sigma c_k e^{\alpha_k t} f_k(t)$.

180. La méthode que nous avons indiquée plus haut pour intégrer par des séries les équations qui n'ont qu'un nombre fini de points critiques peut aisément s'étendre au cas où les coefficients de l'équation, au lieu d'être uniformes en t, sont des fonctions uniformes de t et d'une irrationnelle u, racine d'une équation algébrique $f(t, u) = 0$.

En effet, les points critiques de l'équation considérée sont de deux sortes : 1° ceux aux environs desquels u reste monodrome; 2° ceux autour desquels les diverses déterminations $u_1, u_2, \ldots$ de cette irrationnelle s'échangent les unes dans les autres.

A partir de chaque point critique de cette seconde sorte, traçons une coupure allant jusqu'à l'infini. Tant que t ne traversera pas ces coupures, $u_1, u_2, \ldots$ resteront monodromes. Substituant successivement ces diverses fonctions dans l'équation différentielle à la place de u, on obtiendra

une suite d'équations différentielles

$$F_i = \frac{d^n x}{dt^n} + \varphi_1(t, u_i)\frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \varphi_2(t, u_i)\frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \ldots = 0.$$

Chacune d'elles admettra un système de n intégrales distinctes $x_{1i}, \ldots, x_{ni}$, qu'on pourra exprimer par des séries dans la région considérée.

Il reste à voir quel changement subissent les intégrales lorsqu'on traverse les coupures. Or, si nous supposons qu'en traversant l'une d'elles u_i se change en u_k, l'équation F_i se changera en F_k. Les intégrales $x_{1i}, \ldots, x_{ni}$ se changeront donc en intégrales de cette dernière équation, soit en expressions de la forme

$$c_{11} x_{1k} + \ldots + c_{1n} x_{nk}, \quad \ldots, \quad c_{n1} x_{1k} + \ldots + c_{nn} x_{nk}.$$

Pour déterminer les coefficients c, on n'aura qu'à égaler les valeurs numériques que prennent les intégrales $x_{1i}, \ldots, x_{ni}$ et leurs $n - 1$ premières dérivées en arrivant à la coupure aux valeurs que prennent $c_{11} x_{1k} + \ldots + c_{1n} x_{nk}, \ldots$ et leurs $n - 1$ premières dérivées de l'autre côté de la coupure.

181. Nous terminerons cette section en effectuant quelques applications particulières des principes généraux que nous avons exposés.

Proposons-nous d'étudier les équations linéaires du second ordre à trois points critiques t_0, t_1, t_2 et à intégrales régulières.

Soit $F = 0$ l'équation proposée. Changeons de variable indépendante en posant

$$t = \frac{mu + n}{m' u + n'}.$$

Soient θ, υ deux valeurs correspondantes de t, u. On voit sans peine qu'on aura, aux environs de ces valeurs, une relation de la forme

$$t - \theta = a_1(u - \upsilon) + a_2(u - \upsilon)^2 + \ldots$$

(formule où l'on devra remplacer $t-\theta$ ou $u-\upsilon$ par $\frac{1}{t}$ ou $\frac{1}{u}$ si θ ou υ deviennent infinis).

Cette valeur de $t-\theta$, étant substituée dans une fonction entière de $t-\theta$, donnera une fonction entière de $u-\upsilon$. D'autre part, en la substituant dans une fonction régulière de $t-\theta$, telle que

$$(t-\theta)^r[T_0+T_1\log(t-\theta)+\ldots+T_\lambda\log^\lambda(t-\theta)],$$

où $T_0, T_1, \ldots, T_\lambda$ sont des fonctions entières de $t-\theta$, on obtiendra évidemment un résultat de la forme

$$(u-\upsilon)^r[U_0+U_1\log(u-\upsilon)+\ldots+U_\lambda\log^\lambda(u-\upsilon)],$$

$U_0, \ldots, U_\lambda$ étant des fonctions entières de $u-\upsilon$.

Donc l'équation transformée entre x et u admettra comme points critiques les trois points u_0, u_1, u_2 correspondant à t_0, t_1, t_2 ; ses intégrales seront régulières aux environs de ces points, et les équations déterminantes relatives à ces points seront les mêmes qu'aux points correspondants de l'équation primitive.

Nous pouvons d'ailleurs disposer des rapports des coefficients m, n, m', n' de manière à donner à u_0, u_1, u_2 des valeurs arbitrairement choisies. Nous ferons en sorte que ces valeurs soient 0, 1, ∞. Ce résultat pourra évidemment être obtenu de six manières distinctes, suivant qu'on posera $u_0=0$, $u_1=1$, $u_2=\infty$, ou $u_0=1$, $u_1=0$, $u_2=\infty$, etc.

182. Soient respectivement λ, λ' ; μ, μ' et ν, ν' les racines des équations déterminantes relatives aux points critiques 0, 1, ∞. Si $\lambda-\lambda'$, $\mu-\mu'$, $\nu-\nu'$ ne sont pas entiers, on aura, pour les intégrales aux environs de chacun de ces trois points, des développements de la forme

$$cu^\lambda U+c'u^{\lambda'}U',$$

$$c(u-1)^\mu V+c'(u-1)^{\mu'}V',$$

$$c\frac{1}{u^\nu}W+c'\frac{1}{u^{\nu'}}W',$$

U, U′ étant des fonctions entières de u; V, V′ des fonctions entières de $u-1$; W, W′ des fonctions entières de $\frac{1}{u}$.

Posons maintenant

$$x = u^{\lambda}(1-u)^{\mu}y,$$

y étant une nouvelle variable. Nous aurons entre u et y une équation transformée $H = 0$, dont les intégrales seront données aux environs des points 0, 1, ∞ par les développements

$$cU_1 + c'u^{\lambda'-\lambda}U'_1,$$
$$cV_1 + c'(u-1)^{\mu'-\mu}V'_1,$$
$$c\frac{1}{u^{\lambda+\mu+\nu}}W_1 + c'\frac{1}{u^{\lambda+\mu+\nu'}}W'_1,$$

les quantités

$$U_1 = (1-u)^{-\mu}U, \qquad U'_1 = (1-u)^{-\mu}U',$$
$$V_1 = (-1)^{\mu}u^{-\lambda}V, \qquad V'_1 = (-1)^{\mu}u^{-\lambda}V',$$
$$W_1 = \left(\frac{1}{u}-1\right)^{-\mu}W, \qquad W'_1 = \left(\frac{1}{u}-1\right)^{-\mu}W'$$

étant respectivement développables suivant les puissances entières et positives de u, de $u-1$ et de $\frac{1}{u}$.

L'équation $H = 0$ a donc ses intégrales régulières, et ses équations déterminantes par rapport aux points 0 et 1 admettent une racine nulle, la seconde racine étant respectivement $\lambda' - \lambda$ et $\mu' - \mu$.

Il existe évidemment quatre manières d'arriver à ce résultat; car on peut prendre pour λ une quelconque des deux racines de l'équation déterminante du point 0, pour μ une quelconque des deux racines de l'équation déterminante du point 1. Sur ces quatre manières, il y en aura une telle que les racines $\lambda' - \lambda$ et $\mu' - \mu$ aient leur partie réelle positive (à moins que ces différences ne soient purement imaginaires).

L'équation $H = 0$ doit être de la forme

$$\frac{d^2y}{du^2} + \frac{M_1(u)}{u(u-1)}\frac{dy}{du} + \frac{M_2(u)}{u^2(u-1)^2}y = 0,$$

M_1, M_2 étant des polynomes de degrés 1 et 2, et ses équations déterminantes par rapport aux points 0 et 1 seront

$$r(r-1) - M_1(0)r + M_2(0) = 0,$$
$$r(r-1) + M_1(1)r + M_2(1) = 0.$$

Comme elles ont une racine nulle, M_2 devra admettre les racines 0 et 1 et sera divisible par $u(u-1)$. En effectuant la division et chassant les dénominateurs, l'équation prendra la forme

$$u(u-1)\frac{d^2 y}{du^2} + (Au + B)\frac{dy}{du} + Cy = 0$$

ou, en remplaçant A, B, C par trois nouvelles constantes α, β, γ définies par les relations

$$A = \alpha + \beta + 1, \qquad B = -\gamma, \qquad C = \alpha\beta,$$
$$u(1-u)\frac{d^2 y}{du^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)u]\frac{dy}{du} - \alpha\beta y = 0.$$

183. Les équations déterminantes relatives aux trois points critiques 0, 1, ∞ sont respectivement

$$r(r-1) + \gamma r = 0,$$
$$r(r-1) - (\gamma - \alpha - \beta - 1)r = 0,$$
$$-r(r+1) + (\alpha + \beta + 1)r - \alpha\beta = 0$$

et ont pour racines

$$0 \text{ et } 1 - \gamma, \quad 0 \text{ et } \gamma - \alpha - \beta, \quad \alpha \text{ et } \beta.$$

L'équation admet donc une intégrale développable aux environs du point 0 suivant les puissances entières et positives de u.

Soit

$$y_1 = c_0 + c_1 u + \ldots + c_\mu u^\mu + \ldots$$

cette intégrale. En la substituant dans l'équation et égalant à zéro les termes en u^μ, il viendra

$$[-\mu(\mu-1) - (\alpha + \beta + 1)\mu - \alpha\beta]c_\mu$$
$$+ [(\mu+1)\mu + \gamma(\mu+1)]c_{\mu+1} = 0;$$

d'où

$$c_{\mu+1} = \frac{(\alpha+\mu)(\beta+\mu)}{(1+\mu)(\gamma+\mu)} c_\mu,$$

et, par suite, en donnant à c_0, qui reste arbitraire, la valeur 1,

$$y_1 = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} u + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} u^2 + \ldots = \mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, u),$$

F désignant la série hypergéométrique (t. I, n° 379).

184. Cela posé, il existe, comme on l'a vu plus haut, vingt-quatre substitutions de la forme

$$u = \frac{m\upsilon + n}{m'\upsilon' + n'}, \qquad y = \upsilon^\lambda (1-\upsilon)^\mu z,$$

qui transforment l'équation proposée en une équation analogue. L'équation transformée admettra comme solution une série hypergéométrique, et l'on en déduira aisément une intégrale correspondante de l'équation primitive.

Au système de valeurs 0, 1, ∞ données à u doivent correspondre pour υ les mêmes valeurs, mais dans un ordre arbitraire, ce qui donnera, pour la fraction $\frac{m\upsilon+n}{m'\upsilon+n'}$, les six formes suivantes :

$$\upsilon, \quad 1-\upsilon, \quad \frac{1}{\upsilon}, \quad \frac{1}{1-\upsilon}, \quad \frac{\upsilon}{\upsilon-1}, \quad \frac{\upsilon-1}{\upsilon}.$$

A chacune d'elles correspondent quatre équations transformées, qu'on obtiendra en prenant successivement pour λ chacune des deux racines de l'équation déterminante du point 0, pour μ chacune des racines de l'équation déterminante du point 1.

Nous allons donner un exemple du calcul de l'une de ces intégrales.

185. Soit par exemple $u = \frac{\upsilon}{\upsilon-1}$. Pour $u = 0, 1, \infty$, on aura $\upsilon = 0, \infty, 1$; l'équation entre y et υ aura donc ces trois

points critiques, et les racines des équations déterminantes correspondant à ces trois points seront comme précédemment

$$0 \text{ et } 1-\gamma, \quad 0 \text{ et } \gamma-\alpha-\beta, \quad \alpha \text{ et } \beta.$$

On pourra donc prendre

$$\lambda = 0 \text{ ou } 1-\gamma, \qquad \mu = \alpha \text{ ou } \beta.$$

Prenons, par exemple,

$$\lambda = 1-\gamma, \qquad \mu = \alpha.$$

Les racines des équations déterminantes pour l'équation entre z et υ seront

Pour 0... $\quad -\lambda = \gamma - 1, \qquad 1-\gamma-\lambda = 0,$

Pour ∞.. $\quad \lambda+\mu = \alpha+1-\gamma, \qquad \gamma-\alpha-\beta+\lambda+\mu = 1-\beta,$

Pour 1... $\quad \alpha-\mu = 0, \qquad \beta-\mu = \beta-\alpha.$

Si nous posons

$$\gamma - 1 = 1-\gamma', \qquad \beta-\alpha = \gamma'-\alpha'-\beta',$$

$$\alpha+1-\gamma = \alpha', \qquad 1-\beta = \beta';$$

d'où

$$\alpha' = \alpha+1-\gamma, \qquad \beta' = 1-\beta, \qquad \gamma' = 2 -$$

cette équation admettra la solution

$$F(\alpha', \beta', \gamma', \upsilon).$$

L'équation primitive admettra donc la solution

$$y = \upsilon^{1-\gamma}(1-\upsilon)^{\alpha} F(\alpha', \beta', \gamma', \upsilon)$$

ou, en remplaçant υ par sa valeur $\dfrac{u}{u-1}$ et α', β', γ' par leurs valeurs et supprimant le facteur constant $(-1)^{\gamma-\alpha-1}$,

$$y = u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha+1-\gamma, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{u}{u-1}\right).$$

186. On obtient par un procédé tout semblable les vingt-quatre intégrales suivantes :

$$(16)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, u),$$

$$(17)\qquad (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, u),$$

$$(18)\qquad (1-u)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{u}{u-1}\right),$$

$$(19)\qquad (1-u)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{u}{u-1}\right),$$

$$(20)\qquad u^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, u),$$

$$(21)\qquad u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, u),$$

$$(22)\qquad u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{u}{u-1}\right),$$

$$(23)\qquad u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{u}{u-1}\right),$$

$$(24)\qquad F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-u),$$

$$(25)\qquad u^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-u),$$

$$(26)\qquad u^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{u-1}{u}\right),$$

$$(27)\qquad u^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{u-1}{u}\right),$$

$$(28)\qquad (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-u),$$

$$(29)\qquad (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} u^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-u),$$

$$(30)\qquad (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} u^{\alpha-\gamma} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{u-1}{u}\right),$$

$$(31)\qquad (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} u^{\beta-\gamma} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{u-1}{u}\right),$$

$$(32)\qquad u^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{u}\right),$$

$$(33)\qquad u^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{u}\right),$$

$$(34)\qquad u^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-u}\right),$$

$$(35)\quad u^{-\alpha}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-u}\right),$$

$$(36)\quad u^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{u}\right),$$

$$(37)\quad u^{-\beta}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{u}\right),$$

$$(38)\quad u^{-\beta}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-u}\right),$$

$$(39)\quad u^{-\beta}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-u}\right).$$

187. Coupons le plan suivant la portion de l'axe des x qui s'étend de 0 à $+\infty$. Dans le plan ainsi coupé, chacun des développements précédents restera monodrome. Pour achever de les préciser, nous pouvons adopter pour arguments de u, $1-\frac{1}{u}$ ceux qui sont compris entre 0 et 2π, pour argument de $1-u$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Les puissances de u, $1-\frac{1}{u}$, $1-u$ qui figurent dans les expressions (16) à (39) auront des valeurs entièrement déterminées.

La région de convergence des développements ci-dessus sera : 1° pour ceux où la série hypergéométrique a l'argument u ou $1-u$, l'intérieur des cercles C_0, C_1 de rayon 1 décrits autour du point 0 ou du point 1 respectivement; 2° pour ceux d'argument $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{1-u}$, l'extérieur de ces mêmes cercles; 3° pour ceux d'argument $\frac{u}{u-1}$, la moitié du plan située à gauche de la droite $x=\frac{1}{2}$; 4° pour ceux d'argument $\frac{u-1}{u}$, la moitié du plan à droite de cette ligne.

Il restera à déterminer les relations linéaires qui lient entre eux ces divers développements dans leurs régions de convergence commune.

Les différences des racines des équations déterminantes relatives aux points 0, 1, ∞ sont respectivement $1-\gamma$,

$\gamma - \alpha - \beta$, $\beta - \alpha$. Nous supposerons que, parmi ces quantités, il en existe au moins une dont la partie réelle ne soit pas nulle. Les 24 transformations de l'équation de Gauss permettant : 1° de permuter entre eux d'une manière quelconque les points 0, 1, ∞ sans changer les équations déterminantes ; 2° de changer à volonté les signes des différences des racines des équations déterminantes relatives aux points 0 et 1, il nous sera permis d'admettre que $\gamma - \alpha - \beta$ ait sa partie réelle positive. Dans ce cas les séries hypergéométriques

$$F(\alpha, \beta, \gamma, u), \quad F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, u),$$
$$F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{u}\right), \quad F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{u}\right)$$

seront encore convergentes sur la circonférence du cercle C_0 et, en particulier, pour $u = 1$ elles prendront les valeurs suivantes (t. I, n°s 379 et 382),

$$a_1 = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \qquad a_2 = \frac{\Gamma(2 - \gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(1 - \beta)},$$
$$b_1 = \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \beta)\Gamma(\gamma - \beta)}, \qquad b_2 = \frac{\Gamma(\beta - \alpha + 1)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(1 - \alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)}.$$

Cela posé, désignons par $a_1 y_1$, $a_1 y_2$ les développements (16) et (20), par $b_1 z_1$, $b_2 z_2$ les développements (32) et (36) ; et soit x une intégrale quelconque de l'équation de Gauss. On aura dans l'intérieur de C_0

$$x = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

et à l'extérieur de C_0

$$x = d_1 z_1 + d_2 z_2.$$

Pour trouver la liaison entre les constantes c_1, c_2, d_1, d_2, nous remarquerons que sur la circonférence elle-même, où les développements restent tous deux convergents, on aura

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = d_1 z_1 + d_2 z_2.$$

En particulier, au point $u = 1$, on aura sur le bord supérieur de la coupure

$$y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 1$$

et, sur le bord inférieur,

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = e^{2\pi i(1-\gamma)} = e^{-2\pi i\gamma},$$
$$z_1 = e^{-2\pi i\alpha}, \qquad z_2 = e^{-2\pi i\beta},$$

d'où les deux relations cherchées

$$(40) \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = d_1 + d_2, \\ c_1 + e^{-2\pi i\gamma} c_2 = e^{-2\pi i\alpha} d_1 + e^{-2\pi i\beta} d_2. \end{cases}$$

Tirant de ces équations les valeurs de d_1, d_2 pour les substituer dans l'expression $x = d_1 z_1 + d_2 z_2$, il viendra

$$x = c_1 \frac{(e^{-2\pi i\beta} - 1) z_1 - (e^{-2\pi i\alpha} - 1) z_2}{e^{-2\pi i\beta} - e^{-2\pi i\alpha}}$$
$$+ c_2 \frac{(e^{-2\pi i\beta} - e^{-2\pi i\gamma}) z_1 - (e^{-2\pi i\alpha} - e^{-2\pi i\gamma}) z_2}{e^{-2\pi i\beta} - e^{-2\pi i\alpha}}.$$

Cette expression, convergente en dehors du cercle C_0, représentera dans cette région la même intégrale qui, dans l'intérieur de C_0, était égale à $c_1 y_1 + c_2 y_2$.

188. Il ne reste plus qu'à voir comment les constantes c_1, c_2 se modifient à la traversée des coupures qui joignent les points critiques 0 et 1, 1 et ∞.

Si l'on traverse la droite 01 (en montant), y_1 ne change pas, y_2 est multiplié par $e^{-2\pi i\gamma}$; et $x = c_1 y_1 + c_2 y_2$ est changé en $c_1 y_1 + c_2 e^{-2\pi i\gamma} y_2$. Ainsi c_1 ne change pas, et c_2 est multiplié par $e^{-2\pi i\gamma}$.

Si l'on traverse la coupure 1∞ (en montant), d_1, d_2 seront changés en

$$(41) \qquad d'_1 = e^{-2\pi i\alpha} d_1, \qquad d'_2 = e^{-2\pi i\beta} d_2$$

et c_1, c_2 en deux nouvelles constantes c'_1, c'_2 liées à d'_1, d'_2 par les relations

$$(42) \qquad \begin{cases} c'_1 + c'_2 = d'_1 + d'_2, \\ c'_1 + e^{-2\pi i\gamma} c'_2 = e^{-2\pi i\alpha} d'_1 + e^{-2\pi i\beta} d'_2. \end{cases}$$

En résolvant les équations linéaires (40), (41), (42), on

éliminera les auxiliaires d_1, d_2, d'_1, d'_2 et l'on obtiendra l'expression de c'_1, c'_2 en fonction linéaire de c_1, c_2.

Si l'on traversait les coupures en descendant, les coefficients c_1, c_2 subiraient évidemment la transformation inverse de celle qui vient d'être déterminée.

Les coefficients des formules de transformation ne renferment, comme on le voit, que des exponentielles.

189. L'équation

$$u(1-u)\frac{d^2y}{du^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)u]\frac{dy}{du}-\alpha\beta y=0, \tag{43}$$

étant différentiée, donnera

$$u(1-u)\frac{d^3y}{du^3}$$
$$+[\gamma+1-(\alpha+\beta+3)u]\frac{d^2y}{du^2}-(\alpha+1)(\beta+1)\frac{dy}{du}=0$$

ou, en posant $\frac{dy}{du}=y'$,

$$u(1-u)\frac{d^2y'}{du^2}$$
$$+[\gamma+1-(\alpha+\beta+3)u]\frac{dy'}{du}-(\alpha+1)(\beta+1)y'=0.$$

Cette équation ne diffère de la précédente que par le remplacement de α, β, γ par $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$.

La dérivée $\frac{d^{n-1}y}{du^{n-1}}=y^{n-1}$ satisfera donc à l'équation

$$u(1-u)\frac{d^2y^{n-1}}{du^2}+[\gamma+n-1-(\alpha+\beta+2n-1)u]\frac{dy^{n-1}}{du}$$
$$-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)y^{n-1}=0.$$

Cette équation, multipliée par $u^{\gamma+n-2}(1-u)^{\alpha+\beta-\gamma+n-1}$, pourra s'écrire

$$\frac{d}{du}u^n(1-u)^n\mathrm{M}y^n$$
$$=(\alpha+n-1)(\beta+n-1)u^{n-1}(1-u)^{n-1}\mathrm{M}y^{n-1},$$

en posant, pour abréger,

$$M = u^{\gamma-1}(1-u)^{\alpha+\beta-\gamma}.$$

En la différentiant $n-1$ fois, il viendra

$$\frac{d^n}{du^n} u^n (1-u)^n M y^n$$
$$= (\alpha+n-1)(\beta+n-1)\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}} u^{n-1}(1-u)^{n-1} M y^{n-1}.$$

L'application répétée de cette formule de réduction donnera, pour toute valeur de n entière et positive,

$$(44)\quad \frac{d^n u^n (1-u)^n M y^n}{du^n}$$
$$= \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1) M y.$$

Cette formule est particulièrement intéressante lorsque β est un entier négatif $-n$. L'équation (43) admettra dans ce cas comme solution l'expression

$$y = F(\alpha, -n, \gamma, u),$$

laquelle est un polynome de degré n, dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ se réduit à la constante

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

La formule (44) donnera donc dans ce cas particulier

$$F(\alpha, -n, \gamma, u) = \frac{1}{M\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{du^n} u^n(1-u)^n M$$

ou, en remplaçant M par sa valeur et changeant α en $\alpha+n$,

$$F(\alpha+n, -n, \gamma, u)$$
$$= \frac{u^{1-\gamma}(1-u)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n u^{\gamma+n-1}(1-u)^{\alpha+n-\gamma}}{du^n}.$$

Le polynome

$$F(\alpha+n, -n, \gamma, u) = Z_n$$

est donc un produit de puissances par une dérivée $n^{\text{ième}}$.

190. Les quantités γ et $\alpha+1-\gamma$ étant supposées positives, les intégrales définies

$$J_{m,n}=\int_0^1 u^{\gamma-1}(1-u)^{\alpha-\gamma}Z_m Z_n\,du$$

seront finies et déterminées; elles auront d'ailleurs les valeurs suivantes :

$$(45)\qquad J_{m,n}=0,\qquad \text{si } m \gtrless n,$$

$$(46)\qquad J_{m,n}=\frac{1}{\alpha+2n}\,\frac{\Gamma(n+1)\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}.$$

En effet, Z_n satisfait à l'équation

$$u(1-u)\frac{d^2Z_n}{du^2}+[\gamma-(\alpha+1)u]\frac{dZ_n}{du}+n(n+\alpha)Z_n=0,$$

qui peut s'écrire

$$\frac{d}{du}u^{\gamma}(1-u)^{\alpha+1-\gamma}Z'_n=-n(n+\alpha)u^{\gamma-1}(1-u)^{\alpha-\gamma}Z_n.$$

Multiplions par Z_m et intégrons de 0 à 1; il viendra

$$n(n+\alpha)J_{m,n}=-\int_0^1 Z_m\,d[u^{\gamma}(1-u)^{\alpha+1-\gamma}Z'_n],$$

ou, en intégrant par parties et remarquant que le terme tout intégré s'annule aux deux limites,

$$n(n+\alpha)J_{m,n}=\int_0^1 u^{\gamma}(1-u)^{\alpha+1-\gamma}Z'_n Z'_m\,du=m(m+\alpha)J_{m,n};$$

car le second membre ne change pas si l'on y permute m et n.

On aura donc, si $m\gtrless n$,

$$J_{m,n}=0.$$

Si $m=n$, on remarquera que Z'_n satisfait à une équation de même forme que Z_n, sauf le changement de α, n, γ en

$\alpha+2$, $n-1$, $\gamma+1$; on aura donc, par un procédé tout semblable,

$$(n-1)(n+\alpha+1)\int_0^1 u^{\gamma}(1-u)^{\alpha+1-\gamma}Z'_n Z'_n\,du$$
$$=\int_0^1 u^{\gamma+1}(1-u)^{\alpha+2-\gamma}Z''_n Z''_n\,du.$$

Continuant ainsi, on aura finalement

$$J_{nn}=\frac{1}{n(n-1)\ldots1(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots(\alpha+2n-1)}$$
$$\times\int_0^1 u^{\gamma+n-1}(1-u)^{\alpha+n-\gamma}Z_n^n Z_n^n\,du.$$

D'ailleurs

$$Z_n^n=\frac{(\alpha+n)\ldots(\alpha+2n-1)(-n)(-n+1)\ldots1}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}$$

et

$$\int_0^1 u^{\gamma+n-1}(1-u)^{\alpha+n-\gamma}\,du=\frac{\Gamma(\gamma+n)\,\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+2n+1)}.$$

Substituant ces valeurs et remplaçant les factorielles par des quotients de fonctions Γ, on trouvera la formule (46).

Soit maintenant $f(u)$ une fonction quelconque, que nous nous proposons de développer en une série de la forme

$$f(u)=A_0Z_0+A_1Z_1+\ldots+A_nZ_n+\ldots.$$

Un semblable développement étant supposé possible ([1]), on en déterminera aisément les coefficients. Multiplions en effet les deux membres par $u^{\gamma-1}(1-u)^{\alpha-\gamma}Z_n$ et intégrons de o à 1; il viendra

$$\int_0^1 f(u)\,u^{\gamma-1}(1-u)^{\alpha-\gamma}Z_n\,du=A_nJ_{nn},$$

([1]) Sur cette possibilité, *voir* le Mémoire de M. Darboux *Sur les fonctions de grands nombres* (*Journal de Liouville*, 3e série, t. IV, p. 5 et 377).

ce qui donnera le coefficient A_n exprimé par une intégrale définie.

191. Les résultats que nous venons de trouver renferment comme cas particuliers ceux qui ont été obtenus précédemment pour les fonctions X_n de Legendre. Posons en effet $\alpha = \gamma = 1$; nous aurons

$$Z_n = F(n+1, -n, 1, u) = \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{d^n}{du^n} u^n (1-u)^n,$$

et, en posant $u = \frac{1-x}{2}$, nous obtiendrons le nouveau polynome

$$F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^n.1.2\ldots n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = X_n.$$

192. Considérons comme dernière application l'équation de Bessel

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Substituons pour y la série

$$y = c_0 x^r + c_1 x^{r+2} + \ldots + c_\mu x^{r+2\mu} + \ldots.$$

Il viendra, en égalant à zéro le terme en $x^{r+2\mu}$,

$$\begin{aligned}(r+2\mu+2)(r+2\mu+1)c_{\mu+1}& \\ +(r+2\mu+2)c_{\mu+1} + c_\mu - n^2 c_{\mu+1} &= 0;\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} c_{\mu+1} &= -\frac{c_\mu}{(r+2\mu+2)^2 - n^2} \\ &= \frac{-c_\mu}{(r+2\mu+2+n)(r+2\mu+2-n)}.\end{aligned}$$

En posant $\mu = -1$, on aura l'équation déterminante

$$r^2 - n^2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad r = \pm n.$$

Prenons d'abord $r = n$, il viendra

$$c_{\mu+1} = \frac{-c_\mu}{4(n+\mu+1)(\mu+1)}$$

et, par suite,

$$y = c_0 \left[x^n - \frac{x^{n+2}}{2^2(n+1).1} + \ldots + \frac{(-1)^\mu x^{n+2\mu}}{2^{2\mu}(n+1)\ldots(n+\mu).1.2\ldots\mu} + \ldots \right].$$

Le terme général de la série entre parenthèses peut s'écrire ainsi :

$$\frac{2^n \Gamma(n+1)(-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}.$$

Si donc nous prenons, pour plus de simplicité, la constante c_0 égale à $\frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$, il viendra comme première solution la série

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)},$$

que nous désignerons par J_n.

En posant $r = -n$, on trouvera un résultat tout semblable, sauf le changement de signe de n.

Les deux intégrales J_n, J_{-n} seront évidemment indépendantes si n n'est pas un entier réel ; l'intégrale générale sera donc

$$c J_n + c' J_{-n}.$$

Si n est entier, on peut évidemment le supposer positif, car il ne figure que par son carré dans l'équation différentielle. Dans ce cas, les n premiers termes de J_{-n} s'annulent, car ils contiennent en dénominateur des fonctions Γ d'argument entier négatif, lesquelles sont infinies. On aura donc

$$J_{-n} = \sum_n^\infty \frac{(-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\mu}}{\Gamma(-n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}$$

ou, en posant $\mu = n + \mu'$,

$$J_{-n} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{n+\mu'}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu'}}{\Gamma(\mu'+1)\Gamma(n+\mu'+1)} = (-1)^n J_n.$$

Les deux intégrales J_n et J_{-n} ne seront donc pas indépendantes et ne suffiront pas pour former l'intégrale générale.

193. Pour obtenir dans ce cas une nouvelle intégrale, nous supposerons que l'argument, au lieu d'être tout d'abord égal à n, soit égal à $n - \varepsilon$, ε étant infiniment petit. Nous pourrons prendre pour intégrales indépendantes, au lieu de $J_{n-\varepsilon}$ et $J_{-n+\varepsilon}$, $J_{n-\varepsilon}$ et $\frac{(-1)^n J_{-n+\varepsilon} - J_{n-\varepsilon}}{\varepsilon}$. La limite de cette dernière quantité pour $\varepsilon = 0$ nous donnera l'intégrale cherchée, que nous représenterons par Y_n.

Séparons les n premiers termes du développement de $J_{-n+\varepsilon}$ et changeons dans les autres l'indice de sommation μ en $n + \mu$; il viendra

$$\begin{aligned} Y_n = {} & \lim \sum_0^{n-1} \frac{(-1)^{n+\mu}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+\varepsilon+2\mu}}{\varepsilon\,\Gamma(\mu+1)\Gamma(-n+\varepsilon+\mu+1)} \\ & + \lim \sum_0^\infty (-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu} \frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) = {} & \frac{1}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\varepsilon+\mu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\varepsilon} \\ & - \frac{1}{\Gamma(n-\varepsilon+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Or, en appliquant la formule connue

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

on aura

$$\frac{1}{\varepsilon\Gamma(-n+\varepsilon+\mu+1)} = \Gamma(n-\varepsilon-\mu)\frac{\sin(n-\varepsilon-\mu)\pi}{\pi\varepsilon},$$

expression dont la limite pour $\varepsilon = 0$ est

$$-\Gamma(n-\mu)\cos(n-\mu)\pi = (-1)^{n-\mu+1}\Gamma(n-\mu).$$

D'autre part,

$$\lim\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} = f'(0) = 2\log\frac{x}{2}\,\frac{1}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}$$
$$-\frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma^2(\mu+1)} - \frac{\Gamma'(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma^2(n+\mu+1)}.$$

Substituant ces valeurs, il vient

$$Y_n = -\sum_0^{n-1}\frac{\Gamma(n-\mu)}{\Gamma(\mu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\mu}$$
$$+\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\mu}}{\Gamma(n+\mu+1)\Gamma(\mu+1)}\left[2\log\frac{x}{2} - \frac{\Gamma'(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)} - \frac{\Gamma'(n+\mu+1)}{\Gamma(n+\mu+1)}\right].$$

194. Les fonctions J_n sont liées par la formule récurrente

$$(47)\qquad \frac{2n}{x}J_n = J_{n-1} + J_{n+1}.$$

En effet, substituant pour les fonctions J leurs développements en série et comparant le coefficient du terme en $x^{n+2\mu-1}$ dans les deux membres, on aura à vérifier l'égalité

$$\frac{2n(-1)^\mu}{2^{n+2\mu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(n+\mu+1)}$$
$$= \frac{(-1)^\mu}{2^{n-1+2\mu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(n+\mu)} + \frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{n+2\mu-1}\Gamma(\mu)\Gamma(n+\mu+1)}.$$

Or on a

$$\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma\mu,\qquad \Gamma(n+\mu+1) = (n+\mu)\Gamma(n+\mu).$$

Substituant ces valeurs et supprimant les facteurs communs, l'égalité à vérifier se réduira à

$$\frac{n}{\mu(n+\mu)} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{n+\mu},$$

ce qui est évident.

On vérifiera de même cette autre formule

$$(48) \qquad 2\frac{dJ_n}{dx} = J_{n-1} - J_{n+1},$$

dont la combinaison avec la précédente donnera

$$(49) \qquad \frac{dJ_n}{dx} = J_{n-1} + \frac{n}{x}J_n.$$

Nous signalerons enfin les deux formules

$$(50) \qquad \frac{d}{dx}x^{-\frac{n}{2}}J_n(\sqrt{x}) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{n+1}{2}}J_{n+1}(\sqrt{x}),$$

$$(51) \qquad \frac{d}{dx}x^{\frac{n}{2}}J_n(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}x^{\frac{n-1}{2}}J_{n-1}(\sqrt{x}),$$

qu'il est également aisé de vérifier.

195. On peut rattacher à l'équation de Bessel plusieurs équations qui se rencontrent fréquemment dans les applications.

Transformons en effet cette équation en posant

$$y = t^\alpha V, \qquad x = \gamma t^\beta,$$

t et V désignant de nouvelles variables; on aura

$$dx = \beta\gamma t^{\beta-1}dt,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\left(\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-\beta}{\beta\gamma}t^{-\beta}\frac{dy}{dt}\right).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
y &= t^{\alpha} V, \\
\frac{dy}{dt} &= t^{\alpha} \frac{dV}{dt} + \alpha t^{\alpha-1} V, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= t^{\alpha} \frac{d^2 V}{dt^2} + 2\alpha t^{\alpha-1} \frac{dV}{dt} + \alpha(\alpha-1) t^{\alpha-2} V.
\end{aligned}$$

Substituant les valeurs précédentes de y et de ses dérivées dans l'équation de Bessel, on aura l'équation transformée

$$(52) \qquad t^2 \frac{d^2 V}{dt^2} + (2\alpha+1) t \frac{dV}{dt} + (\alpha^2 - \beta^2 n^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}) V = 0.$$

L'équation en y ayant, pour intégrale générale,

$$y = c J_n(x) + c' J_{-n}(x),$$

la transformée aura, pour intégrale générale,

$$V = t^{-\alpha} y = c t^{-\alpha} J_n(\gamma t^{\beta}) + c' t^{-\alpha} J_{-n}(\gamma t^{\beta})$$

(J_{-n} devant toutefois être remplacé par Y_n si n est entier).

On pourra donc intégrer par les transcendantes J toute équation de la forme

$$(53) \qquad t^2 \frac{d^2 V}{dt^2} + a t \frac{dV}{dt} + (b + c t^{\lambda}) V = 0,$$

car on peut disposer des quatre constantes α, β, γ, n de manière à identifier l'équation (53) avec (52).

On remarquera toutefois que, β et γ ne pouvant être nuls, la transformation serait en défaut si c ou λ étaient nuls. Mais alors l'équation (53) se ramène à une équation à coefficients constants (143).

Les cas particuliers les plus intéressants sont les suivants :

$$t \frac{d^2 V}{dt^2} + (\pm 2n + 1) \frac{dV}{dt} + t V = 0,$$

correspondant à $\alpha = \pm n$, $\beta = \gamma = 1$, et

$$t\frac{d^2V}{dt^2} + (1+n)\frac{dV}{dt} + \frac{1}{4}V = 0,$$

correspondant à $\alpha = \frac{n}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$; enfin l'équation

$$\frac{d^2V}{dt^2} + ct^\lambda V = 0,$$

correspondant à $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2n}$, $\gamma = 2n\sqrt{c}$, $n = \frac{1}{\lambda+2}$.

IV. — Intégration par des intégrales définies.

196. L'équation de Gauss est un cas particulier de la suivante

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= Q(x)\frac{d^nI}{dx^n} - (\xi - n)Q'(x)\frac{d^{n-1}I}{dx^{n-1}} \\ &\quad + \frac{(\xi-n)(\xi-n+1)}{1.2}Q''(x)\frac{d^{n-2}I}{dx^{n-2}} - \ldots \\ &\quad - R(x)\frac{d^{n-1}I}{dx^{n-1}} + (\xi-n+1)R'(x)\frac{d^{n-2}I}{dx^{n-2}} - \ldots, \end{aligned}\right.$$

où ξ est une constante, et $Q(x)$, $R(x)$ deux polynomes, tels que l'un des polynomes $Q(x)$, $xR(x)$ soit de degré n, et l'autre de degré $\overline{\underline{<}}\, n$.

Nous essayerons de satisfaire à cette équation en posant

$$I = \int_L U(u-x)^{\xi-1}\,du,$$

U étant une fonction de u qui reste à déterminer ainsi que la ligne L d'intégration.

Substituant dans l'équation la valeur précédente et supprimant le facteur commun $(-1)^n(\xi-1)\ldots(\xi-n+1)$, il

viendra

$$o = \int_L \left\{ \begin{array}{l} (\xi - n)(u-x)^{\xi-n-1}\left[Q(x) + Q'(x)(u-x) + Q''(x)\dfrac{(u-x)^2}{1.2} + \ldots\right] \\ + (u-x)^{\xi-n} \quad \left[R(x) + R'(x)(u-x) + R''(x)\dfrac{(u-x)^2}{1.2} + \ldots\right] \end{array} \right\}$$

$$= \int_L [(\xi - n)(u-x)^{\xi-n-1} Q(u) + (u-x)^{\xi-n} R(u)]\, U\, du.$$

Déterminons U par la condition

$$R(u) U = \frac{d}{du} U Q(u),$$

d'où

$$\frac{d\, U Q(u)}{U Q(u)} = \frac{R(u)}{Q(u)} du, \qquad \log U Q(u) = \int \frac{R(u)}{Q(u)} du$$

et enfin

$$U = \frac{1}{Q(u)} e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du};$$

l'équation précédente deviendra

$$o = \int_L d\, U Q(u)(u-x)^{\xi-n} = \int_L dV,$$

en posant, pour abréger,

$$(2) \qquad V = U Q(u)(u-x)^{\xi-n} = e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du} (u-x)^{\xi-n}.$$

L'intégrale de dV sera nulle et l'équation sera satisfaite :

1° Si L est un contour fermé tel que V reprenne sa valeur initiale lorsqu'on revient au point de départ;

2° Si L est une ligne telle que V s'annule à ses deux extrémités.

197. Nous allons voir, en discutant ces diverses lignes d'intégration, qu'on peut obtenir en général n intégrales particulières distinctes, dont la combinaison donnera l'intégrale générale de l'équation proposée.

La fraction $\frac{R(u)}{Q(u)}$, décomposée en fractions simples, donnera un résultat de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{R(u)}{Q(u)} &= m_{\lambda-1}u^{\lambda-1}+\ldots+m_1 u + m_0 \\ &+ \frac{\alpha_\mu}{(u-a)^\mu}+\ldots+\frac{\alpha_1}{u-a} \\ &+ \frac{\beta_\nu}{(u-b)^\nu}+\ldots+\frac{\beta_1}{u-b}+\ldots, \end{aligned}\right.$$

où

$$\lambda+\mu+\nu+\ldots=n.$$

On en déduit

$$(4)\qquad V=(u-a)^{\alpha_1}(u-b)^{\beta_1}\ldots(u-x)^{\xi-n}e^W,$$

en posant, pour abréger,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} W &= \frac{m_{\lambda-1}}{\lambda}u^\lambda+\ldots+m_0 u - \frac{\alpha_\mu}{\mu-1}\,\frac{1}{(u-a)^{\mu-1}}-\ldots \\ &- \frac{\alpha_2}{u-a} - \frac{\beta_\nu}{\nu-1}\,\frac{1}{(u-b)^{\nu-1}}-\ldots+\text{const.} \end{aligned}\right.$$

Les fonctions $U(u-x)^{\xi-1}$, V admettent donc comme points critiques le point x et les racines a, b, ... de l'équation $Q=0$ et se reproduisent multipliées par $e^{2\pi i\xi}$, $e^{2\pi i\alpha_1}$, $e^{2\pi i\beta_1}$, ... lorsque l'on tourne autour de ces divers points.

Cela posé, soit O un point quelconque du plan. Joignons ce point aux points a, b, ..., x par des lacets A, B, ..., X : soient $\overline{A}$, $\overline{B}$, ..., $\overline{X}$ les valeurs de l'intégrale $\int U(u-x)^{\xi-1}du$ prise dans le sens direct le long de ces divers contours avec une détermination initiale donnée M de la fonction à intégrer. On pourra prendre pour ligne d'intégration L l'un quelconque des contours suivants : $ABA^{-1}B^{-1}$, ..., $AXA^{-1}X^{-1}$, ...; car, si l'on décrit le contour $ABA^{-1}B^{-1}$, par exemple, la fonction V se reproduira, au retour, multipliée par

$$e^{2\pi i\alpha_1}e^{2\pi i\beta_1}e^{-2\pi i\alpha_1}e^{-2\pi i\beta_1}=1.$$

La valeur [AB] de l'intégrale prise suivant le contour $ABA^{-1}B^{-1}$ est donc une solution de l'équation proposée. Il est aisé de la déterminer. En effet, en décrivant d'abord le lacet A, on obtiendra une première intégrale $\overline{A}$, et $U(u-x)^{\xi-1}$ aura pour valeur finale $e^{2\pi i \alpha_1}M$. Décrivant ensuite le lacet B, on obtient comme seconde partie de l'intégrale $e^{2\pi i \alpha_1}\overline{B}$, et $U(u-x)^{\xi-1}$ aura pour valeur finale $e^{2\pi i(\alpha_1+\beta_1)}M$. L'intégrale suivante, le long de A^{-1}, serait évidemment $-\overline{A}$ si la fonction à intégrer avait pour valeur initiale $e^{2\pi i \alpha_1}M$ (qui est sa valeur finale lorsque l'on décrit A avec la valeur initiale M); elle sera donc, dans le cas actuel, égale à $-e^{2\pi i \beta_1}\overline{A}$, et $U(u-x)^{\xi-1}$ aura pour valeur finale $e^{2\pi i \beta_1}M$.

Enfin l'intégrale suivant B^{-1} sera $-\overline{B}$.

On aura donc, en réunissant ces résultats,

$$[AB] = (1 - e^{2\pi i \beta_1})\overline{A} - (1 - e^{2\pi i \alpha_1})\overline{B}. \tag{6}$$

On obtiendra des formules semblables pour les intégrales analogues, telles que [AX], [BX], ... On déduit immédiatement de ces relations les suivantes :

$$[XA] = -[AX], \tag{7}$$

$$(1 - e^{2\pi i \xi})[AB] + (1 - e^{2\pi i \alpha_1})[BX] + (1 - e^{2\pi i \beta_1})[XA] = 0, \tag{8}$$

qui montrent que toutes les intégrales [AB], ... s'expriment linéairement au moyen des intégrales particulières [AX], [BX], ... [à moins toutefois que ξ ne soit un entier, auquel cas on aurait évidemment

$$1 - e^{2\pi i \xi} = 0, \quad \overline{X} = 0, \quad \text{d'où} \quad [AX] = 0, \quad [BX] = 0, \quad \ldots,$$

de telle sorte que l'équation (8) deviendrait identique].

198. Le nombre des intégrales obtenues par ce qui précède est égal au nombre des racines distinctes de l'équation $Q(u) = 0$. Si donc le polynome Q a des racines égales, ou si son degré est inférieur à n, il nous faudra trouver de nouvelles intégrales particulières. Nous les obtiendrons en choi-

sissant la ligne d'intégration L, de telle sorte que V s'annule à ses extrémités.

Soit a une racine multiple d'ordre μ de l'équation $Q = 0$. Posons

$$u - a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

et

$$-\frac{\alpha_\mu}{\mu - 1} = r(\cos p + i\sin p)$$

dans les formules (4) et (5) et faisons tendre ρ vers zéro; on aura évidemment

$$V = \theta\rho^{\alpha_1}(\cos\alpha_1\varphi + i\sin\alpha_1\varphi)\, e^{r\rho^{1-\mu}\{\cos[p-(\mu-1)\varphi]+i\sin[p-(\mu-1)\varphi]\}},$$

θ étant un facteur qui tend vers la limite finie

$$(a-b)^{\beta_1}\ldots(a-x)^{\xi-n}.$$

Cette expression tendra vers 0 ou vers ∞, suivant que $\cos[p-(\mu-1)\varphi]$ sera négatif ou positif.

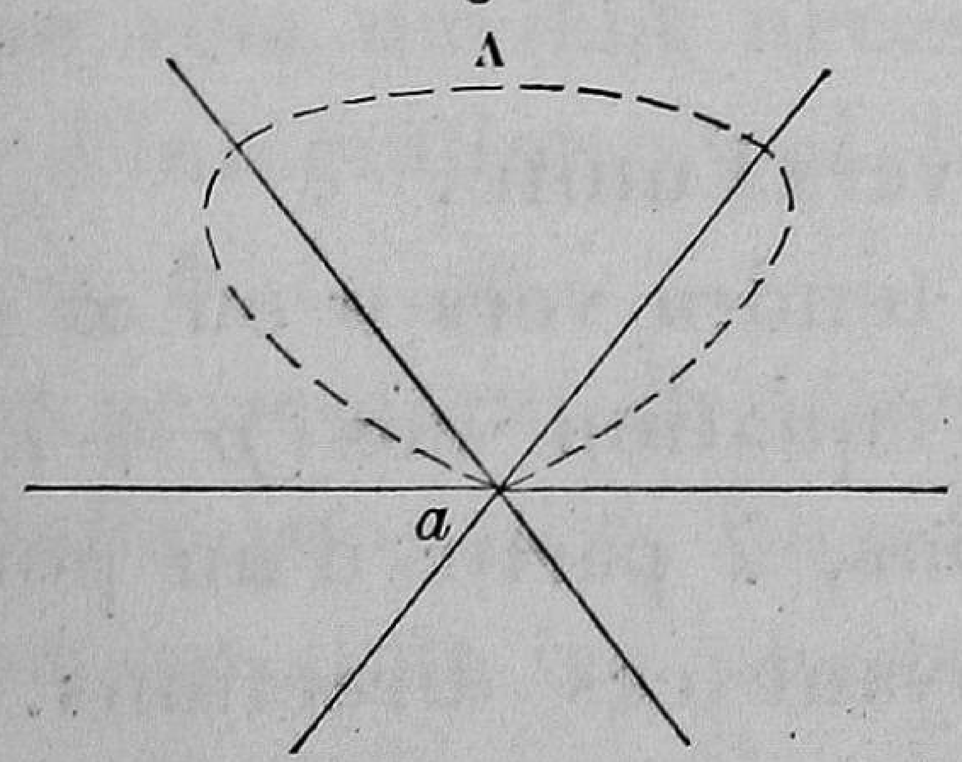
Or l'équation

$$\cos[p-(\mu-1)\varphi] = 0$$

donne pour φ un système de $2(\mu-1)$ valeurs équidistantes, dans l'intervalle de zéro à 2π. Si du point a on mène des droites dans ces diverses directions, elles partageront les environs de ce point en $2(\mu-1)$ secteurs. Et, lorsque u tendra vers a, V tendra vers 0 si u se meut dans un des secteurs de rang impair, vers ∞ s'il reste dans un secteur de rang pair.

Si donc nous supposons (*fig.* 2) que u, partant de la

Fig. 2.



valeur a, s'en éloigne suivant le premier secteur, traverse ensuite le second secteur et revienne en a par le troisième

secteur, la ligne Λ ainsi décrite pourra être prise comme ligne d'intégration, car V est nul à ses deux extrémités.

La valeur de l'intégrale particulière ainsi obtenue variera évidemment suivant que la ligne Λ enveloppe quelques-uns des points b, ..., x ou les laisse tous en dehors. Nous admettrons qu'elle ait été tracée de manière à satisfaire à cette dernière condition. L'intégrale ainsi obtenue ne changera pas si l'on contracte cette ligne de manière à rendre ses dimensions aussi petites qu'on voudra; la diminution du champ de l'intégration sera compensée par l'accroissement de la valeur de la fonction soumise à l'intégration.

On obtiendra une autre intégrale particulière en intégrant suivant une ligne infiniment petite Λ' qui s'éloigne de a suivant le troisième secteur et y revienne par le cinquième, etc., ce qui donnera évidemment $\mu - 1$ intégrales particulières.

Chaque racine multiple de l'équation $Q = 0$ donnera évidemment un résultat analogue, de telle sorte que, si λ est nul, nous aurons le nombre d'intégrales voulu.

199. Si λ n'est pas nul, cherchons ce que devient V lorsque u tend vers ∞. Nous aurons à poser

$$u = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \frac{m_{\lambda-1}}{\lambda} = r(\cos p + i\sin p)$$

et à faire tendre ρ vers ∞. On aura évidemment

$$\begin{aligned} V = \theta\rho^{\alpha_1+\beta_1+\dots}&[\cos(\alpha_1+\beta_1+\dots)\varphi + i\sin(\alpha_1+\beta_1+\dots)\varphi] \\ &\times e^{r\rho^\lambda[\cos(p+\lambda\varphi)+i\sin(p+\lambda\varphi)]}, \end{aligned}$$

le facteur θ tendant vers l'unité.

Cette expression tendra vers o ou ∞ suivant le signe de $\cos(p+\lambda\varphi)$. Or l'équation $\cos(p+\lambda\varphi) = 0$ donne 2λ valeurs de φ. Traçons, à partir d'un point quelconque du plan, des droites ayant ces directions. Elles partageront le plan en 2λ secteurs; pour $u = \infty$, on aura

$$V = 0 \quad \text{ou} \quad V = \infty$$

suivant que u sera dans un secteur de rang impair ou pair. Et si l'on suppose une ligne Λ partant de l'infini dans le $(2m+1)^{\text{ième}}$ secteur et y retournant par le $(2m+3)^{\text{ième}}$ (après avoir laissé à sa gauche tous les points $a, b, \ldots, x$), elle fournira une intégrale particulière. On en obtiendra ainsi λ.

200. Nous avons ainsi obtenu dans tous les cas le nombre d'intégrales nécessaire. On pourrait en déterminer une foule d'autres. Il est clair, en effet, qu'on pourrait prendre pour ligne d'intégration :

1° Toute combinaison de lacets, telle que chaque lacet fût décrit aussi souvent dans le sens direct que dans le sens rétrograde ;

2° Toute ligne L joignant deux des points $a, b, \ldots, \infty$, pourvu qu'elle arrive à ces points dans une directiôn telle, qu'on ait, en y arrivant, $V = 0$.

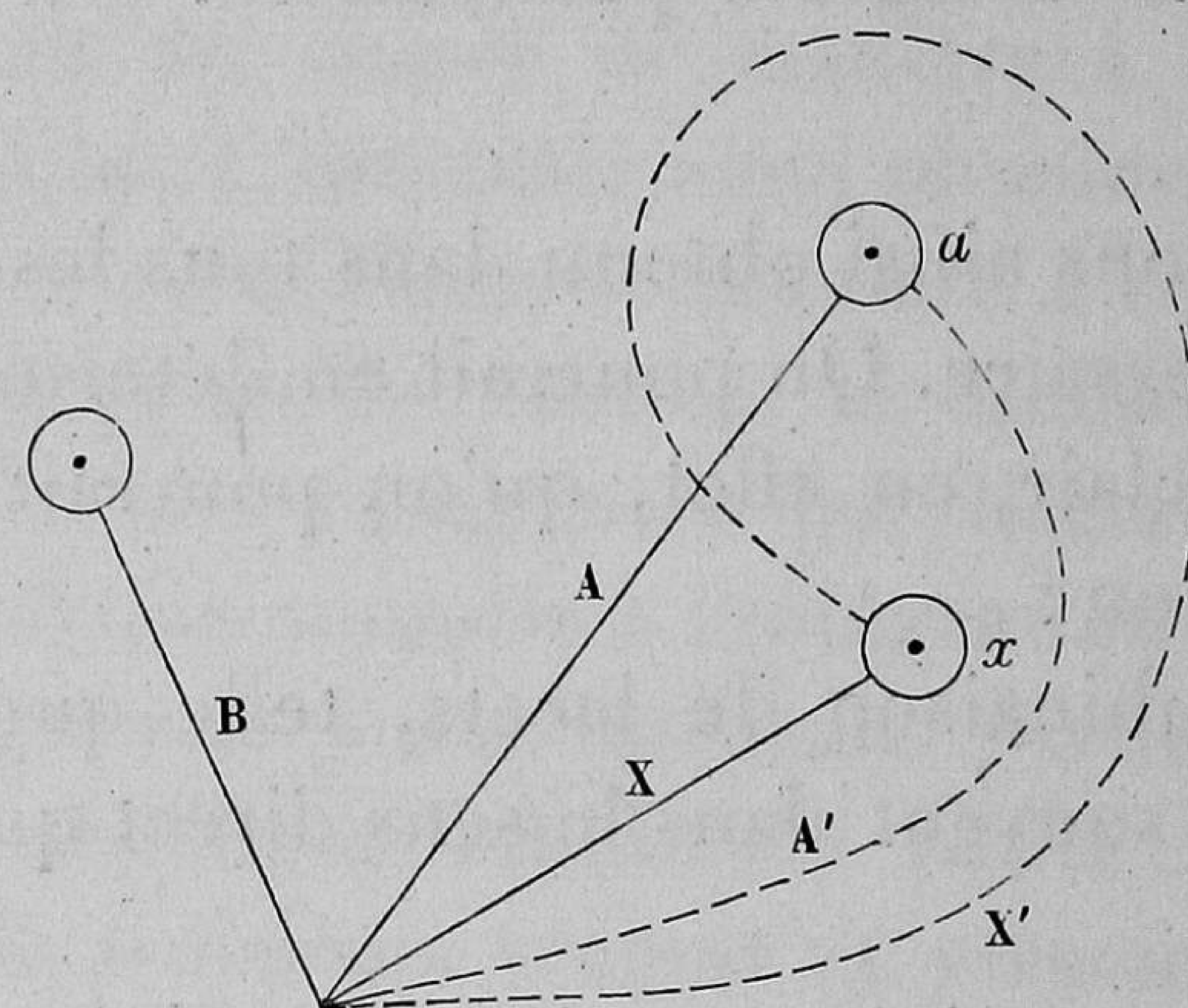
Mais nous savons d'avance, et il serait d'ailleurs aisé de le vérifier, que ces intégrales sont liées linéairement aux intégrales fondamentales que nous avons déterminées.

201. Pour une valeur donnée de x, les lignes suivant lesquelles sont prises ces intégrales fondamentales peuvent être déformées à volonté sans que la valeur des intégrales soit altérée, pourvu que dans cette déformation elles ne traversent jamais les points $a, b, \ldots, x$. Si l'on fait varier x d'une manière continue, ces intégrales varieront également d'une manière continue, pourvu que le mouvement de x soit accompagné, lorsque cela devient nécessaire, d'une déformation des lignes d'intégration, qui leur fasse éviter la traversée des points $a, b, \ldots, x$.

Ces considérations permettent de déterminer le groupe de l'équation différentielle proposée. En effet, les points critiques de cette équation sont les points $a, b, \ldots$, et il est aisé de se rendre compte de la manière dont varient les intégrales fondamentales lorsque x tourne dans le sens direct autour de l'un de ces points, tel que a.

202. Les lacets B, ... n'auront pas changé; mais les lacets X et A, pour éviter d'être traversés par a et x, auront dû se transformer en X′ et A′ (*fig.* 3). Or le nouveau

Fig. 3.



contour X′ est évidemment équivalent à $XAXA^{-1}X^{-1}$ et le contour A′ à

$$XAX^{-1} = XAX^{-1}A^{-1}A.$$

L'intégrale suivant X′ sera donc égale à $\overline{X} + e^{2\pi\xi i}[AX]$, et l'intégrale suivant A′ à $-[AX] + \overline{A}$. Par suite, l'intégrale

$$[AX] = (1 - e^{2\pi i\xi})\overline{A} - (1 - e^{2\pi i\alpha_1})\overline{X}$$

se trouvera transformée en

$$(1 - e^{2\pi i\xi})\overline{A'} - (1 - e^{2\pi i\alpha_1})\overline{X'}$$
$$= [AX][1 - (1 - e^{2\pi i\xi}) - (1 - e^{2\pi i\alpha_1})e^{2\pi i\xi}] = e^{2\pi i(\alpha_1+\xi)}[AX],$$

et l'une quelconque [BX] des autres intégrales [BX], [CX], ... sera changée en

$$[BX] + (e^{2\pi i\beta_1} - 1)e^{2\pi i\xi}[AX].$$

203. Si a est une racine multiple d'ordre μ pour l'équation $Q = 0$, il existera $\mu - 1$ intégrales particulières I_1^a, ..., $I_{\mu-1}^a$ correspondant à des contours fermés infiniment petits Λ,

A′, ... passant par ce point (198). Ces contours n'étant pas traversés par x dans son mouvement pourront être conservés sans altération. Mais la fonction à intégrer contient le facteur $(u - x)^{\xi - n}$, qui se reproduit multiplié par $e^{2\pi i \xi}$ lorsque x tourne autour de a, car il enveloppe en même temps le point u qui en est infiniment voisin. Les intégrales $I_1^a, \ldots, I_{\mu-1}^a$ se reproduiront donc multipliées par $e^{2\pi i \xi}$.

Soient b une autre racine multiple de $Q = 0$, ν son ordre de multiplicité. Il existera $\nu - 1$ intégrales particulières correspondant à des contours fermés infiniment petits passant par b. Le point x restant extérieur à ces contours lorsqu'il tourne autour de a, cette rotation ne changera ni les lignes d'intégration, ni la valeur du facteur $(u - x)^{\xi - n}$. Ces intégrales resteront donc inaltérées.

Enfin il en est évidemment de même des intégrales correspondant aux λ racines infinies que pourrait présenter l'équation $Q = 0$ (199).

Nous avons ainsi déterminé d'une manière complète la transformation que subissent les intégrales par une rotation autour de a. On déterminerait de même la transformation opérée par une rotation autour de chacun des autres points critiques b, ...

204. Il peut arriver, pour certaines valeurs particulières des coefficients de l'équation différentielle, que les intégrales obtenues cessent d'être distinctes. Ainsi, si nous supposons que α_1 soit un nombre entier m, l'intégrale

$$[AX] = (1 - e^{2\pi i \xi})\overline{A} - (1 - e^{2\pi i \alpha_1})\overline{X}$$

sera identiquement nulle; car, d'une part, $e^{2\pi i \alpha_1} = 1$ et, d'autre part, $\overline{A} = 0$, car la fonction à intégrer reste monodrome dans l'intérieur du lacet A.

Pour obtenir dans ce cas l'intégrale particulière qui doit remplacer l'intégrale évanouissante, nous supposerons $\alpha_1 = m + \varepsilon$, ε étant infiniment petit. L'intégrale [AX] dans cette nouvelle hypothèse ne sera plus nulle, et, en la déve-

loppant en série suivant les puissances de ε, on aura

$$[AX] = [AX]_{\alpha_1=m} + \varepsilon\left(\frac{d}{d\alpha_1}[AX]\right)_{\alpha_1=m} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\left(\frac{d^2}{d\alpha_1^2}[AX]\right)_{\alpha_1=m} + \ldots$$

Le premier terme de ce développement est identiquement nul. Divisant le reste par ε, nous obtiendrons une autre intégrale

$$\frac{1}{\varepsilon}[AX] = \left(\frac{d}{d\alpha_1}[AX]\right)_{\alpha_1=m} + \ldots$$

qui, pour $\varepsilon = 0$, se réduira à son premier terme

$$\left(\frac{d}{d\alpha_1}[AX]\right)_{\alpha_1=m} = 2\pi i\left[e^{2\pi i\alpha_1}\overline{X}\right]_{\alpha_1=m} + (1 - e^{2\pi i\xi})\overline{\mathcal{A}},$$

$\overline{\mathcal{A}}$ désignant ce que devient l'intégrale $\overline{A}$ lorsqu'on y remplace dans la fonction à intégrer le facteur $(u-a)^{\alpha_1}$ par sa dérivée $(u-a)^m \log(u-a)$ pour la valeur particulière $\alpha_1 = m$.

On pourra opérer de même dans tous les cas analogues où une combinaison linéaire des intégrales fondamentales s'annule identiquement. En faisant varier infiniment peu l'un des paramètres, convenablement choisi, cette expression cesserait de s'annuler. Sa dérivée par rapport à ce paramètre donnera l'intégrale supplémentaire dont on a besoin.

205. Considérons en particulier le cas où toutes les racines de $Q(u)$ sont inégales et finies; on aura

$$Q(u) = (u-a)(u-b)\ldots,$$
$$\frac{R(u)}{Q(u)} = \frac{\alpha}{u-a} + \frac{\beta}{u-b} + \ldots,$$
$$V = (u-a)^{\alpha}(u-b)^{\beta}\ldots(u-x)^{\xi-n},$$

et les intégrales particulières de l'équation proposée seront

données par la formule

$$I_{\alpha\beta\ldots\xi} = \int_L (u-a)^{\alpha-1}(u-b)^{\beta-1}\ldots(u-x)^{\xi-1}\,du,$$

où L est un contour fermé quelconque, tel que la fonction à intégrer reprenne sa valeur initiale après l'avoir décrit.

La différentiation sous le signe $\int$ donne évidemment

$$\frac{d^\mu I_{\alpha\beta\ldots\xi}}{dx^\mu} = (-1)^\mu(\xi-1)(\xi-2)\ldots(\xi-\mu)\,I_{\alpha\beta,\ldots,\xi-\mu}.$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait $I_{\alpha\beta\ldots\xi}$ équivaut donc à une relation linéaire entre les $n+1$ intégrales consécutives $I_{\alpha\beta\ldots\xi}$, $I_{\alpha\beta\ldots,\xi-1}$, …, $I_{\alpha\beta\ldots,\xi-n}$.

D'autre part, on a évidemment

$$I_{\alpha+1,\beta\ldots\xi} = I_{\alpha\beta\ldots\xi+1} + (x-a)\,I_{\alpha\beta\ldots\xi}.$$

Cette formule et ses analogues, combinées avec la relation précédente, montrent que toutes les intégrales de la forme

$$I_{\alpha+p,\beta+q,\ldots,\xi+r},$$

où p, q, …, r sont des entiers, s'expriment linéairement en fonction de n d'entre elles, telles que $I_{\alpha\beta\ldots\xi-1}$, …, $I_{\alpha\beta\ldots\xi-n}$.

Signalons encore cette formule, dont la vérification est immédiate,

$$(\xi-1)\frac{\partial I_{\alpha\beta\ldots\xi}}{\partial a} - (\alpha-1)\frac{\partial I_{\alpha\beta\ldots\xi}}{\partial x} = (x-a)\frac{\partial^2 I_{\alpha\beta\ldots\xi}}{\partial a\,\partial x}.$$

206. Si les exposants α, β, …, ξ sont réels et rationnels l'intégrale

$$\int (u-a)^{\alpha-1}(u-b)^{\beta-1}\ldots(u-x)^{\xi-1}\,du$$

sera une intégrale abélienne, et l'intégrale $I_{\alpha\beta\ldots\xi}$ en sera une période.

On pouvait prévoir *a priori* que les périodes d'une intégrale abélienne, considérées comme fonctions de l'un des

paramètres a qui figurent dans l'intégrale, seraient les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients uniformes. En effet, soient P, P_1, ..., les périodes linéairement distinctes. La forme générale des périodes sera

$$mP + m_1 P_1 + \ldots,$$

m, m_1, ... étant des entiers. Si nous faisons varier a d'une manière quelconque, P, P_1, ... varieront d'une manière continue. Et, si a reprend sa valeur primitive, les valeurs finales de ces fonctions, étant encore des périodes, seront de la forme $mP + m_1 P_1 + \ldots$. L'effet du contour fermé décrit par a sera donc d'opérer sur P, P_1, ... une certaine substitution linéaire. L'équation linéaire

$$\begin{vmatrix} I & P & P_1 & \ldots \\ \dfrac{dI}{da} & \dfrac{dP}{da} & \dfrac{dP_1}{da} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

dont ces périodes sont les solutions, se reproduira multipliée par le déterminant de cette substitution lorsque a décrit ce contour; et, si nous divisons l'équation par le coefficient du premier terme, les coefficients de la nouvelle équation obtenue se reproduiront sans altération. Ce sont donc des fonctions uniformes.

207. Proposons-nous, comme application, de former l'équation différentielle à laquelle satisfont les périodes de l'intégrale elliptique

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

considérées comme fonctions du module k.

On a

$$kI = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\left(\dfrac{1}{k^2} - t^2\right)}}$$

ou

$$kI = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}(u-1)^{-\frac{1}{2}}(u-x)^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

en posant

$$\frac{1}{k^2} = x, \qquad t^2 = u.$$

Les périodes de cette intégrale, considérées comme fonctions de x, satisferont à l'équation différentielle (1) si l'on pose

$$Q(u) = u(u-1), \qquad \xi = \frac{1}{2}, \qquad n = 2,$$

$$R(u) = \left[\frac{1}{2u} + \frac{1}{2(u-1)}\right] Q(u) = u - \frac{1}{2}.$$

Substituant ces valeurs, il viendra

$$x(x-1)\frac{d^2kI}{dx^2} + (2x-1)\frac{dkI}{dx} + \frac{1}{4}kI = 0.$$

Il reste à transformer cette expression en substituant à x sa valeur $\frac{1}{k^2}$.

On a

$$dx = -\frac{2\,dk}{k^3}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dk}{dx} = -\frac{1}{2}k^3,$$

$$\frac{dkI}{dx} = -\frac{1}{2}k^3\frac{dkI}{dk},$$

$$\frac{d^2kI}{dx^2} = \left(-\frac{1}{2}k^3\frac{d^2kI}{dk^2} - \frac{3}{2}k^2\frac{dkI}{dk}\right)\left(-\frac{1}{2}k^3\right)$$

et, en substituant,

$$k(1-k^2)\frac{d^2kI}{dk^2} - (1+k^2)\frac{dkI}{dk} + I = 0.$$

208. L'équation différentielle de Laplace

$$(9) \qquad (f+gx)\frac{d^nI}{dx^n} + (f_1+g_1x)\frac{d^{n-1}I}{dx^{n-1}I} + \ldots + (f_n+g_nx)I = 0,$$

où les f, g sont des constantes, peut s'intégrer par un procédé tout semblable à celui qui nous a servi pour l'équation (1).

Posons, en effet,

$$I = \int_L U e^{ux}\, du.$$

Le résultat de la substitution de cette intégrale sera

$$\int_L [R(u) + Q(u)x] U e^{ux}\, du,$$

en posant, pour abréger,

$$R(u) = f u^n + f_1 u^{n-1} + \ldots + f_n,$$
$$Q(u) = g u^n + g_1 u^{n-1} + \ldots + g_n.$$

Si nous déterminons ici encore U par la condition

$$R(u) U = \frac{d}{du} U Q(u),$$

d'où

$$U = \frac{1}{Q(u)} e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du},$$

l'intégrale précédente se réduira à

$$\int_L d.UQ(u) e^{ux} = \int_L dV.$$

Elle sera nulle, et l'on obtiendra, par suite, une intégrale de l'équation proposée, si l'on choisit pour L un contour fermé tel que V reprenne sa valeur initiale quand on revient au point de départ ou une ligne telle que V s'annule à ses deux extrémités.

Soient :

$a, b, c, \ldots$ les racines distinctes de l'équation $Q = 0$;
m leur nombre;
A, B, C, ... les lacets correspondants.

On obtiendra $m - 1$ intégrales en prenant successivement pour L les contours

$$ABA^{-1}B^{-1}, \quad ACA^{-1}C^{-1}, \quad \ldots.$$

Si l'équation $Q = 0$ a des racines multiples, soient a l'une d'elles, μ son ordre de multiplicité : on obtiendra, comme au n° **198**, $\mu - 1$ nouvelles intégrales, en prenant pour L des contours partant du point a et y revenant dans des directions convenables.

Enfin, soit λ le nombre des racines infinies de l'équation $Q = 0$ (ce nombre pouvant être nul); on aura

$$\frac{R(u)}{Q(u)} = pu^{\lambda} + p_1 u^{\lambda-1} + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha_1}{u-a} + \frac{\alpha_2}{(u-a)^2} + \ldots + \frac{\beta_1}{u-b} + \ldots$$

et, par suite,

$$V = e^{\int \frac{R(u)}{Q(u)} du + ux}$$
$$= e^{\frac{p}{\lambda+1} u^{\lambda+1} + \ldots + (p_{\lambda} + x) u} (u-a)^{\alpha_1} (u-b)^{\beta_1} \ldots \theta,$$

le facteur θ restant fini pour $u = \infty$.

On verra, comme au n° **199**, qu'il existe $\lambda + 1$ intégrales correspondant à des lignes L ayant leurs deux extrémités à l'infini.

Ce résultat subsistera, même si $\lambda = 0$, auquel cas V serait de la forme

$$V = e^{(p+x)u} (u-a)^{\alpha_1} (u-b)^{\beta_1} \ldots \theta.$$

Les $\lambda + 1$ intégrales ainsi obtenues, jointes aux précédentes, compléteront le nombre des intégrales requises pour former l'intégrale générale.

209. Nous allons appliquer la méthode précédente à l'équation

$$(10) \qquad x \frac{d^2 I}{dx^2} + (2n+1) \frac{dI}{dx} + xI = 0.$$

On aura, dans ce cas,

$$R(u) = (2n+1)u, \qquad Q(u) = u^2+1,$$

$$\int \frac{R(u)}{Q(u)}\,du = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log(u^2+1).$$

Nous aurons donc, comme solution de l'équation proposée, l'intégrale

$$\int e^{ux}(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,du,$$

pourvu que l'expression

$$V = e^{ux}(u^2+1)^{n+\frac{1}{2}}$$

prenne la même valeur aux deux extrémités de la ligne d'intégration.

210. Avant de procéder à l'étude des solutions fournies par cette intégrale, il convient de donner quelques explications sur les fonctions eulériennes, lorsque leur argument est une quantité complexe quelconque.

La définition de $\Gamma(z)$ par un produit infini n'est soumise à aucune restriction; elle donne, pour toute valeur de z, une valeur unique et déterminée de $\Gamma(z)$, laquelle est toujours différente de zéro et reste finie, sauf pour les valeurs entières et négatives de z, pour lesquelles elle est infinie du premier ordre. Mais, pour qu'on puisse considérer $\Gamma(z)$ comme fonction de la variable imaginaire z, il faut encore établir qu'elle a une dérivée.

Or $\Gamma(z)$ est un produit infini ayant pour facteur général (t. I, nº 325)

$$\frac{n}{n+z}\,\frac{(n+1)^z}{n^z}.$$

Donc $\log\Gamma(z)$ sera donné par une série infinie S ayant pour terme général

$$\log n - \log(n+z) + z\log(n+1) - z\log n.$$

Prenant les dérivées des termes de cette série, nous aurons

une nouvelle série S′ ayant pour terme général

$$-\frac{1}{n+z}+\log(n+1)-\log n.$$

Mais on a

$$\log(n+1)-\log n=\int_n^{n+1}\frac{dn}{n}=\frac{1}{n+\theta_n},$$

θ_n étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Le terme général de la série des dérivées sera donc

$$-\frac{1}{n+z}+\frac{1}{n+\theta_n}=\frac{z-\theta_n}{(n+z)(n+\theta_n)},$$

et son module aura pour limite supérieure la quantité

$$A_n=\frac{Z+1}{(n-Z)n},$$

Z désignant le maximum du module de z dans la région où l'on considère sa variation.

Les quantités A_n ne dépendent plus de z et forment une série manifestement convergente. Donc la série S′ est uniformément convergente dans la région considérée et sera la dérivée de $\log\Gamma(z)$. Donc $\Gamma(z)=e^{\log\Gamma(z)}$ aura lui-même une dérivée égale à $S'\Gamma(z)$.

211. La définition de $\Gamma(z)$ par l'intégrale définie

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

est bornée au cas où z est réel et positif. Mais il est aisé de la modifier, de manière à obtenir une expression de $\Gamma(z)$ en intégrale définie applicable à toute valeur de z.

Considérons, en effet, l'intégrale

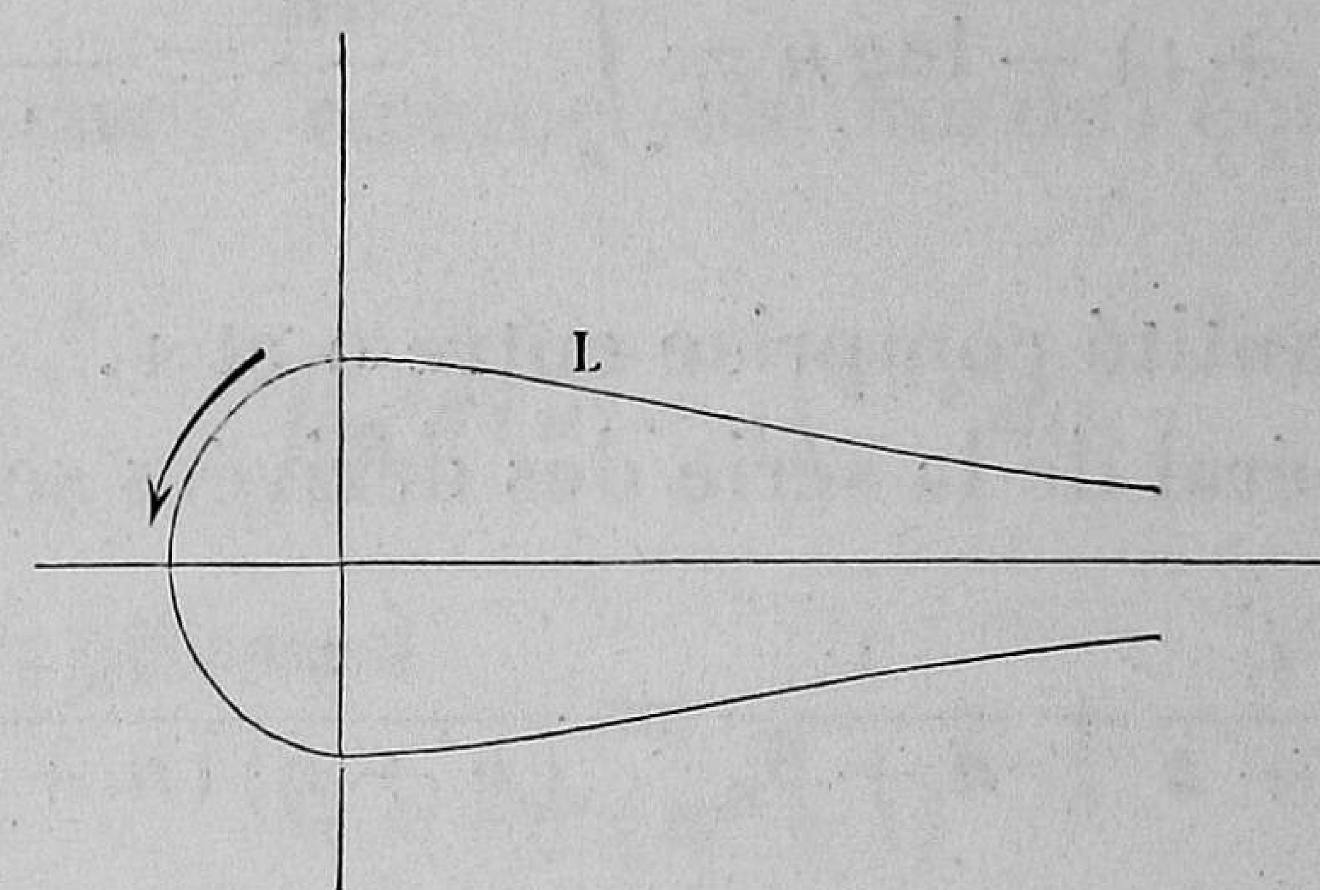
$$\int e^{-t}t^{z-1}\,dt$$

prise suivant une ligne L partant de l'infini positif et y re-

venant, après avoir entouré l'origine dans le sens direct, comme l'indique la figure 4.

Pour définir complètement cette intégrale, il faut préciser

Fig. 4.



quelle est celle des déterminations de la fonction t^{z-1} qu'on adopte. Soit

$$t = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

on aura, par définition,

$$t^{z-1} = e^{(z-1)(\operatorname{Log}\rho + i\varphi)}.$$

Pour chaque position du point t, ρ est complètement déterminé; mais l'argument φ n'est connu qu'aux multiples près de 2π; suivant celle de ces valeurs qu'on adopte, celle de t^{z-1} variera.

Nous prendrons pour valeur de φ celle qui varie de o à 2π lorsque t se meut sur la ligne L. On aura, dans ce cas,

$$\int_L e^{-t} t^{z-1}\, dt = (e^{2\pi i z} - 1)\Gamma(z).$$

En effet, les deux membres de cette égalité sont des fonctions continues et uniformes de z. On sait que deux semblables fonctions sont égales dans tout le plan dès qu'elles sont égales le long d'une ligne déterminée. Il nous suffira donc de montrer que l'égalité a lieu pour les valeurs réelles et positives de z.

Dans ce cas, la ligne d'intégration L peut être déformée de manière à se composer : 1° de l'axe des x, de ∞ à ε, ε étant

une quantité infiniment petite; 2° d'un cercle de rayon ε décrit autour de l'origine; de l'axe des x de ε à ∞.

Si ε tend vers zéro, l'intégrale rectiligne $\int_\infty^\varepsilon$ aura pour limite

$$\int_\infty^0 = -\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

où l'on prendra pour t^{z-1} sa valeur réelle.

Cette intégrale est égale à $-\Gamma(z)$.

L'intégrale suivant le cercle est nulle. Enfin l'intégrale de retour sera

$$e^{2\pi i(z-1)} \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt = e^{2\pi i z}\, \Gamma(z),$$

parce que la rotation autour de l'origine a multiplié t^{z-1} par le facteur $e^{2\pi t(z-1)} = e^{2\pi i z}$.

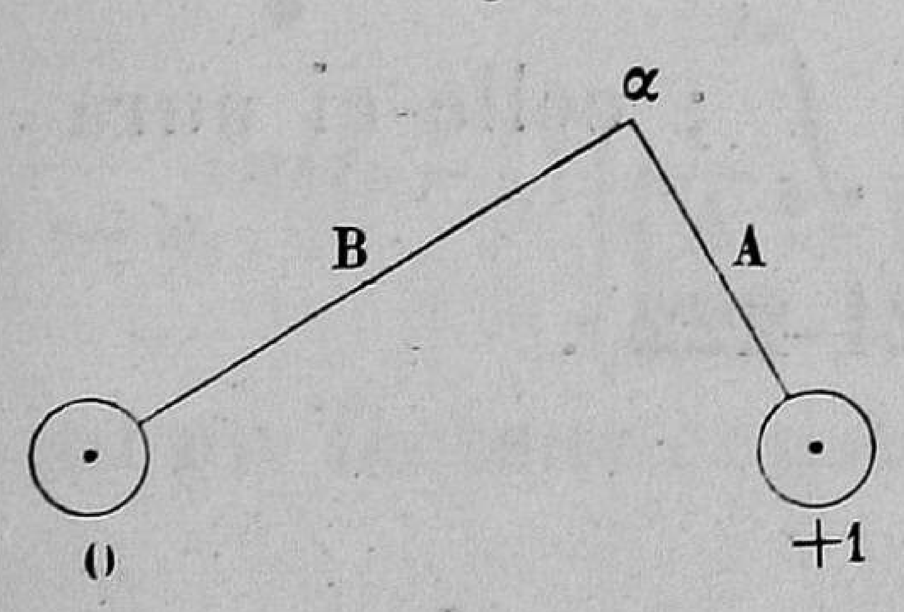
L'égalité est donc démontrée.

212. Considérons, d'autre part, l'intégrale

$$\int_{ABA^{-1}B^{-1}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt,$$

A, B (*fig.* 5) désignant des lacets rectilignes qui joignent les points critiques $+1$ et 0 à un point quelconque α. Les valeurs

Fig. 5.



de t^{p-1}, $(1-t)^{q-1}$ dépendent des valeurs initiales adoptées au point α pour les arguments φ, φ_1 des quantités t et $1-t$. Nous adopterons celles de ces valeurs qui sont comprises entre $-\pi$ et $+\pi$. La signification de l'intégrale étant ainsi

précisée, nous aurons

$$\int_{ABA^{-1}B^{-1}} t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = (1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Il suffira, comme tout à l'heure, d'établir la proposition pour le cas où p et q sont réels et positifs.

En désignant par $\overline{A}$, $\overline{B}$ les valeurs de l'intégrale prise le long des lacets A, B, on aura

$$\int_{ABA^{-1}B^{-1}} = (1-e^{2\pi ip})\overline{A} - (1-e^{2\pi iq})\overline{B}.$$

D'ailleurs les intégrales le long des petits cercles étant nulles, on aura

$$\overline{A} = \int_\alpha^1 + \int_1^\alpha = (1-e^{2\pi iq})\int_\alpha^1,$$

$$\overline{B} = \int_\alpha^0 + \int_0^\alpha = (-e^{2\pi ip}+1)\int_0^\alpha.$$

Donc

$$\int_{ABA^{-1}B^{-1}} = (1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})\int_0^1.$$

Mais, en vertu de l'hypothèse faite, t et $1-t$ auront leur argument nul entre 0 et 1 ; donc t^{p-1} et $(1-t)^{q-1}$ seront réels dans l'intégrale $\int_0^1$; celle-ci aura donc pour valeur $\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (t. II, n^{os} **221-222**).

213. Revenons à l'intégrale $\int e^{ux}(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,du$.

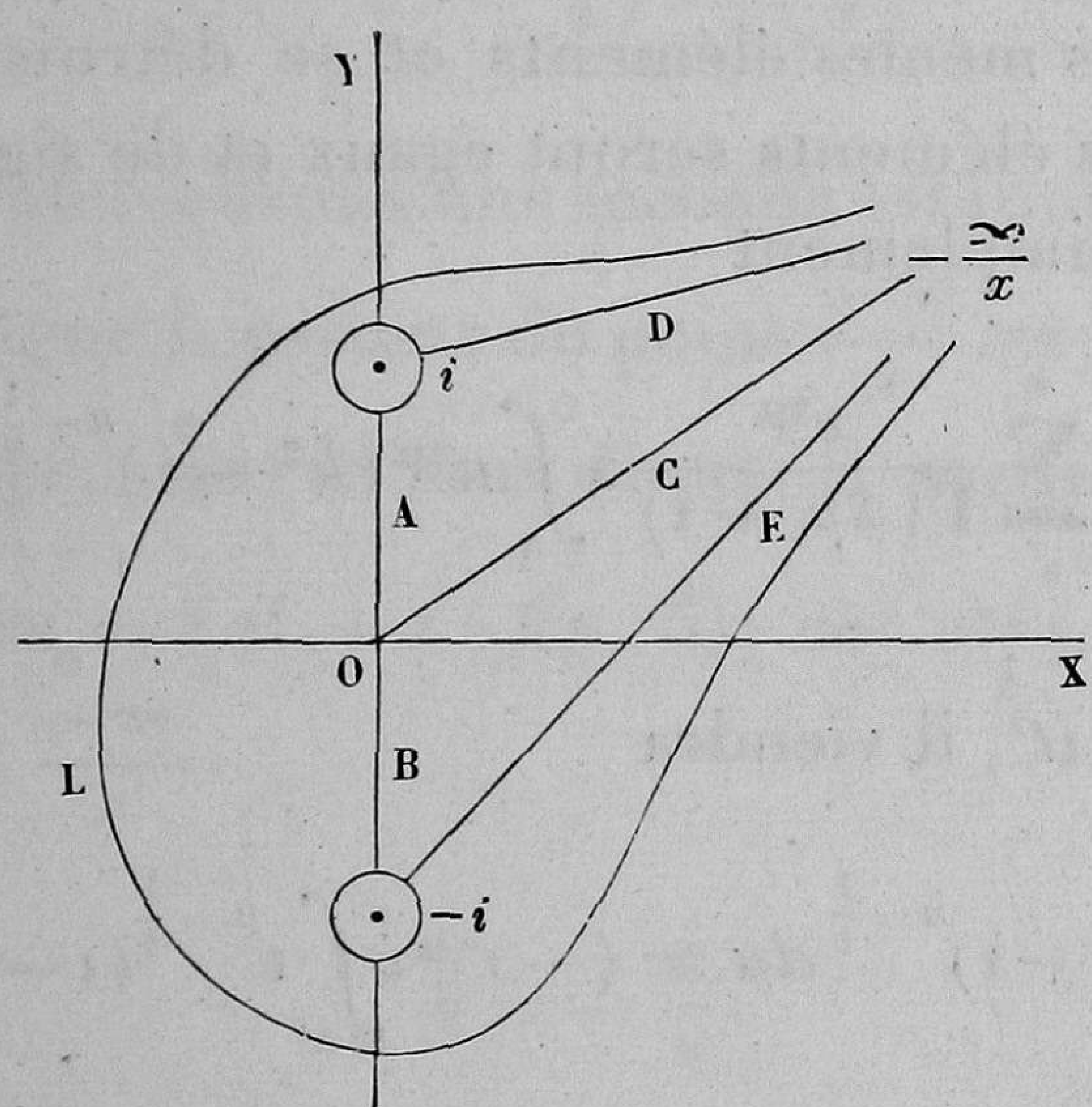
Soient (*fig.* 6) :

A, B des lacets joignant l'origine aux points critiques i et $-i$;

C une droite joignant l'origine au point $-\frac{\infty}{x}$, situé à l'infini dans la direction du point $\frac{-1}{x}$;

$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ les valeurs de l'intégrale prise le long de ces lignes, en choisissant celle des déterminations du radical $(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}}$ qui se réduit à $+1$ pour la valeur initiale $u=0$, ce qui revient à adopter, parmi les divers arguments de la quantité u^2+1 (lesquels diffèrent les uns des autres de multiples de 2π) celui dont la valeur initiale est nulle.

Fig. 6.



On peut obtenir une première solution en prenant pour ligne d'intégration $ABA^{-1}B^{-1}$. L'intégrale correspondante étant

$$\left[1-e^{2\pi i\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right][\overline{A}-\overline{B}],$$

on voit, en supprimant un facteur constant, que

$$I_1=\overline{A}-\overline{B}$$

est une solution.

On obtiendrait d'ailleurs directement cette solution en prenant pour ligne d'intégration le contour fermé AB^{-1}, à l'extrémité duquel la fonction V reprend sa valeur initiale $+1$;

car les deux facteurs exponentiels par lesquels elle a été successivement multipliée sont inverses l'un de l'autre :

$$I_1 = \overline{A} - \overline{B} = \int_A e^{ux}(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}} du - \int_B e^{ux}(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}} du,$$

ou, en développant les exponentielles en séries,

$$I_1 = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{x^m}{\Gamma(m+1)} \left[\int_A u^m (u^2+1)^{n-\frac{1}{2}} du - \int_B u^m (u^2+1)^{n-\frac{1}{2}} du \right].$$

Si m est impair, les deux intégrales entre parenthèses ont évidemment les mêmes éléments et se détruisent; si m est pair $= 2\mu$, ces éléments seront égaux et de signe contraire; on aura donc simplement

$$I_1 = \sum_0^\infty \frac{x^{2\mu}}{\Gamma(2\mu+1)} 2 \int_A u^{2\mu}(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}} du.$$

Posons $u = it^{\frac{1}{2}}$, il viendra

$$2 \int_A u^{2\mu}(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}} du = (-1)^\mu i \int_{A'} t^{\mu-\frac{1}{2}} (1-t)^{n-\frac{1}{2}} dt,$$

A' désignant le lacet qui joint l'origine au point 1, t étant réel et positif ainsi que $(1-t)^{n-\frac{1}{2}}$ lorsqu'on va de 0 à 1.

Dans ces conditions, l'intégrale suivant A' sera égale à

$$\left[1 - e^{2\pi i\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right] \frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+n+1)}.$$

D'ailleurs $e^{2\pi i\left(n-\frac{1}{2}\right)} = -e^{2\pi i n}$. En outre, si dans la formule

$$\frac{m^{mz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{m}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{m-1}{m}\right)}{\Gamma(mz)} = (2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}},$$

démontrée au Tome I, n° 385, on pose $m = 2$, $z = \mu + \frac{1}{2}$, il viendra

$$\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(2\mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1)} \frac{1}{2^{2\mu}} \sqrt{\pi}. \tag{11}$$

Substituant ces valeurs, il viendra finalement

$$\begin{aligned} I_1 &= (1 + e^{2\pi i n}) i \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+n+1)} \\ &= (1 + e^{2\pi i n}) i \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x). \end{aligned} \tag{12}$$

214. Nous obtiendrons une seconde solution I_2 en intégrant suivant une ligne L partant du point $\frac{-\infty}{x}$ et y revenant après avoir enveloppé, dans le sens direct, la partie de l'axe des y comprise entre $-i$ et $+i$ (*fig.* 6); car $e^{ux}(u^2 + 1)^{n+\frac{1}{2}}$ s'annule au point $\frac{-\infty}{x}$.

Posons

$$u = -\frac{t}{x},$$

d'où

$$u^2 + 1 = \frac{t^2}{x^2} + 1 = \frac{t^2}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right) e^{2k\pi i}, \tag{13}$$

et, par suite,

$$(u^2 + 1)^{n - \frac{1}{2}} = e^{(2n-1)k\pi i} \frac{t^{2n-1}}{x^{2n-1}} \left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right)^{n - \frac{1}{2}},$$

k étant un entier choisi de telle sorte que les deux membres de l'équation (13) aient le même argument lorsqu'on donne à t sa valeur initiale $+\infty$ et à u la valeur correspondante $\frac{-\infty}{x}$.

Nous adopterons pour arguments de t et de $1 + \frac{x^2}{t^2}$ ceux

dont la valeur initiale est nulle; pour argument de x celui qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, pour argument initial de u^2+1 celui qu'on obtiendrait en faisant décrire à u la ligne C et prenant zéro pour l'argument correspondant à l'origine.

Il est clair que, lorsque u décrit la ligne C, l'argument de l'un des facteurs $u-i$, $u+i$ augmente, l'autre diminue. D'ailleurs, chacun d'eux varie d'une quantité inférieure à π : donc l'argument initial à adopter pour u^2+1 sera compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On devra donc déterminer k, de telle sorte que l'argument

$$2k\pi - 2\arg x$$

du second membre de l'équation (13) soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Si x est à droite de l'axe des y, $\arg x$ sera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et l'on devra poser $k=0$; si x est à gauche de cet axe, $\arg x$ sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, et l'on devra poser $k=1$.

Cela posé, faisons $u=-\frac{t}{x}$ dans l'intégrale

$$\int_{\mathrm{L}} e^{ux}(u^2+1)^{n-\frac{1}{2}}\,du,$$

elle deviendra

$$\int e^{-t}\,e^{(2n-1)k\pi i}\,\frac{t^{2n-1}}{x^{2n-1}}\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}\frac{-dt}{x},$$

t ayant pour valeur initiale et finale $+\infty$, et son argument variant de 0 à 2π le long de la nouvelle ligne d'intégration. En supposant, ce qui est évidemment permis, que le module de t soit plus grand que celui de x tout le long de cette ligne, on pourra développer le facteur $\left(1+\frac{x^2}{t^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$ par la formule

du binome, et l'on aura ainsi

$$I_2 = -e^{(2n-1)k\pi i} \sum_\mu \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) x^{2\mu-2n}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right)} \int e^{-t}\, t^{2n-2\mu-1}\, dt$$

$$= -e^{(2n-1)k\pi i} \sum_\mu \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) x^{2\mu-2n}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right)} (e^{4\pi i n}-1)\,\Gamma(2n-2\mu).$$

On a d'ailleurs, en changeant μ en $n-\mu-\frac{1}{2}$ dans la formule (11),

$$\frac{\Gamma(2n-2\mu)}{\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{2n-2\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n-\mu)$$

$$= \frac{2^{2n-2\mu-1}}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{\Gamma(\mu-n+1)\sin(n-\mu)\pi}$$

$$= \frac{2^{2n-2\mu}\sqrt{\pi}}{2\sin n\pi}(-1)^\mu \frac{1}{\Gamma(\mu-n+1)}.$$

Enfin

$$\frac{e^{4\pi i n}-1}{2\sin n\pi} = i\, e^{\pi i n}(1+e^{2\pi i n}).$$

On aura, par suite,

$$(14)\quad I_2 = -\, e^{(2n-1)k\pi i}(1+e^{2\pi i n})\, e^{\pi i n}$$

$$\times\, i\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\sum_\mu \frac{(-1)^\mu \left(\frac{x}{2}\right)^{2\mu-2n}}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\mu-n+1)}$$

$$= (1+e^{2\pi i n})\, e^{(2n-1)k\pi i+(n+1)\pi i}$$

$$\times\, i\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_{-n}(x).$$

215. Les deux solutions que nous venons d'obtenir sont donc, à des facteurs constants près, égales à $x^{-n}J_n(x)$ et $x^{-n}J_{-n}(x)$, ce qui confirme un résultat déjà obtenu au n° 195.

On peut trouver deux nouvelles solutions I_3 et I_4 en intégrant le long des lacets D et E joignant respectivement les points

critiques i et $-i$ au point $-\frac{\infty}{x}$ (*fig.* 6); car $e^{ux}(u^2+1)^{n+\frac{1}{2}}$ s'annule en ce dernier point. Nous préciserons le sens de ces intégrales en adoptant encore pour argument de u^2+1 au commencement de chacune de ces lignes celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Il est d'ailleurs aisé de déterminer les relations qui lient ces nouvelles intégrales aux précédentes. En effet, l'argument de u^2+1 reprenant sa valeur initiale lorsqu'on décrit le contour AB^{-1}, ce contour sera équivalent au contour $C^{-1}AB^{-1}C = C^{-1}AC.C^{-1}B^{-1}C$ qu'on peut aisément déformer en DE^{-1}. L'intégrale relative à ce dernier contour est $I_3 - I_4$; on aura donc

$$I_1 = I_3 - I_4. \tag{15}$$

D'autre part, le contour L peut évidemment être transformé en DE ou en ED suivant que $-\frac{\infty}{x}$ est à droite ou à gauche de l'axe des y. Dans le premier cas, x sera à gauche de cet axe, et l'on aura

$$I_2 = I_3 + e^{(2n-1)\pi i} I_4. \tag{16}$$

Dans le second cas, x sera à droite de cet axe, et l'on aura

$$I_2 = I_4 + e^{(2n-1)\pi i} I_3. \tag{17}$$

216. Proposons-nous de déterminer une valeur approchée de I_3 et I_4 lorsque le module de x est très grand. Nous admettrons, pour plus de simplicité, que n ait sa partie réelle plus grande que $-\frac{1}{2}$. Le cas où elle serait $< -\frac{1}{2}$ se ramène immédiatement à celui-là, car, en posant $I = x^{-2n}K$, l'équation transformée en K ne diffère de la primitive que par le signe de n.

Dans l'hypothèse admise, les intégrales prises le long de cercles infiniment petits décrits autour de i et de $-i$ sont nulles, et l'on aura évidemment

$$I_3 = -(1+e^{2\pi i n}) I'_3,$$
$$I_4 = -(1+e^{2\pi i n}) I'_4,$$

I'_2 et I'_4 étant les intégrales prises suivant les droites P et Q qui joignent respectivement les points i et $-i$ au point $\frac{-\infty}{x}$.

Soit P′ une droite menée à partir du point i et faisant avec la droite P un angle λ inférieur en valeur absolue à $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale suivant un arc de cercle de rayon infini tracé entre P et P′ sera nulle; car e^{ux} tend vers zéro tout le long de cet arc plus rapidement qu'une puissance négative quelconque du rayon. On pourra donc remplacer l'intégrale suivant P par l'intégrale suivant P′.

Or on a sur cette dernière droite

$$u = i - \frac{t e^{\lambda i}}{x} = e^{\frac{\pi i}{2}} + \frac{e^{(-\pi+\lambda)i} t}{x},$$

t étant réel et variant de o à ∞.

On en déduit

$$(18) \qquad u^2 + 1 = \frac{2 e^{\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right)i} t}{x} + \frac{e^{2\lambda i} t^2}{x^2}$$

$$= \frac{2 e^{\left(-\frac{\pi}{2}+\lambda\right)i} t}{x} \left[1 + \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)i} t}{2x} \right] e^{2k'\pi i},$$

k' étant un entier à déterminer de telle sorte que les deux membres de l'équation aient le même argument le long de P′.

Nous adopterons, comme précédemment, pour argument de x celui qui est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, pour argument de t celui qui s'annule sur P′, pour argument de $1 + \frac{e^{\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)i} t}{2x}$ celui qui s'annule pour $t = 0$.

Considérons sur les deux lignes P et P′ deux points p, p' infiniment voisins du point i; l'argument de $u + i$ aura sensiblement la même valeur en ces deux points; et la valeur de l'argument de $u - i$ au point p' surpassera de λ sa valeur au point p. Or au point p l'argument de $u^2 + 1$ est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Sa valeur au point p' sera donc comprise entre $-\pi + \lambda$ et $\pi + \lambda$.

Mais l'argument du second membre de la relation (18) au point p' est égal à

$$-\frac{\pi}{2}+\lambda-\arg x+2k'\pi.$$

Pour qu'il soit compris entre $-\pi+\lambda$ et $\pi+\lambda$, il faudra poser $k'=0$ ou $k'=1$, suivant que l'argument de x sera compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ ou entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$. On aura donc, en tout état de cause, $k'=k$, le nombre k étant celui qui figure dans l'expression (14) de l'intégrale I_2.

Prenant donc t pour variable indépendante au lieu de u et remarquant que $e^{\frac{\pi i}{2}}=i$, il viendra

$$I'_3=-e^{(2n-1)k\pi i}\,e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}i}\,2^{n-\frac{1}{2}}\frac{e^{ix}}{x^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{H},$$

H désignant l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-e^{\lambda i}t}(e^{\lambda i}t)^{n-\frac{1}{2}}\left[1+\frac{ie^{\lambda i}t}{2x}\right]^{n-\frac{1}{2}}e^{\lambda i}\,dt.$$

Or on a

$$\left[1+\frac{ie^{\lambda i}t}{2x}\right]^{n-\frac{1}{2}}=\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{ie^{\lambda i}t}{2x}\right)^{\mu}+\mathrm{R}_m,$$

R_m étant un reste dont nous aurons à discuter la valeur. Donc

$$\mathrm{H}=\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{i}{2x}\right)^{\mu}\times\int_0^\infty e^{-e^{\lambda i}t}(e^{\lambda i}t)^{n-\frac{1}{2}+\mu}e^{\lambda i}\,dt+\mathrm{U},$$

le reste U étant donné par l'intégrale

$$\mathrm{U}=\int_0^\infty e^{-e^{\lambda i}t}(e^{\lambda i}t)^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{R}_m\,e^{\lambda i}\,dt.$$

Mais

$$\int_0^\infty e^{-e^{\lambda i}t}\left(e^{\lambda i}t\right)^{n-\frac{1}{2}+\mu} e^{\lambda i}\,dt$$

n'est autre chose que l'intégrale

$$\int e^{-z} z^{n-\frac{1}{2}+\mu}\,dz$$

prise le long d'une droite allant de l'origine jusqu'à l'infini avec un azimut λ. L'intégrale de cette même fonction étant évidemment nulle sur un arc de cercle de rayon infini, compris entre cette ligne et l'axe des x, on pourra remplacer la ligne d'intégration par l'axe des x, ce qui donnera, pour valeur de l'intégrale,

$$\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right).$$

Nous aurons donc, pour expression approchée de H, la série

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{i}{2x}\right)^{\mu}$$

et nous n'aurons plus qu'à trouver une limite supérieure du module de l'intégrale U, qui nous permette d'apprécier l'erreur commise.

217. Or $e^{-e^{\lambda i}t}e^{\lambda i}$ a pour module $e^{-t\cos\lambda}$; et, si nous supposons $n=\alpha+\beta i$, la quantité

$$\left(e^{\lambda i}t\right)^{n-\frac{1}{2}} = e^{(\operatorname{Log} t+\lambda i)\left(\alpha-\frac{1}{2}+\beta i\right)}$$

aura pour module

$$t^{\alpha-\frac{1}{2}}e^{-\beta\lambda}.$$

Pour obtenir, d'autre part, une limite du module de R_m, posons

$$\left(1+\frac{i e^{\lambda i}t}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} = F(t) = f(t) + i\varphi(t),$$

$f(t)$ et $\varphi(t)$ étant des fonctions réelles. La série de Maclaurin, appliquée à ces deux fonctions séparément, donnera

$$f(t) = f(0) + tf'(0) + \ldots + \frac{t^{m-1} f^{m-1}(0)}{1.2\ldots(m-1)} + \frac{t^m}{1.2\ldots m} f^m(\theta t),$$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \ldots \qquad + \frac{t^{m-1} \varphi^{m-1}(0)}{1.2\ldots(m-1)} + \frac{t^m}{1.2\ldots m} \varphi^m(\theta' t),$$

θ et θ' étant compris entre 0 et 1 ; on aura donc, pour l'expression du reste,

$$R_m = \frac{t^m}{1.2\ldots m} [f^m(\theta t) + i\varphi^m(\theta' t)].$$

Or on a

$$F^m(t) = f^m(t) + i\varphi^m(t)$$

et, par suite,

$$|F^m(t)| \geqq |f^m(t)|, \qquad |F^m(t)| \geqq |\varphi^m(t)|.$$

Soit donc M la valeur maximum du module de $F^m(t)$ entre 0 et ∞; on aura

$$|f^m(\theta t)| \leqq M, \qquad |\varphi^m(\theta' t)| \leqq M,$$

d'où

$$|R_m| \leqq \frac{t^m}{1.2\ldots m} M\sqrt{2}.$$

D'ailleurs

$$F^m(t) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n - m + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{ie^{\lambda i}}{2x}\right)^m \left(1 + \frac{ie^{\lambda i} t}{2x}\right)^{n - \frac{1}{2} - m},$$

et, si nous supposons

$$x = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi},$$

on aura

$$1 + \frac{ie^{\lambda i} t}{2x} = 1 - \frac{t}{2\rho}\sin(\lambda - \varphi) + i\frac{t}{2\rho}\cos(\lambda - \varphi).$$

Le module de cette expression

$$r = \sqrt{1 - \frac{t\sin(\lambda - \varphi)}{\rho} + \frac{t^2}{4\rho^2}}$$

a pour valeur minimum

$$|\cos(\lambda - \varphi)|$$

correspondant à $t = 2\rho\sin(\lambda - \varphi)$, et son argument ψ, qui est nul pour $t = 0$, sera constamment compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Cela posé,

$$\left(1 + \frac{ie^{\lambda i}t}{2x}\right)^{n - \frac{1}{2} - m} = e^{(\operatorname{Log} r + i\psi)\left(\alpha - \frac{1}{2} - m + \beta i\right)}$$

a pour module

$$r^{\alpha - \frac{1}{2} - m} e^{-\beta\psi}.$$

Si nous avons poussé le développement assez loin pour que m soit $> \alpha - \frac{1}{2}$, le maximum de cette expression correspondra au minimum de r et sera au plus égal à

$$\cos(\lambda - \varphi)^{\alpha - \frac{1}{2} - m} e^{\pi|\beta|}.$$

On aura, par suite,

$$M \overline{\overline{<}} \left|\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n - m - \frac{1}{2}\right)}\right| \frac{1}{(2\rho)^m} |\cos(\lambda - \varphi)|^{\alpha - \frac{1}{2} - m} e^{\pi|\beta|}.$$

218. Nous obtiendrons donc, pour limite supérieure du module de U, une expression de la forme

$$\frac{K e^{-\beta\lambda} |\cos(\lambda - \varphi)|^{\alpha - \frac{1}{2} - m}}{\rho^m} \int_0^\infty e^{-t\cos\lambda} t^{\alpha - \frac{1}{2} + m} dt,$$

K désignant une constante indépendante de x et de λ. D'ailleurs, en posant $t\cos\lambda = z$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-t\cos\lambda} t^{\alpha - \frac{1}{2} + m} dt = \frac{1}{(\cos\lambda)^{\alpha + \frac{1}{2} + m}} \int_0^\infty e^{-z} z^{\alpha - \frac{1}{2} + m} dz$$

$$= \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2} + m\right)}{(\cos\lambda)^{\alpha + \frac{1}{2} + m}}.$$

et enfin, par suite,

$$|U| \overline{\overline{<}} K\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}+m\right)\frac{e^{-\beta\lambda}|\cos(\lambda-\varphi)|^{\alpha-\frac{1}{2}-m}}{(\cos\lambda)^{\alpha+\frac{1}{2}+m}}\frac{1}{\rho^m}.$$

Le second membre contient l'indéterminée λ, variable entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ et dont nous pourrons profiter pour rendre minimum le coefficient de $\frac{1}{\rho^m}$.

La limite ainsi obtenue pour le module du reste U est de l'ordre de $\frac{1}{\rho^m}$, tandis que les modules des termes de l'expression approchée de I''_3 sont de l'ordre de $\frac{1}{\rho^\mu}$, où $\mu < m$; circonstance qui justifie notre formule d'approximation lorsque ρ sera suffisamment grand, toutes choses égales d'ailleurs.

219. Un procédé analogue permettra de trouver la valeur approchée de I'_4. On substituera à la ligne d'intégration Q une autre ligne d'intégration Q′ faisant avec elle un angle λ inférieur à $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue. On aura, le long de cette ligne,

$$u = -i - \frac{te^{\lambda i}}{x} = e^{-\frac{\pi i}{2}} + \frac{e^{(\pi+\lambda)i}t}{x},$$

$$u^2+1 = \frac{2e^{\left(\frac{\pi}{2}+\lambda\right)i}t}{x}\left[1+\frac{e^{\left(\frac{3\pi}{2}+\lambda\right)i}t}{2x}\right],$$

les arguments des deux membres étant ici égaux, comme étant tous deux compris entre $-\pi+\lambda$ et $\pi+\lambda$.

On aura, par suite,

$$I'_4 = -e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}i}\,2^{n-\frac{1}{2}}\frac{e^{-ix}}{x^{n+\frac{1}{2}}}H_1,$$

H_1 désignant l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-e^{\lambda i}t}(e^{\lambda i}t)^{n-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{ie^{\lambda i}t}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} e^{\lambda i}\,dt;$$

et enfin, en développant la puissance du binome,

$$H_1 = \sum_{\mu=0}^{\mu=m-1} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(n-\mu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{-i}{2x}\right)^{\mu} + U_1,$$

U_1 étant un reste dont le module a pour limite supérieure $\frac{A_1}{\rho^m}$, A_1 désignant une constante.

220. En nous bornant au premier terme des développements de I_3 et de I_4, nous aurons pour ces intégrales les valeurs asymptotiques suivantes :

$$I_3 = (1+e^{2n\pi i})e^{(2n-1)k\pi i}\,\frac{e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}\,2^{n-\frac{1}{2}}\,e^{ix}}{x^{n+\frac{1}{2}}}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

$$I_4 = (1+e^{2n\pi i})\,\frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}\,2^{n-\frac{1}{2}}\,e^{-ix}}{x^{n+\frac{1}{2}}}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

On en déduit, pour la fonction

$$J_n(x) = \frac{1}{(1+e^{2\pi i n})\,i\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\frac{x}{2}\right)^n (I_3 - I_4),$$

la valeur asymptotique

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left[e^{ix+(2n-1)k\pi i-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}} + e^{-ix+\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}\right].$$

Si x est à droite de l'axe des y, on aura $k = 0$, et cette expression se réduira à

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right].$$

S'il est à gauche, on aura $k = 1$, et l'expression deviendra

$$e^{(2n-1)\frac{\pi i}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x + \left(n - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right].$$

Au moyen des relations (14) et (17) qui lient $J_{-n}(x)$ à I_2 et cette dernière intégrale à I_3 et I_4, on trouvera de même la valeur approchée de $J_{-n}(x)$.

221. Les deux valeurs asymptotiques trouvées ci-dessus pour $J_n(x)$ coïncident si n est la moitié d'un nombre entier. Soit, en effet, $n = m + \frac{1}{2}$. Elles se réduisent à

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - (m+1)\frac{\pi}{2}\right].$$

D'ailleurs, dans ce cas, les développements trouvés pour H et H_1 se limiteront d'eux-mêmes, le dernier terme étant celui où $\mu = m$; H et H_1 seront donc des polynomes entiers en $\frac{i}{x}$, de degré m et conjugués, dont le premier terme est $\Gamma(m+1)$.

Soient

$$H = \Gamma(m+1)\left[1 + \alpha_1 \frac{i}{x} + \ldots + \alpha_m \left(\frac{i}{x}\right)^m\right],$$

$$H_1 = \Gamma(m+1)\left[1 - \alpha_1 \frac{i}{x} + \ldots + (-1)^m \alpha_m \left(\frac{i}{x}\right)^m\right].$$

Les autres formules donnent pour $n = m + \frac{1}{2}$

$$I'_3 = -\frac{e^{-m\frac{\pi}{2}i} 2^m e^{ix}}{x^{m+1}} H,$$

$$I'_4 = -\frac{e^{m\frac{\pi}{2}i} 2^m e^{-ix}}{x^{m+1}} H_1,$$

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = \frac{-1}{i\Gamma(m+1)\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}} (I'_3 - I'_4)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{He^{\left(-\frac{m\pi}{2}+x\right)i} - H_1 e^{\left(\frac{m\pi}{2}-x\right)i}}{2i\Gamma(m+1)} \right]$$

ou, en substituant les valeurs de H, H_1,

$$J_{m+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \begin{array}{l} \cos\left[x - (m+1)\frac{\pi}{2}\right]\left(1 - \frac{\alpha_2}{x^2} + \frac{\alpha_4}{x^4} - \ldots\right) \\ + \sin\left[x - (m+1)\frac{\pi}{2}\right]\left(-\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_3}{x^3} - \ldots\right) \end{array} \right\}.$$

222. M. *Kummer* a montré que l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^{n-\mu}y}{dx^{n-\mu}} - x^\mu y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{\mu-1} x^{\mu-1}$$

s'exprime par des intégrales définies multiples.

Soit, pour fixer les idées, $\mu = 3$. Posons, pour abréger,

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \qquad \lambda = e^{-\frac{u^n + v^n + w^n}{n} + \alpha^k uvw x}.$$

On a

$$\alpha^n = 1,$$

$$\frac{\partial\lambda}{du} = (-u^{n-1} + \alpha^k vwx)\lambda,$$

$$\frac{d\lambda}{dv} = (-v^{n-1} + \alpha^k uwx)\lambda,$$

$$\frac{\partial\lambda}{dw} = (-w^{n-1} + \alpha^k uvx)\lambda,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}} v w^2 \lambda = & \ \alpha^{-3k} u^{n-3} v^{n-2} w^{n-1} \lambda, \\
= & \ \alpha^{-3k} u^{n-3} v^{n-2} \left(- \frac{\partial \lambda}{\partial w} + \alpha^k u v x \lambda \right), \\
= & - \alpha^{-3k} u^{n-3} v^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial w} + \alpha^{-2k} x u^{n-2} v^{n-1} \lambda, \\
= & - \alpha^{-3k} u^{n-3} v^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial w} + \alpha^{-2k} x u^{n-2} \left(- \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \alpha^k u w x \lambda \right), \\
= & - \alpha^{-3k} u^{n-3} v^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \alpha^{-2k} x u^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \alpha^{-k} x^2 w u^{n-1} \lambda, \\
= & - \alpha^{-3k} u^{n-3} v^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial w} - \alpha^{-2k} x u^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial v}, \\
& - \alpha^{-k} x^2 w \frac{\partial \lambda}{\partial u} + x^3 v w^2 \lambda.
\end{aligned}$$

Intégrons cette équation par rapport à u, v, w, de o à ∞, et posons

$$y_k = \mathrm{S}\, v w^2 \lambda \, du \, dv \, dw;$$

il viendra

$$\frac{d^{n-3} y_k}{dx^{n-3}} - x^3 y_k = - \alpha^{-3k} \mathrm{M}_0 - \alpha^{-2k} x \mathrm{M}_1 - \alpha^{-k} x^2 \mathrm{M}_2,$$

M_0, M_1, M_2 désignant les intégrales

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_0 &= \mathrm{S}\, u^{n-3} v^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial w} du \, dv \, dw, \\
\mathrm{M}_1 &= \mathrm{S}\, u^{n-2} \frac{\partial \lambda}{\partial v} du \, dv \, dw, \\
\mathrm{M}_2 &= \mathrm{S}\, w \frac{\partial \lambda}{\partial u} du \, dv \, dw.
\end{aligned}$$

Ces intégrales sont des constantes indépendantes de x et de k; car si, dans la première, par exemple, on intègre d'abord par rapport à w, on aura

$$\int_0^\infty \frac{\partial \lambda}{\partial w} dw = [\lambda]_{w=0}^{w=\infty} = - e^{-\frac{u^n + v^n}{n}},$$

d'où

$$M_0 = \int_0^\infty \int_0^\infty - u^{n-3} v^{n-2} e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} du\, dv = \text{const.}$$

De même pour M_1, M_2.

Posons maintenant

$$y = C_0 y_0 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1}.$$

Cette expression satisfera à l'équation

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^3} - x^3 y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2;$$

si l'on établit entre les constantes C les trois relations

$$-M_0 \Sigma \alpha^{-3k} C_k = a_0,$$
$$-M_1 \Sigma \alpha^{-2k} C_k = a_1,$$
$$-M_2 \Sigma \alpha^{-k} C_k = a_2,$$

il restera encore $n - 3$ constantes arbitraires. On aura donc ainsi l'intégrale générale.

V. — Équations de M. Picard.

223. Soit

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{du^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{du^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

une équation différentielle linéaire dont les coefficients soient des fonctions elliptiques de u, aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Supposons que ces intégrales soient uniformes, ce dont il est aisé de s'assurer en les développant en séries. Nous allons donner le moyen de les déterminer.

Soient $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u)$ un système de n intégrales indépendantes. Si nous changeons u en $u + 2\omega_1$, l'équation transformée, laquelle est identique à l'équation primitive. admettra comme système d'intégrales indépendantes

$$\varphi_1(u + 2\omega_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u + 2\omega_1).$$

Ces nouvelles fonctions seront donc liées aux intégrales primitives par des relations linéaires de la forme

$$\varphi_k(u+2\omega_1) = c_{1k}\varphi_1(u)+\ldots+c_{nk}\varphi_n(u) \qquad (k=1,\ldots,n),$$

les c étant des constantes dont le déterminant n'est pas nul.

Le changement de u en $u+2\omega_1$ dans les intégrales $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ revient donc à opérer sur ces intégrales une substitution linéaire, que nous désignerons par S.

On verrait de même que le changement de u en $u+2\omega_2$ équivaut à une autre substitution linéaire S'.

Enfin le changement de u en $u+2\omega_1+2\omega_2$ équivaudra à opérer successivement la substitution S suivie de la substitution S', ou la substitution de S', suivie de S. Les deux opérations S et S' satisferont donc à la relation

$$(2) \qquad SS' = S'S.$$

224. Proposons-nous de simplifier l'expression des substitutions S et S' en remplaçant $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ par un autre système d'intégrales indépendantes.

Soit s l'une des racines de l'équation caractéristique de S; il existera des intégrales que S multiplie par s; soient y, y', ... celles de ces intégrales qui sont distinctes. La forme générale des intégrales qui jouissent de cette propriété sera $\alpha y + \alpha' y' + \ldots$.

Soit Y la fonction que S' fait succéder à y; SS' remplacera y par sY; S'S doit produire le même résultat; or S' remplace y par Y; donc S doit transformer Y en sY; donc Y est de la forme $\alpha y + \alpha' y' + \ldots$.

La substitution S' remplaçant ainsi chacune des intégrales y, y', ... par une fonction linéaire de ces mêmes intégrales, il existera au moins une fonction linéaire x de ces intégrales que S' multiplie par une constante s'.

Nous avons donc prouvé qu'il existe au moins une intégrale x que S et S' multiplient respectivement par des constantes s et s'.

225. Nous allons démontrer qu'on peut déterminer un système d'intégrales indépendantes

$$\begin{matrix} y_{11}, & \ldots, & y_{1,l_1}, & y_{21}, & \ldots, & y_{2,l_2}, & \ldots, & y_{\lambda 1}, & \ldots, & y_{\lambda, l_\lambda}, \\ z_{11}, & \ldots, & z_{1,m_1}, & z_{21}, & \ldots, & z_{2,m_2}, & \ldots, & z_{\mu 1}, & \ldots, & z_{\mu, m_\mu}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

tel que les deux substitutions S, S' prennent la forme suivante :

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} S &= \left| \begin{matrix} y_{1k}, \ldots, y_{ik}, \ldots & s_1 y_{1k}, \ldots, s_1(y_{ik} + Y_{ik}), \ldots \\ z_{1k}, \ldots, z_{ik}, \ldots & s_2 z_{1k}, \ldots, s_2(z_{ik} + Z_{ik}), \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots & \ldots, \ldots, \ldots, \ldots \end{matrix} \right|, \\ S' &= \left| \begin{matrix} y_{1k}, \ldots, y_{ik}, \ldots & s'_1 y_{1k}, \ldots, s'_1(y_{ik} + Y'_{ik}), \ldots \\ z_{1k}, \ldots, z_{ik}, \ldots & s'_2 z_{1k}, \ldots, s'_2(z_{ik} + Z'_{ik}), \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots & \ldots, \ldots, \ldots, \ldots \end{matrix} \right|, \end{aligned} \right.$$

s_1, s'_1; s_2, s'_2; ... étant des couples de constantes différents; Y_{ik}, Y'_{ik} des fonctions linéaires de celle des intégrales y dont le premier indice est $< i$; Z_{ik}, Z'_{ik} des fonctions linéaires de celles des intégrales z dont le premier indice est $< i$, etc.

Cette proposition étant supposée vraie pour les substitutions à moins de n variables, nous allons montrer qu'elle subsiste pour deux substitutions S, S' à n variables.

On a vu qu'il existe au moins une intégrale x que S et S' multiplient respectivement par des constantes s, s'. En la prenant pour intégrale indépendante à la place d'une des intégrales primitives, telles que φ_n, S et S' prendront les formes suivantes :

$$S = |\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, x \quad \Phi_1 + a_1 x, \ldots, \Phi_{n-1} + a_{n-1} x, sx|,$$
$$S' = |\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, x \quad \Phi'_1 + a'_1 x, \ldots, \Phi'_{n-1} + a'_{n-1} x, s'x|,$$

les diverses quantités Φ, Φ' étant des fonctions linéaires de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Désignons par Σ, Σ' les substitutions à $n - 1$ variables

$$\Sigma = |\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \quad \Phi_1, \ldots, \Phi_{n-1}|,$$
$$\Sigma' = |\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \quad \Phi'_1, \ldots, \Phi'_{n-1}|.$$

L'égalité $SS' = S'S$ entraînera évidemment la suivante :

$$\Sigma\Sigma' = \Sigma'\Sigma.$$

On pourra donc, en appliquant le théorème à ces substitutions, les mettre sous la forme (3). Le même changement d'intégrales indépendantes, appliqué à S, S', les mettra évidemment sous la forme

$$S = \begin{vmatrix} y_{1k}, \ldots, y_{ik}, \ldots & s_1 y_{1k} + c_{1k} x, \ldots, s_1(y_{ik} + Y_{ik}) + c_{ik} x, \ldots \\ z_{1k}, \ldots, z_{ik}, \ldots & s_2 z_{1k} + d_{1k} x, \ldots, s_2(z_{ik} + Z_{ik}) + d_{ik} x, \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots & \ldots\ldots, \ldots, \ldots\ldots, \ldots \\ x & sx \end{vmatrix},$$

$$S' = \begin{vmatrix} y_{1k}, \ldots, y_{ik}, \ldots & s'_1 y_{1k} + c'_{1k} x, \ldots, s'_1(y_{ik} + Y'_{ik}) + c'_{ik} x, \ldots \\ z_{1k}, \ldots, z_{ik}, \ldots & s'_2 z_{1k} + d'_{1k} x, \ldots, s'_2(z_{ik} + Z'_{ik}) + d'_{ik} x, \ldots \\ \ldots, \ldots, \ldots, \ldots & \ldots\ldots, \ldots, \ldots\ldots, \ldots \\ x & s' x \end{vmatrix}.$$

Prenons pour intégrales indépendantes, au lieu des y, les suivantes :

$$y'_{ik} = y_{ik} + \alpha_{ik} x;$$

les substitutions S, S' conserveront la forme précédente, sauf le changement de

$$c_{ik} \quad \text{en} \quad (s - s_1)\alpha_{ik} - s_1 A_{ik} + c_{ik},$$
$$c'_{ik} \quad \text{en} \quad (s' - s'_1)\alpha_{ik} - s'_1 A'_{ik} + c'_{ik},$$

A_{ik}, A'_{ik} étant ce que deviennent Y_{ik}, Y'_{ik}, quand on y remplace les y par les α correspondants.

Cela posé, si $s \gtrless s_1$, on pourra évidemment disposer des α de manière à faire disparaître tous les coefficients c_{ik}. Les coefficients c'_{ik} disparaîtront d'ailleurs en même temps, en vertu de l'égalité $SS' = S'S$. Égalons en effet les coefficients de x dans les expressions que SS' et $S'S$ font succéder à y_{ik}; il viendra

$$(4) \qquad s_1(c'_{ik} + C'_{ik}) + s' c_{ik} = s'_1(c_{ik} + C_{ik}) + s c'_{ik},$$

C_{ik}, C'_{ik} étant ce que deviennent respectivement Y'_{ik} et Y_{ik}

lorsqu'on y remplace les y par les c ou par les c' correspondants. Si les c_{ik} sont nuls, ces relations se réduisent à la forme

$$(s_1 - s) c'_{ik} + s_1 C'_{ik} = 0.$$

Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux c'_{ik}, et leur déterminant, étant une puissance de $s_1 - s$, n'est pas nul. Elles ne peuvent donc être satisfaites que si les c'_{ik} sont tous nuls.

Si $s' \gtrless s'_1$, on pourra de même faire disparaître les c'_{ik}; et les relations (4) montrent que les c_{ik} disparaîtront en même temps.

Si donc le couple de constantes s, s' ne se confond avec aucun des couples s_1, s'_1; s_2, s'_2; ..., on pourra faire disparaître tous les coefficients c_{ik}, c'_{ik}; d_{ik}, d'_{ik}; ...; et S, S' seront ramenées à la forme requise; aux diverses classes d'intégrales y, z, ... viendra seulement se joindre une classe nouvelle, formée de la seule intégrale x. Soit, au contraire, $s = s_1$, $s' = s'_1$; on pourra faire disparaître les coefficients d_{ik}, d'_{ik}, ...; et l'on n'aura qu'à poser $c_{ik} = s_1 m_{ik}$, $c'_{ik} = s'_1 m'_{ik}$ pour ramener S et S' à la forme requise, la nouvelle intégrale x rentrant ici dans la catégorie des intégrales y_{1k}, qui appartiennent à la classe des y et ont l'unité pour premier indice.

226. Admettons donc que les intégrales indépendantes aient été choisies de manière à ramener les substitutions S, S' à la forme (3). Considérons en particulier une des classes formées par ces intégrales, telle que $y_{11}, \ldots, y_{ik}, \ldots$. Le changement de u en $u + 2\omega$, ou $u + 2\omega_2$ leur fera éprouver les substitutions partielles

$$(5)\quad \begin{cases} \sigma = | \; y_{1k}, \ldots, y_{ik}, \ldots, \quad s_1 y_{1k}, \ldots, s_1(y_{ik} + Y_{ik}), \ldots \; |, \\ \sigma' = | \; y_{1k}, \ldots, y_{ik}, \ldots, \quad s'_1 y_{1k}, \ldots, s'_1(y_{ik} + Y'_{ik}), \ldots \; |, \end{cases}$$

lesquelles devront évidemment satisfaire à la relation

$$(6)\qquad \sigma\sigma' = \sigma'\sigma.$$

On a, par définition,

$$\mathrm{Y}_{ik} = \sum_{l,m} a_{ik}^{lm} y_{lm}, \qquad \mathrm{Y}'_{ik} = \sum_{l,m} b_{ik}^{lm} y_{lm},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs du premier indice l qui sont $<i$, et aux diverses valeurs de m correspondant à chacune de ces valeurs de l.

On voit aisément que $\sigma\sigma'$ remplace en général y_{ik} par

$$s_1 s'_1 \left[y_{ik} + \mathrm{Y}_{ik} + \mathrm{Y}'_{ik} + \sum_{l,m} \left(a_{ik}^{lm} \sum_{l'm'} b_{lm}^{l'm'} y_{l'm'} \right) \right],$$

la sommation par rapport à l', m' s'étendant aux valeurs de l' inférieures à l et aux valeurs correspondantes de m'.

La substitution $\sigma'\sigma$ remplacera y_{ik} par une expression analogue, où les coefficients a et b seront permutés.

Ces deux expressions doivent être identiques, en vertu de (6). En égalant les coefficients des termes en $y_{l'm'}$, on aura les relations

$$(7) \qquad \sum_{l,m} (a_{ik}^{lm} b_{lm}^{l'm'} - b_{ik}^{lm} a_{lm}^{l'm'}) = 0,$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de l qui sont $<i$ et $>l'$, et aux valeurs correspondantes de m.

227. Réciproquement, soient σ, σ' deux substitutions de la forme (5) et satisfaisant à la relation (6) ou aux conditions équivalentes (7). Nous allons montrer qu'on peut construire des fonctions $y_{11}, \ldots, y_{ik}$ qui subissent ces substitutions lorsqu'on accroît la variable u de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$, et nous déterminerons la forme la plus générale de ces fonctions.

Considérons à cet effet la fonction doublement périodique de seconde espèce

$$\mathrm{G}(u) = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{bu}.$$

Elle admet les multiplicateurs

$$e^{2\omega_1 b + 2\eta_1 a}, \quad e^{2\omega_2 b + 2\eta_2 a}$$

qui se réduiront respectivement à s_1, s'_1, si l'on détermine b, a par les équations

$$2\omega_1 b + 2\eta_1 a = \log s_1,$$
$$2\omega_2 b + 2\eta_2 a = \log s'_1.$$

On peut toujours y satisfaire, le déterminant

$$2\omega_1 . 2\eta_2 - 2\omega_2 . 2\eta_1$$

étant égal à $\pm 2\pi i$.

Posons

$$y_{ik} = \mathrm{G}(u)\, x_{ik}.$$

Lorsqu'on accroîtra u de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$, les nouvelles fonctions x_{ik} subiront les transformations

$$(\tau) \qquad | x_{1k}, \ldots, x_{ik}, \ldots, x_{1k}, \ldots, x_{ik} + \mathrm{X}_{ik}, \ldots |,$$
$$(\tau') \qquad | x_{1k}, \ldots, x_{ik}, \ldots, x_{1k}, \ldots, x_{ik} + \mathrm{X}'_{ik}, \ldots |,$$

X_{ik}, X'_{ik} étant ce que deviennent Y_{ik}, Y'_{ik} lorsqu'on y remplace les y_{ik} par les x_{ik}. Les substitutions τ, τ' seront échangeables entre elles.

Il reste à obtenir l'expression des fonctions x_{ik}.

228. Pour cela considérons l'expression

$$\varphi(u) = mu + m'\zeta u.$$

Lorsque u s'accroît de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$, elle subit des accroissements

$$\Delta\varphi = 2\omega_1 m + 2\eta_1 m', \qquad \Delta'\varphi = 2\omega_2 m + 2\eta_2 m'.$$

En choisissant convenablement les constantes m, m', on pourra obtenir :

1° Une fonction $\mu_1 = m_1 u + m'_1 \zeta u$ dont les accroissements respectifs $\Delta\mu_1$, $\Delta'\mu_1$ soient 1 et 0;

2° Une fonction $\mu'_1 = m_2 u + m'_2 \zeta u$ dont les accroissements $\Delta\mu'_1$, $\Delta'\mu'_1$ soient 0 et 1.

Posons plus généralement

$$\mu_i = \frac{\mu_1(\mu_1 - 1)\ldots(\mu_1 - i + 1)}{1.2\ldots i},$$

$$\mu'_i = \frac{\mu'_1(\mu'_1 - 1)\ldots(\mu'_1 - i + 1)}{1.2\ldots i}.$$

Nous aurons évidemment

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta\mu_i = \dfrac{(\mu_1+1)\mu_1\ldots(\mu_1 - i + 2)}{1.2\ldots i} \\ \qquad - \dfrac{\mu_1(\mu_1 - 1)\ldots(\mu_1 - i + 1)}{1.2\ldots i} = \mu_{i-1}, \\ \Delta\mu'_i = 0, \\ \Delta'\mu_i = 0, \qquad \Delta'\mu'_i = \mu'_{i-1}, \end{cases}$$

et ces formules subsisteront pour $i = 1$, si l'on convient de poser

$$\mu_0 = \mu'_0 = 1.$$

Tout polynome entier P en μ_1, μ'_1 peut évidemment se mettre d'une seule manière sous la forme

$$A_0\mu_0 + A_1\mu_1 + \ldots,$$

les A étant des polynomes en μ'_1, dont chacun pourra à son tour se mettre d'une seule manière sous la forme

$$A'_0\mu'_0 + A'_1\mu'_1 + \ldots.$$

le polynome P pourra donc se mettre d'une seule manière, sous la forme

$$\Sigma B_{rr'}\mu_r\mu'_{r'}.$$

229. Ces préliminaires posés, nous allons établir qu'il existe des fonctions x_{ik} qui subissent respectivement les transformations (τ), (τ') lorsque u augmente de $2\omega_1$ ou de $2\omega_2$, et qu'elles ont pour forme générale

$$\begin{gathered} x_{1k} = H_{1k}, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ x_{ik} = H_{ik} + \Sigma P_{ik}^{lm} H_{lm}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

les H désignant des fonctions elliptiques arbitraires et les P_{ik}^{lm} des polynomes d'ordre $i-l$ en μ_1, μ'_1 et entièrement déterminés; la sommation s'étendant d'ailleurs à toutes les valeurs de l inférieures à i et aux diverses valeurs de m correspondant à chacune d'elles.

On voit tout d'abord que les fonctions $x_{1k}, \ldots$, restant inaltérées, sont des fonctions elliptiques, telles que H_{1k}.

Supposons donc qu'on ait construit, de proche en proche, toutes celles des fonctions x_{ik}, dont le premier indice est moindre que λ, et qu'elles aient la forme annoncée. Nous aurons, pour continuer l'opération, à construire des fonctions $x_{\lambda k}$ que le changement de u en $u+2\omega_1$ ou $u+2\omega_2$ transforme respectivement en

$$x_{\lambda k}+X_{\lambda k}, \quad x_{\lambda k}+X'_{\lambda k}.$$

Substituons aux fonctions x_{ik} qui figurent dans $X_{\lambda k}$, $X'_{\lambda k}$, leurs valeurs déjà déterminées; il viendra

$$X_{\lambda k}=\Sigma Q_{\lambda k}^{lm} H_{lm}, \quad X'_{\lambda k}=\Sigma Q_{\lambda k}^{\prime lm} H_{lm},$$

$Q_{\lambda k}^{lm}$, $Q_{\lambda k}^{\prime lm}$ étant des polynomes en μ_1, μ'_1, lesquels dépendent linéairement des coefficients de $X_{\lambda k}$, $X'_{\lambda k}$; la sommation s'étendant d'ailleurs à tous les systèmes de valeurs de l, m pour lesquels $l<\lambda$.

Les substitutions $\tau\tau'$ et $\tau'\tau$ transforment respectivement $x_{\lambda k}$ en

$$x_{\lambda k}+X'_{\lambda k}+X_{\lambda k}+\delta' X_{\lambda k}$$

et en

$$x_{\lambda k}+X_{\lambda k}+X'_{\lambda k}+\delta X'_{\lambda k},$$

$\delta' X_{\lambda k}$ désignant l'accroissement que subit $X_{\lambda k}$ par la substitution τ'; $\delta X'_{\lambda k}$ celui que subit $X'_{\lambda k}$ par la substitution τ.

D'ailleurs en appliquant ces substitutions aux fonctions déjà construites, ou aux quantités $X'_{\lambda k}$, $X_{\lambda k}$ qui en sont des fonctions linéaires, on obtient, par hypothèse, le même résultat qu'en changeant u en $u+2\omega_1$ ou $u+2\omega_2$; on aura donc

$$\delta' X_{\lambda k}=\Delta' X_{\lambda k}=\Delta' \Sigma Q_{\lambda k}^{lm} H_{lm},$$
$$\delta X'_{\lambda k}=\Delta X'_{\lambda k}=\Delta \Sigma Q_{\lambda k}^{\prime lm} H_{lm}.$$

Les fonctions elliptiques H_{lm} étant arbitraires, l'égalité de ces deux expressions exigera que l'on ait pour tout système de valeurs de l, m où $l < \lambda$,

$$\Delta' Q_{\lambda k}^{lm} = \Delta Q_{\lambda k}^{\prime lm}.$$

Or si l'on met les polynomes $Q_{\lambda k}^{lm}$, $Q_{\lambda k}^{\prime lm}$ sous la forme

$$\left.\begin{aligned} Q_{\lambda k}^{lm} &= \Sigma B_{r,r'} \mu_r \mu'_{r'} \\ Q_{\lambda k}^{\prime lm} &= \Sigma B'_{r,r'} \mu_r \mu'_{r'} \end{aligned}\right\} \quad (r + r' \leqq \lambda - 1 - l),$$

on aura, en vertu des relations (8),

$$\Delta' Q_{\lambda k}^{lm} = \Sigma B_{rr'} \mu_r \mu'_{r'-1},$$
$$\Delta Q_{\lambda k}^{\prime lm} = \Sigma B'_{rr'} \mu_{r-1} \mu'_{r'}.$$

Ces deux expressions devant être identiques, on aura les équations de condition

$$(9) \qquad B_{r-1,r'} = B'_{r,r'-1}.$$

Cela posé, on pourra déterminer un polynome d'ordre $\lambda - l$ en μ_1, μ'_1,

$$P_{\lambda k}^{lm} = \Sigma C_{rr'} \mu_r \mu'_{r'} \quad (r + r' \leqq \lambda - l),$$

tel que ses variations

$$\Delta P_{\lambda k}^{lm} = \Sigma C_{rr'} \mu_{r-1} \mu'_{r'},$$
$$\Delta' P_{\lambda k}^{lm} = \Sigma C_{rr'} \mu_r \mu'_{r'-1}$$

se réduisent respectivement à $Q_{\lambda k}^{\prime lm}$, $Q_{\lambda k}^{lm}$; car ces deux identifications donnent les équations de condition

$$C_{rr'} = B'_{r-1,r'}, \qquad C_{rr'} = B_{r,r'-1}$$

qui sont compatibles, en vertu des relations (9).

Posons maintenant

$$x_{\lambda k} = v_{\lambda k} + \Sigma_{l,m} P_{\lambda k}^{lm} H_{lm}.$$

Le changement de u en $u + 2\omega_1$ accroîtra cette expression de

$$\Delta v_{\lambda k} + \Sigma \Delta P_{\lambda k}^{lm} H_{lm} = \Delta v_{\lambda k} + \Sigma Q_{\lambda k}^{\prime lm} H_{lm}$$
$$= \Delta v_{\lambda k} + X_{\lambda k}$$

et celui de u en $u + 2\omega_2$ l'accroîtra de même de $\Delta' v_{\lambda k} + X'_{\lambda k}$. Pour que la fonction $x_{\lambda k}$ satisfasse aux conditions requises, il sera donc nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\Delta v_{\lambda k} = 0, \qquad \Delta' v_{\lambda k} = 0,$$

ce qui exprime que $v_{\lambda k}$ est une fonction elliptique $H_{\lambda k}$, d'ailleurs arbitraire.

230. Les intégrales y_{ik} sont donc de la forme

$$y_{1k} = G(u) H_{1k},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$y_{ik} = G(u)[H_{ik} + \Sigma P_{ik}^{lm} H_{lm}],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais les constantes a, b et les fonctions elliptiques H ne sont pas encore connues. Il s'agit de les déterminer.

Le procédé qui nous a permis de reconnaître que l'intégrale générale était uniforme nous a fourni la position de ses pôles c, d, ... et leurs ordres de multiplicité γ, δ, ... D'autre part, la fonction $\frac{1}{G(u)}$ a un seul pôle $u = -a$ [lequel disparaîtra même si $a = 0$, auquel cas $G(u)$ se réduit à une exponentielle].

Enfin les fonctions μ_1, μ'_1 qui figurent dans les polynomes P admettent le pôle simple $u = 0$.

Les fonctions

$$H_{1k} = \frac{y_{1k}}{G(u)}$$

auront donc les pôles c, d, ... et le pôle inconnu $-a$, avec des ordres de multiplicité au plus égaux à γ, δ, ..., 1 ; et les fonctions

$$H_{ik} = \frac{y_{ik}}{G(u)} - \Sigma P_{ik}^{lm} H_{lm}$$

pourront admettre, en outre, le pôle $u = 0$, avec un ordre de multiplicité au plus égal à i (car si cela est vrai pour les fonctions dont le premier indice est $< i$, $u = 0$ sera d'un

ordre de multiplicité l pour H_{lm}, et d'ordre $i-l$ pour le polynome P_{ik}^{lm}, qui est d'ordre $i-l$ en μ_1, μ'_1).

On aura donc, par la décomposition en éléments simples,

$$\begin{aligned} H_{ik} = {} & C_{ik}^1 \zeta(u-c) + \ldots + C_{ik}^{\gamma} \zeta^{\gamma-1}(u-c) \\ & + D_{ik}^1 \zeta(u-d) + \ldots + D_{ik}^{\delta} \zeta^{\delta-1}(u-d) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + M_{ik}^1 \zeta u + \ldots + M_{ik}^{i} \zeta^{i-1}(u) \\ & + A_{ik}^1 \zeta(u+a) + K_{ik} \end{aligned}$$

avec la condition

$$C_{ik}^1 + D_{ik}^1 + \ldots + A_{ik}^1 = 0.$$

Les termes de la dernière ligne peuvent être transformés comme il suit.

Posons

$$K_{ik} = L_{ik} - A_{ik}^1 \zeta a.$$

On aura

$$\begin{aligned} A_{ik}^1 \zeta(u+a) + K_{ik} & = A_{ik}^1[\zeta(u+a) - \zeta a] + L_{ik} \\ & = A_{ik}^1 \left[\zeta u - \frac{1}{2} \frac{p'u - p'a}{pu - pa} \right] + L_{ik}. \end{aligned}$$

Par suite de cette transformation, la constante inconnue a ne figurera plus dans H_{ik} que dans les combinaisons pa, $p'a$.

231. Il ne reste plus d'inconnu que les constantes a, b, C_{ik}^1, ..., L_{ik}. On les obtiendra par la méthode des coefficients indéterminés, en substituant les valeurs ci-dessus des intégrales y_{ik} dans l'équation différentielle.

Cherchons d'abord celles de ces intégrales

$$y_{1k} = G(u) H_{1k},$$

dont le premier indice est 1 et qui, par suite, sont doublement périodiques de seconde espèce. Il en existe toujours, comme nous l'avons vu.

On a, en prenant la dérivée logarithmique de $G(u)$,

$$\frac{G'(u)}{G(u)} = \zeta(u+a) - \zeta u + b,$$
$$= \zeta a - \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa} + b.$$

C'est une fonction elliptique où a et b ne figurent que dans les combinaisons $\zeta a + b = b'$, pa et $p'a$. Désignons-la, pour abréger, par I.

On aura

$$\frac{d}{du}y_{1k} = GH'_{1k} + G'H_{1k} = G(H'_{1k} + IH_{1k}),$$
$$\frac{d^2}{du^2}y_{1k} = G(H'_{1k} + IH_{1k})' + G'(H'_{1k} + IH_{1k})$$
$$= G[(H'_{1k} + IH_{1k})' + I(H'_{1k} + IH_{1k})],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit donc que le résultat R de la substitution de y_{1k} dans l'équation différentielle est de la forme

$$GE,$$

E désignant une fonction elliptique dépendant linéairement des constantes $C_{1k}^1, \ldots, L_{1k}$, qui figurent dans la fonction elliptique H_{1k}, et rationnellement des quantités $\zeta a + b = b'$, pa, $p'a$.

Les pôles de GE sont les points $c, d, \ldots$ avec des ordres de multiplicité au plus égaux à $\gamma + n$, $\delta + n$, $\ldots$; E peut admettre, en outre, le pôle simple $-a$, qui est un zéro de G. Le nombre total des pôles de E ne peut donc surpasser $\gamma + n + \delta + n + \ldots + 1$. Si donc nous exprimons que cette fonction a des zéros en nombre supérieur à ce chiffre, nous saurons qu'elle est identiquement nulle, et y_{1k} sera une intégrale.

Nous pourrons, par exemple, développer E suivant les puissances croissantes de u, et égaler à zéro les coefficients des diverses puissances, jusqu'à celle d'ordre

$$\gamma + n + \delta + n + \ldots + 1$$

inclusivement. Les équations de condition ainsi obtenues forment un système surabondant; mais nous savons *a priori* qu'il a des solutions.

Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport à $C_{1k}^1, \ldots, L_{1k}$, rationnelles par rapport à b', pa, $p'a$. Ces dernières quantités seront donc déterminées par des équations algébriques, auxquelles on devra joindre l'équation connue

$$p'^2 a = 4p^3 a - g_2 pa - g_3.$$

Une fois pa, $p'a$, b' déterminés, on en déduira, par les procédés connus, a, ζa, et enfin $b = b' - \zeta a$; enfin, les $C_1^1, \ldots, L_{1k}$ s'expriment en fonction linéaire et homogène d'un ou plusieurs d'entre eux, qui resteront arbitraires.

Si le nombre total des solutions trouvées est égal à l'ordre n de l'équation, ce qui sera le cas le plus habituel, leur combinaison donnera l'intégrale générale; dans le cas contraire, il faudra déterminer de nouvelles intégrales.

232. Supposons que nous ayons construit toutes celles des intégrales $y_{ik}, \ldots, z_{ik}, \ldots$, dont le premier indice est $< \lambda$, et déterminé les fonctions linéaires correspondantes Y_{ik}, $Y'_{ik}, \ldots$. Cherchons à déterminer les intégrales $y_{\lambda k}$ (s'il en existe) et les fonctions correspondantes $Y_{\lambda k}$, $Y'_{\lambda k}$.

On a

$$y_{\lambda k} = G(H_{\lambda k} + \Sigma P_{\lambda k}^{lm} H_{lm}),$$

où tout est connu, sauf les coefficients indéterminés

$$C_{\lambda k}^1, \quad \ldots, \quad L_{\lambda k},$$

dont dépend $H_{\lambda k}$, et les coefficients de $Y_{\lambda k}$, $Y'_{\lambda k}$, dont les polynomes $P_{\lambda k}^{lm}$ dépendent linéairement.

Substituons cette expression dans l'équation différentielle. Le résultat sera de la forme $GE_{\lambda k}$, $E_{\lambda k}$ étant une fonction aisée à obtenir par la différentiation et telle que la somme des ordres de multiplicité de ses pôles ne surpasse pas $\gamma + n + \delta + n + \ldots + 1$. D'ailleurs, cette fonction est elliptique. En effet, changeons u en $u + 2\omega_1$. Il est évidem-

ment indifférent de faire cette opération sur $y_{\lambda k}$ avant de le substituer dans l'équation différentielle ou de la faire dans le résultat de la substitution. Dans le premier cas, on change $y_{\lambda k}$ en $s_1(y_{\lambda k}+\mathrm{Y}_{\lambda k})$, et, comme $\mathrm{Y}_{\lambda k}$ est une fonction linéaire des intégrales déjà trouvées, le résultat de la substitution de cette nouvelle expression se réduira à $s_1\,\mathrm{GE}_{\lambda k}$. Donc $\mathrm{GE}_{\lambda k}$ se reproduit, multiplié par s_1, quand on change u en $u+2\omega_1$; G jouissant de cette même propriété, $\mathrm{E}_{\lambda k}$ ne sera pas altéré.

On verra de même qu'on ne l'altère pas en changeant u en $u+2\omega_2$.

Il suffira donc, pour annuler $\mathrm{E}_{\lambda k}$, d'exprimer qu'elle admet plus de $\gamma+n+\delta+n+\ldots+1$ zéros. On obtient ainsi un système d'équations linéaires et homogènes pour déterminer les coefficients inconnus. Si ce système est compatible, on obtiendra des intégrales de l'espèce cherchée. Sinon, on sera assuré que la classe des intégrales y_{ik} est entièrement épuisée, et l'on fera une recherche analogue sur les autres classes d'intégrales. On finira nécessairement par obtenir un système de n intégrales distinctes.

233. Parmi les équations qui rentrent dans le type considéré ci-dessus se trouve l'équation de *Lamé*

$$\frac{d^2x}{du^2}-[n(n+1)pu+h]x=0,$$

où n est un entier positif.

L'intégration de cette équation par M. *Hermite* a été le point de départ de la théorie précédente.

Les intégrales n'ont aux périodes près qu'un point critique $u=0$, aux environs duquel elles sont régulières.

L'équation déterminante est

$$\mathrm{F}(r)=r(r-1)-n(n+1)=0.$$

Ses deux racines, $-n$ et $n+1$ sont l'une paire et l'autre impaire. Soit r l'une d'elles; on aura une solution de la forme

$$u^r+\alpha_1 u^{r+2}+\alpha_2 u^{r+4}+\ldots.$$

Substituons ce développement de x, ainsi que celui de pu

$$pu = \frac{1}{u^2} + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots$$

et égalons à zéro le coefficient du terme en $u^{r+2\mu}$, nous aurons la formule récurrente

$$F(r+2\mu+2)\alpha_{\mu+1} - h\alpha_\mu - n(n+1)(c_1\alpha_{\mu-1} + c_2\alpha_{\mu-2} + \ldots) = 0,$$

dont l'application ne peut donner lieu à aucune difficulté, $F(r+2\mu+2)$ n'étant jamais nul.

Les deux intégrales particulières ainsi obtenues sont distinctes, car l'une est paire et l'autre impaire. L'intégrale générale résultant de leur combinaison sera uniforme et aura un pôle d'ordre n au point $u=0$.

Nous allons calculer cette intégrale dans le cas le plus simple, celui où $n = 1$. L'équation se réduit à

$$\frac{d^2x}{du^2} - (2pu + h)x = 0.$$

Elle admet des intégrales périodiques de seconde espèce

$$y = GH.$$

La fonction H n'admet plus le pôle $u=0$, qui est déjà un pôle pour G, elle ne pourrait donc admettre que le seul pôle simple $u = -a$, mais cela est impossible; elle se réduit donc à une constante et nous pouvons la supposer égale à l'unité.

Nous aurons donc au moins une intégrale de la forme

$$y = G = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{bu}.$$

On a

$$e^{bu} = 1 + bu + \frac{b^2u^2}{2} + \ldots,$$

$$\sigma(u+a) = \sigma a + u\sigma' a + \frac{u^2\sigma'' a}{2} + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sigma u} = \frac{1}{u(1 + d_1 u^4 + \ldots)} = \frac{1}{u} - d_1 u^3 + \ldots.$$

d'où le développement

$$y = \frac{M}{u} + M_0 + M_1 u + M_2 u^2 + \ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$M = \sigma a, \qquad M_0 = b\sigma a + \sigma' a,$$

$$M_1 = \frac{1}{2} b^2 \sigma a + b\sigma' a + \frac{1}{2}\sigma'' a, \qquad \ldots,$$

$$\frac{d^2 y}{du^2} = \frac{2M}{u^3} + 2M_2 + \ldots.$$

On a enfin

$$2\,\mathrm{p}u + h = \frac{2}{u^2} + h + 2c_1 u^2 + \ldots.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation.

Le résultat sera une fonction doublement périodique de seconde espèce qui ne peut avoir de pôle (aux périodes près) que pour $u = 0$. Si nous exprimons que les coefficients des puissances négatives de u et le terme constant s'annulent, la fonction, n'ayant plus de pôle, mais ayant un zéro, sera nulle.

On obtient ainsi les équations suivantes :

$$2M - 2M = 0, \qquad 2M_0 = 0,$$

$$hM + 2M_1 = 0, \qquad 2M_2 - 2M_2 - hM_0 = 0,$$

qui se réduisent aux deux suivantes :

$$0 = M_0 = b\sigma a + \sigma' a,$$

$$0 = hM + 2M_1 = h\sigma a + b^2\sigma a + 2b\sigma' a + \sigma'' a;$$

d'où

$$b = -\frac{\sigma' a}{\sigma a} = -\zeta a$$

et

$$0 = h\sigma a - \frac{\sigma'^2 a}{\sigma a} + \sigma'' a,$$

ou

$$h = \frac{\sigma'^2 a}{\sigma^2 a} - \frac{\sigma'' a}{\sigma a} = -\left(\frac{\sigma' a}{\sigma a}\right)' = \mathrm{p}a.$$

Cette dernière équation donne pour la constante a deux valeurs égales et contraires $+a$ et $-a$, auxquelles correspondent pour b deux valeurs égales et contraires, $-\zeta a$ et $+\zeta a$. Nous avons donc, en général, deux solutions particulières distinctes

$$e^{-u\zeta a}\frac{\sigma(u+a)}{\sigma u}, \quad e^{u\zeta a}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma u},$$

a et $-a$ étant les racines de l'équation transcendante

$$\mathrm{p}a = h.$$

234. Si h est égal à l'une des quantités e_1, e_2, e_3, par exemple à e_1, les deux racines $a = \omega_1$ et $-a = -\omega_1$ sont égales aux périodes près, et les deux solutions particulières ne sont pas linéairement distinctes, mais se réduisent à la solution unique

$$e^{-\eta_1 u}\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma u}.$$

Pour obtenir, dans ce cas, la seconde solution qui nous est nécessaire, supposons que h, au lieu d'être égal à e_1, en soit infiniment voisin. L'équation $\mathrm{p}a = h$ admettra les deux racines $\omega_1+\varepsilon$ et $\omega_1-\varepsilon$; nous aurons donc les deux intégrales

$$x_1 = e^{-u\zeta(\omega_1+\varepsilon)}\frac{\sigma(u+\omega_1+\varepsilon)}{\sigma u},$$

$$x_2 = e^{-u\zeta(\omega_1-\varepsilon)}\frac{\sigma(u+\omega_1-\varepsilon)}{\sigma u}.$$

Leur combinaison donne l'intégrale $\dfrac{x_1-x_2}{2\varepsilon}$ dont il est aisé de trouver la limite pour $\varepsilon = 0$.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}\zeta(\omega_1+\varepsilon) &= \zeta\omega_1 + \varepsilon\zeta'\omega_1 + \ldots \\ &= \eta_1 - \varepsilon e_1 + \ldots,\end{aligned}$$

$$e^{-u\zeta(\omega_1+\varepsilon)} = e^{-\eta_1 u}(1+\varepsilon e_1 u + \ldots),$$

$$\begin{aligned}\sigma(u+\omega_1+\varepsilon) &= \sigma(u+\omega_1) + \varepsilon\sigma'(u+\omega_1) + \ldots \\ &= \sigma(u+\omega_1)[1+\varepsilon\zeta(u+\omega_1)+\ldots],\end{aligned}$$

d'où

$$x_1 = \frac{e^{-\eta_1 u}\sigma(u+\omega_1)}{\sigma u}\{1+\varepsilon[\zeta(u+\omega_1)+e_1 u]+\ldots\}.$$

x_2 s'obtiendra en changeant le signe de ε; $\frac{x_2-x_1}{2\varepsilon}$ aura évidemment pour limite

$$e^{-\eta_1 u}\frac{\sigma(u+\omega_1)}{\sigma u}[\zeta(u+\omega_1)+e_1 u].$$

Ce sera la seconde solution cherchée.

235. Cherchons encore dans quel cas l'équation de Lamé admet comme intégrale une fonction elliptique $M(u)$ aux périodes $4\omega_1$ et $4\omega_2$.

L'équation n'étant pas altérée par le changement de u en $-u$, $u+2\omega_1$, $u+2\omega_2$, admettra aussi comme solution les fonctions elliptiques $M(-u)$, $M(u+2\omega_1)$, $M(u+2\omega_2)$. Mais ces nouvelles intégrales ne peuvent être linéairement distinctes de $M(u)$; car l'intégrale générale de l'équation ne peut être elliptique, puisque, parmi les intégrales particulières, il en est une qui est une fonction entière s'annulant pour $u=0$.

On aura donc

$$M(-u)=c\,M(u),\qquad M(u+2\omega_1)=c_1\,M(u),$$
$$M(u+2\omega_2)=c_2\,M(u),$$

c, c_1, c_2 étant des constantes. D'ailleurs, en changeant encore une fois u en $-u$, $u+2\omega_1$ ou $u+2\omega_2$, on voit qu'on aura $c=\pm 1$, $c_1=\pm 1$, $c_2=\pm 1$.

On pourra donc écrire

$$M(u)=NP,$$

N désignant l'une des huit expressions

$$1,\quad f_\alpha u,\quad f_\beta u,\quad \ldots,\quad f_\beta u f_\gamma u,\quad f_\alpha u f_\beta u f_\gamma u$$

(dont le choix dépendra des signes de c, c_1, c_2) et P une fonction elliptique paire, aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$, et n'ayant de pôle que pour $u=0$: ce sera donc un polynome entier en pu.

Il est aisé de former les dérivées successives d'une expression de cette forme. On a, en effet,

$$f_\alpha^2 u = \wp u - e_\alpha, \qquad 2 f_\alpha u f_\beta u f_\gamma u = -\wp' u,$$

et, par suite,

$$N^2 = \Pi, \qquad NN_1 = -\frac{1}{2}\wp' u,$$

Π désignant un polynome entier en $\wp u$, et N_1 le produit complémentaire de N formé par ceux des facteurs $f_\alpha u$ que N ne contient pas.

On aura, par suite,

$$\frac{dN}{du} = \frac{\Pi' \wp' u}{2N} = -\Pi' N_1,$$

$$\frac{dNP}{du} = P\frac{dN}{du} + NP' \wp' u,$$

$$= -(\Pi' P + 2\Pi P')N_1 = N_1 P_1,$$

P_1 étant un polynome en $\wp u$.

On trouvera de même

$$\frac{d^2 NP}{du^2} = \frac{dN_1 P_1}{du} = NP_2,$$

P_2 étant encore un polynome en $\wp u$.

Le résultat de la substitution de NP dans l'équation de Lamé sera donc de la forme

$$\frac{d^2 NP}{du^2} - [n(n+1)\wp u + h]NP = NQ,$$

où Q est un polynome entier en $\wp u$ qui s'annulera identiquement si NP est une solution.

Soit

$$P = a_\mu \wp^\mu u + a_{\mu-1}\wp^{\mu-1} u + \ldots + a_0$$

et soit k le nombre des facteurs de N. Le premier membre sera infini d'ordre $k + 2\mu + 2$ pour $u = 0$; il en sera de même du second. Donc Q est un polynome de degré $\mu + 1$, tel que

$$Q = A_{\mu+1}\wp^{\mu+1} u + \ldots + A_0.$$

La comparaison des valeurs principales donne immédia-

tement

$$A_{\mu+1}=[(k+2\mu+1)(k+2\mu)-n(n+1)]a_\mu.$$

Les coefficients suivants sont évidemment de la forme

$$A_\mu=B_\mu-ha_\mu, \quad \ldots, \quad A_0=B_0-ha_0,$$

$B_\mu, \ldots, B_0$ étant des fonctions linéaires et homogènes en $a_\mu, \ldots, a_0$.

L'équation

$$A_{\mu+1}=0$$

donnera

$$k+2\mu=n.$$

Les autres équations

$$A_\mu=0, \quad \ldots, \quad A_0=0$$

fourniront ensuite les rapports des inconnues $a_\mu, \ldots, a_0$ si leur déterminant est nul, ce qui donnera pour h une équation de degré $\mu+1$.

Cela posé, si n est un nombre pair $2m$, on pourra supposer $k=0$, $\mu=m$, ce qui donnera $m+1$ valeurs admissibles pour h.

On pourra encore poser $k=2$, $\mu=m-1$, et l'on obtiendra m valeurs pour h; soit $3m$ valeurs en prenant successivement pour N les trois produits de deux facteurs qu'on peut former avec les $f_\alpha u$.

Le nombre total des valeurs de h, pour lesquelles l'équation admet une solution de la forme désirée, sera donc

$$m+1+3m=2n+1.$$

Si n est un nombre impair $2m+1$, il faudra supposer : 1° $k=1$, $\mu=m$, d'où $m+1$ solutions, ou $3(m+1)$ en prenant successivement pour N chacun des trois facteurs $f_\alpha u$; 2° ou $k=3$, $\mu=m-1$, d'où m solutions.

Le nombre total des valeurs de h qui fournissent des solutions de l'espèce NP sera donc

$$3(m+1)+m=2n+1,$$

comme dans le cas précédent.

236. M. *Halphen* a montré qu'on peut ramener aux équations de M. Picard les équations

$$\frac{d^n y}{du^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{du^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0$$

à coefficients elliptiques, lorsque les rapports de leurs intégrales sont des fonctions uniformes.

Soit, en effet, α l'un des pôles des fonctions $p_1, \ldots, p_n$. L'équation déterminante qui correspond à ce point sera

$$r(r-1)\ldots(r-n+1) + ar(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots = 0,$$

a désignant le résidu de p_1 par rapport au point α.

Les quotients des intégrales étant uniformes, les racines de cette équation différeront les unes des autres de nombres entiers. Si donc on désigne par r l'une d'elles, leur somme sera égale à

$$nr + e,$$

e désignant un entier.

Mais cette somme est égale à

$$\frac{n(n-1)}{2} - a.$$

On aura donc

$$nr + e = \frac{n(n-1)}{2} - a.$$

Faisons la somme des égalités analogues pour les divers pôles α contenus dans un parallélogramme de périodes. La somme des résidus a étant nulle, il viendra

$$n \Sigma r = \text{entier}.$$

Donc Σr est un nombre commensurable.

Soit m le plus petit entier tel que la quantité

$$m^2 \Sigma r = \text{E}$$

soit un entier. Posons

$$P = \left(\sigma \frac{u}{m}\right)^{-E} \Pi[\sigma(u-\alpha)]^r.$$

Si nous changeons u en $u + 2m\omega$ (2ω désignant une période primitive quelconque), $\sigma(u-\alpha)$ se reproduira, multiplié par

$$e^{2m\eta(u+m\omega-\alpha)+m\pi i},$$

et $\sigma \frac{u}{m}$ se reproduira, multiplié par

$$e^{2\eta\left(\frac{u}{m}+\omega\right)+\pi i}.$$

Donc P se reproduira, multiplié par

$$e^{\Sigma[2m\eta(u+m\omega-\alpha)+m\pi i]r - \left[2\eta\left(\frac{u}{m}+\omega\right)+\pi i\right]E},$$

et sa dérivée logarithmique $\frac{P'}{P}$ sera accrue de

$$2m\eta \sum r - 2\eta \frac{E}{m} = 0.$$

Donc $\frac{P'}{P}$ est une fonction elliptique aux périodes $2m\omega_1$, $2m\omega_2$.

Il en sera de même de $\frac{P''}{P}, \frac{P'''}{P}, \ldots$, en vertu de la formule récurrente

$$\frac{P^\mu}{P} = \frac{d}{du}\frac{P^{\mu-1}}{P} + \frac{P^{\mu-1}}{P}\frac{P'}{P}.$$

Posons maintenant

$$y = Pz.$$

La transformée en z sera

$$P\frac{d^n z}{du^n} + \left.\begin{matrix} nP' \\ +p_1 P \end{matrix}\right| \frac{d^{n-1}z}{du^{n-1}} + \left.\begin{matrix} \frac{n(n-1)}{2}P'' \\ +(n-1)p_1 P' \\ + \quad p_2 P \end{matrix}\right| \frac{d^{n-2}z}{du^{n-2}} + \ldots = 0,$$

et si nous divisons par P, les coefficients seront des fonctions elliptiques aux périodes $2m\omega_1$, $2m\omega_2$, car $p_1, p_2, \ldots$ admettent ces périodes.

D'ailleurs, l'intégrale générale $z = \frac{y}{P}$ de cette équation est uniforme.

L'équation transformée appartiendra donc au type de M. Picard, sauf que les périodes des coefficients ne seront plus $2\omega_1$, $2\omega_2$, mais $2m\omega_1$, $2m\omega_2$.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

I. — Notions préliminaires.

237. Tout système d'équations aux dérivées partielles $F=0$, $F_1=0$, ... entre des variables indépendantes $x_1, \ldots,$ x_n, des fonctions de ces variables $u_1, \ldots, u_m$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre p, peut être remplacé par un système ne contenant que des dérivées partielles premières.

En effet, chacune des dérivées partielles d'ordre p, qui figurent dans les équations, est, par définition, la dérivée première d'une des dérivées partielles d'ordre $p-1$; celles-ci sont des dérivées premières de celles d'ordre $p-2$, etc. Si donc nous prenons pour inconnues auxiliaires les dérivées partielles d'ordre $<p$, les équations $F=0$, $F_1=0$, ... ne contiendront plus que des dérivées premières; et il en sera de même des équations qui définissent chacune de nos inconnues auxiliaires, et qui, jointes aux précédentes, constitueront un système évidemment équivalent au système primitif.

On peut donc se borner à considérer les systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Il est même permis de supposer que les dérivées partielles n'y figurent que linéairement, à la condition de joindre aux équations différentielles certaines conditions accessoires.

Soit, en effet,

$$F\left(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m; \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right) = 0,$$

. . . .

un semblable système. Prenons pour inconnues auxiliaires les dérivées partielles $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}$, que nous représenterons par $p_{11}, \ldots, p_{mn}$. Le système donné équivaudra au suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} F(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m; p_{11}, \ldots, p_{mn}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = p_{11}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial u_m}{\partial x_n} = p_{mn}.$$

D'ailleurs, pour que F, ... soient identiquement nuls, il faut et il suffit : 1° qu'ils s'annulent pour une valeur particulière ξ_1 de la variable x_1 ; 2° que leurs dérivées par rapport à x_1 soient nulles. Nous pourrons donc remplacer les équations (1) par les suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} F(\xi_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m; p_{11}, \ldots, p_{mn}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{cases}$$

pour $x_1 = \xi_1$, et

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial u_1} p_{11} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_m} p_{m1} \\ \qquad + \frac{\partial F}{\partial p_{11}} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial p_{mn}} \frac{\partial p_{mn}}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or les équations (2) et (4) forment un système d'équations linéaires, auquel il suffira de joindre les conditions accessoires (3).

238. Un système d'équations aux dérivées partielles

$$F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_i = 0$$

entre n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et m fonctions $u_1, \ldots, u_m$ sera en général incompatible, si le nombre i de ses équations surpasse le nombre m des fonctions inconnues.

Supposons, en effet, que les équations données renfer-

ment les dérivées partielles des fonctions u jusqu'à l'ordre p. Joignons à ces équations leurs dérivées partielles successives par rapport aux diverses variables indépendantes. Il arrivera nécessairement un moment où le nombre des équations obtenues surpassera celui des fonctions u et de leurs dérivées partielles qui y figurent. En effet, lorsque nous prenons les dérivées partielles d'ordre k des équations primitives, nous obtenons $i\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{1.2\ldots k}$ équations nouvelles; d'autre part, nous introduisons comme nouvelles inconnues les dérivées partielles d'ordre $p+k$ des fonctions u, dont le nombre est $m\frac{n(n+1)\ldots(n+p+k-1)}{1.2\ldots(p+k)}$. Ce nombre sera inférieur au précédent, dès que k commencera à satisfaire à l'inégalité

$$i > m\frac{(n+k)\ldots(n+p+k-1)}{(1+k)\ldots(p+k)}.$$

A partir de ce moment, le nombre des équations successivement obtenues croîtra plus vite que celui des inconnues et finira par le surpasser. Éliminant alors ces inconnues, on obtiendra une ou plusieurs relations $\Phi=0$, $\Phi_1=0$, ... entre les variables $x_1, \ldots, x_n$; celles-ci étant indépendantes par hypothèse, on voit que les équations données seront incompatibles, à moins que Φ, Φ_1, ... ne soient identiquement nuls, ce qui donnera autant d'équations de condition nécessaires pour que les équations $F_1=0, \ldots, F_i=0$ puissent subsister simultanément.

239. On voit de la même manière qu'un système de m équations aux dérivées partielles

$$F_1=0, \qquad \ldots, \qquad F_m=0$$

entre $x_1, \ldots, x_n$ et m fonctions $u_1, \ldots, u_m$ peut en général être ramené à un système d'équations

$$\Phi=0, \qquad \Phi_1=0, \qquad \ldots$$

ne contenant plus qu'une seule fonction inconnue u_1; car, en joignant aux équations proposées leurs dérivées partielles successives, il arrivera un moment où le nombre des équations obtenues surpassera celui des fonctions $u_2, \ldots, u_m$ et de leurs dérivées partielles. L'élimination de ces inconnues donnera de nouvelles équations $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$, ... entre $x_1, \ldots, x_n$, u_1 et ses dérivées partielles.

240. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles

$$F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0$$

entre les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et m fonctions $u_1, \ldots, u_m$; et soit r_k l'ordre des dérivées partielles les plus élevées de la fonction u_k dans ces équations. On pourra, en remplaçant $x_1, \ldots, x_n$ par de nouvelles variables indépendantes

$$(5)\qquad \begin{cases} y_1 = c_{11} x_1 + \ldots + c_{1n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = c_{n1} x_1 + \ldots + c_{nn} x_n, \end{cases}$$

choisir les constantes c de telle sorte que chacune des dérivées $\frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial y_1^{r_1}}, \ldots, \frac{\partial^{r_k} u_k}{\partial y_1^{r_k}}, \ldots$ figure dans les équations transformées.

En effet, on aura

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = c_{1i} \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + c_{ni} \frac{\partial}{\partial y_n}.$$

Chacune des dérivées partielles des fonctions $u_1, \ldots, u_m$ par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$ s'exprimera donc linéairement au moyen des dérivées partielles du même ordre prises par rapport aux nouvelles variables $y_1, \ldots, y_n$.

Posons, pour abréger,

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} u_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = p_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

L'une au moins des équations données, par exemple

$F_1 = 0$, contiendra des dérivées partielles d'ordre r_1 de la fonction u_1 ; soient

$$p_{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}, \qquad p_{\alpha''_1\ldots\alpha''_n}, \qquad \ldots$$

ces dérivées partielles. La dérivée $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}$ sera de la forme

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = G_0 + G_1 p_{\alpha'_1+1,\ldots,\alpha'_n} + G_2 p_{\alpha''_1+1,\ldots,\alpha''_n} + \ldots,$$

$G_1, G_2, \ldots$ n'étant pas identiquement nuls et ne contenant, ainsi que G_0, aucune dérivée de u_1 d'ordre $> r_1$.

Transformons cette équation par la substitution (5); il viendra

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = c_{11}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \ldots + c_{n1}\frac{\partial F_1}{\partial y_n},$$

$$\begin{aligned} p_{\alpha'_1+1,\ldots,\alpha'_n} &= \left(c_{11}\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + c_{n1}\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\alpha'_1+1} \cdots \left(c_{1n}\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + c_{nn}\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\alpha'_n} u_1 \\ &= c_{11}^{\alpha'_1+1} \ldots c_{1n}^{\alpha'_n} \frac{\partial^{r_1+1} u_1}{\partial y_1^{r_1+1}} + R', \end{aligned}$$

R' étant linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre $r_1 + 1$ de la fonction u_1, autre que celle que nous avons mise en évidence.

Les autres dérivées d'ordre $r_1 + 1$ qui figurent dans l'expression de $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}$ donnent un résultat analogue.

On aura enfin

$$G_0 = \Gamma_0, \qquad G_1 = \Gamma_1, \qquad \ldots,$$

$\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ ne contenant les nouvelles dérivées partielles de u_1 que jusqu'à l'ordre r_1.

On aura donc, pour transformée de $\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}$, l'expression

$$\begin{aligned} &c_{11}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \ldots + c_{n1}\frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ &\quad = (\Gamma_1 c_{11}^{\alpha'_1+1} \ldots c_{1n}^{\alpha'_n} + \Gamma_2 c_{11}^{\alpha''_1+1} \ldots c_{1n}^{\alpha''_n} + \ldots)\frac{\partial^{r_1+1} u_1}{\partial y_1^{r_1+1}} + R, \end{aligned}$$

R ne contenant pas la dérivée $\frac{\partial^{r_1+1} u_1}{\partial y_1^{r_1+1}}$. D'ailleurs le coefficient de $\frac{\partial^{r_1+1} u_1}{\partial_1^{r_1+1}}$ ne peut être identiquement nul; car, en l'exprimant au moyen des anciennes variables x, il devient

$$G_1 c_{11}^{\alpha'_1+1} \dots c_{1n}^{\alpha'_n} + G_2 c_{11}^{\alpha''_1+1} \dots c_{1n}^{\alpha''_n} + \dots,$$

et comme G_1, G_2, ... ne sont pas identiquement nuls, il ne peut évidemment s'annuler que pour des valeurs particulières des constantes c. En ayant soin d'éviter ces valeurs, on voit que

$$c_{11} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + c_{n1} \frac{\partial F_1}{\partial y_n}$$

contiendra la dérivée $\frac{\partial^{r_1+1} u_1}{\partial y_1^{r_1+1}}$, ce qui serait évidemment impossible, si F_1 ne contenait pas la dérivée $\frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial y_1^{r_1}}$.

241. Nous nous bornerons à considérer le cas où les équations transformées ont pour premiers membres des fonctions distinctes des dérivées $\frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial y_1^{r_1}}, \dots, \frac{\partial^{r_m} u_m}{\partial y_1^{r_m}}$. En les résolvant par rapport à ces dérivées, nous pourrons mettre le système sous la forme *normale*

$$\frac{\partial^{r_1} u_1}{\partial y_1^{r_1}} = \Phi_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{r_m} u_m}{\partial y_1^{r_m}} = \Phi_m, \tag{6}$$

$\Phi_1, \dots, \Phi_m$ étant des fonctions des variables indépendantes $y_1, \dots, y_n$, des fonctions $u_1, \dots, u_m$ et de leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre $r_1, \dots, r_m$ respectivement (celles de ces dérivées qui figurent aux premiers membres étant exceptées).

THÉORÈME. — *Les quantités $y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_m, \dots, \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots} u_i}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots}, \dots$ qui figurent dans les fonctions $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ étant traitées comme des variables indépendantes, soit*

$a_1, \ldots, a_n, b^1_{00\ldots}, \ldots, b^m_{00\ldots}, \ldots, b^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots}, \ldots$ *un système quelconque de valeurs de ces variables aux environs duquel* $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ *soient développables par la série de Taylor.*

Soient d'autre part

$$\varphi_1, \quad \varphi_1^1, \quad \ldots, \quad \varphi_1^{r_1-1}; \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_2^{r_2-1}; \quad \ldots$$

des fonctions quelconques de $y_2, \ldots, y_n$ *développables par la série de Taylor aux environs du système de valeurs* $a_2, \ldots, a_n$, *et telles en outre qu'on ait en ce point*

$$\varphi_i = b^i_{00\ldots}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots}\varphi_i^{\alpha_1}}{\partial y_2^{\alpha_2}\ldots} = b^i_{\alpha_1\alpha_2\ldots}.$$

On pourra déterminer, et cela d'une seule manière, un système de fonctions $u_1, \ldots, u_m$ *des variables* $y_1, \ldots, y_n$, *développables par la série de Taylor aux environs du point* $a_1, \ldots, a_n$, *et qui satisfasse aux équations* (6) *ainsi qu'aux conditions initiales suivantes :*

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{llll} u_1 = \varphi_1, & \dfrac{\partial u_1}{\partial y_1} = \varphi_1^1, & \ldots, & \dfrac{\partial^{r_1-1} u_1}{\partial y_1^{r_1-1}} = \varphi_1^{r_1-1} \\ u_2 = \varphi_2, & \dfrac{\partial u_2}{\partial y_1} = \varphi_2^1, & \ldots, & \dfrac{\partial^{r_2-1} u_2}{\partial y_1^{r_2-1}} = \varphi_2^{r_2-1} \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{pour } y_1 = a_1.$$

Cette proposition fondamentale est due à *Cauchy*. Mme *de Kowalewska* en a donné une démonstration élégante, que nous allons reproduire.

242. Considérons tout d'abord le cas où les équations aux dérivées partielles proposées sont du premier ordre, linéaires et homogènes par rapport aux dérivées partielles, et ne contiennent pas les variables indépendantes, de telle sorte que le système (6) se réduise à la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_i}{\partial y_1} = \sum_{k,l} G^i_{k,l} \dfrac{\partial u_k}{\partial y_l} \\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m;\ l = 2, \ldots, n), \end{array}\right.$$

où les G sont des fonctions de $u_1, \ldots, u_m$.

L'énoncé du théorème général se réduira alors au suivant :

Soient $b^1, \ldots, b^m$ *un système de valeurs de* $u_1, \ldots, u_m$, *aux environs duquel les fonctions* G *soient développables par la série de Taylor;* $a_1, \ldots, a_n$ *d'autres constantes quelconques. Soient, d'autre part,* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *des fonctions de* $y_2, \ldots, y_n$, *qui se réduisent respectivement à* $b^1, \ldots, b^m$ *pour* $y_2 = a_2, \ldots, y_n = a_n$, *et qui soient développables par la série de Taylor aux environs de ce système de valeurs. On pourra déterminer d'une seule manière un système de fonctions* $u_1, \ldots, u_m$ *des variables* $y_1, \ldots, y_n$, *développables par la série de Taylor aux environs du point* $y_1 = a_1, \ldots, y_n = a_n$, *qui satisfassent aux équations* (8), *et enfin se réduisent respectivement à* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *pour* $y_1 = a_1$.

Nous supposerons, pour simplifier l'écriture, que $a_1, \ldots, a_n, b^1, \ldots, b^m$ soient nuls, ce qui ne nuit pas à la généralité de la démonstration, car on pourrait au besoin prendre pour variables indépendantes $y_1 - a_1, \ldots, y_n - a_n$ et pour fonctions inconnues $u_1 - b^1, \ldots, u_m - b^m$; enfin, considérer à la place des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ les fonctions $\varphi_1 - b^1, \ldots, \varphi_m - b^m$.

D'après les hypothèses faites, les fonctions G^i_{kl} sont développables en séries, de la forme

$$G^i_{kl} = \sum A^{ikl}_{\alpha_1\alpha_2\ldots} u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots \tag{9}$$

Ces séries étant convergentes tant que les modules de u_1, u_2, ... seront assez petits, on pourra déterminer deux constantes M, r, telles qu'on ait

$$|A^{ikl}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}| \leqq \frac{M}{r^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots}}$$

et, *a fortiori*,

$$|A^{ikl}_{\alpha_1\alpha_2\ldots}| \leqq \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\ldots)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots} \frac{M}{r^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots}}. \tag{10}$$

On aura de même

$$\varphi_i = \sum B^i_{\beta_2\beta_3\ldots} y_2^{\beta_2} y_3^{\beta_3} \ldots,$$

et l'on pourra déterminer deux constantes N, ρ, telles qu'on ait

$$(11) \qquad |B^i_{\beta_2\beta_3\ldots}| \leqq \frac{(\beta_2+\beta_3+\ldots)!}{\beta_2!\,\beta_3!\ldots}\,\frac{N}{\rho^{\beta_2+\beta_3+\ldots}}.$$

Les fonctions cherchées $u_1, \ldots, u_m$, devant être développables suivant les puissances de $y_1, \ldots, y_n$ aux environs de l'origine, seront de la forme

$$(12) \qquad u_i = \varphi_i + \varphi_{i1}y_1 + \varphi_{i2}y_1^2 + \ldots,$$

$\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \ldots$ étant des séries qui procèdent suivant les puissances de $y_2, \ldots, y_n$.

Remplaçons, dans les équations (8), les fonctions G^i_{kl}, puis les fonctions u_i par les développements (9) et (12), et égalons les coefficients des mêmes puissances de y_1 dans les deux membres; nous obtiendrons, pour déterminer les coefficients $\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{i\mu}, \ldots$, une série d'équations de la forme suivante :

$$(13) \qquad (\mu+1)\varphi_{i,\mu+1} = F_{i,\mu+1},$$

$F_{i,\mu+1}$ étant une somme de termes dont chacun est le produit : 1° d'un entier positif; 2° d'un des coefficients A; 3° d'un produit de séries φ dont le second indice ne surpasse pas μ; 4° d'une dérivée partielle de l'une de ces fonctions φ.

Les formules (13) fourniront, par voie récurrente et sans ambiguïté, les valeurs des diverses fonctions $\varphi_{i\mu}$ sous forme de séries procédant suivant les puissances de $y_2, \ldots, y_n$, chaque terme ayant pour coefficient un polynome formé avec les coefficients A, B et dont chaque terme est affecté d'un facteur numérique positif.

Nous trouvons ainsi une solution unique; mais, pour prouver qu'elle est acceptable, il reste encore à établir la convergence des séries obtenues.

243. Or il est clair qu'on diminuera les chances de convergence en remplaçant les coefficients A, B par les limites supérieures (10) et (11) de leurs modules; mais nous allons

prouver que, même dans ces conditions défavorables, la convergence subsiste lorsque $y_1, \ldots, y_n$ sont suffisamment petits.

On a, en effet, dans ce cas,

$$G_{kl}^i = \sum \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)!}{\alpha_1 ! \, \alpha_2 ! \ldots} \, M \, \frac{u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots}{r^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots}} = \frac{M}{1 - \dfrac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{r}}$$

et de même

$$\varphi_i = \sum \frac{(\beta_2 + \beta_3 + \ldots)!}{\beta_2 ! \, \beta_3 ! \ldots} \, N \, \frac{y_2^{\beta_2} y_3^{\beta_3} \ldots}{\rho^{\beta_2 + \beta_3 + \ldots}} \qquad (\beta_2 + \beta_3 + \ldots > 0)$$
$$= \frac{Nt}{\rho - t},$$

en posant, pour abréger, $y_2 + \ldots + y_n = t$.

Les équations aux dérivées partielles deviendront donc

$$(14) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial y_1} = \frac{M}{1 - \dfrac{u_1 + \ldots + u_m}{r}} \sum_{k,l} \frac{\partial u_k}{\partial y_l},$$

et les conditions initiales seront

$$(15) \qquad u_i = \frac{Nt}{\rho - t} \qquad \text{pour} \qquad y_1 = 0.$$

Posons

$$u_1 = \ldots = u_m = \psi(y_1, t).$$

Les équations (14) et (15) se réduiront aux deux suivantes :

$$(16) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y_1} = \frac{M}{1 - \dfrac{m\psi}{r}} \, m(n-1) \frac{\partial \psi}{\partial t},$$

$$(17) \qquad \psi = \frac{Nt}{\rho - t} \qquad \text{pour} \qquad y_1 = 0.$$

Or l'équation (16) étant mise sous la forme

$$\left(1 - \frac{m\psi}{r}\right) \frac{\partial \psi}{\partial y_1} - M m (n-1) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

son premier membre est le jacobien des deux fonctions ψ et

$\left(1-\frac{m\psi}{r}\right)t+\mathrm{M}m(n-1)y_1$. Elle équivaut donc à la relation

$$\left(1-\frac{m\psi}{r}\right)t+\mathrm{M}m(n-1)y_1=\mathrm{F}(\psi),$$

F étant une fonction arbitraire. Cette fonction sera déterminée par la condition (17), laquelle donne

$$\left[1-\frac{m\mathrm{N}t}{r(\rho-t)}\right]t=\mathrm{F}\left(\frac{\mathrm{N}t}{\rho-t}\right)$$

ou, en posant

$$\frac{\mathrm{N}t}{\rho-t}=v,\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{\rho v}{\mathrm{N}+v},$$

$$\mathrm{F}(v)=\left(1-\frac{mv}{r}\right)\frac{\rho v}{\mathrm{N}+v}.$$

Donc ψ sera déterminé par l'équation

$$\left(1-\frac{m\psi}{r}\right)t+\mathrm{M}m(n-1)y_1=\left(1-\frac{m\psi}{r}\right)\frac{\rho\psi}{\mathrm{N}+\psi}.$$

Les deux racines de cette équation se réduisent respectivement à zéro et à $\frac{r}{m}$ pour $y_1=0$, $t=0$. Aux environs de ce système de valeurs, elles sont développables en série convergente suivant les puissances de y_1 et de t. Prenant celle de ces deux séries qui s'annule pour $y_1=0$, $t=0$, on aura la fonction cherchée $\psi(y_1, t)$, dans laquelle on n'aura plus qu'à substituer $t=y_2+\ldots+y_n$ pour obtenir les développements de $u_1, \ldots, u_m$, qui seront évidemment convergents tant que les modules des variables y seront moindres que $\frac{\mathrm{R}}{n-1}$, R désignant le rayon de convergence de la série $\psi(y_1, t)$ par rapport aux variables y_1 et t.

244. La démonstration du théorème général du n° **241** se ramène aisément au cas particulier que nous venons de discuter.

Prenons, en effet, pour variables auxiliaires les dérivées partielles

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots} u_i}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2}\ldots} = p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots},$$

qui figurent dans les équations (6) et, pour plus de symétrie, posons en outre $u_i = p^i_{0,0,\ldots}$. Les équations (6) et (7) deviendront

$$(18)\qquad p^i_{r_i,0,\ldots,0} = \Phi_i(y_1, \ldots, y_n, p^1_{0,0,\ldots}, \ldots, p^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}, \ldots),$$

$$(19)\qquad p^i_{\alpha_1,0,0,\ldots} = \varphi_i^{\alpha_1} \quad \text{pour} \quad y_1 = a_1 \quad \text{et} \quad \alpha_1 < r_i.$$

Ces dernières équations, dérivées par rapport à $y_2, \ldots, y_n$, donneront plus généralement

$$(20)\qquad p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \varphi_i^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_2} y_2 \ldots \partial^{\alpha_n} y_n} \quad \text{pour} \quad y_1 = a_1 \quad \text{et} \quad \alpha_1 < r_i$$

et, par suite,

$$p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} = b^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \quad \text{pour} \quad y_1 = a_1, \ldots, y_n = a_n.$$

Enfin, si l'on pose $y_1 = a_1$ dans les équations (18), il viendra

$$(21)\qquad p^i_{r_i,0,0,\ldots} = \Phi_i\left(a_1, \ldots, y_n, \varphi_1, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots} \varphi_i^{\alpha_1}}{\partial^{\alpha_2} y_2 \ldots}, \ldots\right) \quad \text{pour} \quad y = a_1.$$

Aux équations (18), (19), (20), il faut encore joindre celles qui définissent les dérivées partielles $p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m}$, à savoir

$$(22)\qquad \frac{\partial p^i_{\alpha_1,0,0,\ldots}}{\partial y_1} = p^i_{\alpha_1+1,0,0,\ldots}, \quad \text{si} \quad \alpha_1 < r_i$$

et

$$(23)\qquad p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_2+\ldots+\alpha_n} p^i_{\alpha_1,0,0,\ldots}}{\partial^{\alpha_2} y_2 \ldots \partial^{\alpha_n} y_n}, \quad \text{si} \quad \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0.$$

Les relations (20) et (21) expriment d'ailleurs que les équations (23) et (18) sont satisfaites pour $y_1 = a_1$. En tenant compte de cette condition, on pourra évidemment remplacer ces équations (23) et (18) par leurs dérivées partielles par rapport à y_1.

On trouve ainsi, en supposant $\alpha_2 > 0$ par exemple,

$$(23)' \qquad \frac{\partial p^i_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}}{\partial y_1} = \frac{\partial^{1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} p^i_{\alpha_1,0,0,\ldots}}{\partial y_1 \partial^{\alpha_2} y_2 \ldots \partial^{\alpha_n} y_n} = \frac{\partial p^i_{\alpha_1+1,\alpha_2-1,\ldots,\alpha_n}}{\partial y_2}.$$

Si α_2 était nul, mais $\alpha_3 > 0$, on trouverait de même

$$(23)'' \qquad \frac{\partial p^i_{\alpha_1,0,\alpha_3,\ldots}}{\partial y_1} = \frac{\partial p^i_{\alpha_1+1,0,\alpha_3-1,\ldots}}{\partial y_3},$$

et, enfin, si $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ étaient nuls, d'où $\alpha_n > 0$,

$$(23)''' \qquad \frac{\partial p^i_{\alpha_1,0,\ldots,\alpha_n}}{\partial y_1} = \frac{\partial p^i_{\alpha_1+1,0,\ldots,\alpha_n-1}}{\partial y_n}.$$

Prenant enfin la dérivée partielle des équations (18) par rapport à y_1, et substituant dans le second membre aux dérivées partielles des p leurs valeurs (22), (23)', (23)'', (23)''', il viendra

$$(24) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial p^i_{r_i,0,0,\ldots}}{\partial y_1} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_1} &+ \sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial p^k_{\alpha_1,0,\ldots,0}} p^k_{\alpha_1+1,\ldots,0,\ldots,0} \\ &+ \sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial p^k_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}} \frac{\partial p^k_{\alpha_1+1,\alpha_2-1,\ldots}}{\partial y_2} + \ldots \\ &+ \sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial p^k_{\alpha_1,0,\ldots,\alpha_n}} \frac{\partial p^k_{\alpha_1+1,0,\ldots,\alpha_n-1}}{\partial y_n}. \end{aligned}$$

245. Nous avons ainsi remplacé le système des équations (6) et des conditions initiales (7) par celui des équations (22), (23)', (23)'', ..., (23)''' et (24) et des conditions initiales (20), (21). Nos nouvelles équations sont du premier ordre et linéaires; mais elles ne sont pas homogènes et contiennent encore en général les variables indépendantes $y_1, \ldots, y_n$. Pour achever de les réduire à la forme voulue, introduisons de nouvelles variables auxiliaires $t_1, \ldots, t_n$ définies par les équations

$$t_1 = y_1, \quad \ldots, \quad t_n = y_n.$$

Elles satisfont aux équations aux dérivées partielles

$$(25) \qquad \frac{\partial t_1}{\partial y_1} = 1, \quad \frac{\partial t_2}{\partial y_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial t_n}{\partial y_1} = 0$$

et aux conditions initiales

$$(26)\qquad t_1 = a_1, \quad t_2 = y_2, \quad \ldots, \quad t_n = y_n \quad \text{pour} \quad y_1 = a_1.$$

Il est clair que ces conditions suffisent à les déterminer. Joignons ces conditions aux équations précédentes et transformons d'ailleurs celles-ci : 1° en y remplaçant dans les dérivées partielles de Φ_i les variables indépendantes $y_1, \ldots, y_n$ par les quantités équivalentes $t_1, \ldots, t_n$; 2° en multipliant tous les termes des seconds membres qui n'ont pas en facteur une dérivée partielle des inconnues p par $\frac{\partial t_2}{\partial y_2}$, qui est évidemment égal à 1. Cette transformation opérée, les inconnues p et t seront fournies par un système d'équations linéaires et homogènes du premier ordre, auquel on devra joindre les conditions initiales (20), (21), (26) qui ont lieu pour $y_1 = a_1$.

Les valeurs des variables $t_1, \ldots, t_n$ et $p^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ pour $y_1 = a_1, \ldots, y_n = a_n$ sont d'ailleurs $a_1, \ldots, a_n$ et $b^i_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$. Aux environs de ce système de valeurs, les fonctions Φ_i sont par hypothèse développables suivant la série de Taylor; il en sera de même de leurs dérivées partielles.

Toutes les conditions nécessaires à l'application du théorème du n° **242** se trouvant ainsi remplies, nous obtiendrons pour les inconnues t et p, et en particulier pour les inconnues primitives

$$u_i = p^i_{0,0,\ldots},$$

des séries procédant suivant les puissances de $y_1 - a_1, \ldots, y_n - a_n$ et satisfaisant à toutes les conditions du problème.

Les fonctions u_i ne sont définies par ces séries que dans la région où celles-ci sont convergentes; mais on pourra suivre leur variation de proche en proche par les mêmes procédés que nous avons employés pour l'étude des équations différentielles à une seule variable indépendante.

II. — Équations aux dérivées partielles du premier ordre.

246. Considérons l'équation aux dérivées partielles linéaire et du premier ordre

$$P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n = Z, \tag{1}$$

où $P_1, \ldots, P_n$, Z sont des fonctions des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et de la fonction inconnue z; $p_1, \ldots, p_n$ désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$.

La fonction z étant supposée définie par une équation implicite

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, z) = 0, \tag{2}$$

cherchons à déterminer la forme de la fonction Φ, de telle sorte que l'équation (1) soit satisfaite.

L'équation (2) dérivée par rapport à x_i donnera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_i = 0. \tag{3}$$

Substituant dans (1) les valeurs des dérivées partielles p_i tirées des équations (3), il viendra

$$P_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \ldots + P_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + Z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Pour que la valeur de z tirée de (2) satisfasse à l'équation (1), il sera donc nécessaire et suffisant que l'équation (4) soit une conséquence de (2).

Cela posé, intégrons le système des équations différentielles

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{Z}. \tag{5}$$

Les équations intégrales, résolues par rapport aux constantes d'intégration $c_1, \ldots, c_n$, prendront la forme

$$\varphi_1 = c_1, \quad \ldots, \quad \varphi_n = c_n, \tag{6}$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, z$. On sait (43) qu'en posant

$$\Phi = \mathrm{F}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

F désignant une fonction arbitraire, l'équation (4) sera identiquement satisfaite.

Nous obtiendrons donc une solution de l'équation (1) en déterminant z par l'équation

$$\mathrm{F}(\varphi_1, \ldots \varphi_n) = 0.$$

Mais il n'est pas établi que cette solution soit la seule possible, car il n'est pas nécessaire, pour qu'on ait une solution, que l'équation (4) soit identique. Il suffit qu'elle soit satisfaite pour tous les systèmes de valeurs de $x_1, \ldots, x_n, z$ qui satisfont à $\varphi = 0$.

Pour déterminer les autres solutions, s'il en existe, nous remarquerons que les équations (5) ayant pour intégrales générales les équations (6), les équations (5) ou les équations équivalentes

$$\mathrm{P}_2\, dx_1 - \mathrm{P}_1\, dx_2 = 0, \quad \ldots, \quad \mathrm{P}_n\, dx_1 - \mathrm{P}_1\, dx_n = 0,$$
$$\mathrm{Z}\, dx_1 - \mathrm{P}_1\, dz = 0$$

sont des combinaisons linéaires des équations

$$d\varphi_1 = 0, \quad \ldots \quad d\varphi_n = 0.$$

On aura donc, en désignant par $\mathrm{A}_{11}, \ldots; \mathrm{B}_1, \ldots$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_n, z$ faciles à déterminer,

$$(7) \qquad \mathrm{P}_i dx_1 - \mathrm{P}_1\, dx_i = \mathrm{A}_{i1}\, d\varphi_1 + \ldots + \mathrm{A}_{in}\, d\varphi_n,$$
$$(8) \qquad \mathrm{Z}\, dx_1 - \mathrm{P}_1\, dz = \mathrm{B}_1\, d\varphi_1 + \ldots + \mathrm{B}_n\, d\varphi_n.$$

Multiplions les équations (7) respectivement par $p_1, \ldots, p_i, \ldots$ et retranchons-en l'équation (8). En tenant compte de l'identité

$$dz = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n$$

et posant, pour abréger,

$$\sum_i \mathrm{A}_{ik}\, p_i - \mathrm{B}_k = \mathrm{C}_k,$$

il viendra

$$(P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n - Z)\, dx_1 = \sum_k C_k\, d\varphi_k.$$

Si nous supposons l'équation (1) satisfaite, cette équation se réduira à

$$\sum_k C_k\, d\varphi_k = 0.$$

Si donc les quantités C_k ne sont pas toutes nulles, les différentielles $d\varphi_1, \ldots, d\varphi_n$ seront liées par une relation linéaire, et l'on aura entre les fonctions φ une relation

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = 0.$$

C'est la solution trouvée tout à l'heure.

Reste l'hypothèse

$$C_1 = 0, \quad \ldots, \quad C_k = 0.$$

Ces équations, combinées avec l'équation donnée

$$P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n = Z,$$

déterminent $p_1, \ldots, p_n, z$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Les valeurs ainsi obtenues fourniront une solution si elles satisfont aux relations

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i,$$

ce qui n'aura évidemment lieu que dans des cas très exceptionnels.

247. *Applications.* — 1° Soit à intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

des cylindres parallèles à la droite $(x = az,\ y = bz)$. On formera le système

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = dz$$

dont l'intégrale générale est

$$x - az = c, \qquad y - bz = c_1.$$

L'équation proposée a donc pour intégrale générale

$$\Phi(x - az, y - bz) = 0.$$

2° Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(x - \alpha)\frac{\partial z}{\partial x} + (y - \beta)\frac{\partial z}{\partial y} = z - \gamma$$

des cônes ayant leur sommet au point α, β, γ. On formera le système

$$\frac{dx}{x - \alpha} = \frac{dy}{y - \beta} = \frac{dz}{z - \gamma}$$

dont l'intégrale générale est

$$\log(x - \alpha) = \log(z - \gamma) + \text{const.},$$
$$\log(y - \beta) = \log(z - \gamma) + \text{const.}$$

ou

$$\frac{x - \alpha}{z - \gamma} = \text{const.}, \qquad \frac{y - \beta}{z - \gamma} = \text{const.}$$

L'intégrale cherchée sera

$$\Phi\left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}, \frac{y - \beta}{z - \gamma}\right) = 0.$$

3° Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(\gamma y - \beta z)\frac{\partial z}{\partial x} + (\alpha z - \gamma x)\frac{\partial z}{\partial y} = \beta x - \alpha y$$

des surfaces de révolution autour de l'axe $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

Nous aurons le système

$$\frac{dx}{\gamma y - \beta z} = \frac{dy}{\alpha z - \gamma x} = \frac{dz}{\beta x - \alpha y}.$$

Soit dt la valeur commune de ces rapports; on aura

$$dx = (\gamma y - \beta z)\,dt, \quad dy = (\alpha z - \gamma x)\,dt, \quad dz = (\beta x - \alpha y)\,dt.$$

On en déduit immédiatement les combinaisons intégrables

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$
$$\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0;$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.}, \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \text{const.},$$

et l'intégrale cherchée sera

$$\Phi(x^2 + y^2 + z^2,\ \alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

4° Soit, en dernier lieu, l'équation

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz,$$

qui définit les fonctions homogènes du degré n en x, y. On formera le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{nz};$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \text{const.}, \qquad \frac{z}{x^n} = \text{const.}$$

L'intégrale générale sera donc

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x^n}\right) = 0$$

ou, en résolvant par rapport à $\frac{z}{x^n}$,

$$\frac{z}{x^n} = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

et enfin

$$z = x^n f\left(\frac{x}{y}\right).$$

248. Passons à l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre en général.

Soit

$$\Phi = 0 \tag{9}$$

une équation entre n variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$,

une fonction z de ces variables et n constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n$. En éliminant ces constantes entre l'équation $\Phi = 0$ et ses dérivées partielles

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

nous obtiendrons, en général, une seule équation aux dérivées partielles

$$F(z_1; x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{11}$$

La fonction z, définie par l'équation (9), sera une solution de cette équation, quelles que soient les constantes $a_1, \ldots, a_n$.

Une semblable solution a reçu le nom d'*intégrale complète*. Il est aisé d'en déduire les autres solutions de l'équation aux dérivées partielles.

On pourra, en effet, dans cette dernière équation, faire abstraction de la condition que $p_1, \ldots, p_n$ soient les dérivées partielles de z, pourvu qu'on y joigne la relation

$$dz = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n, \tag{12}$$

qui exprime précisément cette dernière propriété.

Cela posé, l'équation (11), résultant de l'élimination de $a_1, \ldots, a_n$ entre les équations (9) et (10), sera algébriquement équivalente à celles-ci, pourvu qu'on y considère les a, non plus comme des constantes, mais comme des inconnues auxiliaires.

Nous aurons donc à déterminer les inconnues $z, a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n$ par les équations (9), (10) et (12).

Cela posé, différentions l'équation (9), il viendra

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} da_n = 0$$

ou plus simplement, en vertu des équations (10) et (12),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} da_n = 0. \tag{13}$$

Cette nouvelle équation aux différentielles totales pourra

remplacer l'équation (12) pour la détermination des fonctions inconnues. Il existe plusieurs manières d'y satisfaire :

1° On peut d'abord poser

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0.$$

Ces n équations, jointes à (9) et (10), achèveront de déterminer une solution, à laquelle on donne le nom d'*intégrale singulière*.

2° Si les $\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}$ ne sont pas tous nuls, l'équation aux différentielles totales (13) montre qu'il doit exister au moins une équation de condition entre les inconnues $a_1, \ldots, a_n$. Admettons qu'il en existe k distinctes, à savoir

$$f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0. \tag{14}$$

On en déduira, entre les différentielles $da_1, \ldots, da_n$, les k relations

$$df_1 = 0, \quad \ldots, \quad df_k = 0,$$

dont l'équation (13) devra être une conséquence. On aura donc identiquement, en désignant par $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des facteurs convenables,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} da_n = \lambda_1 \, df_1 + \ldots + \lambda_k \, df_k;$$

d'où, en égalant les coefficients des diverses différentielles da_i,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial a_i}. \tag{15}$$

Ces équations, jointes au système (9), (10), (14), détermineront toutes les inconnues du problème, y compris les multiplicateurs λ. Les fonctions $f_1, \ldots, f_k$ restent d'ailleurs arbitraires.

Le système de ces solutions, renfermant des fonctions arbitraires, se nomme l'*intégrale générale*.

Si nous donnons, en particulier, à k sa valeur maximum n,

les quantités a, étant liées par n équations, seront des constantes, d'ailleurs arbitraires. Nous retrouvons donc, comme cas particulier de l'intégrale générale, l'intégrale complète d'où nous étions parti.

On voit par cette analyse que la recherche des solutions d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(z, x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{16}$$

se ramène à la détermination d'une intégrale complète.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour arriver à cette intégration ; nous allons exposer les trois principales.

249. *Méthode des caractéristiques.* — Posons, pour abréger,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Z, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i,$$

et soit

$$z = \Phi(x_1, \ldots, x_n), \qquad p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \tag{17}$$

une solution quelconque de l'équation proposée. A chaque système de valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ correspondra un système de valeurs de z et de ses dérivées partielles $p_1, \ldots, p_n$.

Nous appellerons *éléments* de la solution considérée les divers systèmes de valeurs simultanées de $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ qui satisfont aux équations (17).

Soit (z^0, x_i^0, p_i^0) l'un de ces éléments. Supposons qu'on fasse varier les quantités x_i à partir de leurs valeurs initiales x_i^0, de manière à satisfaire constamment aux équations différentielles

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = dt, \tag{18}$$

t désignant une variable auxiliaire, dont la valeur initiale soit nulle.

Les systèmes de valeurs successifs de ces quantités, associés aux valeurs correspondantes des quantités z, p_i, don-

neront une suite d'éléments de l'intégrale, à laquelle nous donnerons le nom de *caractéristique*.

250. Soient (z, x_i, p_i) l'un de ces éléments; $(z+\delta z, x_i+\delta x_i, p_i+\delta p_i)$ un élément quelconque de l'intégrale, infiniment voisin de celui-là. On aura, par définition,

$$\delta z = p_1\,\delta x_1 + \ldots + p_n\,\delta x_n, \tag{19}$$

et, en désignant par p_{ik} les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_k}$,

$$\delta p_i = p_{i1}\,\delta x_1 + \ldots + p_{in}\,\delta x_n. \tag{20}$$

Soit $(z+dz, x_i+dx_i, p_i+dp_i)$ un nouvel élément encore infiniment voisin du premier, mais situé sur la caractéristique; on aura de même

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n, \tag{21}$$

$$dp_i = p_{i1}\,dx_1 + \ldots + p_{in}\,dx_n. \tag{22}$$

L'équation (16), différentiée par rapport aux δ, donnera

$$Z\,\delta z + \sum_i (X_i\,\delta x_i + P_i\,\delta p_i) = 0,$$

et, en remplaçant les quantités P_i, δz, δp_i par leurs valeurs tirées des équations (18), (19), (20),

$$0 = \sum_i (X_i + p_i Z)\,\delta x_i + \sum_i \sum_k p_{ik} \frac{dx_i}{dt}\,\delta x_k.$$

Permutant les indices i et k dans la somme double et tenant compte de l'équation (22), il viendra

$$0 = \sum_i \left[X_i + p_i Z + \frac{dp_i}{dt} \right] \delta x_i,$$

et, comme les δx_i sont entièrement arbitraires, on en déduira

$$X_i + p_i Z + \frac{dp_i}{dt} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{23}$$

Enfin, la différentiation de l'équation (16) par rapport aux d donne

$$o = Z\,dz + \sum_i X_i\,dx_i + P_i\,dp_i$$

et, en remplaçant les dx_i, dp_i par leurs valeurs tirées de (18) et (23),

$$o = dz - \sum_i P_i p_i\,dt. \tag{24}$$

Les éléments successifs de la caractéristique satisferont donc aux équations (18), (23), (24), qui peuvent s'écrire

$$\frac{dx_i}{P_i} = \ldots = -\frac{dp_i}{X_i + p_i Z} = \ldots = \frac{dz}{\sum P_i p_i} = dt. \tag{25}$$

Ces équations différentielles, jointes à la connaissance des valeurs initiales z^0, x_i^0, p_i^0 des variables z, x_i, p_i, déterminent complètement la loi de leur variation. Elles sont d'ailleurs indépendantes de la fonction Φ. Nous obtenons donc ce résultat remarquable :

Toute intégrale qui contient l'élément z^0, x_i^0, p_i^0 contiendra tous les éléments de la caractéristique correspondante.

251. Les équations différentielles (25), intégrées en partant du système de valeurs initiales z^0, x_i^0, p_i^0, donneront, pour z, x_i, p_i, au moins tant que les quantités Z, X_i, P_i n'auront pas de points critiques, des valeurs parfaitement déterminées

$$\begin{cases} z = f(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \\ x_i = \varphi_i(t, z^0, x_i^0, p_i^0), \\ p_i = \psi_i(t, z^0, x_i^0, p_i^0). \end{cases} \tag{26}$$

Ce système d'équations représentera une caractéristique pourvu que les valeurs z^0, x_i^0, p_i^0 satisfassent à l'équation

$$F(z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) = o, \tag{27}$$

qui caractérise les éléments des intégrales.

Les valeurs des variables z, x_i, p_i correspondant aux divers éléments des intégrales sont ainsi exprimées en fonction des $2n+2$ paramètres t, z^0, x_i^0, p_i^0, ces derniers vérifiant l'équation (27).

En laissant z^0, x_i^0, p_i^0 constants et faisant varier t, on obtiendra une infinité d'éléments formant une caractéristique. On doit toutefois excepter le cas où les valeurs de z^0, x_i^0, p_i^0 annuleraient simultanément toutes les quantités P_i, X_i+p_iZ, car les intégrales des équations (25), se réduisant alors à

$$z=z^0,\qquad x_i=x_i^0,\qquad p_i=p_i^0,$$

seraient indépendantes de t, et la caractéristique se réduirait à son élément initial.

Enfin, en faisant varier z^0, x_i^0, p_i^0, on passera d'une caractéristique à l'autre.

Soit maintenant

$$(28)\qquad z=\Phi(x_1,\ldots,x_n),\qquad p_i=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$$

une intégrale quelconque. Pour qu'elle contienne un élément donné z, x_i, p_i, il faut et il suffit qu'elle contienne l'élément initial z^0, x_i^0, p_i^0 situé sur la même caractéristique, ce qui donne les équations de condition

$$(29)\qquad z^0=\Phi(x_1^0,\ldots,x_n^0),\qquad p_i^0=\frac{\partial\Phi}{\partial x_i^0}.$$

Ces $n+1$ équations, jointes aux équations (26) et (27), caractériseront les éléments qui appartiennent à l'intégrale. On retrouvera donc les équations (28) de l'intégrale en éliminant les paramètres t, z^0, x_i^0, p_i^0 entre les équations (26), (27), (29).

252. Réciproquement, considérons l'ensemble des caractéristiques pour lesquelles les paramètres z^0, x_i^0, p_i^0 sont liés par $n+1$ équations de condition quelconques

$$(30)\qquad \varpi=0,\qquad \ldots,\qquad \varpi_n=0.$$

Entre ces équations et les équations (26) et (27), on pourra éliminer les paramètres z^0, x_i^0, p_i^0, t, et l'on obtiendra ainsi, entre les variables z, x_i, p_i, $n+1$ équations,

$$\chi = 0, \quad \ldots, \quad \chi_n = 0,$$

d'où l'on pourra tirer en général les valeurs de z et des p_i en fonction des x_i.

Le système des éléments qui satisfont à ces équations constituera une intégrale si les valeurs ainsi obtenues satisfont aux relations suivantes :

$$(31) \qquad F(z; x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots p_n) = 0$$

et

$$(32) \qquad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

253. L'équation (31) est identiquement satisfaite. Soit, en effet, z, x_i, p_i un élément quelconque du système considéré.

En donnant aux paramètres t et z^0, x_i^0, p_i^0 des accroissements infiniment petits, dt et δz^0, δx_i^0, δp_i^0, ces derniers compatibles avec les équations (27) et (30), on obtiendra un élément $z + \Delta z$, $x_i + \Delta x_i$, $p_i + \Delta p_i$ infiniment voisin du premier, et les différentielles totales Δz, Δx_i, Δp_i seront évidemment de la forme $dz + \delta z$, $dx_i + \delta x_i$, $dp_i + \delta p_i$, en désignant par dz, dx_i, dp_i les différentielles partielles provenant de la variation de t, par δz, δx_i, δp_i celles qui proviennent de la variation des autres paramètres, z^0, x_i^0, p_i^0.

Les différentielles dz, dx_i, dp_i satisfont aux équations (25), d'où l'on déduit aisément les combinaisons suivantes :

$$(33) \qquad dz - \Sigma_i p_i \, dx_i = 0,$$

$$(34) \qquad 0 = Z\, dz + \Sigma_i (X_i \, dx_i + P_i \, dp_i) = \frac{\partial F}{\partial t} dt.$$

Donc F est indépendant de t. D'ailleurs, pour $t = 0$, il se

réduit à

$$F(z^0; x_1^0, \ldots, x_n^0; p_1^0, \ldots, p_n^0),$$

qui est nul en vertu de l'équation de condition (27).

254. Il reste encore à satisfaire aux équations (32). Ce système d'équations est équivalent à l'équation aux différentielles totales

$$\Delta z - \Sigma_i p_i \Delta x_i = 0.$$

Remplaçant Δz, Δx_i par $dz + \delta z$, $dx_i + \delta x_i$, et tenant compte de (33), cette égalité se change en

$$\delta z - \Sigma_i p_i \delta x_i = 0.$$

Désignons par U le premier membre de cette équation, et cherchons comment il varie avec t.

On aura

$$dU = d\,\delta z - \Sigma_i dp_i \delta x_i - \Sigma p_i d\,\delta x_i;$$

d'ailleurs

$$d\,\delta z = \delta\, dz = \Sigma_i(\delta p_i dx_i + p_i d\,\delta x_i).$$

Donc

$$dU = \Sigma_i(\delta p_i dx_i - dp_i \delta x_i)$$

ou, en remplaçant les dx_i, dp_i par leurs valeurs tirées des équations (25),

$$dU = \Sigma_i(P_i \delta p_i + X_i \delta x_i + Z p_i \delta x_i)\, dt;$$

mais l'équation $F = 0$, différentiée par rapport aux δ, donne

$$Z\delta z + \Sigma_i(P_i \delta p_i + X_i \delta x_i) = 0,$$

d'où

$$dU = -Z(\delta z - \Sigma_i p_i \delta x_i)\, dt = -ZU\, dt.$$

Cette équation intégrée donnera

$$U = U_0 e^{-\int_0^t Z\,dt},$$

U_0 désignant la valeur initiale de U.

Il est clair que, tant que Z n'aura pas de points critiques, comme nous l'avons supposé, l'exponentielle restera finie. Donc, pour que U soit identiquement nul, il sera nécessaire et suffisant qu'on ait

$$(35) \qquad o = U_0 = \delta z^0 - \Sigma_i p_i^0\, \delta x_i^0.$$

255. Les solutions de cette équation aux différentielles totales se trouvent aisément par la méthode du n° **248**.

Cette équation montre d'abord que z^0 est une fonction des x_i^0. D'ailleurs, les $2n+1$ quantités z^0, x_i^0, p_i^0 étant liées par l'équation $F = o$ et les $n+1$ relations (30), dont nous cherchons à déterminer la forme, il existera une relation au moins entre les quantités x_i^0. Supposons qu'il en existe k distinctes, telles que

$$(36) \qquad \Psi_1(x_1^0, \ldots, x_n^0) = o, \qquad \ldots, \qquad \Psi_k = o,$$

et soit en outre

$$(37) \qquad z^0 = \Psi(x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

On déduira de ces relations par la différentiation

$$\delta\Psi_1 = o, \qquad \ldots, \qquad \delta\Psi_k = o, \qquad \delta z^0 = \delta\Psi.$$

L'équation (35) devant être une conséquence de celles-là, on aura identiquement

$$U_0 = \delta\Psi - \Sigma_i p_i^0\, \delta x_i^0 = \lambda_1\, \delta\Psi_1 + \ldots + \lambda_k\, \delta\Psi_k,$$

les λ étant des multiplicateurs convenables. Égalant séparément à zéro les coefficients des diverses différentielles δx_i^0,

on aura les n équations

$$(38)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_i^0} - p_i^0 = \lambda_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i^0} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \Psi_k}{\partial x_i^0},$$

qui, jointes aux équations (26), (27), (36), (37), représenteront l'intégrale, les fonctions Ψ, Ψ_1, ..., Ψ_k restant arbitraires.

256. La solution précédente donne lieu à diverses remarques :

1° Le système d'éléments déterminé par les équations précédentes ne représente une intégrale, dans le sens attaché jusqu'ici à ce mot, que si l'on peut en tirer les valeurs explicites des quantités z, p_i en fonction des x_i, ceux-ci restant indépendants. Il n'en serait pas ainsi dans le cas particulier où l'on pourrait déduire de ces équations une ou plusieurs relations entre les x_i. La considération de ces systèmes, qui ne fournissent pas des intégrales proprement dites, est pourtant utile dans beaucoup de cas. Pour en tenir compte, il conviendra d'élargir la définition de l'intégrale en donnant ce nom à tout système d'éléments z, x_i, p_i dépendant de n variables indépendantes et satisfaisant aux relations

$$F = 0, \qquad dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

2° Nous avons admis dans notre analyse que le système des valeurs initiales z^0, x_i^0, p_i^0 représentait un point ordinaire pour les fonctions Z, X_i, P_i et n'annulait pas simultanément les quantités P_i, $X_i + p_i Z$. S'il existait donc quelque intégrale dont tous les éléments fussent des points critiques de Z, X_i, P_i ou annulassent les P_i et les $X_i + p_i Z$, elles échapperaient à la méthode précédente; mais il est clair que ces intégrales singulières ne peuvent se rencontrer que dans des cas particuliers.

257. Parmi les intégrales fournies par notre analyse, il en est deux qui méritent une attention particulière.

La première s'obtient en posant $k = n$. Les quantités z^0, x_i^0, satisfaisant ainsi à $n+1$ relations, seront des constantes; leurs différentielles δz^0, δx_i^0 seront donc nulles et l'équation (35) sera identiquement satisfaite.

On voit donc que les équations (26), (27) de la caractéristique représentent une intégrale si l'on considère les z^0, x_i^0 comme des constantes arbitraires et les p_i^0 comme des inconnues auxiliaires.

L'intégrale ainsi obtenue est une intégrale complète, car elle contient n (et même $n+1$) constantes arbitraires. D'autre part, on ne peut déduire des équations qui la définissent aucune équation aux dérivées partielles

$$F_1(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

distincte de la proposée $F = 0$; car, si l'on avait une semblable identité, en y faisant $t = 0$, on trouverait

$$F_1(z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) = 0,$$

relation qui ne résulte pas des équations (26), (27).

258. On obtiendra une autre intégrale remarquable en admettant qu'il n'existe, entre les paramètres z^0, x_i^0, que les deux relations

$$z^0 = \Psi(x_2^0, \ldots, x_n^0), \qquad x_1^0 = \text{const.} \tag{39}$$

Les autres équations à joindre à celles de la caractéristique pour obtenir l'intégrale seront, d'après l'analyse précédente,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_1^0} - p_1^0 = \lambda_1, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x_i^0} - p_i^0 = 0 \qquad (i > 1).$$

Pour la valeur particulière $x_1 = x_1^0$, on aura $t = 0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$, $z = z^0$. Ces valeurs initiales étant liées par la relation (39), on voit que nous avons résolu le problème de déterminer une intégrale z satisfaisant à la condition

$$z = \Psi(x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{pour} \qquad x_1 = x_1^0,$$

Ψ désignant une fonction arbitraire. L'existence d'une semblable intégrale avait déjà été établie au n° **241**.

259. Lorsque le nombre des variables indépendantes se réduit à deux, les résultats qui précèdent peuvent s'interpréter géométriquement.

Une intégrale $z = \Phi(x_1, x_2)$ représente une surface. Chaque système de valeurs de z, x_1, x_2 représente un point; p_1, p_2 sont les coefficients de l'équation du plan tangent. Chaque élément de l'intégrale définit donc un point et le plan tangent correspondant.

L'équation aux dérivées partielles

$$F(z, x_1, x_2, p_1, p_2) = 0$$

devient, en y remplaçant p_1, p_2 par leurs valeurs tirées des équations de la normale,

$$\frac{\xi_1 - x_1}{p_1} = \frac{\xi_2 - x_2}{p_2} = \frac{\zeta - z}{-1},$$

$$F\left(z, x_1, x_2, -\frac{\xi_1 - x_1}{\zeta - z}, -\frac{\xi_2 - x_2}{\zeta - z}\right) = 0,$$

équation d'un cône, dont la normale sera une génératrice.

Une caractéristique représentera une courbe et la développable circonscrite à la surface intégrale le long de cette courbe, et le théorème du n° **250** pourra s'énoncer ainsi :

Deux surfaces intégrales tangentes en un point z^0, x_1^0, x_2^0 sont tangentes tout le long de la caractéristique déterminée par ce point et le plan tangent correspondant.

Toute surface intégrale aura pour génératrices des caractéristiques. En particulier, l'intégrale complète du n° **257** sera formée par l'ensemble des caractéristiques issues d'un même point.

260. *Première méthode de Jacobi.* — Soit à déterminer une intégrale complète de l'équation

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{40}$$

On peut réduire le problème au cas où z ne figure pas explicitement dans l'équation.

Supposons en effet z déterminé par l'équation

$$V(z, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{41}$$

On en déduira

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{42}$$

Substituant les valeurs de $p_1, \ldots, p_n$ ainsi obtenues dans (40), il viendra

$$F = \Phi\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{43}$$

Si donc nous déterminons une fonction V des $n+1$ variables $z, x_1, \ldots, x_n$ qui satisfasse identiquement à cette équation, laquelle ne contient pas V explicitement, on obtiendra une solution de l'équation primitive en déterminant z par l'équation

$$V = 0.$$

Si d'ailleurs la solution V qu'on a trouvée contient n constantes arbitraires $b_1, \ldots, b_n$, de telle sorte que le jacobien J des quantités $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ par rapport à ces constantes ne soit par nul, la valeur de z sera une intégrale complète de l'équation primitive ; car, d'une part, elle contient n constantes arbitraires, et, d'autre part, le jacobien J_1 des quantités $\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z}$ par rapport aux constantes b ne sera pas identiquement nul ; car, en y donnant aux quantités p_i les valeurs particulières 0, il se réduit à J. Donc on pourra tirer des équations (42) les valeurs des constantes pour les substituer dans (41), ce qui fournira une seule équation $F = 0$.

261. L'équation $\Phi = 0$ étant résolue, pour plus de simplicité, par rapport à $\frac{\partial V}{\partial z}$, prendra la forme

$$\frac{\partial V}{\partial z} + H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{44}$$

Désignons par H ce que devient le second terme de cette équation lorsqu'on y remplace les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ par des indéterminées p_i; et formons les équations différentielles ordinaires

$$(45) \qquad \frac{dx_i}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Nous allons établir que la détermination d'une solution V de l'équation (44) satisfaisant aux conditions requises et l'intégration du système canonique (45) sont deux problèmes entièrement équivalents.

262. Supposons, en effet, qu'on ait obtenu la solution demandée

$$V(z; x_1, \ldots, x_n; b_1 \ldots, b_n).$$

Les équations

$$(46) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i,$$

où les a_i désignent de nouvelles constantes arbitraires, seront l'intégrale générale du système (45).

En effet, les équations (46), différentiées par rapport à la variable indépendante z, donnent

$$(47) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z} + \sum_k \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \dfrac{dx_k}{dz} = \dfrac{dp_i}{dz}, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial z} + \sum_k \dfrac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial x_k} \dfrac{dx_k}{dz} = 0. \end{cases}$$

Mais, d'autre part, en remplaçant dans l'identité (44) les $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ par leurs valeurs p_i, elle deviendra

$$\frac{\partial V}{\partial z} + H = 0,$$

et, en prenant les dérivées partielles, par rapport aux x_i et

aux b_i, on trouvera

$$(48)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z} + \sum_k \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \dfrac{\partial p_k}{\partial x_i} + \dfrac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial z} + \sum_k \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \dfrac{\partial p_k}{\partial b_i} = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs on a

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial x_k};$$

d'où

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}, \qquad \frac{\partial p_k}{\partial b_i} = \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial x_k}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (48) et retranchons ensuite chacune d'elles de sa correspondante du système (47); il viendra

$$\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{dx_k}{dz} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial p_i}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial x_i},$$

$$\sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial b_i \partial x_k}\left(\frac{dx_k}{dz} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) = 0.$$

Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux quantités $\frac{dx_k}{dz} - \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\frac{dp_i}{dz} + \frac{\partial H}{\partial x_i}$. D'ailleurs le déterminant des coefficients n'est autre chose que le jacobien J des dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ par rapport à $b_1, \ldots, b_n$, lequel, par hypothèse, n'est pas nul. Nous obtenons donc, comme conséquence des équations (46), le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_k}{dz} - \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0, \qquad \frac{dp_i}{dz} + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0,$$

qui n'est autre que le système (45).

263. Réciproquement, supposons que par un procédé quelconque nous ayons réussi à obtenir une intégrale générale des équations (45). Elle fournira les valeurs des x_i, p_i

en fonction de z et de $2n$ constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_{2n}$. Soient d'ailleurs a_i, b_i les valeurs des x_i, p_i pour une valeur initiale donnée z^0 de la variable z. On pourra déterminer les constantes c au moyen des a_i, b_i. Substituant ces valeurs dans les équations intégrales, celles-ci prendront la forme

$$x_i = f_i(z, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n), \tag{49}$$

$$p_i = \varphi_i(z, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n), \tag{50}$$

où les a_i, b_i peuvent être considérés comme de nouvelles constantes arbitraires.

Le jacobien I des fonctions f_i par rapport à $a_1, \ldots, a_n$ n'est pas identiquement nul; car, pour la valeur particulière $z = z^0$, f_i se réduisant à a_i, I aura pour valeur l'unité.

Les équations (49) peuvent donc être résolues par rapport aux a_i et fourniront les valeurs de ces quantités en fonctions des z, x_i, b_i. Il résulte de là que toute fonction des quantités z, x_i, p_i, a_i, b_i peut s'exprimer à volonté, soit par les z, a_i, b_i seulement, soit par les z, x_i, b_i.

264. Cela posé, désignons par U ce que devient la quantité

$$\Sigma_k p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H$$

lorsqu'on l'exprime au moyen de z, a_i, b_i; et considérons l'expression

$$V = \Sigma_k a_k b_k + \int_{z^0}^{z} U\, dz.$$

Changeons simultanément z en $z + dz$, et a_i, b_i en $a_i + \delta a_i$, $b_i + \delta b_i$; x_i sera accru de la quantité

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial z} dz + \sum_k \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k} \delta a_k + \frac{\partial x_i}{\partial b_k} \delta b_k \right),$$

dont nous représenterons respectivement les deux termes par dx_i, δx_i; p_i et V éprouveront des accroissements analogues

$$\Delta p_i = dp_i + \delta p_i,$$

et

$$(51)\quad \Delta V = dV + \delta V = U\,dz + \Sigma_k (a_k\,\delta b_k + b_k\,\delta a_k) + \int_{z^0}^{z} \delta U\,dz.$$

Or on a

$$\delta U = \delta\left(\sum_k p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H\right)$$

$$= \sum_k \left(\delta p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} + p_k\,\delta \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k}\delta x_k - \frac{\partial H}{\delta p_k}\delta p_k\right)$$

ou, en supprimant les termes qui se détruisent et remplaçant $\frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\frac{\partial H}{\partial x_k}$ par leurs valeurs tirées des équations différentielles (45)

$$\delta U = \sum_k \left(p_k\,\delta \frac{dx_k}{dz} + \frac{dp_k}{dz}\delta x_k\right).$$

D'ailleurs

$$\delta \frac{dx_k}{dz} = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\delta a_i + \frac{\partial}{\partial b_i}\delta b_i\right)\frac{\partial x_k}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial a_i}\delta a_i + \frac{\partial}{\partial b_i}\delta b_i\right)x_k = \frac{d\,\delta x_k}{dz};$$

où

$$\delta U = \sum_k p_k \frac{d\,\delta x_k}{dz} + \frac{dp_k}{dz}\delta x_k = \frac{d}{dz}\sum_k p_k\,\delta x_k$$

et

$$\int_{z^0}^{z} \delta U\,dz = \left(\sum_k p_k\,\delta x_k\right)_{z^0}^{z} = \sum_k p_k\,\delta x_k - \sum_k b_k\,\delta a_k.$$

D'autre part,

$$U\,dz = \left(\sum_k p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H\right)dz = \sum_k p_k\,dx_k - H\,dz.$$

Substituant ces valeurs dans (51), il viendra

$$\Delta V = \sum_k (p_k\,dx_k + p_k\,\delta x_k + a_k\,\delta b_k) - H\,dz$$

$$= \sum_k (p_k\,\Delta x_k + a_k\,\delta b_k) - H\,dz.$$

Cette relation entre les différentielles totales ΔV, Δx_k, δb_k, dz montre que, si l'on exprime V en fonction des varia-

bles z, x_k, b_k, on aura

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = p_k, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_k} = a_k, \tag{52}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -H. \tag{53}$$

Les équations (52) donnent, entre les variables z, x_k, p_k et les constantes a_k, b_k, $2n$ relations nécessairement distinctes ; car chacune d'elles contient dans son second membre une quantité p ou a qui ne figure pas dans les autres. Ces équations ne sont donc autre chose que le système des équations intégrales (49) et (50) mises sous une forme nouvelle.

Quant à l'équation (53), elle se transforme, lorsqu'on y remplace les p_k qui figurent dans H par leurs valeurs $\frac{\partial V}{\partial x_k}$, en l'équation aux dérivées partielles (44).

La solution V que nous avons ainsi obtenue pour cette équation satisfait aux conditions requises ; car elle contient n constantes arbitraires $b_1, \ldots, b_n$, et d'autre part le jacobien J des dérivées $\frac{\partial V}{\partial x_k}$ par rapport à ces constantes n'est pas identiquement nul ; car, en donnant à z la valeur particulière z^0, $\frac{\partial V}{\partial x_k} = p_k$ se réduisant à b_k, J sera égal à l'unité.

On voit immédiatement que si, à la solution V que nous venons de trouver, on ajoute une nouvelle constante arbitraire α, on aura une nouvelle solution $V + \alpha$ à $n + 1$ constantes arbitraires, et qui sera une solution complète de (44).

265. *Nouvelle méthode de Jacobi et Mayer.* — Les deux méthodes précédentes pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ont pour caractère commun de ramener le problème à l'intégration complète d'un système d'équations aux différentielles ordinaires.

Jacobi a donné une nouvelle méthode, considérablement

perfectionnée depuis par MM. *Lie* et *Mayer*, dans laquelle on considère successivement une série de systèmes d'équations différentielles, dans chacun desquels il suffit de déterminer une seule intégrale. Cette méthode s'applique d'ailleurs sans difficulté, ainsi que nous allons le voir, à la recherche des solutions communes à plusieurs équations aux dérivées partielles simultanées.

Soient

$$(54)\qquad F_1(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0$$

ces équations, où nous supposerons pour plus de simplicité qu'on ait fait disparaître la fonction inconnue par l'artifice du n° 260. Pour que ces équations aient une solution commune, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer des fonctions p_i des variables indépendantes x_i, qui satisfassent à la fois à ces équations et aux relations

$$(55)\qquad \frac{\partial p_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p_k}{\partial x_i},$$

qui expriment que $p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n$ est une différentielle exacte; car l'intégration de cette différentielle donnera immédiatement la valeur correspondante de z.

266. Soient $F_\alpha = 0$, $F_\beta = 0$ deux quelconques des équations données. Prenons la dérivée de la première par rapport à x_i; il viendra

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + \sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Multipliant par $\dfrac{\partial F_\beta}{\partial p_i}$ et sommant par rapport à i, il vient

$$\sum_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} + \sum_i \sum_k \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

On trouvera de même, en permutant α et β,

$$\sum_i \frac{\partial F_\beta}{\partial x_i}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} + \sum_i \sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial F_\beta}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x_i} = 0.$$

Retranchons cette équation de la précédente après avoir permuté les indices de sommation i et k dans la somme double ; il vient

$$(56) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial F_\beta}{\partial x_i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \right) + \sum_i \sum_k \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Mais la somme double s'annule en vertu des équations (55). On aura donc simplement

$$0 = \sum_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} - \frac{\partial F_\beta}{\partial x_i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \right) = -(F_\alpha, F_\beta).$$

Ainsi, des équations primitives $F_1 = 0, \ldots, F_m = 0$, jointes aux conditions (55), on déduit entre les x_i, p_i de nouvelles relations

$$(F_\alpha, F_\beta) = 0.$$

Si parmi ces équations il en est qui ne soient pas une conséquence algébrique des équations (54), on pourra les leur adjoindre, recommencer les mêmes opérations sur le système ainsi complété, et ainsi de suite. On arrivera finalement, soit à un système contenant plus de n équations distinctes, auquel cas le problème sera impossible, soit à un système

$$(57) \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_\mu = 0,$$

tel que les équations nouvelles $(F_\alpha, F_\beta) = 0$ qui s'en déduisent, ou soient identiquement satisfaites, ou soient, tout au moins, une conséquence algébrique des précédentes.

Lorsque cette dernière circonstance se présente, elle pourrait donner lieu à quelque incertitude. Pour la lever, résolvons les équations (57) par rapport à μ des quantités p qui y figurent ; elles prendront la forme

$$p_1 - f_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad p_\mu - f_\mu = 0.$$

Les nouvelles équations

$$(p_\alpha - f_\alpha, p_\beta - f_\beta) = 0,$$

qui se déduisent de celles-là, ne contiennent plus $p_1, \ldots, p_\mu$; elles ne peuvent donc être une conséquence des équations précédentes. Elles fourniront donc des relations nouvelles, qui permettront de continuer la série de nos opérations, à moins qu'elles ne soient identiquement satisfaites.

Nous arriverons donc nécessairement, ou à constater l'impossibilité du problème, ou à former un système

$$(57)' \qquad F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0,$$

jouissant de la propriété qu'on ait identiquement

$$(58) \qquad (F_\alpha, F_\beta) = 0.$$

Un semblable système a reçu le nom de *système complet*.

Une équation unique $F_1 = 0$ peut être considérée comme constituant un cas particulier des systèmes complets, correspondant à $\mu = 1$.

267. Étant donné, en général, un système complet tel que $(57)'$, cherchons à déterminer une nouvelle équation

$$\varphi = 0,$$

qui, jointe aux précédentes, forme encore un système complet.

Le premier membre de cette nouvelle équation devra satisfaire aux μ équations simultanées aux dérivées partielles

$$(59) \qquad 0 = (\varphi, F_\alpha) = \sum_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varphi.$$

Ces équations linéaires forment un système jacobien, d'après la définition du n° 69.

En effet, on a

$$\begin{aligned} &\sum_i \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \sum_k \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial F_\beta}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \varphi \\ &- \sum_i \left(\frac{\partial F_\beta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \sum_k \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial p_k} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \varphi \\ = &\sum_k \left(A_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + B_k \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \right), \end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$A_k = \sum_i -\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial p_i\,\partial p_k} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_i\,\partial p_k}$$
$$+\frac{\partial F_\beta}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial p_i\,\partial p_k} - \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x_i\,\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}(F_\alpha, F_\beta),$$

$$B_k = \sum_i \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial p_i\,\partial x_k} - \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial x_i\,\partial x_k}$$
$$-\frac{\partial F_\beta}{\partial x_i}\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial p_i\,\partial x_k} + \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}\frac{\partial^2 F_\alpha}{\partial x_i\,\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(F_\alpha, F_\beta).$$

Mais (F_α, F_β) est identiquement nul; donc les A_k, B_k ont nuls, et notre proposition est démontrée.

Le système (59) admet donc des solutions et son intégraion se ramène à celle d'une seule équation linéaire aux dérivées partielles à $2n - \mu$ variables, ou, ce qui revient au même, à l'intégration d'un système de $2n - \mu$ équations linéaires ordinaires. On connaît d'ailleurs μ solutions du système, à savoir $F_1, \ldots, F_\mu$. L'ordre du système s'abaisse donc encore de μ unités et se réduit à $n - 2\mu$.

268. Supposons qu'on en ait trouvé une intégrale φ_1, laquelle, en tant que fonction des p, soit distincte de $F_1, \ldots, F_\mu$. Il est clair qu'on peut y ajouter une constante arbitraire a_1, sans cesser d'avoir une intégrale. Donc le système

$$F_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_1 + a_1 = 0$$

sera complet.

On déterminera de même une nouvelle équation $\varphi_2 + a_2 = 0$ contenant une constante arbitraire a_2 et formant avec les précédentes un système complet, en trouvant une intégrale d'un système d'équations différentielles d'ordre $2n - 2\mu - 2$, et l'on continuera de même jusqu'à ce qu'on ait obtenu un système complet :

$$F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0,$$
$$F_{\mu+1} = \varphi_1 + a_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_n = \varphi_{n-\mu} + a_{n-\mu} = 0.$$

Les valeurs des p_i, fournies par ce système, rendront $p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$ différentielle exacte; car, en tenant compte des relations $(F_\alpha, F_\beta) = 0$, les équations (56) se réduiront à

$$\sum_i \sum_k \frac{\partial F_\beta}{\partial p_i} \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Le déterminant R des quantités $\frac{\partial F_\beta}{\partial p_i}$ n'est pas nul, car nous avons opéré de telle sorte que les $F_1, \ldots, F_n$ fussent des fonctions distinctes des p_i; donc les quantités

$$\sum_k \frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k} \left(\frac{\partial p_k}{\partial x_i} - \frac{\partial p_i}{\partial x_k} \right)$$

que ces coefficients multiplient seront nulles. D'ailleurs le déterminant des coefficients $\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_k}$ est encore égal à R et différent de zéro. On aura donc

$$\frac{\partial p_k}{dx_i} - \frac{\partial p_i}{dx_k} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

269. Les quantités $p_1, \ldots, p_n$ étant déterminées par les équations $F_1 = 0, \ldots, F_n = 0$, il ne restera plus qu'à intégrer la différentielle exacte $p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n$. On trouvera ainsi

$$z = \psi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_{n-\mu}) + \alpha,$$

α étant une nouvelle constante arbitraire.

Nous obtenons de cette manière une solution du système des équations aux dérivées partielles $F_1 = 0, \ldots, F_\mu = 0$, contenant $n - \mu + 1$ constantes arbitraires, et qu'on pourra appeler une solution *complète* du système.

En prenant les dérivées partielles de z par rapport aux diverses variables $x_1, \ldots, x_n$, on obtiendra les équations

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = p_n,$$

manifestement équivalentes aux équations

$$F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0,$$
$$\varphi_1 + a_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-\mu} + a_{n-\mu} = 0.$$

De cette solution complète on déduira immédiatement toutes les solutions du système

$$(60) \qquad F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_\mu = 0.$$

En effet, soient z une semblable solution; $p_1, \ldots, p_n$ ses dérivées partielles; enfin $a_1, \ldots, a_{n-\mu}, \alpha$ des inconnues auxiliaires, déterminées par les relations

$$(61) \qquad \begin{cases} \varphi_1 + a_1 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_{n-\mu} + a_{n-\mu} = 0, \\ z - \psi(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_{n-\mu}) - \alpha = 0. \end{cases}$$

On aura, en différentiant cette dernière équation,

$$(62) \qquad dz = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{dx_n} dx_n + \frac{\partial\psi}{\partial a_1} da_1 + \ldots + d\alpha = 0.$$

D'ailleurs, des équations (60) et (61) on déduit

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = p_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x_n} = p_n,$$

et, comme

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

l'équation de condition (62) se réduira à

$$(63) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial a_{n-\mu}} da_{n-\mu} + d\alpha = 0.$$

Cette équation aux différentielles totales s'intégrera comme au n° **248**.

270. Il existe une classe particulière d'équations aux dérivées partielles auxquelles on peut étendre la méthode d'intégration par différentiation exposée au n° **35** pour les équations différentielles ordinaires.

Soient, en effet, $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n, \rho$ des fonc-

tions des $2n+1$ variables $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, satisfaisant identiquement à la relation

$$(64)\quad dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho\,(dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n).$$

Supposons que, les variables $x_1, \ldots, x_n$ restant indépendantes, on pose

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n},$$

et qu'on veuille déterminer z par l'équation

$$Z = 0;$$

on aura là une équation aux dérivées partielles du premier ordre qu'il s'agit d'intégrer.

En la différentiant, on aura

$$dZ = 0$$

et, en tirant la valeur de dZ de l'identité (64) et remarquant qu'on a par hypothèse

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

il viendra

$$P_1 dX_1 + \ldots + P_n dX_n = 0.$$

On pourra satisfaire à cette équation aux différentielles totales :

1° Ou bien en posant

$$P_1 = 0, \quad \ldots, \quad P_n = 0;$$

ces équations, jointes à $Z = 0$, détermineront une intégrale singulière ;

2° Ou bien en posant entre les X un certain nombre d'équations de condition

$$f_1 = 0, \quad \ldots, \quad f_k = 0$$

qui, jointes aux suivantes,

$$P_i = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial X_i} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial X_i}$$

et à l'équation $Z = 0$, fourniront une intégrale générale.

Pour trouver la forme générale des équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles la méthode précédente est applicable, nous aurons à déterminer, par le procédé qui a déjà été exposé plusieurs fois, la forme générale des fonctions Z, X_i, P_i, ρ qui satisfont à l'équation aux différentielles totales (64).

271. L'équation aux différentielles totales (64) équivaut évidemment au système des équations suivantes aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \Sigma_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial z} = \rho, \tag{65}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i} - \Sigma_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} = -\rho p_i, \tag{66}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} - \Sigma_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0. \tag{67}$$

Ces équations peuvent être remplacées par d'autres, d'une forme très remarquable, et que nous allons établir.

Nous désignerons, pour abréger, par $\frac{d}{dx_i}$ l'opération $\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z}$, et par le symbole $[UV]$ l'expression

$$[UV] = \sum_i \left(\frac{\partial U}{\partial p_1} \frac{dV}{dx_i} - \frac{\partial V}{\partial p_i} \frac{dU}{dx_i} \right).$$

A la place des équations (66), on peut écrire les suivantes

$$\frac{dZ}{dx_i} - \Sigma_k P_k \frac{dX_k}{dx_i} = 0, \tag{68}$$

qui s'en déduisent, en y ajoutant la première équation multipliée par p_i.

Cela posé, donnons aux variables indépendantes z, x_i, p_i deux systèmes distincts d'accroissements infiniment petits dz, dx_i, dp_i et δz, δx_i, δp_i, satisfaisant aux relations

$$(69) \qquad dz = \Sigma p_i dx_i, \qquad \delta z = \Sigma p_i \partial x_i.$$

Soient dZ, dX_i, dP_i et δZ, δX_i, δP_i les différentielles correspondantes de Z, X_i, P_i.

L'identité

$$dZ - \Sigma P_i dX_i = \rho\,(dz - \Sigma p_i dx_i),$$

différentiée par rapport aux δ, donnera, en tenant compte de (69),

$$\delta dZ - \Sigma_i(\delta P_i dX_i + P_i \delta\, dX_i) = \rho\,[\delta dz - \Sigma_i(\delta p_i dx_i + p_i \delta dx_i)].$$

Permutant les d avec les δ et retranchant la nouvelle équation ainsi obtenue de la précédente, il viendra

$$(70) \qquad \Sigma_i(dP_i \delta X_i - dX_i \delta P_i) = \rho\,\Sigma_i(dp_i \delta x_i - dx_i \delta p_i).$$

Or, on a, d'après la relation (69),

$$(71) \qquad \begin{aligned} dX_i &= \frac{\partial X_i}{\partial z} dz + \sum_k \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial X_i}{\partial p_k} dp_k\right) \\ &= \sum_k \left(\frac{dX_i}{dx_k} dx_k + \frac{\partial X_i}{\partial p_k} dp_k\right); \end{aligned}$$

de même

$$(72) \qquad dP_i = \sum_k \left(\frac{dP_i}{dx_k} dx_k + \frac{\partial P_i}{\partial p_k} dp_k\right).$$

Substituons ces valeurs dans l'identité (70) et égalons séparément à zéro les coefficients des diverses différentielles dp_k, dx_k, il viendra

$$\rho\,\delta x_k = \sum_i \left[\frac{\partial P_i}{\partial p_k} \delta X_i - \frac{\partial X_i}{\partial p_k} \delta P_i\right],$$

$$-\rho\,\delta p_k = \sum_i \left[\frac{dP_i}{dx_k} \delta X_i - \frac{dX_i}{dx_k} \delta P_i\right];$$

d'où, en changeant les δ en d et résolvant par rapport aux quantités dx_k, dp_k,

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} dx_k &= \frac{1}{\rho}\sum_i\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k}dX_i - \frac{\partial X_i}{\partial p_k}dP_i\right),\\ dp_k &= -\frac{1}{\rho}\sum_i\left(\frac{dP_i}{dx_k}dX_i - \frac{dX_i}{dx_k}dP_i\right).\end{aligned}\right.$$

Ces équations doivent être identiques à celles qu'on obtiendrait en résolvant les équations (71), (72) par rapport aux dx_k, dp_k. Les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{dX_i}{dx_k} & \cdots & \frac{\partial X_i}{\partial p_k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{dP_i}{dx_k} & \cdots & \frac{\partial P_i}{\partial p_k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{1}{\rho}\frac{\partial P_i}{\partial p_k} & \cdots & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial X_i}{\partial p_k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & -\frac{1}{\rho}\frac{dP_i}{dx_k} & \cdots & \frac{1}{\rho}\frac{dX_i}{dx_k} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

satisfont donc à la relation $\Delta\Delta_1 = 1$.

Mais, d'autre part, si dans Δ_1 on permute les n premières lignes avec les n dernières, puis les n premières colonnes avec les n dernières, si l'on fait sortir du déterminant les facteurs $\frac{1}{\rho}$ et -1, communs à une même ligne ou à une même colonne, et enfin, si l'on permute les lignes avec les colonnes, il viendra

$$\Delta_1 = \frac{1}{\rho^{2n}}\Delta.$$

De cette équation, combinée avec la précédente, on

déduit

$$\Delta^2 = \rho^{2n}.$$

Donc, si ρ n'est pas nul, Δ sera différent de zéro.

On en déduit que les fonctions Z, X_i, P_i sont indépendantes. Considérons en effet leur jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial Z}{\partial p_n} \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} & \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial z} & \frac{\partial P_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

En ajoutant aux colonnes de rang $2, \ldots, n+1$ la première colonne, respectivement multipliée par $p_1, \ldots, p_n$, on aura

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{dZ}{dx_1} & \cdots & \frac{\partial Z}{\partial p_n} \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} & \frac{dX_1}{dx_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial z} & \frac{dP_n}{dx_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}.$$

Retranchons de la première ligne les n suivantes, respectivement multipliée par $P_1, \ldots, P_n$; il viendra, en vertu des équations (65), (67), (68),

$$J = \begin{vmatrix} \rho & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} & \frac{dX_1}{dx_1} & \cdots & \frac{\partial X_1}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial z} & \frac{dP_n}{dx_1} & \cdots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} = \rho\Delta = \pm \rho^{n+1}.$$

Donc J n'est pas nul.

272. Soit maintenant u une fonction quelconque de z, x_i, p_i.

On aura

$$du = \sum_k \frac{du}{dx_k} dx_k + \frac{\partial u}{\partial p_k} dp_k$$

ou, en substituant pour dx_k, dp_k les valeurs (73),

$$\rho\, du = \Sigma_i([P_i u] dX_i - [X_i u] dP_i).$$

Faisons en particulier $u = X_k$, puis $u = P_k$; il viendra

$$\rho\, dX_k = \Sigma_i([P_i X_k] dX_i - [X_i X_k] dP_i),$$
$$\rho\, dP_k = \Sigma_i([P_i P_k] dX_i - [X_i P_k] dP_i).$$

Les différentielles dX_i, dP_i étant indépendantes, ces équations devront être identiques; on en déduit

$$(74) \quad \begin{cases} [X_i X_k] = 0, & [P_i P_k] = 0, \\ [P_i X_i] = \rho, & [P_i X_k] = 0. \end{cases}$$

Faisons enfin $u = Z$. L'identité (64) donne, en remarquant que $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$,

$$dZ = \Sigma P_i dX_i.$$

On aura donc ces nouvelles relations

$$(75) \qquad [P_i Z] = \rho P_i, \qquad [X_i Z] = 0,$$

qui, jointes aux équations (74), seront équivalentes à la relation (64).

273. Supposons qu'on ait trouvé un système de $n+1$ fonctions indépendantes Z, X_i, satisfaisant aux relations

$$[X_i X_k] = 0, \qquad [X_i Z] = 0.$$

On pourra déterminer sans difficulté et d'une seule manière les $n+1$ autres fonctions P_i, ρ par les équations

$$(65) \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} - \Sigma_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial z} = \rho,$$

$$(67) \qquad A_i = \frac{\partial Z}{\partial p_i} - \Sigma_k P_k \frac{\partial X_k}{\partial p_i} = 0,$$

$$(68) \qquad B_i = \frac{dZ}{dx_i} - \Sigma_k P_k \frac{dX_k}{dx_i} = 0.$$

Les $2n$ équations (67) et (68), qui doivent déterminer les n inconnues P_i, forment un système surabondant; mais il est aisé de voir qu'elles sont toujours compatibles. On a, en effet, les identités

$$\sum_i \left(A_i \frac{dX_h}{dx_i} - B_i \frac{\partial X_h}{dp_i} \right) = -[X_h Z] - \Sigma_k P_k [X_k X_h] = 0,$$

qui fournissent n relations distinctes entre les A_i, B_i; car l'un au moins des déterminants formés avec les éléments du tableau

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \dfrac{dX_h}{dx_i} & \cdots & \dfrac{\partial X_h}{\partial p_i} & \cdots \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

diffère de zéro, puisque le déterminant Δ, qui est une fonction linéaire de ces déterminants, n'est pas nul.

Ceci montre d'une part que, parmi les $2n$ équations (67) et (68), il y en a nécessairement n qui sont des conséquences des autres, et d'autre part que, parmi ces équations, il y en a toujours n essentiellement distinctes, dont la résolution donnera les inconnues P_k.

274. Soit

$$(76) \qquad F\left(z, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots\right)$$

une équation aux dérivées partielles entre les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$ et une fonction inconnue z. On pourra remplacer cette équation par le système des deux suivantes :

$$(77) \qquad \begin{gathered} F\left(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n, \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \ldots\right), \\ dz - \Sigma p_i dx_i = 0. \end{gathered}$$

Soient Z, X_i, P_i des fonctions de z, x_i, p_i déterminées comme ci-dessus, de manière à satisfaire à l'identité

$$dZ - \Sigma P_i dX_i = \rho(dz - \Sigma p_i dx_i).$$

Substituant dans les équations (77) les valeurs de z, x_i, p_i, $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$, ..., en fonction de Z, X_i, P_i et de leurs dérivées partielles par rapport à X_1, X_2, ..., on aura de nouvelles équations

$$\Phi\left(Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial X_i}, \ldots, \frac{\partial P_k}{\partial X_i}, \ldots\right),$$
$$dZ - \Sigma P_i dX_i = 0,$$

équivalentes à l'équation aux dérivées partielles

$$\Phi\left(Z, X_1, \ldots, X_n, \frac{\partial Z}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial X_n}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial X_i}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial X_i\, \partial X_k}, \ldots\right).$$

Cette équation transformée est du même ordre que la primitive.

275. Les transformations de ce genre, auxquelles M. *Lie* à donné le nom de *transformations de contact*, ont une grande importance. L'une des plus simples est la suivante, déjà considérée par *Legendre*,

$$Z = -z + \Sigma_i p_i x_i, \qquad X_i = p_i, \qquad P_i = x_i.$$

C'est bien une transformation de contact, car on a

$$dZ - \Sigma_i P_i dX_i = -dz + \Sigma_i (p_i dx_i + x_i dp_i) - \Sigma_i x_i dp_i$$
$$= -(dz - \Sigma p_i dx_i).$$

Cette transformation est d'ailleurs réciproque, car on déduit des équations ci-dessus, résolues par rapport à z, x_i, p_i,

$$z = -Z + \Sigma_i P_i X_i, \qquad x_i = P_i, \qquad p_i = X_i.$$

III. — Équations aux dérivées partielles du second ordre.

276. Parmi les équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes et d'ordre supérieur au premier, la

plus simple est évidemment l'équation monome

$$\frac{\partial^{m+n} z}{dx^m \partial y^n} = 0.$$

Il est facile de trouver son intégrale générale.

En effet, prenons pour variable auxiliaire la dérivée $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = u$; on aura

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m} = 0.$$

Donc, pour une valeur constante de y, la quantité u, considérée comme fonction de x seul, aura sa dérivée $m^{\text{ième}}$ nulle; elle sera donc de la forme

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-1} x^{m-1},$$

$A_0, \ldots, A_{m-1}$ étant des quantités indépendantes de x et, par suite, des fonctions, d'ailleurs arbitraires, de la seule variable y.

La valeur de u étant ainsi déterminée, on aura

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1} x^{m-1}.$$

Désignons par $Y_0, \ldots, Y_{m-1}$ des fonctions de y, ayant respectivement pour dérivée $n^{\text{ième}}$ $A_0, \ldots, A_{m-1}$. L'équation précédente admettra la solution particulière

$$\zeta = Y_0 + Y_1 x + \ldots + Y_{m-1} x^{m-1}.$$

Pour obtenir la solution générale, posons

$$z = \zeta + v.$$

L'équation deviendra

$$\frac{\partial^n v}{\partial y^n} = 0$$

et donnera

$$v = X_0 + X_1 y + \ldots + X_{n-1} y^{n-1},$$

$X_0, \ldots, X_{n-1}$ étant des fonctions arbitraires de x. On aura

donc finalement

$$\begin{aligned} z = \;& Y_0 + Y_1 x + \ldots + Y_{m-1} x^{m-1} \\ & + X_0 + X_1 y + \ldots + X_{n-1} y^{n-1}. \end{aligned}$$

D'ailleurs $A_0, \ldots, A_{m-1}$ étant des fonctions arbitraires de y, leurs intégrales $n^{\text{ièmes}}$ $Y_0, \ldots, Y_{m-1}$ seront également des fonctions arbitraires.

En particulier, l'équation du second ordre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0$$

aura pour intégrale

$$z = X + Y.$$

277. Considérons avec Euler l'équation plus générale

$$a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

a, b, c étant des constantes.

Changeons de variables indépendantes, en posant

$$\alpha x + \beta y = \xi, \qquad \gamma x + \delta y = \eta,$$

α, β, γ, δ étant des constantes.

On aura

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \delta \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2, \qquad \ldots.$$

L'équation transformée sera donc la suivante :

$$\begin{aligned} (a\alpha^2 + 2b\alpha\beta + c\beta^2) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + (a\gamma^2 + 2b\gamma\delta + c\delta^2) \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} & \\ + 2[a\alpha\gamma + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\beta\delta] \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \, \partial \eta} &= 0. \end{aligned}$$

Soit en particulier

$$\alpha = \gamma = 1, \qquad \beta = \lambda_1, \qquad \gamma = \lambda_2,$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 = 0.$$

Les termes en $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$ disparaîtront, et l'équation transformée, se réduisant à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

aura pour intégrale générale

$$z = f(\xi) + \varphi(\eta) = f(x + \lambda_1 y) + \varphi(x + \lambda_2 y),$$

f et φ désignant des fonctions arbitraires.

Si l'équation en λ a ses deux racines égales, les deux nouvelles variables ξ et η ne seront pas distinctes. Le procédé précédent doit donc être légèrement modifié. On prendra, dans ce cas, $\alpha = 1$, $\beta = \lambda$ et on laissera γ et δ arbitraires. Les quantités $a + b\lambda$, $b + c\lambda$ étant nulles, le terme en $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$ s'annulera; l'équation se réduira à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$$

et aura pour intégrale générale

$$f(\xi) + \varphi(\xi)\eta = f(x + \lambda y) + \varphi(x + \lambda y)(\gamma x + \delta y).$$

278. La méthode précédente, convenablement généralisée, permet de ramener à une forme plus simple l'équation

$$A\frac{\partial z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + M = 0,$$

où A, B, C sont des fonctions de x, y, et M une fonction de $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Soient, en effet, ξ, η deux fonctions de x, y que nous

prendrons pour nouvelles variables indépendantes; on aura

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on aura une transformée de même forme

$$A'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C'\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + M' = 0,$$

où

$$A' = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2,$$

$$C' = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2.$$

Ces deux coefficients s'annulent donc si l'on prend pour ξ et η deux intégrales distinctes de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \qquad A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un produit de deux facteurs $\lambda\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial u}{\partial y}$, $\lambda_1\frac{\partial u}{\partial x} + \mu_1\frac{\partial u}{\partial y}$. En les égalant

séparément à zéro, on aura deux équations linéaires du premier ordre; leur intégration donnera les fonctions ξ, η, dont l'introduction comme variables indépendantes réduira la proposée à la forme plus simple

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} = \mathrm{F}\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\eta}\right).$$

Deux cas sont à distinguer ici suivant le signe de $B^2 - AC$:

1° S'il est positif, les nouvelles variables ξ, η seront réelles et l'on dira que l'équation appartient au *type hyperbolique*.

2° S'il est négatif, les deux facteurs entre lesquels se décompose l'équation (1) seront des quantités complexes conjuguées; il en sera de même des variables nouvelles ξ, η. Pour obtenir une transformée réelle, nous poserons

$$\xi = \frac{X + iY}{2}, \qquad \eta = \frac{X - iY}{2},$$

$$X = \xi + \eta, \qquad Y = -i(\xi - \eta),$$

$$\frac{\partial z}{\partial\xi} = \frac{\partial z}{\partial X} - i\frac{\partial z}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial\eta} = \frac{\partial z}{\partial X} + i\frac{\partial z}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} = \left(\frac{\partial}{\partial X} + i\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial X} - i\frac{\partial}{\partial Y}\right) z = \frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2}.$$

La nouvelle transformée

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial Y^2} = \mathrm{F}_1\left(X, Y, z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right)$$

appartiendra au *type elliptique*.

3° Si $B^2 - AC$ est nul (*type parabolique*), il faudra modifier la méthode précédente. Car les deux facteurs du premier membre de l'équation (1) étant égaux, elle n'admettra plus qu'une seule solution ξ, laquelle satisfait aux deux équations équivalentes

$$A\frac{\partial\xi}{\partial x} + B\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0, \qquad B\frac{\partial\xi}{\partial x} + C\frac{\partial\xi}{\partial y} = 0.$$

Prenons pour η une autre fonction quelconque de x, y;

on aura $A' = B' = 0$; d'où l'équation transformée

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right).$$

Les trois types ci-dessus seront bien distincts si $B^2 - AC$ conserve un signe constant, ou reste nul pour tous les systèmes de valeurs de x, y qu'on aura à considérer.

279. Parmi les équations de la forme (2), nous considérerons en particulier l'équation de Laplace

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + M\frac{\partial z}{\partial x} + N\frac{\partial z}{\partial y} + Pz + Q = 0,$$

où M, N, P, Q sont des fonctions de x, y seulement.

En prenant pour variable auxiliaire la quantité

$$(4) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} + Mz = u,$$

l'équation proposée pourra s'écrire

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + Nu + Q + Az = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$P - \frac{\partial M}{\partial x} - MN = A.$$

L'équation (3) est donc équivalente au système des deux équations simultanées (4) et (5). Ce système s'intègre immédiatement si $A = 0$. En effet, l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + Nu + Q = 0,$$

ne contenant de dérivation que par rapport à x, deviendra, pour une valeur constante de y, une équation aux différentielles ordinaires, linéaire et du premier ordre, dont on déterminera aisément l'intégrale générale sous la forme

$$u = Ce^{-\int N dx} + u_1,$$

u_1 étant une intégrale particulière et C une quantité constante pour y constant et, par suite, une fonction de y seul, d'ailleurs arbitraire.

Substituons la valeur de u ainsi trouvée dans l'équation (4). Cette équation, ne contenant de dérivation que par rapport à y, pourra de même s'intégrer comme une équation aux différentielles ordinaires, à la condition de remplacer la constante d'intégration par une fonction arbitraire de x. On aura donc, pour z, une expression où figurent deux fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y.

280. Supposons, en second lieu, que A soit différent de zéro. L'équation (5) donnera

$$z = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + Nu + Q\right). \tag{6}$$

Substituons cette valeur dans (4) et posons, pour abréger,

$$M_1 = M - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial y} = M - \frac{\partial \log A}{\partial y},$$

$$P_1 = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{N}{A}\frac{\partial A}{\partial y} + MN + A = \frac{\partial N}{\partial y} - N\frac{\partial \log A}{\partial y} + P - \frac{\partial M}{\partial x},$$

$$Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{Q}{A}\frac{\partial A}{\partial y} + MQ \qquad = \frac{\partial Q}{\partial y} - Q\frac{\partial \log A}{\partial y} + MQ;$$

il viendra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + M_1\frac{\partial u}{\partial x} + N\frac{\partial u}{\partial y} + P_1 u + Q_1 = 0, \tag{7}$$

équation de même forme que la primitive. Si elle peut être intégrée, la formule (6) donnera la valeur de z.

Cette intégration pourra se faire immédiatement si l'on a

$$0 = A_1 = P_1 - \frac{\partial M_1}{\partial x} - M_1 N = \frac{\partial^2 \log A}{\partial x\,\partial y} + A + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 \log A}{\partial x\,\partial y} + 2A + \frac{\partial N}{\partial y} + MN - P.$$

Sinon, opérons sur la transformée comme nous l'avons

fait sur l'équation primitive; nous ramènerons son intégration à celle d'une nouvelle transformée

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + M_2 \frac{\partial v}{\partial x} + N \frac{\partial v}{\partial y} + P_2 v + Q_2 = 0,$$

laquelle pourra se faire si l'on a

$$\begin{aligned} 0 = A_2 &= \frac{\partial^2 \log A_1}{\partial x \partial y} + A_1 + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M_1}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 \log A_1}{\partial x \partial y} + 2A_1 - A. \end{aligned}$$

Continuant de même, nous aurons un nouveau cas d'intégrabilité, si la quantité

$$A_3 = \frac{\partial^2 \log A_2}{\partial x \partial y} + 2A_2 - A_1$$

est nulle, et ainsi de suite.

281. L'équation primitive ne changeant pas de forme si l'on y permute x et M avec y et N, nous obtiendrons évidemment une seconde série de cas d'intégrabilité analogue à la précédente en formant successivement les quantités

$$\begin{aligned} B &= P - \frac{\partial N}{\partial y} - MN, \\ B_1 &= \frac{\partial^2 \log B}{\partial x \partial y} + B + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ B_2 &= \frac{\partial^2 \log B_1}{\partial x \partial y} + 2B_1 - B, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si l'une d'elles s'annule, on arrivera à une transformée intégrable.

282. Considérons l'équation de Liouville

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{2\lambda z}.$$

Posons

$$\frac{\partial z}{\partial y} = Q,$$

il viendra

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{2\lambda z}$$

et, en prenant la dérivée par rapport à y,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial y} = e^{2\lambda z}\, 2\lambda \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\, 2\lambda Q.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \lambda Q^2\right) = 0$$

ou, en intégrant,

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - \lambda Q^2 = F(y).$$

Soit $\psi(y) = \frac{1}{2\lambda} \frac{f''(y)}{f'(y)}$ une solution particulière de cette équation; on aura

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \lambda \psi^2 = F, \qquad \psi = \frac{1}{2\lambda} \frac{f''}{f'},$$

et ces équations n'apprendront rien sur les fonctions ψ et f, la fonction F étant arbitraire.

Pour avoir la solution générale, posons

$$Q = \frac{1}{2\lambda} \frac{f''(y)}{f'(y)} + u,$$

u étant une nouvelle variable, il viendra

$$\frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{f''(y)}{f'(y)} - \lambda u^2 = 0$$

ou, en multipliant par $-\frac{f'(y)}{u^2}$,

$$-\frac{f'(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}}{u^2} + \frac{f''(y)}{u} + \lambda f'(y) = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{f'(y)}{u} + \lambda f'(y) = 0.$$

Intégrant par rapport à y, il vient

$$\frac{f'(y)}{u} + \lambda f(y) + \varphi(x) = 0,$$

d'où

$$u = \frac{-f'(y)}{\lambda f(y) + \varphi(x)},$$

$$Q = \frac{1}{2\lambda}\frac{f''(y)}{f'(y)} - \frac{f'(y)}{\lambda f(y) + \varphi(x)}$$

et enfin

$$e^{2\lambda z} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{f'(y)\varphi'(x)}{[\lambda f(y) + \varphi(x)]^2}.$$

283. Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F(z, x, y, p, q, r, s, t),$$

où nous posons, pour abréger, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \ldots$, proposons-nous de lui appliquer la transformation de Legendre. Soient

$$Z = px + qy - z, \qquad X = p, \qquad Y = q,$$

les nouvelles variables, et désignons par P, Q, R, S, T les dérivées partielles $\frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \ldots$.

On aura

$$\begin{aligned} dZ &= x\,dp + y\,dq + p\,dx + q\,dy - dz \\ &= x\,dp + y\,dq = x\,dX + y\,dY, \end{aligned}$$

d'où

$$P = x, \qquad Q = y,$$

et, par suite,

$$z = PX + QY - Z.$$

On aura ensuite

$$dX = dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dY = dq = s\,dx + t\,dy,$$
$$dx = dP = R\,dX + S\,dY, \qquad dy = dQ = S\,dX + T\,dY,$$

et, en éliminant dX et dY,

$$dx = (Rr + Ss)\,dx + (Rs + St)\,dy,$$
$$dy = (Sr + Ts)\,dx + (Ss + Tt)\,dy;$$

d'où

$$Rr + Ss = 1, \qquad Rs + St = 0,$$
$$Sr + Ts = 0, \qquad Ss + Tt = 1,$$

et enfin

$$r = \frac{T}{RT - S^2}, \qquad s = -\frac{S}{RT - S^2}, \qquad t = \frac{R}{RT - S^2}.$$

L'équation transformée sera donc

$$F\left(PX + QY - Z, P, Q, X, Y, \frac{T}{RT - S^2}, -\frac{S}{RT - S^2}, \frac{R}{RT - S^2}\right) = 0.$$

284. Nous allons appliquer cette transformation à l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont égaux et de signe contraire.

Nous avons donné (*Calcul différentiel*, n° 516) l'équation du second degré, qui détermine ces rayons de courbure. Égalant à zéro la somme de ses racines, on obtiendra l'équation différentielle cherchée

$$(1 + q^2)\,r - 2pqs + (1 + p^2)\,t = 0.$$

Par la transformation de Legendre, elle deviendra

$$(1 + X^2)\,R + 2XYS + (1 + Y^2)\,T = 0. \tag{8}$$

Différentiant par rapport à X, on trouvera

$$(1 + X^2)\frac{\partial R}{\partial X} + 2XY\frac{\partial S}{\partial X} + (1 + Y^2)\frac{\partial T}{\partial X} + 2XR + 2YS = 0. \tag{9}$$

Mais on a

$$R = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial x}{\partial X}, \qquad S = \frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial x}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial R}{\partial X} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2}, \qquad \frac{\partial S}{\partial X} = \frac{\partial^2 x}{\partial X\,\partial Y}, \qquad \frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial^2 P}{\partial Y^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial Y^2}.$$

L'équation (9) peut donc s'écrire

$$(10)\qquad (1+X^2)\frac{\partial^2 x}{\partial X^2}+2XY\frac{\partial^2 x}{\partial X\,\partial Y}+(1+Y^2)\frac{\partial^2 x}{\partial Y^2}$$
$$+2X\frac{\partial x}{\partial X}+2Y\frac{\partial x}{\partial Y}=0.$$

La différentiation par rapport à Y donnerait pour y la même équation aux dérivées partielles. Enfin, en tenant compte de la relation (8), on vérifiera aisément que

$$z=PX+QY-Z=xX+yY-Z$$

satisfait encore à cette même équation.

Pour intégrer l'équation (10), nous la simplifierons suivant la méthode du n° 278, en remplaçant X, Y par de nouvelles variables indépendantes ξ, η, qui satisfassent à l'équation aux dérivées partielles

$$(1+X^2)\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2+2XY\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial Y}+(1+Y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2=0.$$

Cette dernière équation, décomposée en facteurs, donne la suivante :

$$(11)\qquad (1+X^2)\frac{\partial u}{\partial X}+\left(XY\mp\sqrt{-1-X^2-Y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial Y}=0.$$

dont l'intégration se ramène à celle de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dX}{1+X^2}=\frac{dY}{XY\mp\sqrt{-1-X^2-Y^2}}$$

ou

$$(12)\qquad (1+X^2)\frac{dY}{dX}=XY\mp\sqrt{-1-X^2-Y^2}$$

Prenons la dérivée de cette équation et remplaçons-y $\frac{dY}{dX}$ par sa valeur; il viendra

$$(1+X^2)\frac{d^2Y}{dX^2}=0,$$

d'où

$$\frac{dY}{dX} = \text{const.}$$

L'intégrale générale de (12) sera donc

$$\frac{1 + X^2}{XY \mp \sqrt{-1 - X^2 - Y^2}} = \text{const.},$$

de sorte que les nouvelles variables indépendantes à prendre seront les suivantes :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{1 + X^2}{XY - \sqrt{-1 - X^2 - Y^2}} = \frac{XY + \sqrt{-1 - X^2 - Y^2}}{1 + Y^2}, \\ \eta &= \frac{1 + X^2}{XY + \sqrt{-1 - X^2 - Y^2}} = \frac{XY - \sqrt{-1 - X^2 - Y^2}}{1 + Y^2}. \end{aligned} \right.$$

Éliminons le radical entre les deux équations équivalentes qui donnent ξ; il viendra

$$1 + X^2 + (1 + Y^2)\xi^2 - 2XY\xi = 0,$$

d'où

$$(14) \qquad X = Y\xi + \sqrt{-1 - \xi^2}.$$

On trouvera de même

$$(15) \qquad X = Y\eta + \sqrt{-1 - \eta^2}.$$

De ces deux équations on tirera

$$X = \frac{\xi\sqrt{-1 - \eta^2} - \eta\sqrt{-1 - \xi^2}}{\xi - \eta}, \qquad Y = \frac{\sqrt{-1 - \eta^2} - \sqrt{-1 - \xi^2}}{\xi - \eta}.$$

L'équation (10), exprimée au moyen des nouvelles variables ξ, η, prendra la forme

$$L\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta} + M\frac{\partial x}{\partial\xi} + N\frac{\partial x}{\partial\eta} = 0.$$

où les coefficients M, N ont pour valeurs

$$M = (1 + X^2)\frac{\partial^2 \xi}{\partial X^2} + 2XY\frac{\partial^2 \xi}{\partial X \partial Y} + (1 + Y^2)\frac{\partial^2 \xi}{\partial Y^2} + 2X\frac{\partial \xi}{\partial X} + 2Y\frac{\partial \xi}{\partial Y},$$

$$N = (1 + X^2)\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + 2XY\frac{\partial^2 \eta}{\partial X \partial Y} + \ldots.$$

Or ces deux coefficients sont nuls. En effet, l'équation (11) à laquelle satisfont ξ et η peut aisément se mettre sous les deux formes équivalentes

$$(16)\qquad \left(XY \pm \sqrt{-1 - X^2 - Y^2}\right)\frac{\partial u}{\partial X} + (1 + Y^2)\frac{\partial u}{\partial Y} = 0,$$

$$(16)'\qquad \left(-X \pm \frac{Y}{\sqrt{-1 - X^2 - Y^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial X} + \left(-Y \mp \frac{X}{\sqrt{-1 - X^2 - Y^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial Y} = 0.$$

Ajoutons à cette dernière équation la dérivée de (11) par rapport à X et celle de (16) par rapport à Y ; il viendra

$$(1 + X^2)\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2XY\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + (1 + Y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2X\frac{\partial u}{\partial X} + 2Y\frac{\partial u}{\partial Y} = 0.$$

Prenant successivement pour u les fonctions ξ, η, on aura $M = 0$, $N = 0$.

L'équation transformée se réduira donc à

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

et aura pour intégrale générale

$$\Phi(\xi) + \Psi(\eta),$$

Φ et Ψ étant des fonctions arbitraires.

285. Il résulte de l'analyse qui précède que les surfaces cherchées appartiennent à celles dont les coordonnées peuvent s'exprimer en fonction de deux paramètres ξ, η par des équations de la forme

$$x = \Phi(\xi) + \Psi(\eta),$$
$$y = \Phi_1(\xi) + \Psi_1(\eta),$$
$$z = \Phi_2(\xi) + \Psi_2(\eta).$$

Ces dernières surfaces jouissent de la propriété géométrique d'être engendrées (et cela de deux manières différentes) par la translation d'une génératrice de forme invariable. Il est clair, en effet, que les courbes $\eta = \text{const.}$ représentent les diverses positions d'une même courbe déplacée parallèlement à elle-même. De même pour les courbes $\xi = \text{const.}$

Nous allons poursuivre l'étude du problème, pour achever de préciser la nature des surfaces cherchées.

286. Puisque x est la somme d'une fonction de ξ et d'une fonction de η, nous pourrons poser

$$x = \varphi'(\xi) + \psi'(\eta),$$

φ et ψ étant arbitraires. Cela posé, on a

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = x,$$

d'où

$$Z = \int x\,dX = \int \varphi'(\xi)\,dX + \int \psi'(\eta)\,dX,$$

Y étant supposé constant dans l'intégration. Or les équations (14) et (15) donnent, dans cette hypothèse,

$$dX = Y\,d\xi + d\sqrt{-1-\xi^2} = Y\,d\eta + d\sqrt{-1-\eta^2}.$$

Substituant ces deux valeurs de dX dans les intégrales correspondantes, et intégrant par parties le second terme de

chacune d'elles, il viendra

$$Z = Y\varphi(\xi) + \sqrt{-1-\xi^2}\,\varphi'(\xi) - \int \sqrt{-1-\xi^2}\,\varphi''(\xi)\,d\xi$$
$$+ Y\psi(\eta) + \sqrt{-1-\eta^2}\,\psi'(\eta) - \int \sqrt{-1-\eta^2}\,\psi''(\eta)\,d\eta + C,$$

C désignant une fonction de Y.

Pour obtenir maintenant y, nous aurons à prendre la dérivée partielle de cette expression par rapport à Y, en supposant que les variables indépendantes soient X, Y. On a, dans cette hypothèse, en prenant les dérivées partielles des équations (14) et (15),

$$\xi + Y\frac{\partial\xi}{\partial Y} + \frac{\partial\sqrt{-1-\xi^2}}{\partial Y} = 0,$$
$$\eta + Y\frac{\partial\eta}{\partial Y} + \frac{\partial\sqrt{-1-\eta^2}}{\partial Y} = 0.$$

En tenant compte de ces relations, la dérivée de Z se réduira à

$$y = \varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi) + \psi(\eta) - \eta\psi'(\eta) + \frac{\partial C}{\partial Y}.$$

Mais y doit être de la forme $\Phi(\xi) + \Psi(\eta)$; et son dernier terme $\frac{\partial C}{\partial Y}$ est une fonction de Y, qui ne peut être de cette forme que s'il se réduit à une constante. D'ailleurs on peut fondre cette constante dans la fonction arbitraire φ, de telle sorte qu'on ait simplement

$$y = \varphi(\xi) - \xi\varphi'(\xi) + \psi(\eta) - \eta\psi'(\eta).$$

La quantité C qui figure encore dans l'expression de Z sera une constante qu'on peut supprimer en la fondant avec les intégrales.

Il ne reste plus qu'à déterminer la quantité

$$z = Xx + Yy - Z.$$

En y substituant les valeurs trouvées de x, y, Z et tenant

compte des relations (14) et (15), il viendra

$$z = \int \sqrt{-1-\xi^2}\,\varphi''(\xi)\,d\xi + \int \sqrt{-1-\eta^2}\,\psi''(\eta)\,d\eta.$$

Nous avons ainsi exprimé les trois coordonnées x, y, z des surfaces cherchées au moyen des paramètres ξ, η.

287. Considérons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi(u, v) = 0, \tag{17}$$

où u, v sont des fonctions données de x, y, z, p, q, dont l'une au moins contienne p ou q, et Φ une fonction arbitraire.

Prenons les dérivées partielles de l'équation. Il viendra

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} + r\frac{\partial u}{\partial p} + s\frac{\partial u}{\partial q}\right] \\
&+ \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z} + r\frac{\partial v}{\partial p} + s\frac{\partial v}{\partial q}\right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} + s\frac{\partial u}{\partial p} + t\frac{\partial u}{\partial q}\right] \\
&+ \frac{\partial \Phi}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z} + s\frac{\partial v}{\partial p} + t\frac{\partial v}{\partial q}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Éliminant le rapport $\frac{\partial \Phi}{\partial u} : \frac{\partial \Phi}{\partial v}$, on obtiendra une équation du second ordre, de la forme

$$\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0, \tag{18}$$

où H, K, L, M, N sont des fonctions de x, y, z, p, q.

L'équation (17) du premier ordre est dite une *intégrale intermédiaire* de cette équation du second ordre.

Réciproquement, étant donnée une équation du second ordre de la forme (18), on peut se proposer avec *Monge* de reconnaître si cette équation admet une intégrale intermédiaire et de déterminer celle-ci lorsqu'elle existe.

288. Supposons que l'équation (18) admette une intégrale intermédiaire (17). Soit V ce que devient le premier membre de l'équation (17) pour une détermination donnée à volonté de la fonction Φ. En changeant Φ en $\Phi - c$, c désignant une constante arbitraire, on obtiendra l'équation

$$V = c \tag{19}$$

comme cas particulier de (17).

Toute solution de cette équation satisfera donc à l'équation (18). Mais elle satisfait en outre aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + r\frac{\partial V}{\partial p} + s\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} + s\frac{\partial V}{\partial p} + t\frac{\partial V}{\partial q} = 0, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

obtenues en prenant les dérivées partielles de (19).

Tirons de ces équations les valeurs de r, s pour les substituer dans (18); il viendra

$$P + Qt = 0, \tag{21}$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} P = {} & H\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial q} - H\frac{\partial V}{\partial p}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ & - 2K\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial p} + M\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 - N\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2, \\ Q = {} & H\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)^2 - 2K\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial q} + L\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 \\ & - N\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial q} - N\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial V}{\partial p}. \end{aligned}$$

L'équation (21) doit être une conséquence de l'équation (19). Mais les seules relations indépendantes de la constante c que celle-ci établisse entre x, y, z, p, q, r, s, t sont évidemment les relations (20). Or, si nous supposons que V contienne p, le déterminant $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2$ des relations (20),

par rapport à r et s, étant $\gtrless 0$, on ne pourra en déduire aucune relation nouvelle, indépendante de r et de s ; donc l'équation (21) ne pourra subsister que si l'on a identiquement

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Ce sont deux équations simultanées du premier ordre, auxquelles la fonction V doit satisfaire. En général, elles sont incompatibles ; mais, si elles ont des solutions communes, chacune d'elles donnera une fonction V, telle que l'équation $V = c$ entraîne comme conséquence l'équation (18).

289. Ces équations $P = 0$, $Q = 0$ sont du second degré par rapport aux dérivées de V ; mais elles peuvent être notablement simplifiées.

En effet, éliminons entre ces deux équations la quantité $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, nous obtiendrons cette nouvelle équation

$$(22) \qquad \left[N\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) + K\frac{\partial V}{\partial p} - H\frac{\partial V}{\partial q}\right]^2 + (HL - MN - K^2)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)^2 = 0;$$

d'où l'on déduit, en posant, pour abréger,

$$G = K^2 + MN - HL,$$

$$(23) \qquad N\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) + (K \pm \sqrt{G})\frac{\partial V}{\partial p} - H\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Substituons dans $Q = 0$ la valeur de $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$ tirée de cette équation, et supprimons le facteur commun $\frac{\partial V}{\partial p}$; il viendra

$$(24) \qquad N\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) - L\frac{\partial V}{\partial p} + (K \mp \sqrt{G})\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Les deux équations (23) et (24) sont linéaires. Si G n'est pas nul, on pourra prendre successivement pour $\sqrt{G}$ les deux

valeurs dont cette quantité est susceptible ; on obtiendra ainsi deux systèmes d'équations linéaires

$$(25) \qquad P_1 = 0, \qquad Q_1 = 0$$

et

$$(26) \qquad P_2 = 0, \qquad Q_2 = 0,$$

et V devra nécessairement satisfaire à l'un des deux. Si G est nul, ces deux systèmes se réduiront à un seul.

290. Nous avons toutefois supposé dans la démonstration que $\frac{\partial V}{\partial p}$ n'était pas nul. Si l'on avait $\frac{\partial V}{\partial p} = 0$, mais $\frac{\partial V}{\partial q} \gtrless 0$, on n'aurait qu'à permuter dans le raisonnement x, p, r, H avec y, q, t, L, et l'on arriverait au même résultat, car ce changement transforme simplement P_1, Q_1, P_2, Q_2 en Q_2, P_2, Q_1, P_1.

Notre conclusion ne serait donc en défaut que si V ne contenait ni p ni q. Mais, par définition, s'il existe une intégrale intermédiaire $\Phi(u, v) = 0$, l'une au moins des fonctions u, v contiendra p ou q. Donc, parmi les fonctions de la forme $\Phi(u, v)$, on pourra trouver deux fonctions distinctes U et V contenant chacune p ou q et satisfaisant, par suite, à l'un des deux systèmes d'équations (25) ou (26). Toute fonction $\Psi(U, V)$ de U et de V qui contient p ou q y satisfera de même.

On déduit de là que U et V doivent satisfaire toutes deux au système (25) ou toutes deux au système (26). Supposons en effet que U satisfît au système (25) et V au système (26); $\Psi(U, V)$ ne satisferait, en général, à aucun des deux. En effet, l'équation P_1, par exemple, étant linéaire, le résultat de la substitution de $\Psi(U, V)$ dans cette équation sera

$$\frac{\partial \Psi}{\partial U} S + \frac{\partial \Psi}{\partial V} T,$$

S et T étant les résultats de la substitution de U et de V.

Mais U satisfaisant à $P_1 = 0$ et V à

$$P_2 = P_1 - 2\sqrt{G}\frac{\partial V}{\partial p} = 0$$

on aura

$$S = 0, \qquad T - 2\sqrt{G}\frac{\partial V}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial U} S + \frac{\partial \Psi}{\partial V} T = 2\sqrt{G}\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial \Psi}{\partial V}.$$

De même, le résultat de la substitution de $\Psi(U, V)$ dans Q_1 sera $-2\sqrt{G}\frac{\partial V}{\partial q}\frac{\partial \Psi}{\partial V}$; or $\sqrt{G}$ n'est pas nul, les deux systèmes (25) et (26) étant supposés distincts ; d'autre part, $\frac{\partial V}{\partial p}$ et $\frac{\partial V}{\partial q}$ ne sont pas nuls à la fois ; enfin, si Ψ contient V, $\frac{\partial \Psi}{\partial V}$ n'est pas nul ; donc Ψ ne pourra satisfaire à la fois aux deux équations $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$. On voit de même que, si Ψ contient U, il ne peut satisfaire à la fois aux équations $P_2 = 0$, $Q_2 = 0$.

Si donc il existe une intégrale intermédiaire, l'un au moins des deux systèmes (25) ou (26) admettra deux intégrales distinctes U et V.

Réciproquement, si le système (25), par exemple, admet deux intégrales distinctes, U et V, il admettra comme intégrale $\Psi(U, V)$, quelle que soit la fonction Ψ, et l'on aura l'intégrale intermédiaire

$$\Psi(U, V) = 0.$$

La recherche des intégrales intermédiaires se réduit, comme on le voit, à celle des solutions communes à deux équations linéaires du premier ordre.

291. Lorsqu'on a réussi à trouver une intégrale intermédiaire

$$\Psi(U, V) = 0,$$

il ne reste plus, pour obtenir z, qu'à intégrer cette équation,

qui est équivalente à la proposée, mais du premier ordre seulement. Toutefois, la présence dans l'équation d'une fonction arbitraire rendra en général l'intégration plus difficile.

On peut d'ailleurs obtenir plusieurs intégrales intermédiaires, soit que chacun des deux systèmes (25), (26) en donne une, soit que l'un d'entre eux en fournisse plusieurs. En effet, ce système étant formé de deux équations entre cinq variables pourra admettre dans certains cas jusqu'à trois intégrales distinctes U, V, W. Il fournira alors deux intégrales intermédiaires

$$\Psi(U, V) = 0, \qquad X(U, W) = 0.$$

Supposons qu'on ait obtenu deux intégrales intermédiaires, on pourra les mettre sous la forme

$$(27) \qquad U = f(V), \qquad U_1 = \varphi(V_1).$$

Joignons à ces équations la suivante :

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

On pourra tirer p et q des équations (27) pour les substituer dans cette dernière ; on obtiendra ainsi une équation aux différentielles totales entre les seules variables x, y, z. Cette équation satisfait évidemment à la condition d'intégrabilité, et son intégration donnera z.

Il y aura, en général, avantage à faire un changement de variables en prenant V et V_1 pour variables indépendantes à la place de x et de y.

292. Soit, comme application, à intégrer l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

On a ici $H = K = L = M = 0$, $N = 1$, $G = 0$, et les deux systèmes (25) et (26) se réduiront à un seul

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Ce système admet évidemment les trois intégrales

$$V = p, \qquad V = q, \qquad V = z - px - qy.$$

On aura donc les deux intégrales intermédiaires

$$q = f(p),$$
$$z - px - qy = \varphi(p),$$

qu'on doit combiner à

$$dz = p\,dx + q\,dy.$$

La différentiation des deux premières équations donne

$$dq = f'(p)\,dp,$$
$$dz - p\,dx - q\,dy - x\,dp - y\,dq = \varphi'(p)\,dp,$$

et, en substituant les valeurs de dz et dq,

$$[x + f'(p)y + \varphi'(p)]\,dp = 0.$$

En posant $dp = 0$, d'où $p = c$, on aura la solution particulière

$$z - cx - f(c)y = \varphi(c),$$

et, en égalant à zéro l'autre facteur, on aura une autre intégrale, représentée par ces deux équations

$$z - px - f(p)y = \varphi(p),$$
$$x + f'(p)y + \varphi'(p) = 0.$$

IV. — Équations linéaires.

293. Les problèmes de la Physique mathématique conduisent en général à intégrer des équations (ou des systèmes d'équations) aux dérivées partielles, linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées partielles.

S'agit-il, par exemple, de la propagation de la chaleur, on aura, entre le temps t, les coordonnées x, y, z d'un point

quelconque du corps étudié et sa température U, l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

a désignant une constante.

Il faudra joindre à cette équation, pour préciser la question, certaines conditions accessoires qui varieront dans chaque cas.

Si l'on considère un espace illimité, on rendra le problème déterminé en joignant à l'équation (1) une équation de la forme

$$U = f(x, y, z) \qquad \text{pour } t = 0,$$

laquelle donne en chaque point la température initiale.

S'il s'agit d'un corps K de dimensions finies, on pourra se donner la température initiale de chacun de ses points, ce qui donnera la condition

$$(2)\qquad U = f(x, y, z) \qquad \text{pour } t = 0.$$

Mais cette condition n'ayant plus lieu pour un point quelconque x, y, z de l'espace, mais seulement pour les points intérieurs à K, ne suffira plus pour rendre la question déterminée. Il faudra y joindre de nouvelles conditions relatives aux points de la surface S qui limite K. On pourra, par exemple, se donner la température à chaque instant en chacun de ces points, ce qui donnera une équation de condition de la forme

$$(3)\qquad V = \varphi(x, y, z, t),$$

valable pour tous les points de S.

La connaissance de la température à la surface du corps peut d'ailleurs être remplacée par une autre donnée équivalente.

Si, par exemple, on sait que le corps rayonne librement dans un espace à une température constante, l'équation à la

surface (3) sera remplacée par la suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma = hU, \tag{4}$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale à la surface au point x, y, z, et h une constante.

Nous avons ainsi, en général, deux sortes de conditions accessoires : 1° *conditions initiales* qui auront lieu pour $t=0$ dans tout l'intérieur du corps considéré ; 2° *conditions relatives aux limites*, qui seront vérifiées à la limite du corps. Les unes et les autres peuvent être variées d'une infinité de manières, ce qui donnera lieu à autant de problèmes essentiellement distincts.

294. En général, les conditions accessoires, de même que les équations aux dérivées partielles, seront linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées partielles. Il en résulte d'importantes conséquenees.

Soient, en effet, U_1, U_2, ... les fonctions inconnues, t, x, ... les variables indépendantes. Les équations aux dérivées partielles seront de la forme

$$F_1 = f_1, \qquad F_2 = f_2, \qquad \ldots, \tag{5}$$

les conditions accessoires de la forme

$$\Phi_1 = \varphi_1, \qquad \Phi_2 = \varphi_2, \qquad \ldots, \tag{6}$$

$F_1, F_2, \ldots, \Phi_1, \Phi_2, \ldots$ étant des fonctions linéaires et homogènes par rapport à $U_1, U_2, \ldots$ et à leurs dérivées partielles, et $f_1, f_2, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des fonctions des variables indépendantes.

Supposons que nous soyons parvenus à déterminer : 1° une solution particulière U'_1, U'_2, ... du système d'équations aux dérivées partielles

$$F_1 = f_1, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots; \tag{7}$$

2° une solution particulière U''_1, U''_2, ... du système

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = f_2, \qquad \ldots, \tag{8}$$

etc.

Posons

$$\begin{aligned} U_1 &= U'_1 + U''_1 + \ldots + V_1, \\ U_2 &= U'_2 + U''_2 + \ldots + V_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les nouvelles variables V_1, V_2, ... devront évidemment satisfaire aux équations

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots$$

et aux conditions accessoires

$$\Phi_1 = \varphi_1 - \psi_1, \qquad \Phi_2 = \varphi_2 - \psi_2, \qquad \ldots,$$

ψ_1, ψ_2, ... désignant les fonctions des variables indépendantes qu'on obtient en substituant dans Φ_1, Φ_2, ... à la place de U_1, U_2, ... les expressions

$$U_1 = U'_1 + U''_1 + \ldots, \qquad U_2 = U'_2 + U''_2 + \ldots, \qquad \ldots.$$

Soient, d'autre part : 1° V'_1, V'_2, ... le système des fonctions qui satisfont aux relations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots; \quad \Phi_1 = \varphi_1 - \psi_1, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots; \tag{9}$$

2° V''_1, V''_2. ... celui des fonctions qui satisfont aux relations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots; \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = \varphi_2 - \psi_2, \quad \ldots. \tag{10}$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} V_1 &= V'_1 + V''_1 + \ldots + \theta_1, \\ V_2 &= V'_2 + V''_2 + \ldots + \theta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

les nouvelles variables θ_1, θ_2, ... satisferont aux relations

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots; \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \quad \ldots.$$

Ces équations, étant linéaires et homogènes par rapport

aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, admettront la solution $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, ... et n'en admettront pas d'autre, puisque le problème est entièrement déterminé. On aura donc finalement

$$U_1 = U'_1 + U''_1 + \ldots + V'_1 + V''_1 + \ldots,$$
$$U_2 = U'_2 + U''_2 + \ldots + V'_2 + V''_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'on voit que la résolution du problème primitif s'obtiendra en déterminant : 1° une solution particulière de chacun des systèmes (7), (8), ... ; 2° la solution de chacun des systèmes (9), (10), ...

La question se trouve ainsi ramenée à d'autres problèmes plus simples où tous les seconds membres sont nuls, à l'exception d'un seul.

Dans la plupart des applications, les équations aux dérivées partielles (5) n'ont pas de seconds membres ; on pourra donc poser plus simplement

$$U_1 = V'_1 + V''_1 + \ldots, \qquad U_2 = V'_2 + V''_2 + \ldots, \qquad \ldots,$$

$V'_1, V'_2, \ldots;\ V''_1, V''_2, \ldots;\ \ldots$ étant les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{array}{llllll} F_1 = 0, & F_2 = 0, & \ldots; & \Phi_1 = \varphi_1, & \Phi_2 = 0, & \ldots, \\ F_1 = 0, & F_2 = 0, & \ldots; & \Phi_1 = 0, & \Phi_2 = \varphi_2, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots; & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots \end{array}$$

295. La décomposition précédente du problème proposé en problèmes plus simples est souvent utile ; mais il n'est pas toujours nécessaire d'y avoir recours. Nous admettrons donc, pour plus de généralité dans les explications qui vont suivre, qu'elle n'ait pas été faite complètement, de telle sorte que l'on ait à intégrer un système formé d'un certain nombre d'équations aux dérivées partielles linéaires et sans seconds membres

$$(11) \qquad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots,$$

jointes à des conditions accessoires dont les unes

$$(12) \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \ldots$$

n'auront pas de seconds membres, tandis que les autres

$$(13) \qquad \Psi_1 = \psi_1, \qquad \Psi_2 = \psi_2, \qquad \ldots$$

en auront.

La marche généralement suivie pour résoudre les questions de cette nature est la suivante :

On néglige provisoirement les conditions (13) ; les équations conservées (11), (12) ne suffisant plus pour la détermination complète des fonctions inconnues admettront une infinité de solutions.

On tâchera d'en déterminer des solutions particulières. Dans tous les problèmes qu'on sait résoudre, on obtiendra sans trop de peine une infinité de *solutions simples* de la forme

$$(14) \qquad \begin{cases} V_1 = f_1(t, x, \ldots, \alpha, \beta, \ldots), \\ V_2 = f_2(t, x, \ldots, \alpha, \beta, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \ldots$ étant des paramètres variables d'une solution à l'autre.

Deux cas seront ici à distinguer, suivant que les valeurs précédentes constituent une solution, quelles que soient les constantes $\alpha, \beta, \ldots$, ou seulement pour celles de ces valeurs qui satisfont à certaines relations (par exemple, pour les valeurs entières de ces constantes, ou pour celles qui sont les racines en nombre infini de certaines équations transcendantes qu'on formera dans chaque cas).

296. Dans le premier cas, les intégrales définies

$$(15) \qquad \mathbf{S}\,\varphi(\alpha, \beta, \ldots) f_1 \, d\alpha \, d\beta \ldots, \qquad \mathbf{S}\,\varphi(\alpha, \beta, \ldots) f_2 \, d\alpha \, d\beta \ldots, \qquad \ldots$$

donneront une nouvelle solution, quels que soient le champ de l'intégration et la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \ldots)$. En effet, il est

clair que le résultat de la substitution de ces intégrales, dans l'une quelconque des équations (11) ou (12), sera

$$(16) \qquad \mathrm{S}\,\varphi(\alpha, \beta, \ldots)\,\mathrm{M}\,d\alpha\,d\beta\ldots,$$

M désignant le résultat de la substitution de $f_1, f_2, \ldots$. Mais M est nul, par hypothèse : donc l'intégrale (16), ayant tous ses éléments nuls, sera nulle elle-même.

Cela posé, nous tâcherons de déterminer le champ de l'intégration et la fonction arbitraire φ, de telle sorte que la solution (15) satisfasse aux conditions (13). Si nous y parvenons, nous aurons satisfait à toutes les exigences du problème.

297. Dans le deuxième cas, on substituera successivement dans la formule (14), pour les paramètres $\alpha, \beta, \ldots$, les divers systèmes de valeurs dont ils sont susceptibles ; on obtiendra ainsi une suite illimitée de solutions

$$V'_1, \quad V'_2, \quad \ldots; \quad V''_1, \quad V''_2, \quad \ldots; \quad \ldots.$$

Nous obtiendrons une nouvelle solution plus générale en posant

$$(17) \quad V_1 = c'V'_1 + c''V''_1 + \ldots, \qquad V_2 = c'V'_2 + c''V''_2 + \ldots, \qquad \ldots,$$

$c', c'', \ldots$ désignant des constantes arbitraires.

Il est clair, en effet, que le résultat de la substitution de ces valeurs dans l'une quelconque des équations (11) et (12) sera de la forme $c'\mathrm{M}' + c''\mathrm{M}'' + \ldots$, $\mathrm{M}', \mathrm{M}'', \ldots$ désignant les résultats respectivement obtenus par la substitution des diverses solutions simples. Or $\mathrm{M}', \mathrm{M}'', \ldots$ sont nuls, par hypothèse ; donc $c'\mathrm{M}' + c''\mathrm{M}'' + \ldots$ le sera, et les séries (17) donneront une solution.

Il restera à déterminer les coefficients arbitraires $c', c'', \ldots$, de telle sorte que ces séries soient convergentes et satisfassent aux conditions (13). Le problème sera dès lors résolu.

Nous allons éclaircir cette méthode par quelques exemples.

298. *Propagation de la chaleur dans un milieu indéfini.* — On a à intégrer l'équation

$$(18)\qquad \frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$$

jointe à la condition initiale

$$U = f(x, y, z) \qquad \text{pour } t = 0.$$

L'équation (18) admet évidemment comme intégrale particulière l'expression

$$U' = \cos u(x-\lambda)\cos v(y-\mu)\cos w(z-\nu)\,e^{-(u^2+v^2+w^2)a^2 t},$$

$u, v, w, \lambda, \mu, \nu$ étant des constantes arbitraires. Elle admettra donc comme solution l'intégrale

$$U'' = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty U'\,du\,dv\,dw,$$

laquelle est le produit des trois intégrales simples

$$\int_0^\infty e^{-a^2u^2t}\cos u(x-\lambda)\,du,$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2v^2t}\cos v(y-\mu)\,dv,$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2w^2t}\cos w(z-\nu)\,dw.$$

Ces intégrales sont aisées à calculer. Nous avons trouvé, en effet (t. II, n° 200), la formule

$$\int_0^\infty e^{-ay^2}\cos 2by\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,a^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Changeant dans cette formule y en u, a en $a^2 t$, b en $\frac{x-\lambda}{2}$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-a^2u^2t}\cos u(x-\lambda)\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}}{a\sqrt{t}}.$$

Calculant de même les deux autres intégrales, il viendra

$$U'' = \pi^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{(y-\mu)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{(z-\nu)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{t}}.$$

L'intégrale

$$U = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, \mu, \nu) U'' \, d\lambda \, d\mu \, d\nu$$

sera encore une solution.

Cette expression peut se transformer en posant

$$\frac{\lambda - x}{2a\sqrt{t}} = \alpha, \qquad \frac{\mu - y}{2a\sqrt{t}} = \beta, \qquad \frac{\nu - z}{2a\sqrt{t}} = \gamma.$$

Il viendra

$$U = \pi^{-\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} f(x + 2a\sqrt{t}\alpha, \, y + 2a\sqrt{t}\beta, \, z + 2a\sqrt{t}\gamma)$$
$$\times e^{-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Cette valeur de U se réduit pour $t = 0$ au produit de $f(x, y, z)$ par les trois intégrales simples

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} \, d\alpha, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} \, d\beta, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma^2} \, d\gamma.$$

Mais on a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} \, d\alpha = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2} \, d\alpha = 1$$

t. II, n° 198); et de même pour les deux autres intégrales.

L'expression U satisfera donc à la condition initiale

$$U = f(x, y, z) \qquad \text{pour} \qquad t = 0$$

et sera la solution du problème.

299. *Propagation du son dans un espace indéfini.* — Les composantes à l'époque t de la vitesse de la molécule

d'air située originairement en (x, y, z) seront $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$, U étant une fonction de x, y, z, t satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \lambda^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

où λ^2 est une constante.

Proposons-nous d'intégrer cette équation, étant données les conditions initiales

$$U = F(x, y, z), \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = f(x, y, z) \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Posons $\lambda t = r$, r étant une nouvelle variable, et écrivons a, b, c au lieu de x, y, z. L'équation aux dérivées partielles deviendra

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial c^2}, \tag{19}$$

et les conditions initiales seront

$$U = F(a, b, c), \qquad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{\lambda} f(a, b, c) \qquad \text{pour} \qquad r = 0.$$

Nous résoudrons le problème en nous appuyant sur les propriétés du *potentiel sphérique*. M. *Boussinesq* a donné ce nom à l'intégrale double

$$U = \int_\Omega \frac{\mu(x, y, z)\, d\sigma}{r}$$

prise sur la surface Ω d'une sphère de rayon r et de centre (a, b, c), $\mu(x, y, z)$ représentant la densité.

U est une fonction des quatre variables r, a, b, c; nous allons voir qu'elle satisfait à l'équation (19). Formons, en effet, ses dérivées.

Si nous changeons a en $a + h$, le champ d'intégration sera la surface d'une nouvelle sphère, de rayon r, mais de centre $(a + h, b, c)$. Les éléments $d\sigma$ de celle-ci seront égaux aux éléments correspondants de la sphère primitive;

mais leurs densités seront

$$\mu(x+h, y, z) = \mu(x, y, z) + h\frac{\partial\mu}{\partial x} + \cdots.$$

L'accroissement de U sera donc

$$\mathbf{S}_\Omega \frac{h\dfrac{\partial\mu}{\partial x} + \ldots}{r}\, d\sigma,$$

d'où

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial a} = \frac{1}{r}\mathbf{S}_\Omega \frac{\partial\mu}{\partial x}\, d\sigma.$$

On trouvera de même

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial a^2} = \frac{1}{r}\mathbf{S}_\Omega \frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}\, d\sigma$$

et d'une manière analogue

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial b^2} = \frac{1}{r}\mathbf{S}_\Omega \frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}\, d\sigma, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial c^2} = \frac{1}{r}\mathbf{S}_\Omega \frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\, d\sigma.$$

On peut d'ailleurs écrire

$$\mathrm{U} = r\mathbf{S}_\Omega \mu(x, y, z)\frac{d\sigma}{r^2}.$$

Si l'on change r en $r + dr$, $\frac{d\sigma}{r^2}$ ne changera pas (son expression en coordonnées polaires étant $\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$); x, y, z sont respectivement accrus de

$$dr\cos\alpha, \qquad dr\cos\beta, \qquad dr\cos\gamma,$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ étant les cosinus directeurs de la normale extérieure à la sphère. On aura par suite

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} = \mathbf{S}_\Omega \frac{\mu\, d\sigma}{r^2} + \frac{\mathrm{I}}{r} = \frac{\mathrm{U} + \mathrm{I}}{r},$$

I désignant l'intégrale

$$\mathbf{S}_\Omega \left[\frac{\partial\mu}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mu}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mu}{\partial z}\cos\gamma\right] d\sigma,$$

qui, d'après le théorème d'Ostrogradski (t. II, n° **171**), est égale à l'intégrale triple

$$\mathbf{S}\left[\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\right]dv$$

prise dans l'intérieur de la sphère.

Nous aurons ensuite

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=-\frac{U+I}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial I}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial I}{\partial r}.$$

D'ailleurs, si l'on change r en $r+dr$, le champ de l'intégrale triple se trouvera accru d'une couronne sphérique d'épaisseur dr et où l'élément de volume est $d\sigma\,dr$. On aura donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial I}{\partial r}&=\frac{1}{r}\mathbf{S}_\Omega\left[\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mu}{\partial z^2}\right]d\sigma\\&=\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial c^2}.\end{aligned}$$

En dérivant cette équation par rapport à r, on voit que $\frac{\partial U}{\partial r}$ y satisfait également,

Supposons d'ailleurs que le rayon r tende vers zéro; $\mu(x,y,z)$ tendra vers la valeur constante $\mu(a,b,c)$; I sera un infiniment petit du second ordre; U et $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$ seront du premier ordre; enfin $\frac{\partial U}{\partial r}$ tendra vers la limite

$$\mu(a,b,c)\,\mathbf{S}_\Omega\frac{d\sigma}{r^2}=\mu(a,b,c)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=4\pi\,\mu(a,b,c).$$

Si donc nous désignons par U_1 et U_2 les potentiels sphériques correspondant respectivement à $\mu=f(x,y,z)$ et

à $\mu = F(x, y, z)$, l'expression

$$U = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\lambda}U_1 + \frac{\partial U_2}{\partial r}\right]$$

sera une solution de l'équation aux dérivées partielles telle que l'on ait pour $r = 0$

$$U = F(a, b, c), \qquad \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{\lambda} f(a, b, c).$$

300. Nous avons donc satisfait à toutes les conditions du problème. Discutons cette solution.

Les deux termes de U sont des intégrales prises sur une sphère de centre (a, b, c) et de rayon $r = \lambda t$. Le mouvement du point (a, b, c) à l'époque t dépend donc exclusivement de celui que possédaient à l'origine du temps les points situés sur cette sphère. Si donc, à l'instant initial, le mouvement était restreint à une région finie R de l'espace limitée par une surface Ω, un point situé hors de cette région ne pourra se mettre en mouvement que lorsque la sphère correspondant à l'époque t, d'abord extérieure à R, deviendra tangente à Ω; et ce mouvement cessera lorsque le contact deviendra intérieur.

Le *front de l'onde*, lieu des points qui s'ébranlent à l'époque t, sera une surface parallèle à R, obtenue en portant la longueur λt sur toutes les normales à Ω du côté extérieur.

Le *front arrière*, lieu des points qui rentrent au repos à l'époque t, s'obtiendra de même en portant la longueur λt sur les normales intérieures.

La constante λ représente la *vitesse de propagation* de l'onde.

301. *Problème de Riemann.* — Considérons l'expression différentielle

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + A\frac{\partial z}{\partial x} + B\frac{\partial z}{\partial y} + Cz,$$

où A, B, C sont des fonctions de x, y. Multiplions-la par une fonction arbitraire $u(x, y)$ et intégrons par parties. Il viendra

$$u\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial z}{\partial y}\right] - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial z}{\partial y}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[z\frac{\partial u}{\partial x}\right] + z\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},$$

$$\mathrm{A}u\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{A}uz - z\frac{\partial \mathrm{A}u}{\partial x},$$

$$\mathrm{B}u\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{B}uz - z\frac{\partial \mathrm{B}u}{\partial y}.$$

Si donc nous posons

$$\mathrm{P} = z\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{B}u\right], \qquad \mathrm{Q} = u\left[\frac{\partial z}{\partial y} + \mathrm{A}z\right],$$

$$\mathrm{G}(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A}u}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{B}u}{\partial y} + \mathrm{C}u,$$

nous aurons l'identité

$$u\,\mathrm{F}(z) - z\,\mathrm{G}(u) = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}.$$

Nous dirons que l'opération G est l'*adjointe* de l'opération F. Cette relation est évidemment réciproque.

Si z, u satisfont respectivement aux équations aux dérivées partielles

$$\mathrm{F}(z) = 0, \qquad \mathrm{G}(u) = 0,$$

adjointes l'une de l'autre, l'identité précédente se réduira à

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 0,$$

et, par suite, l'intégrale curviligne

$$\int \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$$

prise le long d'un contour fermé quelconque sera nulle (t. II, n° 165).

Ces préliminaires posés, cherchons à déterminer une intégrale de l'équation

$$F(z) = 0,$$

telle que, sur une courbe donnée C, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ soient des fonctions données de x. Le rapport $\frac{dy}{dx}$ étant déterminé en chaque point de C par l'équation de cette courbe, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y sera également connu, en vertu de la relation

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Il s'agit de déterminer la valeur de z en un point quel-

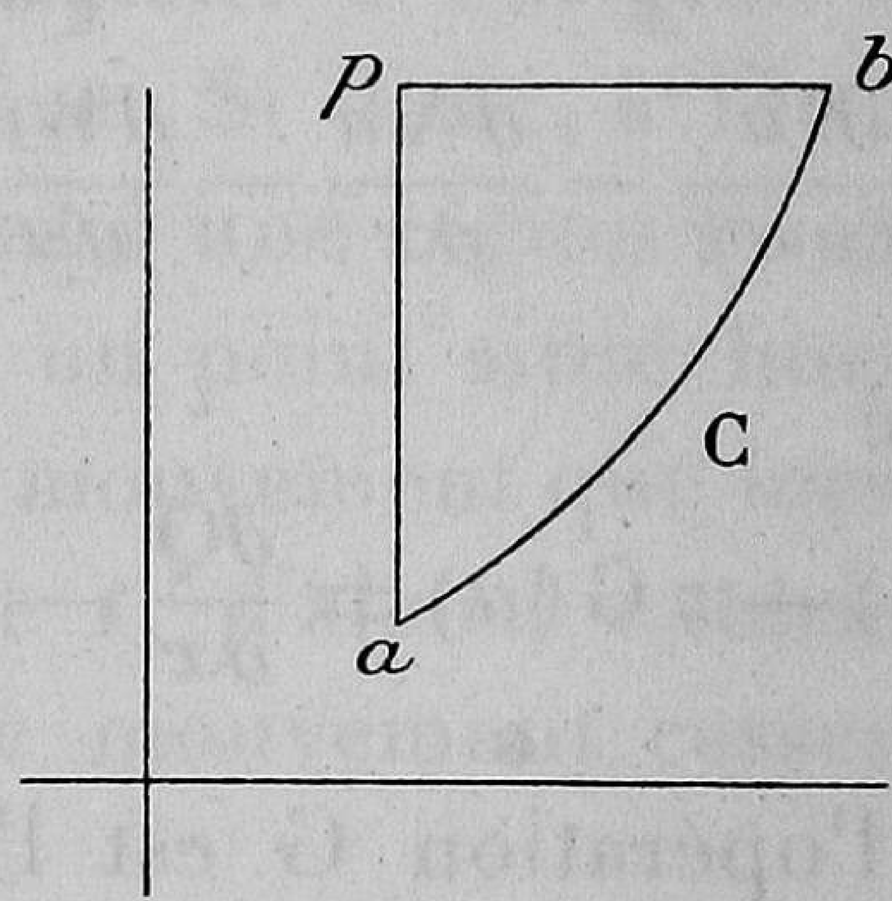


Fig. 7.

conque $p = (x_0, y_0)$ du plan des (x, y). A cet effet, menons par le point p des parallèles aux axes jusqu'à leur rencontre aux points a et b avec la ligne C; désignons par u une solution provisoirement quelconque de l'équation adjointe

$$G(u) = 0.$$

L'intégrale $\int P\,dx + Q\,dy$ prise sur le contour du triangle curviligne a, b, p sera nulle.

Le long de bp, dy étant nul, l'intégrale correspondante se réduira à

$$\int_{bp} P\,dx = \int_{bp} z\left(\frac{\partial u}{\partial x} - Bu\right) dx.$$

Le long de pa, dx est nul et l'on a pour intégrale

$$\int_{pa} Q\,dy = \int_{pa} u\left(\frac{\partial z}{\partial y} + A z\right) dy = [uz]_p^a + \int_{pa} z\left[-\frac{\partial u}{\partial y} + A\right] dy.$$

Le problème sera résolu si nous parvenons à déterminer une fonction u des quatre variables x, y, x_0, y_0 qui satisfasse identiquement à l'équation

$$G(u) = 0$$

et aux conditions suivantes

$$\frac{\partial u}{\partial x} - Bu = 0 \qquad \text{pour} \qquad y = y_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - Au = 0 \qquad \text{pour} \qquad x = x_0.$$

En effet, pour cette détermination de u, l'équation

$$\int_{abp} P\,dx + Q\,dy = 0$$

se réduit à

$$(20) \qquad [uz]_p = [uz]_a + \int_{ab} P\,dx + Q\,dy$$

et donne la valeur de la fonction z au point p; car u est supposé connu dans tout le plan et z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont donnés sur ab.

302. *Exemple.* — Supposons $A = B = 0$ et $C = 1$, d'où

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + z, \qquad G(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + u,$$

$$P = z\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Q = u\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Essayons de prendre pour u une fonction $\varphi(\lambda)$ du produit

$$\lambda = (x - x_0)(y - y_0).$$

On aura évidemment

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{pour} \quad y = y_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

Mais il reste à satisfaire à l'équation $G(u) = 0$. Or on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (y - y_0)\varphi',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \varphi' + (x - x_0)(y - y_0)\varphi'' = \varphi' + \lambda\varphi''.$$

Donc, u devra satisfaire à l'équation

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial u}{\partial \lambda} + u = 0.$$

On trouve aisément, par la méthode des coefficients indéterminés, la solution

$$u = 1 - \frac{\lambda}{1^2} + \frac{\lambda^2}{(1.2)^2} + \ldots + \frac{(-1)^n \lambda^n}{(n!)^2} + \ldots = \varphi(\lambda).$$

D'ailleurs, aux points p et a on a $\lambda = 0$, $u = 1$, de sorte que l'équation (20) se réduira à

$$z_p = z_a + \int_a^b z \frac{\partial u}{\partial x} dx + u \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{21}$$

303. *Équation des télégraphistes.* — Considérons un fil indéfini le long duquel se propage une perturbation électrique. Désignons par $V(x, t)$ le potentiel électrique à l'époque t au point d'abscisse ξ. On aura, si les unités sont convenablement choisies,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = 0.$$

L'état initial sera défini par les relations

$$V = f(\xi), \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = F(\xi) \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

On demande de déterminer la fonction V d'après ces conditions.

Changeons d'inconnue en posant

$$V = e^{-t} z.$$

L'équation aux dérivées partielles devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - z = 0.$$

Les conditions initiales deviennent

$$z = f(\xi), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = g(\xi) \qquad \text{pour} \qquad t = 0$$

en posant, pour abréger,

$$F(\xi) + f(\xi) = g(\xi).$$

Changeons de variables indépendantes en posant

$$\xi = x + y, \qquad t = -x + y,$$

d'où

$$x = \frac{\xi - t}{2}, \qquad y = \frac{\xi + t}{2}.$$

Nous obtiendrons la transformée

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + z = 0$$

et, pour $t = 0$, nous aurons $y = x$. C'est donc sur la bissectrice des axes que z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ devront avoir les valeurs données $f(\xi)$, $g(\xi)$.

Pour déterminer la fonction z nous n'aurons qu'à appliquer la formule du numéro précédent, mais en la transformant par le retour aux variables primitives ξ, t.

304. On a en général

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial t},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial t}$$

et, sur la ligne d'intégration ab,

$$\xi=x+y=2x,\qquad \text{d'où}\qquad dx=dy=\frac{1}{2}d\xi.$$

Substituant ces valeurs dans la formule (21), il vient

$$(22)\qquad z_p=z_a+\frac{1}{2}\int_a^b\left[z\frac{\partial u}{\partial \xi}+u\frac{\partial z}{\partial \xi}+u\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial u}{\partial t}\right]d\xi.$$

Or, on a en général

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial t}dt=dz,\qquad \frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial u}{\partial t}dt=du$$

et, en particulier sur la ligne ab, où dt est nul,

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi=dz,\qquad \frac{\partial u}{\partial \xi}d\xi=du.$$

Par suite,

$$\frac{1}{2}\int_{ab}\left(z\frac{\partial u}{\partial \xi}+u\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)d\xi=\frac{1}{2}\int_a^b d(uz)=\frac{1}{2}z_b-\frac{1}{2}z_a,$$

car x étant égal à x_0 au point a, et $y=y_0$ au point b, on a en chacun de ces points $\lambda=0$, $u=1$.

Substituons cette valeur dans l'équation (22); elle devient

$$z_p=\frac{1}{2}(z_a+z_b)+\frac{1}{2}\int_a^b\left[u\frac{\partial z}{\partial t}-z\frac{\partial u}{\partial t}\right]d\xi.$$

Cela posé, on a au point p

$$x=x_0,\qquad y=y_0,$$

et les valeurs correspondantes de ξ, t seront

$$\xi_0=x_0+y_0,\qquad t_0=-x_0+y_0.$$

Au point a, on a

$$x = y = x_0, \qquad \xi = 2x_0 = \xi_0 - t_0;$$

au point b,

$$x = y = y_0, \qquad \xi = 2y_0 = \xi_0 + t_0.$$

Le long de la ligne ab, on a

$$z = f(\xi), \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = g(\xi)$$

et, en particulier,

$$z_a = f(\xi_0 - t_0), \qquad z_b = f(\xi_0 + t_0).$$

Reste à exprimer u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de ξ, t.

On a

$$\lambda = (x - x_0)(y - y_0) = \frac{\xi - t - \xi_0 + t_0}{2} \frac{\xi + t - \xi_0 - t_0}{2}$$

$$= \frac{(\xi - \xi_0)^2 - (t - t_0)^2}{4},$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{t - t_0}{2}.$$

Sur la ligne ab, où t est nul, ces expressions se simplifient; on aura

$$\lambda = \frac{(\xi - \xi_0)^2 - t_0^2}{4}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{2} t_0$$

et

$$u = \varphi(\lambda). \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} t_0 \varphi'(\lambda).$$

Il ne restera plus qu'à substituer les valeurs ci-dessus pour obtenir la formule finale.

Nous y désignerons par α et non plus par ξ la variable d'intégration, afin de pouvoir sans crainte de confusion supprimer les indices des variables ξ_3, t_0. Le résultat définitif sera le suivant :

Posant pour abréger

$$F(\xi)+f(\xi)=g(\xi),$$

$$\lambda=\frac{(\alpha-\xi)^2-t^2}{4},$$

$$\varphi(\lambda)=1-\lambda+\ldots+\frac{(-1)^n\lambda^n}{(n!)^2}+\ldots.$$

V sera donné par la formule suivante :

$$(23)\quad e^t V(\xi,t)=z(\xi,t)=\frac{f(\xi-t)+f(\xi+t)}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\xi-t}^{\xi+t}\left[g(\alpha)\varphi(\lambda)-\frac{t}{2}f(\alpha)\varphi'(\lambda)\right]d\alpha.$$

305. Supposons que la perturbation initiale fût restreinte à une portion limitée du fil, comprise entre les abscisses o et a. Les fonctions f, g seront nulles pour toutes les valeurs de leurs arguments qui ne sont pas comprises dans cet intervalle.

Considérons un point dont l'abscisse ξ soit $>a$. Tant que t sera $<\xi-a$, V sera nul, car $\xi-t$, $\xi+t$, α sont $>a$. Si t est $>\xi-a$, mais $<\xi$, $\xi-t$ sera compris entre o et a; $\xi+t$ sera $>a$; donc $f(\xi+t)$ est nul. Il en sera de même pour $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ lorsque α varie de a à $\xi+t$. La formule précédente se réduit donc à

$$e^t V(\xi,t)=\frac{1}{2}f(\xi-t)+\frac{1}{2}\int_{\xi-t}^{a}\left[g(\alpha)\varphi(\lambda)-\frac{t}{2}f(\alpha)\varphi'(\lambda)\right]d\alpha.$$

Enfin, si $t>\xi>a$, $\xi-t$ sera négatif, $\xi+t>a$; donc $f(\xi-t)$, $f(\xi+t)$ sont nuls. Il en est de même pour $f(\alpha)$, $g(\alpha)$ dans toute la partie du champ d'intégration qui n'est pas comprise entre o et a. La formule devient donc

$$(24)\quad e^t V(\xi,t)=\frac{1}{2}\int_0^a\left[g(\alpha)\varphi(\lambda)-\frac{t}{2}f(\alpha)\varphi'(\lambda)\right]d\alpha.$$

On peut donc dire qu'il passe dans le fil une onde d'am-

plitude a, dont le front se déplace avec une vitesse égale à l'unité. Mais il n'y a pas de front arrière, l'onde laissant après son passage un résidu représenté par la formule (24).

Remarquons d'ailleurs que, par suite de la présence du facteur e^t, V tend rapidement vers zéro lorsque t augmente.

306. *Problème de Cauchy.* — Considérons plus généralement un système de fonctions inconnues U, V, ... des variables t, x, y, z, déterminées par un système d'équations

$$(25)\qquad R = \varpi(t, x, y, z), \qquad R_1 = \varpi_1(t, x, y, z), \quad \ldots$$

ayant pour premiers membres des fonctions linéaires à coefficients constants de U, V, ..., et de leurs dérivées partielles, et par les conditions initiales

$$\left.\begin{array}{lll} U = f(x, y, z), & \dfrac{\partial U}{\partial t} = f_1(x, y, z), & \ldots \\ V = \varphi(x, y, z), & \dfrac{\partial V}{\partial t} = \varphi_1(x, y, z), & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots \end{array}\right\} \text{pour } t = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$u(x - \lambda) + v(y - \mu) + w(z - \nu) = p,$$

u, v, w, λ, μ, ν étant des constantes, et

$$du\, dv\, dw\, d\lambda\, d\mu\, d\nu = d\sigma.$$

Nous allons prouver que la solution du problème est donnée par les formules

$$(26)\qquad \left\{\begin{array}{l} U = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\mathbf{S}\, e^{ip}\, T\, d\sigma, \\ V = \dfrac{1}{(2\pi)^3} \displaystyle\mathbf{S}\, e^{ip}\, \Theta\, d\sigma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où le champ d'intégration par rapport à chacun des couples

de variables u, λ; v, μ; w, ν est un rectangle infini ayant pour centre l'origine des coordonnées; T, Θ, ... désignant d'autre part des fonctions de t définies : 1° par les équations différentielles

$$(27)\quad \mathfrak{R} = \varpi(t, \lambda, \mu, \nu), \qquad \mathfrak{R}_1 = \varpi_1(t, \lambda, \mu, \nu), \quad \ldots,$$

où $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \ldots$ se déduisent de $R, R_1, \ldots$ en y substituant aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}U}{\partial t^\alpha \partial x^\beta \partial y^\gamma \partial z^\delta}, \qquad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}V}{\partial t^\alpha \partial x^\beta \partial y^\gamma \partial z^\delta}, \qquad \ldots$$

les expressions

$$\frac{d^\alpha T}{dt^\alpha}(iu)^\beta(iv)^\gamma(iw)^\delta, \qquad \frac{d^\alpha \Theta}{dt^\alpha}(iu)^\beta(iv)^\gamma(iw)^\delta, \qquad \ldots;$$

2° par les conditions initiales

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{ll} T = f(\lambda, \mu, \nu), & \dfrac{dT}{dt} = f_1(\lambda, \mu, \nu), \quad \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta = \varphi(\lambda, \mu, \nu), & \dfrac{d\Theta}{dt} = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad \ldots \end{array}\right\} \text{ pour } t = 0.$$

Substituons, en effet, pour U, V, ..., les valeurs (26) dans l'une des équations (25), la première, par exemple; comme on a évidemment

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle S e^{ip}\frac{dT}{dt}\,d\sigma, & \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle S e^{ip}\frac{d\Theta}{dt}\,d\sigma, & \ldots, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle S iue^{ip}T\,d\sigma, & \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\displaystyle S iue^{ip}\Theta\,d\sigma, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{array}$$

le résultat de la substitution dans R sera

$$\frac{1}{(2\pi)^3} S e^{ip}\mathfrak{R}\,d\sigma$$

ou, en vertu des équations (27),

$$(29) \qquad \frac{1}{(2\pi)^3} \mathrm{S}\, e^{ip}\varpi(l, \lambda, \mu, \nu)\, d\sigma.$$

Or on a

$$\begin{aligned} e^{ip} &= e^{iu(x-\lambda)} e^{iv(y-\mu)} e^{iw(z-\nu)} \\ &= [\cos u(x-\lambda) + i\sin u(x-\lambda)] \\ &\quad \times [\cos v(y-\mu) + i\sin v(y-\mu)] \\ &\quad \times [\cos w(z-\nu) + i\sin w(z-\nu)]. \end{aligned}$$

Effectuant les produits, on obtiendra huit termes qui tous, à l'exception d'un seul, contiendront un sinus en facteur.

Considérons un de ces termes, contenant par exemple le facteur $\sin u(x-\lambda)$. Les éléments qu'il fournit à l'intégrale pour deux valeurs égales et opposées de u se détruiront.

Au contraire, les éléments fournis par le terme

$$\cos u(x-\lambda) \cos v(y-\mu) \cos w(z-\nu)$$

pour des valeurs égales et contraires assignées à l'une des quantités u, v, w seront égaux. L'intégrale (29) se réduira donc à

$$\frac{1}{\pi^3} \mathrm{S} \cos u(x-\lambda) \cos v(y-\mu) \cos w(z-\nu)\, \varpi(t, \lambda, \mu, \nu)\, d\sigma,$$

u, v, w ne variant plus que de 0 à ∞.

La double intégration par rapport à u, λ donnera comme résultat, d'après le théorème de Fourier,

$$\frac{1}{\pi^2} \mathrm{S} \cos v(y-\mu) \cos w(z-\nu) \varpi(t, x, \mu, \nu)\, dv\, dw\, d\mu\, d\nu.$$

Intégrant par rapport à v et μ, on aura de même, comme résultat,

$$\frac{1}{\pi} \mathrm{S} \cos w(z-\nu) \varpi(t, x, y, \nu)\, dw\, d\nu$$

et enfin, en intégrant par rapport à ϖ et ν,

$$\varpi(t, x, y, z),$$

ce qui est précisément le second membre de l'équation aux dérivées partielles.

Les conditions initiales sont également satisfaites, car on a, pour $t = 0$, en vertu des équations (28),

$$U = \frac{1}{(2\pi)^3} \mathrm{S}\, e^{ip} f(\lambda, \mu, \nu)\, d\sigma,$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{(2\pi)^3} \mathrm{S}\, e^{ip} f_1(\lambda, \mu, \nu)\, d\sigma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et il suffira de changer ϖ en f, f_1, ... dans les raisonnements précédents pour montrer que ces expressions sont respectivement égales à $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$, ...

307. *Propagation de la chaleur dans une barre indéfinie dans un sens.* — Nous aurons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

avec la condition initiale

$$U = f(x) \quad \text{pour } t = 0,\ x > 0$$

et la condition à la limite

$$U = \varphi(t) \quad \text{pour } x = 0,$$

laquelle donne, en fonction du temps, la température à l'origine de la barre.

On pourra poser

$$U = U' + U'',$$

U' devant satisfaire aux conditions

$$U' = f(x) \quad \text{pour } t = 0,\ x > 0;$$
$$U' = 0 \quad \text{pour } x = 0,$$

et U'' devant satisfaire aux conditions

$$U''=0 \qquad \text{pour } t=0,\ x>0;$$
$$U''=\varphi(t) \qquad \text{pour } x=0.$$

Calculons d'abord U'.

On satisfait à la condition $U'=0$ pour $x=0$, ainsi qu'à l'équation aux dérivées partielles, par la solution simple

$$\sin ux e^{-a^2u^2t}$$

et par la solution plus générale

$$\int_0^\infty \sin ux e^{-a^2u^2t} F(u)\,du,$$

laquelle, pour $t=0$, se réduit à

$$\int_0^\infty \sin ux F(u)\,dw.$$

Il restera donc à déterminer $F(u)$, de telle sorte qu'on ait

$$\int_0^\infty \sin ux F(u)\,du = f(x) \qquad \text{pour } x>0.$$

On y arrivera en posant

$$F(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin u\lambda f(\lambda)\,d\lambda.$$

On a, en effet,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin ux \sin u\lambda f(\lambda)\,d\lambda$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty [\cos u(x-\lambda)-\cos u(x+\lambda)]f(\lambda)\,d\lambda,$$

et, en désignant par $\psi(\lambda)$ une fonction égale à $f(\lambda)$ pour $\lambda>0$, à zéro pour $\lambda<0$, cette intégrale aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}[\psi(x+0)+\psi(x-0)-\psi(-x+0)-\psi(-x-0)],$$

quantité qui, pour $x > 0$, se réduira à $f(x)$ [en supposant $f(x)$ continue].

La solution du problème sera donc l'intégrale double

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-a^2u^2t}[\cos u(x-\lambda)-\cos u(x+\lambda)]f(\lambda)\,du\,d\lambda$$

ou, en effectuant l'intégration par rapport à u, comme au nº 298,

$$(30)\qquad \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0 f(\lambda)\,d\lambda\left[e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2t}}\right].$$

308. Passons au calcul de U″. Ce problème se ramène au précédent, comme nous allons le voir.

Nous traiterons d'abord le cas particulier où $\varphi(t)$ se réduit à la constante 1. On aura, dans ce cas,

$$U'' = 1 + W,$$

W étant une nouvelle solution qui satisfasse aux relations

$$W = -1 \quad \text{pour } t = 0,\ x > 0;$$
$$W = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

Cette dernière fonction s'obtiendra en posant $f(\lambda) = -1$ dans la formule (30). On aura donc

$$U'' = 1 - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\int_0^\infty e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda - \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2t}}d\lambda\right].$$

Cette expression peut se simplifier. Changeons, en effet, de variables en posant, dans la première des intégrales ci-dessus,

$$\frac{x-\lambda}{2a\sqrt{t}} = -\beta$$

et, dans la seconde,

$$\frac{x+\lambda}{2a\sqrt{t}} = \beta.$$

Elles deviendront respectivement

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta,\quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta$$

et auront pour somme

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2}\,d\beta = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2}\,d\beta;$$

mais on a d'ailleurs

$$1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta.$$

On aura donc finalement

$$U'' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2}\,d\beta,$$

expression que nous désignerons par $\chi(x, t)$.

309. Passons au cas général où $\varphi(t)$ ne se réduit pas à une constante. Nous allons démontrer qu'on a

$$U'' = \varphi(0)\chi(x, t) + \int_0^t \chi(x, t-\lambda)\varphi'(\lambda)\,d\lambda. \tag{31}$$

En effet, $\chi(x, t)$ étant une solution de l'équation aux dérivées partielles et celle-ci ne changeant pas si l'on y change t en $t-\lambda$, $\chi(x, t-\lambda)$ sera encore une solution.

L'intégrale $\int \chi(x, t-\lambda)\,\varphi'(\lambda)\,d\lambda$, prise entre des limites constantes, sera une solution, et il en sera encore de même si la limite supérieure, au lieu d'être constante, est égale à t; car cette supposition ne fait qu'ajouter à la dérivée partielle de l'intégrale par rapport à t le terme $\chi(x, 0)\,\varphi'(t)$, lequel est nul dans toute l'étendue de la barre, d'après les conditions qui ont servi à déterminer la solution $\chi(x, t)$.

Donc les deux termes de U'' sont des solutions de l'équation aux dérivées partielles. Tous deux s'annulent d'ailleurs pour $t = 0$ dans toute l'étendue de la barre. On aura donc

$$U'' = 0 \quad \text{pour } t = 0,\ x > 0.$$

Enfin, pour $x = 0$, on a

$$\chi(x, t) = \chi(x, t-\lambda) = 1$$

et

$$U'' = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(\lambda)\, d\lambda = \varphi(t).$$

Donc U'' satisfait bien à toutes les conditions du problème.

310. L'expression (31) peut se transformer au moyen de l'intégration par parties. On a, en effet,

$$\int_0 \chi(x, t-\lambda)\varphi'(\lambda)\, d\lambda$$

$$= [\varphi(\lambda)\chi(x, t-\lambda)]_0^t - \int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\chi(x, t-\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

D'ailleurs $\varphi(\lambda)\chi(x, t-\lambda)$ s'annule pour $\lambda = t$ et se réduit à $\varphi(0)\chi(x, t)$ pour $\lambda = 0$. On aura donc simplement

$$U'' = -\int_0^t \frac{\partial}{\partial\lambda}\chi(x, t-\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\chi(x, t-\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

Remplaçons maintenant $\chi(x, t-\lambda)$ par sa valeur

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\lambda}}}^{\infty} e^{-\beta^2}\, d\beta;$$

on aura

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi(x, t-\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \frac{x}{2a(t-\lambda)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}}$$

et enfin

$$U'' = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}} (t-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \varphi(\lambda)\, d\lambda.$$

La méthode dont nous nous sommes servi pour ramener le calcul de U'' à celui de U' est évidemment applicable à tous les problèmes analogues.

311. *Cordes vibrantes.* — Considérons une corde tendue sur la portion de l'axe des x comprise entre o et l. Désignons par U le déplacement suivant l'un des axes coordonnés du point dont l'abscisse serait x dans l'état de repos. Nous aurons l'équation aux dérivées partielles

$$(32) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

à laquelle il faudra joindre les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} U &= f(x) \\ \frac{\partial U}{\partial t} &= f_1(x) \end{aligned}\right\} \text{pour } t = 0,\ 0 < x < l$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{pour } x = 0, \\ U &= 0 \quad \text{pour } x = l, \end{aligned}$$

lesquelles expriment que les extrémités de la corde restent fixes.

Nous avons trouvé (277) que l'intégrale générale de l'équation (32) est

$$U = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

Il reste à déterminer les fonctions φ et ψ de manière à satisfaire aux autres conditions du problème.

Les conditions initiales donnent, pour l'intervalle de o à l,

$$\begin{aligned} \varphi(x) \quad + \psi(x) \quad &= f(x), \\ a\varphi'(x) - a\psi'(x) &= f_1(x); \end{aligned}$$

d'où, en intégrant,

$$a\varphi(x) - a\psi(x) = \int_0^x f_1(x)\,dx + c$$

et enfin

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x f_1(x)\,dx + \frac{c}{2a},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x f_1(x)\,dx - \frac{c}{2a}.$$

D'ailleurs, U ne changeant pas quand on accroît la fonction φ d'une constante quelconque en diminuant d'autre part la fonction ψ de la même quantité, on pourra, sans nuire à la généralité de la solution, supposer $c = 0$.

Les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont ainsi déterminées dans l'intervalle de 0 à l. Les conditions aux limites donnent d'ailleurs les identités

$$\varphi(at) + \psi(-at) = 0,$$

$$\varphi(l + at) + \psi(l - at) = 0;$$

d'où, en changeant at en x,

$$\varphi(x) + \psi(-x) = 0,$$

$$\varphi(l + x) + \psi(l - x) = 0.$$

Cette dernière équation donnera la valeur de φ pour les valeurs de l'argument comprises entre l et $2l$. En y changeant x en $-x$, elle donnera la valeur de ψ dans le même intervalle.

Enfin, en y changeant l en $l + x$, il viendra

$$\varphi(2l + x) + \psi(-x) = 0,$$

d'où

$$\varphi(2l + x) = \varphi(x).$$

La fonction φ admet donc la période $2l$. Il en sera de même de la fonction

$$\psi(x) = -\varphi(-x).$$

Les deux fonctions φ et ψ, admettant la période $2l$ et étant

connues dans l'intervalle de o à $2l$, seront déterminées pour toutes les valeurs de l'argument.

312. La méthode d'intégration précédente, due à *Euler*, est spéciale au problème des cordes vibrantes. Le procédé de *Bernoulli*, que nous allons exposer, est, au contraire, l'application directe des principes établis au commencement de cette Section.

On satisfait à l'équation aux dérivées partielles et aux conditions aux limites par les solutions simples

$$\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi at}{l},\qquad \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{m\pi at}{l},$$

où m désigne un entier quelconque.

On y satisfera plus généralement par la série

$$U=\sum A_m\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi at}{l}+\sum B_m\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{m\pi at}{l},$$

m prenant toutes les valeurs entières de 1 à ∞.

Reste à déterminer les coefficients A_m et B_m, de manière à satisfaire aux conditions initiales. En y substituant cette valeur de U, elles deviendront

$$\sum A_m\sin\frac{m\pi x}{l}=f(x),$$

$$\sum\frac{m\pi a}{l}B_m\sin\frac{m\pi x}{l}=f_1(x),$$

et l'on y satisfera (t. II, n° 276) en posant

$$A_m=\frac{2}{l}\int_0^l f(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{l},$$

$$\frac{m\pi a}{l}B_m=\frac{2}{l}\int_0^l f_1(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

313. *Refroidissement d'une barre hétérogène.* — Ce

problème dépend de l'intégration de l'équation suivante

$$g\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial U}{\partial x} - lU \tag{33}$$

jointe à la condition initiale

$$U = f(x) \quad \text{pour } t = 0,\ 0 < x < X \tag{34}$$

et aux conditions aux limites

$$k\frac{\partial U}{\partial x} - hU = 0 \quad \text{pour } x = 0, \tag{35}$$

$$k\frac{\partial U}{\partial x} + HU = 0 \quad \text{pour } x = X. \tag{36}$$

La barre est supposée s'étendre sur l'axe des x de 0 à X; g, k, l sont des fonctions de x, positives dans toute l'étendue de la barre et représentant respectivement la chaleur spécifique, la conductibilité intérieure et le pouvoir émissif sur chacune des sections transversales ; h et H sont des constantes positives.

On satisfait à l'équation (33) par la solution simple

$$U = Ve^{-rt},$$

r désignant une constante et V une fonction de x qui satisfasse à l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d}{dx}k\frac{dV}{dx} + (gr - l)V = 0. \tag{37}$$

Les équations (35), (36) donneront

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0 \quad \text{pour } x = 0, \tag{38}$$

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0 \quad \text{pour } x = X. \tag{39}$$

Soient V′, V″ deux solutions particulières de l'équation (37); l'intégrale générale sera

$$c'V' + c''V'',$$

et cette valeur, substituée dans les équations (38) et (39), donnera

$$(40)\quad \begin{cases} c'\left(k\dfrac{dV'}{dx}-hV'\right)_0+c''\left(k\dfrac{dV''}{dx}-hV''\right)_0=0, \\ c'\left(k\dfrac{dV'}{dx}+HV'\right)_X+c''\left(k\dfrac{dV''}{dx}+HV''\right)_X=0. \end{cases}$$

On pourra satisfaire simultanément à ces deux équations par un choix convenable du rapport $\dfrac{c''}{c'}$ si leur déterminant est nul. Ce déterminant est une fonction de r que nous désignerons par $\varpi(r)$.

Soient r_1, r_2, ... les racines de l'équation $\varpi(r)=0$. A chacune d'elles, telle que r_n, correspond une intégrale V_n telle que la solution simple

$$U=V_n e^{-r_n t}$$

satisfasse à la fois à l'équation aux dérivées partielles et aux équations aux limites.

On y satisfera plus généralement en posant

$$U=\Sigma A_m V_m e^{-r_m t},$$

et cette nouvelle expression sera la solution du problème, si elle satisfait en outre à la condition initiale.

Il ne restera donc plus qu'à choisir les coefficients A, de telle sorte qu'on ait

$$\Sigma A_m V_m=f(x) \quad \text{de } x=0 \text{ à } x=X.$$

314. La détermination de ces coefficients repose sur une propriété importante des fonctions V_n, que nous allons exposer.

Le paramètre r restant provisoirement arbitraire, désignons par V celle des intégrales de l'équation (37) qui satisfait, pour $x=0$, à la condition initiale (38). Ces deux

équations pourront s'écrire ainsi :

$$(41)\qquad \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial V}{\partial x} + (gr - l)V = 0,$$

$$(42)\qquad k\frac{\partial V}{\partial x} - hV = 0 \quad \text{pour } x = 0,$$

en substituant aux différentielles ordinaires des signes ∂ de dérivation partielle, pour mettre en évidence ce fait que V dépend non seulement de x, mais du paramètre r.

Donnons à ce paramètre une autre valeur r'. Soit V' la valeur correspondante de V ; on aura

$$(43)\qquad \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial V'}{\partial x} + (gr' - l)V' = 0,$$

$$(44)\qquad k\frac{\partial V'}{\partial x} - hV' = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

Retranchons l'une de l'autre les équations (41) et (43), respectivement multipliées par V' et V ; il viendra

$$\begin{aligned}(r' - r)gVV' &= V'\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial V'}{\partial x}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[k\left(V'\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\right]\end{aligned}$$

et, en intégrant de 0 à X,

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned}(r' - r)\int_0^X gVV'\,dx &= \left[k\left(V'\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\right]_0^X\\ &= \left[k\left(V'\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V'}{\partial x}\right)\right]_{x=X};\end{aligned}\right.$$

car, pour $x = 0$, l'expression $k\left(V'\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V'}{\partial x}\right)$ s'annule en vertu des équations (42) et (44).

Posons maintenant $r = r_m$, $r' = r_n$, r_m et r_n étant deux racines distinctes de l'équation $\varpi(r) = 0$; V et V' se ré-

duiront à V_m et V_n, et l'on aura, pour $x = X$,

$$k\frac{\partial V}{\partial x} + HV = 0, \qquad k\frac{\partial V'}{\partial x} + HV' = 0,$$

d'où

$$k\left(V'\frac{\partial V}{\partial x} - V\frac{\partial V'}{\partial x}\right) = 0.$$

L'équation (45) se réduira donc, en supprimant le facteur $r_n - r_m$, à

$$\int_0^X gV_mV_n\,dx = 0. \tag{46}$$

Soit, en second lieu, $r = r_n$, $r' = r_n + \varepsilon$, ε étant un infiniment petit. On aura

$$V = V_n, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_n}{\partial x},$$

$$V' = V_n + \frac{\partial V_n}{\partial r}\varepsilon + \ldots, \qquad \frac{\partial V'}{\partial x} = \frac{\partial V_n}{\partial x} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial r}\varepsilon + \ldots.$$

Substituant dans l'équation (45), divisant par ε et passant à la limite, il viendra

$$\int_0^X gV_n^2\,dx = \left[k\left(\frac{\partial V_n}{\partial r}\frac{\partial V_n}{\partial x} - V_n\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial r}\right)\right]_{x=X}. \tag{47}$$

315. Nous allons maintenant établir que, si l'on débarrasse l'équation $\varpi(r) = 0$ des racines parasites pour lesquelles la solution V correspondante serait identiquement nulle, les racines restantes seront toutes réelles, inégales, positives et en nombre infini.

1° Si $\varpi(r) = 0$ admettait une racine imaginaire $r_m = \alpha + \beta i$, elle admettrait sa conjuguée $r_n = \alpha - \beta i$. A ces deux racines correspondraient deux intégrales conjuguées $V_m = p + qi$, $V_n = p - qi$, et l'intégrale

$$\int_0^X gV_mV_n\,dx = \int_0^X g(p^2+q^2)\,dx$$

aurait tous ses éléments positifs, ce qui est absurde, puisqu'elle doit être nulle.

2° Si $\varpi(r) = 0$ admettait une racine double r, l'intégrale correspondante V_n satisferait, pour $x = X$, non seulement à l'équation

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} + HV_n = 0,$$

mais à sa dérivée

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\, \partial r} + H\frac{\partial V_n}{\partial r} = 0.$$

On aurait donc, pour $x = X$,

$$\frac{\partial V_n}{\partial r}\frac{\partial V_n}{\partial x} - V\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\, \partial r} = 0,$$

d'où

$$\int_0^X g V_n^2\, dx = 0,$$

résultat absurde, tous les éléments de l'intégrale étant positifs.

3° L'équation $\varpi(r) = 0$ ne peut avoir de racine négative ou nulle.

En effet, si $r \leqq 0$, $l - gr$ sera positif dans toute l'étendue de la barre, et les équations

$$\frac{d}{dx}k\frac{dV}{dx} + (gr - l)V = 0, \tag{48}$$

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0, \quad \text{pour } x = 0, \tag{49}$$

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0, \quad \text{pour } x = X, \tag{50}$$

seront contradictoires.

En effet, l'équation (48), intégrée de 0 à x, donne

$$\begin{aligned} k\frac{dV}{dx} &= \left[k\frac{dV}{dx}\right]_0 + \int_0^x (l - gr)V\, dx \\ &= [hV]_0 + \int_0^x (l - gr)V\, dx. \end{aligned} \tag{51}$$

La fonction V varie avec x en partant de la valeur initiale V_0; tant qu'elle ne changera pas de signe, tous les éléments de l'intégrale $\int_0^x (l - gr)V\,dx$ auront également le signe de V_0; donc $\frac{dV}{dx}$ aura ce même signe, et, par suite, V s'éloignera de zéro.

Il résulte de là que, dans tout l'intervalle de o à X, V s'éloigne de zéro et conserve le même signe que $\frac{dV}{dx}$. Donc l'équation

$$k\frac{dV}{dx} + HV = 0, \qquad \text{pour } x = X,$$

ne pourra avoir lieu, ses deux termes ayant le même signe.

316. Les racines de $\varpi(r) = 0$ sont donc toutes réelles, inégales et positives. Il reste à prouver qu'elles sont en nombre infini. Nous y arriverons en étudiant l'allure des intégrales de l'équation (37) ou, plus généralement, d'une équation de la forme

$$\frac{d}{dx}K\frac{dV}{dx} + GV = 0, \tag{52}$$

où K et G sont des fonctions de x.

On peut remarquer incidemment que toute équation linéaire du second ordre

$$P\frac{d^2V}{dx^2} + Q\frac{dV}{dx} + RV = 0$$

peut être mise sous cette forme. En effet, multiplions cette équation par un facteur indéterminé M. Elle deviendra

$$MP\frac{d^2V}{dx^2} + MQ\frac{dV}{dx} + MRV = 0$$

ou

$$\frac{d}{dx}MP\frac{dV}{dx} + \left(MQ - \frac{dMP}{dx}\right)\frac{dV}{dx} + MRV = 0.$$

Le terme en $\frac{dV}{dx}$ disparaîtra si l'on pose

$$MQ - \frac{dMP}{dx} = 0;$$

d'où

$$\frac{dMP}{MP} = \frac{Q}{P}dx,$$

$$\log MP = \int \frac{Q}{P}dx.$$

et enfin

$$M = \frac{1}{P}e^{\int \frac{Q}{P}dx}.$$

M étant ainsi déterminé, on n'aura plus qu'à poser $MP = K$, $MR = G$ pour avoir la forme d'équation voulue.

On peut simplifier encore la forme de l'équation (52) par un changement de variable. Posons, en effet,

$$V = K^{-\frac{1}{2}}W;$$

il viendra

$$\frac{dV}{dx} = +K^{-\frac{1}{2}}\frac{dW}{dx} - \frac{1}{2}K^{-\frac{3}{2}}\frac{dK}{dx}W,$$

$$K\frac{dV}{dx} = K^{\frac{1}{2}}\frac{dW}{dx} - \frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}\frac{dK}{dx}W,$$

$$\frac{d}{dx}K\frac{dV}{dx} = K^{\frac{1}{2}}\frac{d^2W}{dx^2} - \frac{1}{2}W\frac{d}{dx}\left(K^{-\frac{1}{2}}\frac{dK}{dx}\right).$$

Le terme en $\frac{dW}{dx}$ disparaîtra donc de l'équation transformée, laquelle, divisée par $K^{\frac{1}{2}}$, sera de la forme

$$\frac{d^2W}{dx^2} - RW = 0.$$

317. Soit V_1 une solution particulière de l'équation (52), on aura

$$\frac{d}{dx}K\frac{dV_1}{dx} + GV_1 = 0.$$

De cette équation combinée avec (52), on déduit

$$o = V_1 \frac{d}{dx} K \frac{dV}{dx} - V \frac{d}{dx} K \frac{dV_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left[K\left(V_1 \frac{dV}{dx} - V \frac{dV_1}{dx}\right)\right]$$

et, en intégrant,

$$(53) \qquad K\left(V_1 \frac{dV}{dx} - V \frac{dV_1}{dx}\right) = c$$

ou

$$\frac{d\frac{V}{V_1}}{dx} = \frac{c}{KV_1^2}$$

et enfin

$$(54) \qquad V = cV_1 \int_0^x \frac{dx}{KV_1^2} + c'V_1.$$

Supposons que K reste constamment fini et positif entre o et X. On déduira de la relation (53) que V_1 et $\frac{dV_1}{dx}$ ne peuvent s'annuler à la fois en aucun point de cet intervalle, car on aurait $c = o$, et l'intégrale générale ne contiendrait qu'une constante c', ce qui est impossible.

L'équation $V_1 = o$ n'admet donc que des racines simples, et la courbe $y = V_1$ coupera l'axe des x en tous les points où elle le rencontre. Soient α et β deux racines consécutives; les valeurs correspondantes $\left(\frac{dV_1}{dx}\right)_\alpha$ et $\left(\frac{dV_1}{dx}\right)_\beta$ de la dérivée $\frac{dV_1}{dx}$ seront évidemment de signe contraire.

Cela posé, V désignant une autre intégrale quelconque, on aura l'équation (53) qui, pour $x = \alpha$ et $x = \beta$, se réduira à

$$-[KV]_\alpha \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_\alpha = c = -[KV]_\beta \left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_\beta.$$

Donc $[KV]_\alpha$ et $[KV]_\beta$ seront de signe contraire, et, comme K est toujours positif, $[V]_\alpha$ et $[V]_\beta$ seront de signe contraire.

Donc, entre deux racines consécutives de l'équation

$V_1 = 0$, comprises entre o et X, il y aura au moins une racine de $V = 0$. Il n'y en aura d'ailleurs qu'une seule, car ce théorème est évidemment réciproque.

318. Nous allons étendre cette comparaison aux intégrales V, V′ qui satisfont respectivement à deux équations différentielles distinctes

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}K\dfrac{dV}{dx} + GV = 0, \\ \dfrac{d}{dx}K'\dfrac{dV'}{dx} + G'V' = 0. \end{cases}$$

Supposons d'abord que K′ et G′ soient infiniment peu différents de K et de G et que les différences $K - K'$ et $G' - G$ soient constamment positives entre o et X.

Admettons enfin que les intégrales V et V′ qu'il s'agit de comparer soient des solutions *correspondantes*, c'est-à-dire telles qu'on ait

$$V' = V, \qquad K'\frac{dV'}{dx} = K\frac{dV}{dx}, \qquad \text{pour } x = 0.$$

On déduit des équations (55)

$$V'\frac{d}{dx}K\frac{dV}{dx} - V\frac{d}{dx}K'\frac{dV'}{dx} = (G' - G)VV',$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left[V'K\frac{dV}{dx} - VK'\frac{dV'}{dx}\right] = (G' - G)VV' + (K - K')\frac{dV}{dx}\frac{dV'}{dx}.$$

Or V′ et $\dfrac{dV'}{dx}$, différant infiniment peu de V et de $\dfrac{dV}{dx}$, auront le même signe qur ces dernières quantités; d'ailleurs, $G' - G$ et $K - K'$ sont positifs. Donc, le second membre de cette équation sera positif de o à X, et la fonction

$$(56)\qquad V'K\frac{dV}{dx} - VK'\frac{dV'}{dx}$$

sera croissante dans cet intervalle. D'ailleurs, elle s'annule pour $x = 0$; elle sera donc positive de o à X.

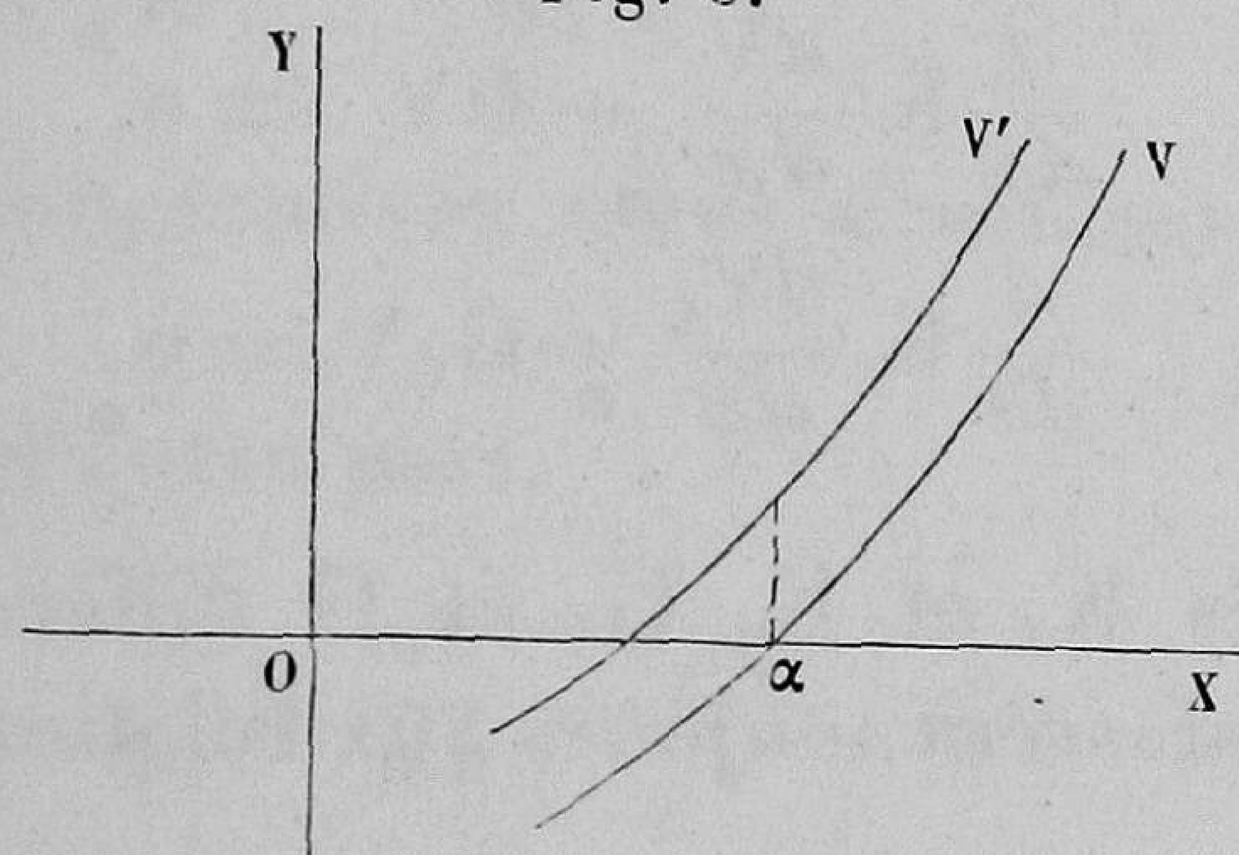
Soit, maintenant, α une racine de l'équation $V = 0$ comprise dans cet intervalle; on aura, pour $x = \alpha$,

$$\left[V' K \frac{dV}{dx}\right]_\alpha > 0;$$

donc $[V']_\alpha$ et $\left[\frac{dV}{dx}\right]_\alpha$ seront de même signe.

Si $\left[\frac{dV}{dx}\right]_\alpha > 0$, la courbe $y = V$ traversera l'axe des x de bas en haut au point $x = \alpha$ (*fig.* 8); $[V']_\alpha$ étant positif, la

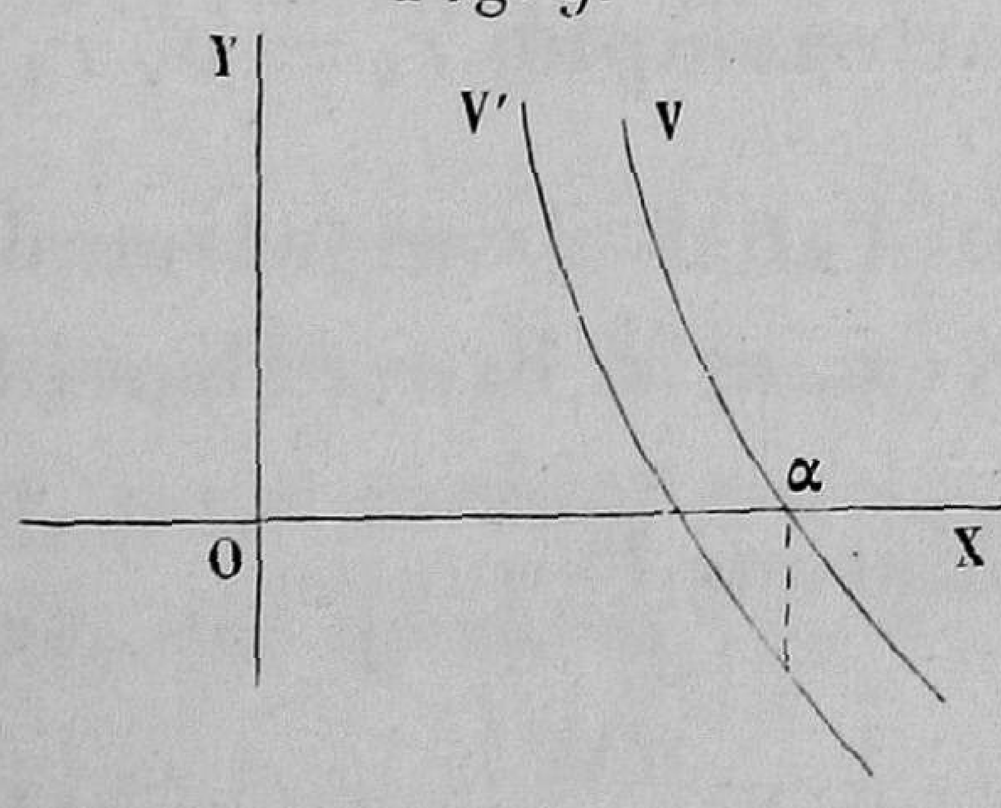
Fig. 8.



courbe $y = V'$, infiniment voisine de la précédente, sera située au-dessus d'elle et coupera l'axe des x en arrière du point α.

Si $\left[\frac{dV}{dx}\right]_\alpha < 0$, la courbe $y = V$ traversera l'axe des x en descendant; $[V']_\alpha$ étant négatif, la courbe $y = V'$ sera au-

Fig. 9.



dessous de la courbe $y = V$ et coupera encore l'axe des x en arrière du point α (*fig.* 9).

D'ailleurs, si l'une des fonctions V, V' s'annule pour $x = 0$, il en sera de même de l'autre, par hypothèse.

Donc, à chaque racine α de l'équation $V = 0$ correspond une racine infiniment voisine α' de l'équation $V' = 0$, laquelle sera un peu moindre que α; et l'équation $V' = 0$ aura en général autant de racines entre 0 et X que l'équation $V = 0$.

Toutefois elle en aura une de plus si V' s'annule pour X, car la racine correspondante de V tombe en dehors de l'intervalle considéré.

319. Soient plus généralement deux équations

$$\frac{d}{dx} K \frac{dV}{dx} + GV = 0, \tag{57}$$

$$\frac{d}{dx} K_1 \frac{dV_1}{dx} + G_1 V_1 = 0, \tag{58}$$

où les quantités K_1 et K, G_1 et G diffèrent de quantités finies, mais satisfassent toujours aux relations

$$G_1 - G \overset{=}{>} 0, \qquad K - K_1 \overset{=}{>} 0 \qquad \text{de } 0 \text{ à } X. \tag{59}$$

On pourra former, d'une infinité de manières, deux fonctions $\mathcal{G}(x, r)$, $\mathcal{K}(x, r)$ de x et d'un paramètre variable r, qui soient, la première croissante et la seconde décroissante lorsque r croît de r_0 à r_1 (et cela pour toute valeur de x comprise entre 0 et X) et qui, de plus, se réduisent respectivement à G, K pour $r = r_0$ et à G_1, K_1 pour $r = r_1$. On pourra prendre, par exemple, $r_0 = 0$, $r_1 = 1$,

$$\mathcal{G}(x, r) = G + r(G_1 - G),$$
$$\mathcal{K}(x, r) = K + r(K_1 - K).$$

Cela posé, considérons l'équation

$$\frac{d}{dx} \mathcal{K}(x, r) \frac{dW}{dx} + \mathcal{G}(x, r) W = 0,$$

et désignons par $V(x, r)$ une solution de cette équation,

déterminée par les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} V(x, r) &= a \\ \mathcal{K}(x, r)\frac{dV(x, r)}{dx} &= b \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x = 0,$$

a et b étant des constantes déterminées choisies à volonté.

Donnons successivement à r une infinité de valeurs r_0, r', ..., r_1 variant progressivement de r_0 à r_1.

Soient G, G′, ..., G_1; K, K′, ..., K_1; V, V′, ..., V_1 les valeurs correspondantes de $\mathcal{G}(x, r)$, $\mathcal{K}(x, r)$, $V(x, r)$; nous aurons

$$\left.\begin{aligned} G \leqq G' \leqq \ldots \leqq G_1 \\ K \geqq K' \geqq \ldots \geqq K_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{de } 0 \text{ à } X,$$

deux fonctions consécutives étant d'ailleurs infiniment peu différentes.

Nous aurons, d'autre part,

$$\frac{d}{dx}K\frac{dV}{dx} + GV = 0,$$

$$\frac{d}{dx}K'\frac{dV'}{dx} + G'V' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d}{dx}K_1\frac{dV_1}{dx} + G_1V_1 = 0$$

et

$$\left.\begin{aligned} V = V' = \ldots = V_1 = a \\ K\frac{dV}{dx} = K'\frac{dV'}{dx} = \ldots = K_1\frac{dV_1}{dx_1} = b \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x = 0.$$

Si $V = 0$ admet une racine α dans l'intervalle de 0 à X, les équations successives $V = 0$, $V' = 0$, ..., $V_1 = 0$ admettront respectivement, pour racines correspondantes, d'après ce qui a été démontré, des quantités α, α', ..., α_1, telles que l'on ait

$$\alpha > \alpha' > \ldots > \alpha_1.$$

Donc, à chaque racine α de $V = 0$ comprise entre 0 et X

correspond une racine moindre α_1 de l'équation $V_1 = 0$. Celle-ci aura donc dans cet intervalle au moins autant de racines que $V = 0$. Elle peut en avoir davantage; car, si l'une des équations successives

$$V' = V(x, r') = 0, \quad V'' = V(x, r'') = 0, \quad \ldots, \quad V_1 = V(x, r_1) = 0$$

est satisfaite pour $x = X$, il s'introduira par là, dans les équations suivantes, une nouvelle racine que n'avaient pas les précédentes.

L'excès Δ du nombre des racines de l'équation $V_1 = 0$ sur le nombre des racines de $V = 0$ sera donc égal au nombre des valeurs de r comprises entre r_0 et r_i qui satisfont à l'équation

$$V(X, r) = 0.$$

320. Soient r^i, r^{i+1} deux valeurs consécutives quelconques de r; on aura (318), dans l'intervalle de 0 à X,

$$V^{i+1} K^i \frac{dV^i}{dx} - V^i K^{i+1} \frac{dV^{i+1}}{dx} > 0.$$

Lorsque V^i n'est pas nul, V^{i+1}, qui en diffère infiniment peu, sera de même signe, et, en divisant la relation précédente par la quantité positive $V^i V^{i+1}$, il viendra

$$\frac{K^i \frac{dV^i}{dx}}{V^i} - \frac{K^{i+1} \frac{dV^{i+1}}{dx}}{V^{i+1}} > 0$$

et, plus généralement, en désignant par H une constante quelconque,

$$\frac{K^i \frac{dV^i}{dx} + HV^i}{V^i} - \frac{K^{i+1} \frac{dV^{i+1}}{dx} + HV^{i+1}}{V^{i+1}} > 0.$$

Cette inégalité a lieu pour toute valeur de x comprise de 0 à X et, en particulier, pour $x = X$; elle montre que

l'expression

$$\frac{\mathcal{K}(X, r)\dfrac{dV(X, r)}{dx} + HV(X, r)}{V(X, r)} = \varphi(r),$$

considérée comme fonction de r, est constamment décroissante de r_0 à r_1, sauf pour les valeurs de r qui annulent son dénominateur.

Elle ne pourra donc changer de signe qu'en passant par zéro ou par l'infini négatif, et ces zéros et ces infinis se succéderont alternativement.

Si $\varphi(r_0)$ et $\varphi(r_1)$ sont de même signe, le nombre Δ' des zéros sera évidemment égal au nombre Δ des infinis ; si $\varphi(r_0) > 0$, $\varphi(r_1) < 0$, il sera égal à $\Delta + 1$; si $\varphi(r_0) < 0$, $\varphi(r_1) > 0$, il sera égal à $\Delta - 1$.

Le nombre des racines de l'équation

$$\mathcal{K}(X, r)\frac{dV(X, r)}{dx} + HV(x, r) = 0,$$

comprises entre r_0 et r_1, sera donc égal à Δ, $\Delta + 1$ ou $\Delta - 1$ suivant celle des trois hypothèses précédentes qui aura lieu.

321. Jusqu'à présent, nous nous sommes borné à comparer des solutions correspondantes des deux équations différentielles

$$\frac{d}{dx}K\frac{dV}{dx} + GV = 0,$$

$$\frac{d}{dx}K_1\frac{dV_1}{dx} + G_1V_1 = 0.$$

Soient maintenant V et V_1 deux solutions quelconques de ces mêmes équations.

Nous allons établir que deux racines consécutives α, β de l'équation $V = 0$ comprennent au moins une racine de l'équation $V_1 = 0$.

En effet, soit V'_1 une solution de la seconde équation,

telle que l'on ait, pour $x = \alpha$,

$$V'_1 = V = 0, \qquad K_1 \frac{dV'_1}{dx} = K \frac{dV}{dx}.$$

A la racine β de $V = 0$ comprise dans l'intervalle de α à X correspond, d'après les raisonnements précédents, une racine β'_1 de $V'_1 = 0$ comprise dans le même intervalle et moindre que β. Mais V_1 satisfaisant à la même équation différentielle que V'_1, entre les deux racines α et β'_1 de $V'_1 = 0$, il devra se trouver une racine β_1 de $V_1 = 0$, ce qui démontre notre proposition.

322. Les considérations précédentes permettent de fixer dans une certaine mesure le nombre et la position des racines de l'équation $V = 0$ comprises entre 0 et X, V désignant une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} K \frac{dV}{dx} + GV = 0.$$

Soient, en effet, k_2, g_1 et k_1, g_2 les plus grandes et les plus petites valeurs de K et de G dans cet intervalle. Considérons les équations auxiliaires

$$(60) \qquad 0 = \frac{d}{dx} k_1 \frac{dV_1}{dx} + g_1 V_1 = k_1 \frac{d^2 V_1}{dx^2} + g_1 V_1 = 0,$$

$$(61) \qquad 0 = \frac{d}{dx} k_2 \frac{dV_2}{dx} + g_2 V_2 = k_2 \frac{d^2 V_2}{dx^2} + g_2 V_2 = 0.$$

V_1 et V_2 étant des intégrales quelconques de ces deux équations, deux racines de $V = 0$ comprendront entre elles au moins une racine de $V_1 = 0$, et deux racines de $V_2 = 0$ comprendront entre elles au moins une racine de $V = 0$.

Or, si g_1 est positif, les intégrales de (60) seront de la forme

$$V_1 = c \sin \sqrt{\frac{g_1}{k_1}}\, t + c' \cos \sqrt{\frac{g_1}{k_1}}\, t.$$

L'équation $V_1 = 0$ a une infinité de racines équidistantes et dont la différence est $\pi\sqrt{\frac{k_1}{g_1}}$. On peut d'ailleurs déterminer le rapport des constantes c, c' de telle sorte que V_1 s'annule pour une valeur α arbitrairement choisie. Si donc on prend, entre 0 et X, un intervalle quelconque d'amplitude $< \pi\sqrt{\frac{k_1}{g_1}}$, on pourra déterminer V_1 de telle sorte qu'elle n'ait aucune racine dans cet intervalle; donc V ne saurait en avoir plus d'une. Donc la distance de deux racines consécutives de $V = 0$ sera au moins égale à $\pi\sqrt{\frac{k_1}{g_1}}$. Le nombre total de ces racines entre 0 et X aura donc pour limite supérieure l'entier immédiatement supérieur au quotient de X par $\pi\sqrt{\frac{k_1}{g_1}}$.

Si g_1 est négatif, on aura

$$V_1 = ce^{\sqrt{\frac{-g_1}{k_1}}t} + c'e^{-\sqrt{\frac{-g_1}{k_1}}t}.$$

L'équation $V_1 = 0$ n'a aucune racine, si c et c' ont le même signe. Donc $V = 0$ ne peut en avoir plus d'une entre 0 et X.

Considérons maintenant l'équation (61). Si g_2 est positif, $V_2 = 0$ aura une infinité de racines équidistantes, dont la différence est $\pi\sqrt{\frac{k_2}{g_2}}$, et l'on peut choisir les constantes d'intégration de telle sorte que V_2 s'annule en un point arbitraire α. Donc entre 0 et X la distance de deux racines consécutives de $V = 0$ ne pourra pas surpasser $\pi\sqrt{\frac{k_2}{g_2}}$, et le nombre total de ces racines aura pour limite inférieure le plus grand entier contenu dans le quotient de X par $\pi\sqrt{\frac{k_2}{g_2}}$.

323. Revenons maintenant à l'équation

$$\frac{d}{dx} k \frac{dV}{dx} + (gr - l)V = 0.$$

Désignons par $V(x, r)$ une de ses solutions qui satisfasse à la relation

$$k\frac{dV}{dx} - hV = 0, \qquad \text{pour } x = 0.$$

On a vu que, si $r = 0$, cette fonction et sa dérivée ne s'annulent pas entre 0 et X et ont le même signe; on aura donc

$$\frac{k\frac{dV}{dx} + HV}{V} > 0, \qquad \text{pour } x = X, \qquad r = 0.$$

Si donc r varie de 0 à une valeur positive R, $gr - l$ croissant constamment pendant ce changement, le nombre des racines de l'équation

$$0 = \varpi(r) = k\frac{dV}{dx} + HV, \qquad \text{pour } x = X,$$

comprises dans cet intervalle, sera égal à Δ ou $\Delta + 1$, Δ désignant l'excès du nombre des racines de l'équation

$$V(x, R) = 0$$

sur celui des racines de $V(x, 0) = 0$, dans l'intervalle de 0 à X.

Cette dernière équation n'ayant pas de racines, Δ sera le nombre des racines de $V(x, R) = 0$.

D'après l'analyse précédente, il a pour limite inférieure le plus grand entier E contenu dans le quotient de X par $\pi\sqrt{\frac{k_2}{g_2 R - l_2}}$, k_2, l_2 désignant les plus grandes valeurs de k, l, et g_2 la plus petite valeur de g dans l'intervalle de 0 à X. Or il est manifeste que E croît indéfiniment avec R. Donc l'équation $\varpi(r) = 0$ admet bien une infinité de racines.

324. Cela posé, nous avons vu (313) que le problème du refroidissement de la barre revient à choisir les coefficients A_m, de telle sorte qu'on ait

$$\Sigma A_m V_m = f(x), \qquad \text{de } x_0 \text{ à } X.$$

En admettant la possibilité d'une solution, il sera aisé de déterminer ces coefficients; multiplions, en effet, cette équation par gV_n et intégrons de o à X. En vertu des relations (46), tous les termes de la série où $m \gtrless n$ donneront une intégrale nulle, et l'on aura simplement

$$A_n \int_0^X g V_n^2 \, dx = \int_0^X g V_n f(x) \, dx$$

Substituant les valeurs ainsi trouvées pour les coefficients, nous obtiendrons la série

$$\sum_n \frac{\int_0^X g V_n f(x) \, dx}{\int_0^X g V_n^2 \, dx} V_n.$$

Si cette série est convergente et a bien pour somme $f(x)$, dans tout l'intervalle de o à X, le problème sera résolu; mais, pour s'en assurer, il serait nécessaire de sommer directement la série. Ce résultat n'a encore été atteint que dans quelques cas particuliers.

325. *Équilibre de température d'une sphère homogène.* — En désignant par r le rayon de la sphère, nous aurons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

avec la condition à la surface

$$U = F(x, y, z), \qquad \text{pour } x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Posons

$$x = \rho \sin\theta \cos\psi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\psi, \qquad z = \rho \cos\theta.$$

Nous avons vu (t. II, n° 277) qu'on satisfait à l'équation aux dérivées partielles par la solution simple

$$U_n = \rho^n Y_n,$$

Y_n désignant une fonction de Laplace, c'est-à-dire un polynome homogène et de degré n en $\sin\theta \cos\psi$, $\sin\theta \sin\psi$, $\cos\theta$, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 Y_n}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \psi^2} + \cot\theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} + n(n+1) Y_n = 0.$$

Le polynome Y_n ainsi déterminé contient d'ailleurs $2n+1$ constantes arbitraires dont il dépend linéairement.

En combinant ces solutions simples, on obtiendra, comme nouvelle solution, la série

$$U = \sum_0^\infty \frac{\rho^n}{r^n} Y_n.$$

A la surface de la sphère, où $\rho = r$, cette série se réduira à

$$\sum_0^\infty Y_n.$$

Il reste à déterminer les constantes qui figurent dans les Y_n, de telle sorte que cette valeur soit égale à l'expression

$$F(r \sin\theta \cos\psi, \ r \sin\theta \sin\psi, \ r \cos\theta),$$

que nous représenterons, pour abréger, par $f(\theta, \psi)$.

Or nous avons vu (t. II, n°s 280 et suiv.) qu'on arrive à ce résultat en prenant pour les Y_n les valeurs particulières suivantes :

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta', \psi') P_n \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi',$$

où

$$P_n = X_n(\cos\gamma) = X_n[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi')],$$

X_n désignant la fonction de Legendre.

326. Cette solution peut se mettre sous une forme plus élégante.

Remarquons, à cet effet, que la fonction générale Y_n est une somme de termes de la forme

$$A_{ik}\sin^i\psi\cos^k\psi\sin^{i+k}\theta\cos^{n-i-k}\theta.$$

D'ailleurs, le produit $\sin^i\psi\cos^k\psi$ s'exprime linéairement au moyen des sinus et cosinus des arcs $(i+k)\psi$, $(i+k-2)\psi$, ... Par la substitution de cette expression, Y_n prendra évidemment la forme

$$Y_n = \sum_{m=0}^{m=n} [\Theta'_{mn}\cos m\psi + \Theta''_{mn}\sin m\psi],$$

où

$$\Theta'_{mn} = \sin^m\theta\, V', \qquad \Theta''_{mn} = \sin^m\theta\, V'',$$

V' et V'' étant des polynomes en $\cos\theta$ et $\sin^2\theta$, qui se transformeront en polynomes en $\cos\theta$ si l'on y remplace $\sin^2\theta$ par $1 - \cos^2\theta$.

Substituons le développement précédent de Y_n dans l'équation aux dérivées partielles qui définit cette fonction, et chassons les dénominateurs; il viendra

$$0 = \sum_0^n \left\{\sin^2\theta\frac{d^2\Theta'_{mn}}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{d\Theta'_{mn}}{d\theta} + [n(n+1)\sin^2\theta - m^2]\Theta'_{mn}\right\}\cos m\psi$$
$$+ \sum_0^n \left\{\sin^2\theta\frac{d^2\Theta''_{mn}}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta\frac{d\Theta''_{mn}}{d\theta} + [n(n+1)\sin^2\theta - m^2]\Theta''_{mn}\right\}\sin m\psi.$$

Pour que cette expression s'annule identiquement, il faut évidemment que les termes qui contiennent le sinus et le cosinus de chaque multiple de ψ s'annulent séparément.

Donc chacun des termes de Y_n, pris à part, sera une solution de l'équation, et Θ'_{mn}, Θ''_{mn} seront des solutions de l'équation linéaire

$$\sin^2\theta \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \sin\theta\cos\theta \frac{d\Theta}{d\theta} + [n(n+1)\sin^2\theta - m^2]\Theta = 0.$$

Posons

$$\Theta = V \sin^m\theta;$$

nous obtiendrons une transformée en V

$$\sin^2\theta \frac{d^2 V}{d\theta^2} + (2m+1)\sin\theta\cos\theta \frac{dV}{d\theta} + [n(n+1) - m(m+1)]\sin^2\theta\, V = 0,$$

à laquelle satisferont V′ et V″.

Prenons enfin $\cos\theta = \mu$ pour nouvelle variable indépendante; nous aurons une dernière transformée

$$(1-\mu^2)\frac{d^2 V}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu\frac{dV}{d\mu} + [n(n+1) - m(m+1)]V = 0. \tag{62}$$

Cette équation se lie intimement à l'équation connue

$$(1-\mu^2)\frac{d^2 X}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dX}{d\mu} + n(n+1)X = 0, \tag{63}$$

à laquelle satisfait le polynome de Legendre $X_n(\mu)$.

En effet, différentions m fois cette dernière équation; on obtiendra, pour déterminer $\frac{d^m X}{d\mu^m}$, une équation identique à (62). Les intégrales de (62) sont donc les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ des intégrales de (63). Or le seul polynome qui satisfasse à cette dernière (sauf un facteur constant qui reste arbitraire) est le polynome de Legendre $X_n(\mu)$.

Les polynomes V′, V″, qui satisfont à (62), se réduiront donc chacun, à un facteur constant près, à $\frac{d^m X_n(\mu)}{dx^m}$, et les

fonctions

$$\Theta'_{mn} = V' \sin^m \theta, \qquad \Theta''_{mn} = V'' \sin^m \theta$$

seront égales, à des facteurs constants près, à l'expression

$$(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_n(\mu)}{d\mu^m} = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n.1.2\ldots n} \frac{d^{m+n}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{m+n}};$$

que nous désignerons par $P_n^m(\mu)$.

327. Cherchons la valeur de l'intégrale

$$\begin{aligned} I_{nn'}^m &= \int_{-1}^{+1} P_n^m(\mu) P_{n'}^m(\mu)\, d\mu \\ &= \int_{-1}^{+1} (1-\mu^2)^m \frac{d^m X_n(\mu)}{d\mu^m} \frac{d^m X_{n'}(\mu)}{d\mu^m}\, d\mu. \end{aligned}$$

Supposons, pour fixer les idées, $n' \geqq n$. L'intégration par parties donnera

$$I_{nn'}^m = \int_{-1}^{+1} (-1)^m X_{n'}(\mu) \frac{d^m}{d\mu^m} \left[(1-\mu^2)^m \frac{d^m X_n(\mu)}{d\mu^m} \right] d\mu;$$

car les termes tout intégrés, contenant $1-\mu^2$ en facteur, s'annulent aux deux limites.

Le multiplicateur de $X_{n'}(\mu)$ sous l'intégrale est un polynome de degré n; donc l'intégrale sera nulle si $n' > n$. Si $n' = n$ et qu'on désigne par $C\mu^n$ le premier terme de $X_n(\mu)$, ce polynome aura pour premier terme

$$n(n-1)\ldots(n-m+1)(n+m)\ldots(n+1)C\mu^n = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} C\mu^n.$$

Il sera donc égal à

$$\frac{(n+m)!}{(n-m)!} X_n(\mu) + R,$$

R étant un reste de degré $< n$, qui est sans influence sur la

valeur de l'intégrale; on aura donc

$$I_{nn}^{m} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\int_{-1}^{+1} X_n^2(\mu)\,d\mu = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{2}{2n+1}.$$

328. Cela posé, nous aurons

$$(64)\qquad Y_n = \Sigma_0^n\, P_n^m(\mu)\,[A_{mn}\cos m\psi + B_{mn}\sin m\psi],$$

et il restera à déterminer les constantes A et B, de telle sorte qu'on ait

$$\Sigma_0^\infty Y_n = \Sigma_0^\infty \Sigma_0^n\, P_n^m(\mu)\,[A_{mn}\cos m\psi + B_{mn}\sin m\psi] = f(\theta,\psi).$$

Multiplions cette équation par $\cos m\psi\, d\psi$ et intégrons de o à 2π; en remarquant qu'on a

$$\int_0^{2\pi} \cos m\psi \sin m'\psi\, d\psi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\psi \cos m'\psi\, d\psi = \begin{cases} 0, & \text{si } m \gtrless m', \\ \pi, & \text{si } m = m' > 0, \\ 2\pi, & \text{si } m = m' = 0; \end{cases}$$

il viendra

$$\Sigma_0^\infty\, P_n^m(\mu)\lambda_m \pi A_{mn} = \int_0^{2\pi} f(\theta,\psi)\cos m\psi\, d\psi,$$

λ_m étant égal, en général, à 1, et à 2 si $m = 0$.

Multiplions cette dernière équation par $P_n^m(\mu)\,d\mu$ et intégrons de -1 à 1, en remarquant que

$$I_{nn'}^{m} = \int_{-1}^{+1} P_n^m(\mu)\,P_{n'}^m(\mu)\,d\mu = \begin{cases} 0, & \text{si } n \gtrless n', \\ \dfrac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\dfrac{2}{2n+1}, & \text{si } n = n'; \end{cases}$$

il viendra

$$\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{2\lambda_m\pi}{2n+1}\,A_{mn} = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\theta,\psi)\cos m\psi\, P_n^m(\mu)\,d\psi\,d\mu,$$

$$A_{mn} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,\frac{2n+1}{2\lambda_m\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\theta,\psi)\cos m\psi\, P_n^m(\mu)\,d\psi\,d\mu.$$

On trouvera de même

$$B_{mn} = \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\lambda_m\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\theta,\psi)\sin m\psi\, P_n^m(\mu)\,d\psi\,d\mu.$$

Substituons ces valeurs des coefficients A et B dans l'expression (64) de Y_n et réunissons tous les termes sous un seul signe d'intégration, après avoir changé les variables d'intégration θ, ψ, μ en θ', ψ', μ' pour éviter toute confusion; il viendra

$$Y_n = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\sum_0^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!}\frac{2n+1}{2\lambda_m\pi} f(\theta',\psi') \\ \times P_n^m(\mu)P_n^m(\mu')\cos m(\psi-\psi')\,d\psi'\,d\mu'.$$

Mais nous avons précédemment trouvé cette autre valeur

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta',\psi')\,P_n\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi',$$

ou, en prenant $\cos\theta' = \mu'$ pour nouvelle variable d'intégration,

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\theta',\psi')\,P_n\,d\psi'\,d\mu'.$$

La comparaison de cette valeur avec la précédente donne l'égalité

$$P_n = \sum_0^n \frac{n-m!}{n+m!}\frac{2}{\lambda_m}P_n^m(\mu)P_n^m(\mu')\cos m(\psi-\psi'),$$

qui permet d'exprimer la fonction

$$P_n = X_n(\cos\gamma) = X_n\left[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\psi-\psi')\right]$$

par une somme de produits de trois facteurs, dont chacun ne dépend que de l'une des variables μ, μ', $\psi-\psi'$.

329. Il est aisé de vérifier directement cette formule. En effet, P_n, considéré comme fonction de θ et $\psi-\psi'$, est une fonction de l'espèce Y_n; elle pourra donc se mettre sous la

forme

$$\mathrm{P}_n = \Sigma_0^n \mathrm{P}_n^m(\mu)\left[\mathrm{A}_{mn}\cos m(\psi-\psi') + \mathrm{B}_{mn}\sin m(\psi-\psi')\right],$$

où les coefficients A_{mn}, B_{mn} ne dépendent plus que de μ'.

D'ailleurs P_n est une fonction paire de $\psi-\psi'$; donc les coefficients B_{mn} seront tous nuls. De plus, P_n est symétrique en μ et μ'. Donc A_{mn} sera égal à $c_m \mathrm{P}_n^m(\mu')$, c_m désignant une constante.

Nous trouvons ainsi

$$(65)\qquad \mathrm{P}_n = \Sigma_0^n c_m \mathrm{P}_n^m(\mu)\mathrm{P}_n^m(\mu')\cos m(\psi-\psi'),$$

et il ne reste plus qu'à déterminer les constantes c_m.

A cet effet, nous égalerons les valeurs principales des deux membres lorsqu'on y pose $\mu=\mu'=\infty$; faisant, pour abréger, $\psi-\psi'=\varphi$, la quantité

$$\cos\gamma = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos\varphi$$

se réduira sensiblement à

$$\mu^2(1-\cos\varphi) = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi.\mu^2,$$

et

$$\mathrm{X}_n(\cos\gamma) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\cos\gamma^n}(\cos^2\gamma-1)^n$$
$$= \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2^n n!}\cos^n\gamma + \ldots$$

aura pour valeur principale

$$\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}\sin^{2n}\frac{1}{2}\varphi.\mu^{2n}.$$

Mais

$$(2i)^{2n}\sin^{2n}\frac{1}{2}\varphi = \left(e^{\frac{1}{2}\varphi i} - e^{-\frac{1}{2}\varphi i}\right)^{2n}$$
$$= 2\left[\cos n\varphi - \frac{2n}{1}\cos(n-1)\varphi + \ldots + (-1)^n\frac{1}{2}\,\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{n!}\right].$$

D'autre part,

$$P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') = P_n^m(\mu)^2 = (1-\mu^2)^m \left[\frac{\partial^m}{d\mu^m} X_n(\mu)\right]^2$$

$$= (-1)^m \left[\frac{2n(2n-1)\dots(n-m+1)}{2^n n!}\right]^2 \mu^{2n} + \dots.$$

La comparaison des termes en $\mu^{2n}\cos m\varphi$ dans les deux membres de l'équation (65) donnera donc, en posant $\lambda_m = 2$ si $m > 0$, $\lambda_m = 1$ si $m = 0$,

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{n!} \frac{1}{(2i)^{2n}} \frac{2}{\lambda_m} (-1)^{n-m} \frac{2n(2n-1)\dots(n+m+1)}{(n-m)!}$$

$$= (-1)^m \left[\frac{2n(2n-1)\dots(n-m+1)}{2^n n!}\right]^2 c_m,$$

d'où

$$c_m = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{2}{\lambda_m}.$$

330. *Équilibre de température de l'ellipsoïde.* — Nous devons satisfaire à l'équation

$$(66) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = 0$$

et à la condition aux limites

$$(67) \qquad U = F(x_1, x_2, x_3) \quad \text{pour} \quad \frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} = 1.$$

Posons

$$A_1 = \lambda_0 - e_1, \qquad A_2 = \lambda_0 - e_2, \qquad A_3 = \lambda_0 - e_3,$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

L'équation de l'ellipsoïde deviendra

$$\frac{x_1^2}{\lambda_0 - e_1} + \frac{x_2^2}{\lambda_0 - e_2} + \frac{x_3^2}{\lambda_0 - e_3} = 1.$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$e_2 < e_3 < e_1.$$

Par chaque point de l'espace passent trois surfaces du second degré homofocales

$$\frac{x_1^2}{\lambda - e_1} + \frac{x_2^2}{\lambda - e_2} + \frac{x_3^2}{\lambda - e_3} = 1$$

(t. I, nº 545), orthogonales entre elles; leurs paramètres λ_1, λ_2, λ_3 satisfont aux inégalités

$$e_2 < \lambda_1 < e_3 < \lambda_2 < e_1 < \lambda_3.$$

Réciproquement, à chaque système de valeurs de ces paramètres satisfaisant à ces inégalités, correspondent huit points réels, ayant pour coordonnées

$$x_\alpha = \pm\sqrt{\frac{(\lambda_1 - e_\alpha)(\lambda_2 - e_\alpha)(\lambda_3 - e_\alpha)}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

(t. I, nº 547).

331. On lèvera cette ambiguïté en posant

$$\lambda_1 = \wp u_1, \qquad \lambda_2 = \wp u_2, \qquad \lambda_3 = \wp u_3.$$

On a, en effet, d'après les notations adoptées dans la théorie des fonctions elliptiques (t. II, nºs 410 et 416),

$$\sqrt{\wp u - e_\alpha} = f_\alpha u, \qquad U_\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}},$$

d'où

$$(68) \qquad x_\alpha = \pm U_\alpha^2 f_\alpha u_1 f_\alpha u_2 f_\alpha u_3 \qquad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Si dans ces formules, qui donnent les trois coordonnées, nous convenons de prendre partout le signe $+$, à chaque système de valeurs de u_1, u_2, u_3 correspondra un seul point x_1, x_2, x_3.

Cherchons comment on devra faire varier u_1, u_2, u_3 pour obtenir une fois chaque point réel de l'espace.

Posons, pour abréger,

$$(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3) = \varphi(\lambda).$$

La première période

$$2\omega_1 = \int_{e_2}^{e_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

sera réelle et positive, et la seconde période $2\omega_2$ sera purement imaginaire

Si λ_1 varie de e_2 à e_3,

$$du_1 = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{\varphi(\lambda_1)}}$$

sera réel, et u_1 (ou du moins l'une de ses valeurs) variera en ligne droite de ω_2 à $\omega_2 + \omega_1$.

Si λ_2 varie de e_3 à e_1, du_2 sera purement imaginaire, et l'une des valeurs de u_2 variera en ligne droite de ω_3 à $\omega_3 + \omega_2$.

Enfin, si λ_3 varie de ∞ à e_1, du_3 sera réel, et l'une des valeurs de u_3 variera de o à ω_1.

On obtiendra donc tous les systèmes de valeurs admissibles pour λ_1, λ_2, λ_3 et, pour chacun d'eux, un seul des huit points x_1, x_2, x_3 qui lui correspondent, en faisant varier, en ligne droite,

$$u_1 \text{ de } \omega_2 \text{ à } \omega_2 + \omega_1,$$
$$u_2 \text{ de } \omega_3 \text{ à } \omega_3 + \omega_2,$$
$$u_3 \text{ de } 0 \text{ à } \omega_1.$$

Les autres points se déduiraient de celui-là en changeant les signes de ses coordonnées.

On les obtiendra tous et chacun deux fois, en faisant varier u_1 de ω_2 à $\omega_2 + 4\omega_1$, u_2 de ω_3 à $\omega_3 + 4\omega_2$, u_3 variant toujours de o â ω_1.

En effet, les relations

$$f_\alpha(-u) = -f_\alpha u, \qquad f_\alpha(u + 2\omega_\alpha) = f_\alpha u,$$
$$f_\alpha(u + 2\omega_\beta) = -f_\alpha u$$

(t. II, n° 416) montrent qu'on a

$$f_\alpha u' = \pm f_\alpha u,$$

si $u' + u$ ou $u' - u$ est une période. Or, à chaque valeur u_1

de u, comprise entre ω_2 et $\omega_2+\omega_1$, correspondent, dans l'intervalle de ω_2 à $\omega_2+4\omega_1$, trois autres valeurs de ce genre,

$$u'_1 = 2\omega_2+2\omega_1-u_1, \qquad u''_1 = u_1+2\omega_1, \qquad u'''_1 = u'_1+2\omega_1.$$

A chaque valeur u_2 comprise entre ω_3 et $\omega_3+\omega_2$ correspondent de même dans l'intervalle de ω_3 à $\omega_3+4\omega_2$ les trois valeurs associées

$$u'_2 = 2\omega_3+2\omega_2-u_2, \qquad u''_2 = u_2+2\omega_2, \qquad u'''_2 = u'_2+2\omega_2.$$

Les 16 points

$$(u_1 u_2 u_3), \quad (u'_1 u_2 u_3), \quad \ldots, \quad (u'''_1 u'''_2 u_3)$$

auront, au signe près, les mêmes coordonnées $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$. On vérifie aisément que chacune des combinaisons de signes est reproduite deux fois. Ainsi $(u_1 u_2 u_3)$ représentera le même point de l'espace que $(u'_1 u'''_2 u_3)$, $(u_1 u'_2 u_3)$ le même point que $(u'_1 u''_2 u_3)$, etc.

332. Ces préliminaires posés, prenons u_1, u_2, u_3 pour variables indépendantes, et cherchons la transformée de l'équation différentielle (66); on a

$$\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = \sum_k \frac{\partial U}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = \sum_k \frac{\partial^2 U}{\partial u_k^2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + 2\sum_{k,l}\frac{\partial^2 U}{\partial u_k\, du_l}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha} + \sum_k \frac{\partial U}{\partial u_k}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha^2},$$

d'où

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha^2} = \sum_k \frac{\partial^2 U}{\partial u_k^2}\sum_\alpha\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + 2\sum_{k,l}\frac{\partial^2 U}{\partial u_k\,\partial u_l}\sum_\alpha\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha} + \sum_k\frac{\partial U}{\partial u_k}\sum_\alpha\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha^2}.$$

Reste à calculer les sommes

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2, \quad \sum_\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha}, \quad \sum_\alpha \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha^2}.$$

Or on a

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} = \frac{du_k}{d\lambda_k}\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi\lambda_k}}\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha},$$

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha^2} = -\frac{1}{4}\frac{\varphi'\lambda_k}{(\varphi\lambda_k)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2\sqrt{\varphi\lambda_k}}\frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial x_\alpha^2},$$

d'où

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{4\varphi\lambda_k}\sum_\alpha \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2,$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{4\sqrt{\varphi\lambda_k}\sqrt{\varphi\lambda_l}}\sum_\alpha \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \lambda_l}{\partial x_\alpha},$$

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi\lambda_k}}\left[-\frac{1}{2}\frac{\varphi'\lambda_k}{\varphi\lambda_k}\sum_\alpha \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \sum_\alpha \frac{\partial^2 \lambda_k}{\partial x_\alpha^2}\right].$$

Or, les surfaces $\lambda_k = \text{const.}$, $\lambda_l = \text{const.}$ se coupant à angle droit, on a

$$\sum_\alpha \frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \lambda_l}{\partial x_\alpha} = 0.$$

D'autre part, en dérivant par rapport à x_α l'équation

$$\frac{x_1^2}{\lambda_k - e_1} + \frac{x_2^2}{\lambda_k - e_2} + \frac{x_3^2}{\lambda_k - e_3} = 1, \tag{69}$$

et posant pour abréger

$$S_k = \sum_i \frac{x_i^2}{(\lambda_k - e_i)^2},$$

il viendra

$$\frac{2x_\alpha}{\lambda_k - e_\alpha} - S_k\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha} = \frac{1}{S_k}\frac{2x_\alpha}{\lambda_k - e_\alpha}, \tag{70}$$

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{S_k^2}4S_k = \frac{4}{S_k}. \tag{71}$$

D'ailleurs si, dans l'expression de S_k, on remplace chacune des quantités x_α^2 par sa valeur

$$\frac{(\lambda_1 - e_\alpha)(\lambda_2 - e_\alpha)(\lambda_3 - e_\alpha)}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)},$$

il vient

$$S_k = \sum_\alpha \frac{(\lambda_l - e_\alpha)(\lambda_m - e_\alpha)}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)(\lambda_k - e_\alpha)} = \frac{(\lambda_l - \lambda_k)(\lambda_m - \lambda_k)}{\varphi\lambda_k},$$

d'après la formule connue de la décomposition en fractions simples (l, m désignent les deux indices de la suite 1, 2, 3 qui diffèrent de k).

On aura donc

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{4\varphi\lambda_k}\frac{4}{S_k} = \frac{1}{(\lambda_l - \lambda_k)(\lambda_m - \lambda_k)}.$$

Enfin l'équation (69) dérivée deux fois de suite par rapport à x_α donnera, en posant pour abréger

$$\sum_i \frac{x_i^2}{(\lambda_k - e_i)^3} = T_k, \tag{72}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{\lambda_k - e_\alpha} - 2\frac{2x_\alpha}{(\lambda_k - e_\alpha)^2}\frac{\partial\lambda_k}{\partial x_\alpha} + 2\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 T_k - \frac{\partial^2\lambda_k}{\partial x_\alpha^2}S_k \\ &= \frac{2}{\lambda_k - e_\alpha} - \frac{8x_\alpha^2}{(\lambda_k - e_\alpha)^3}\frac{1}{S_k} + 2\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 T_k - \frac{\partial^2\lambda_k}{\partial x_\alpha^2}S_k. \end{aligned}$$

Sommant par rapport à α, il vient, d'après (71) et (72),

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_\alpha \frac{2}{\lambda_k - e_\alpha} - S_k \sum_\alpha \frac{\partial^2\lambda_k}{\partial x_\alpha^2} \\ &= 2\frac{\varphi'\lambda_k}{\varphi\lambda_k} - S_k \sum_\alpha \frac{\partial^2\lambda_k}{\partial x_\alpha^2}. \end{aligned}$$

Comparant cette équation à la précédente,

$$\sum_\alpha \left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{4}{S_k},$$

il vient

$$-\frac{1}{2}\frac{\varphi'\lambda_k}{\varphi\lambda_k}\sum_\alpha \left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \sum_\alpha \frac{\partial^2\lambda_k}{\partial x_\alpha^2} = 0,$$

et, par suite,

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\alpha^2} = 0.$$

L'équation différentielle transformée sera donc

$$\sum_k \frac{1}{(\lambda_l - \lambda_k)(\lambda_m - \lambda_k)} \frac{\partial^2 U}{\partial u_k^2} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs et remplaçant λ_1, λ_2, λ_3 par pu_1, pu_2, pu_3,

$$(73) \qquad (pu_2 - pu_3)\frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} + (pu_3 - pu_1)\frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} + (pu_1 - pu_2)\frac{\partial^2 U}{\partial u_3^2} = 0.$$

333. Quant à l'équation à la surface, il est aisé de la former. Soit υ la racine de l'équation

$$pu = \lambda_0,$$

comprise entre 0 et ω_1; on obtiendra les points de la surface de l'ellipsoïde, chacun deux fois, en posant $u_3 = \upsilon$ et faisant varier u_1 de ω_2 à $\omega_2 + 4\omega_1$, u_2 de ω_3 à $\omega_3 + 4\omega_2$. La température en chaque point de la surface étant donnée, on aura, pour $u_3 = \upsilon$,

$$(74) \qquad U = \Phi(u_1, u_2),$$

Φ étant une fonction arbitrairement donnée de $u_1 = \omega_2$ à $u_1 = \omega_2 + 4\omega_1$, et de $u_2 = \omega_3$ à $u_2 = \omega_3 + 4\omega_2$. (Elle devra d'ailleurs reprendre la même valeur pour les deux systèmes de valeurs de u_1, u_2 qui représentent le même point.)

334. On peut aisément trouver des solutions simples de l'équation aux dérivées partielles (73). Nous avons vu, en effet (**235**), que pour chaque valeur de l'entier positif n on peut déterminer $2n + 1$ valeurs de la constante h telles que,

pour chacune d'elles, l'équation de Lamé

$$\frac{d^2 x}{du^2} - [n(n+1)\wp u + h]x = 0$$

admette une solution particulière

$$M(u) = NP$$

qui possède les deux périodes $4\omega_1$ et $4\omega_2$.

Posons, pour abréger,

$$M(u_1) = M_1 = N_1 P_1, \quad \ldots, \quad M(u_3) = M_3 = N_3 P_3.$$

Le produit $M_1 M_2 M_3$ satisfera à l'équation aux dérivées partielles; car le résultat de la substitution sera

$$M_1 M_2 M_3 \Sigma[n(n+1)\wp u_\alpha + h](\wp u_\beta - \wp u_\gamma),$$

quantité identiquement nulle.

Cette solution simple, exprimée en fonction de x_1, x_2, x_3, sera un polynome entier; car N étant un produit de facteurs de la forme $f_\alpha u$, $N_1 N_2 N_3$ sera un produit de facteurs tels que

$$f_\alpha u_1 f_\alpha u_2 f_\alpha u_3 = \frac{x_\alpha}{U_\alpha^2}.$$

D'autre part, $P_1 P_2 P_3$ sera un polynome entier et symétrique par rapport aux quantités $\wp u_1$, $\wp u_2$, $\wp u_3$. Or celles-ci sont les racines de l'équation du troisième degré

$$\sum \frac{x_\alpha^2}{\lambda - e_\alpha} = 1$$

dont les coefficients sont des polynomes entiers en x_1, x_2, x_3.

335. En associant les solutions simples qui précèdent, nous obtiendrons une série

$$\Sigma c_k M_1^{(k)} M_2^{(k)} M_3^{(k)}$$

qui résoudra le problème proposé si les coefficients c_k peuvent être déterminés de manière à satisfaire à l'équation à la surface

$$(75) \qquad \Sigma c_k \mathrm{M}_1^{(k)} \mathrm{M}_2^{(k)} m_3^{(k)} = \Phi(u_1, u_2),$$

$m_3^{(k)}$ représentant la valeur de $\mathrm{M}_3^{(k)}$ pour $u_2 = \upsilon$.

336. En admettant provisoirement que la fonction Φ soit susceptible d'un développement de la forme (75), il sera aisé d'en déterminer les coefficients.

Multiplions, en effet, l'égalité (75) par $\mathrm{M}_1^{(i)} \mathrm{M}_2^{(i)} (\wp u_1 - \wp u_2)$ et intégrons par rapport à u_1 de ω_2 à $\omega_2 + 4\omega_1$, et par rapport à u_2 de ω_3 à $\omega_3 + 4\omega_2$; l'intégrale double

$$\mathbf{S}\, \mathrm{M}_1^{(k)} \mathrm{M}_2^{(k)} \mathrm{M}_1^{(i)} \mathrm{M}_2^{(i)} (\wp u_1 - \wp u_2)\, du_1\, du_2,$$

qui multiplie $c_k m_3^{(k)}$, est le déterminant des quatre intégrales simples

$$\mathrm{I}_1 = \int \mathrm{M}_1^{(i)} \mathrm{M}_1^{(k)} \wp u_1\, du_1, \qquad \mathrm{I}_2 = \int \mathrm{M}_2^{(i)} \mathrm{M}_2^{(k)} \wp u_2\, du_2,$$

$$\mathrm{J}_1 = \int \mathrm{M}_1^{(i)} \mathrm{M}_1^{(k)}\, du_1, \qquad \mathrm{J}_2 = \int \mathrm{M}_2^{(i)} \mathrm{M}_2^{(k)}\, du_2.$$

Ce déterminant est nul si $i \gtrless k$.

En effet, $\mathrm{M}^i(u)$, $\mathrm{M}^k(u)$ sont solutions de deux équations de Lamé différentes, telles que

$$\frac{d^2 \mathrm{M}^{(i)}}{du^2} - [n(n+1)\wp u + h]\mathrm{M}^{(i)} = 0,$$

$$\frac{d^2 \mathrm{M}^{(k)}}{du^2} - [n'(n'+1)\wp u + h']\mathrm{M}^{(k)} = 0.$$

On en déduit

$$[n(n+1) - n'(n'+1)]\mathrm{M}^{(i)}\mathrm{M}^{(k)}\wp u + (h - h')\mathrm{M}^{(i)}\mathrm{M}^{(k)}$$
$$= \mathrm{M}^{(k)} \frac{d^2 \mathrm{M}^{(i)}}{du^2} - \mathrm{M}^{(i)} \frac{d^2 \mathrm{M}^{(k)}}{du^2}$$
$$= \frac{d}{du}\left[\mathrm{M}^{(k)} \frac{d\mathrm{M}^{(i)}}{du} - \mathrm{M}^{(i)} \frac{d\mathrm{M}^{(k)}}{du}\right].$$

Intégrons de ω_2 à $\omega_2 + 4\omega_1$. Les fonctions M admettant la période $4\omega_1$, l'intégrale du second membre sera nulle, et il viendra

$$[n(n+1) - n'(n'+1)]\,I_1 + (h-h')\,J_1 = 0.$$

Intégrant de ω_3 à $\omega_3 + 4\omega_2$, on trouverait de même

$$[n(n+1) - n'(n'+1)]\,I_2 + (h-h')\,J_2 = 0,$$

d'où

$$I_1 J_2 - I_2 J_1 = 0,$$

à moins qu'on n'ait à la fois $n = n'$, $h = h'$, d'où $i = k$.

Calculons ce même déterminant dans l'hypothèse où $i = k$. Les fonctions $M^{(k)} M^{(k)} pu$, $M^{(k)} M^{(k)}$ admettent les périodes $2\omega_1$, $2\omega_2$; elles sont paires et n'ont de pôle que pour $u = 0$. Décomposées en éléments simples, elles seront donc de la forme

$$\begin{aligned} M^{(k)} M^{(k)} pu &= \alpha^k + \alpha_0^k pu + \alpha_1^k p'' u + \ldots, \\ M^{(k)} M^{(k)} &= \beta^k + \beta_0^k pu + \beta_1^k p'' u + \ldots. \end{aligned}$$

Intégrant de ω_2 à $\omega_2 + 4\omega_1$, il viendra

$$I_1 = 4\alpha^k \omega_1 - 4\alpha_0^k \eta_1, \qquad J_1 = 4\beta^k \omega_1 - 4\beta_0^k \eta_1.$$

En intégrant de ω_3 à $\omega_3 + 4\omega_2$, on aurait de même

$$I_2 = 4\alpha^k \omega_2 - 4\alpha_0^k \eta_2, \qquad J_2 = 4\beta^k \omega_2 - 4\beta_0^k \eta_2,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} I_1 J_2 - I_2 J_1 &= 16(\alpha^k \beta_0^k - \alpha_0^k \beta^k)(\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1) \\ &= 8\pi i (\alpha^k \beta_0^k - \alpha_0^k \beta^k). \end{aligned}$$

On aura donc, pour déterminer c_k, la formule

$$8\pi i (\alpha^k \beta_0^k - \alpha_0^k \beta^k) m_3^{(k)} c_k = \mathbf{S}\, \Phi M_1^{(k)} M_2^{(k)} (pu_1 - pu_2)\, du_1\, du_2.$$

337. Il reste toutefois à établir que la fonction arbitraire $\Phi(u_1, u_2)$ admet effectivement un développement de la forme (75). Nous y parviendrons par les considérations suivantes :

Soient x_1, x_2, x_3 et r, u_1, u_2 deux systèmes de variables liés par les relations

$$x_\alpha = r\,\mathrm{U}_\alpha^2 f_\alpha u_1 f_\alpha u_2 = r\sqrt{\frac{(\wp u_1 - e_\alpha)(\wp u_2 - e_\alpha)}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}}.$$

On en déduit aisément

$$\Sigma x_\alpha^2 = r^2,$$

$$\sum \frac{x_\alpha^2}{\wp u_1 - e_\alpha} = 0,$$

$$\sum \frac{x_\alpha^2}{\wp u_2 - e_\alpha} = 0.$$

Ces équations représentent une sphère et deux cônes homofocaux, qui se coupent à angle droit.

A chaque point réel x_1, x_2, x_3 correspondent : 1° une seule valeur de r; 2° deux racines de l'équation

$$\sum \frac{x_\alpha^2}{\lambda - e_\alpha} = 0,$$

dont la première, $\lambda_1 = \wp u_1$, sera comprise entre e_2 et e_3; et la seconde $\lambda_2 = \wp u_2$ entre e_3 et e_1; 3° deux systèmes de valeurs de u_1, u_2 tels que u_1 soit compris entre ω_2 et $\omega_2 + 4\omega_1$, et u_2 entre ω_3 et $\omega_3 + 4\omega_2$.

Réciproquement, si le point (u_1, u_2) parcourt le domaine ainsi défini, le point (x_1, x_2, x_3) décrira deux fois la sphère de rayon r qui a l'origine pour centre.

338. Si l'on prend r, u_1, u_2 pour variables indépendantes, l'équation du potentiel

$$\sum \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x_\alpha^2} = 0$$

se transformera en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial r^2} \sum \left(\frac{\partial r}{\partial x_\alpha}\right)^2 &+ \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial u_1^2} \sum \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial u_2^2} \sum \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha}\right)^2 \\
&+ 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial r\, \partial u_1} \sum \frac{\partial r}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} + \ldots \\
&+ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r} \sum \frac{\partial^2 r}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u_1} \sum \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_\alpha^2} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u_2} \sum \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_\alpha^2} = 0.
\end{aligned}$$

Les termes de la seconde ligne disparaissent, car les surfaces $r = \text{const.}$, $u_1 = \text{const.}$, $u_2 = \text{const.}$ étant orthogonales, on a

$$\sum \frac{\partial r}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad \ldots.$$

L'équation

$$\Sigma x_\alpha^2 = r^2$$

donne, d'autre part,

$$x_\alpha = r \frac{\partial r}{\partial x_\alpha}, \qquad 1 = \left(\frac{\partial r}{\partial x_\alpha}\right)^2 + r \frac{\partial^2 r}{\partial x_\alpha^2},$$

d'où

$$\sum \left(\frac{\partial r}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 1, \qquad \sum \frac{\partial^2 r}{\partial x_\alpha^2} = \frac{2}{r}.$$

D'autre part, les équations

$$\sum \frac{x_\alpha^2}{\lambda_1 - e_\alpha} = 0, \qquad \lambda_1 = \wp u_1$$

donneront, comme au n° 332,

$$\sum \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{4 \varphi \lambda_1} \frac{4}{S_1}, \qquad \sum \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_\alpha^2} = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\varphi\lambda = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3), \qquad S_1 = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(\lambda_1 - e_\alpha)^2}.$$

Or on a ici

$$x_\alpha^2 = r^2 \frac{(\lambda_1 - e_\alpha)(\lambda_2 - e_\alpha)}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)},$$

d'où

$$S_1 = r^2 \sum \frac{\lambda_2 - e_\alpha}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)(\lambda_1 - e_\alpha)} = r^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\varphi\lambda_1}.$$

On a donc finalement

$$\sum \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{r^2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{1}{r^2(\wp u_2 - \wp u_1)}.$$

On trouvera, de même,

$$\sum \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{r^2(\wp u_1 - \wp u_2)}, \qquad \sum \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_\alpha^2} = 0.$$

L'équation du potentiel aura donc pour transformée la suivante :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2(\wp u_2 - \wp u_1)}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2}\right) + \frac{2}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

ou

$$(76) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} + \left(r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial U}{\partial r}\right)(\wp u_2 - \wp u_1) = 0.$$

Cela posé, on sait (t. II, n° 277) que pour chaque valeur de l'entier positif n il existe $2n+1$ fonctions Y_n linéairement distinctes et définies par cette double propriété :

1° Les fonctions $r^n Y_n$ (où $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$) sont des polynomes homogènes d'ordre n en x_1, x_2, x_3; 2° ces polynomes satisfont à l'équation du potentiel.

Mais nous venons de voir qu'à cette même valeur de n correspondent $2n+1$ valeurs de h pour lesquelles l'équation de Lamé,

$$\frac{d^2 M}{du^2} - [n(n+1)\wp u + h]M = 0,$$

admet une intégrale doublement périodique de la forme

$$M = NP.$$

Les produits correspondants

$$M_1 M_2 = N_1 N_2 P_1 P_2$$

seront précisément les $2n+1$ fonctions Y_n exprimées au moyen des variables u_1, u_2.

En effet, soit k le degré du polynome P; $N_1 N_2$ sera un produit de $n-k$ facteurs tels que

$$f_\alpha u_1 . f_\alpha u_2 = \frac{1}{U_\alpha^2} \frac{x_\alpha}{r}.$$

D'autre part, $P_1 P_2$ sera un polynome en pu_1, pu_2 symétrique et de degré n par rapport à ces deux quantités; ce sera donc un polynome d'ordre n en $pu_1 pu_2$ et $pu_1 + pu_2$. Mais les équations

$$x_\alpha^2 = \frac{r^2(pu_1 - e_\alpha)(pu_2 - e_\alpha)}{(e_\beta - e_\alpha)(e_\gamma - e_\alpha)}$$

permettent d'exprimer les quantités

$$pu_1 pu_2, \quad pu_1 + pu_1, \quad 1$$

en fonction linéaire et homogène des trois quantités $\frac{x_\alpha^2}{r^2}$.

Donc la fonction $r^n M_1 M_2 = U$ sera bien un polynome homogène et de degré n en x_1, x_2, x_3. Il reste à s'assurer qu'elle satisfait à l'équation (76).

Cette vérification est immédiate, car on a

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_1^2} = [n(n+1)pu_1 + h]U,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u_2^2} = [n(n+1)pu_2 + h]U,$$

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial U}{\partial r} = n(n-1)U + 2nU = n(n+1)U.$$

Le développement de la fonction arbitraire Φ en une série de termes $M_1 M_2$ sera donc possible aux mêmes conditions que le développement en série de fonctions Y_n; ces deux développements, identiques au fond, ne diffèrent l'un de l'autre que par le choix des variables indépendantes.

339. *Refroidissement d'une sphère homogène.* — Soit r le rayon de la sphère; nous aurons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

avec la condition initiale

$$U = f \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < r^2;$$

f étant une fonction donnée de x, y, z, et la condition à la surface

$$\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + HU = 0 \quad \text{pour} \quad x^2+y^2+z^2=r^2,$$

α, β, γ étant les cosinus des angles formés par la normale extérieure avec les axes coordonnés.

Remplaçons x, y, z par des coordonnées polaires ρ, θ, ψ. L'équation aux dérivées partielles deviendra (t. I, n° 139)

$$(77) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right).$$

La condition initiale prendra la forme

$$(78) \qquad U = f \quad \text{pour} \quad t = 0, \quad \rho < r,$$

et la condition à la surface deviendra, en remarquant que l'on a

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial \rho}, \qquad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial \rho}, \qquad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial \rho},$$

$$(79) \qquad \frac{\partial U}{\partial \rho} + HU = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = r.$$

340. Pour déterminer une solution simple qui satisfasse aux équations (77) et (79), posons

$$U = e^{-a^2 p^2 t} Y_n R,$$

p désignant une constante, Y_n une fonction de Laplace et R une fonction de ρ. Ces équations deviendront, après qu'on aura chassé les dénominateurs et supprimé les facteurs communs,

$$(80) \qquad \begin{cases} 0 = \rho^2 \dfrac{d^2 R}{d\rho^2} + 2\rho \dfrac{dR}{d\rho} + [p^2\rho^2 - n(n+1)]R \\ \quad = \dfrac{d}{d\rho}\rho^2 \dfrac{dR}{d\rho} + [p^2\rho^2 - n(n+1)]R, \end{cases}$$

$$(81) \qquad \frac{dR}{d\rho} + HR = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = r.$$

L'équation (80) rentre dans la catégorie de celles que nous avons ramenées à l'équation de Bessel (**195**). Elle admet, comme solution particulière, l'expression

$$(p\rho)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(p\rho)$$

que nous désignerons par $F_n(p\rho)$. Cette fonction est le produit de $p^n \rho^n$ par une série, procédant suivant les puissances entières de $p^2\rho^2$.

Il reste à satisfaire à l'équation aux limites (81). Il faut pour cela que p soit une racine de l'équation transcendante

$$\frac{\partial F_n(pr)}{\partial r} + H F_n(pr) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est évidemment une fonction entière de p^2 si $n = 0$; une semblable fonction, multipliée par p^n, si $n > 0$; supprimant, dans ce dernier cas, la racine parasite $p = 0$, qui ne fournirait qu'une solution identiquement nulle, nous obtiendrons dans tous les cas une équation de la forme

$$(82) \qquad \varpi_n(p^2) = 0.$$

La fonction $F_n(p\rho)$ s'annule évidemment pour $\rho = 0$ si $n > 0$; et, si $n = 0$, sa dérivée s'annule; on aura donc, dans tous les cas, en désignant par p et q deux valeurs quelconques du paramètre p,

$$F_n(q\rho)\frac{\partial F_n(p\rho)}{\partial \rho} - F_n(p\rho)\frac{\partial F_n(q\rho)}{\partial \rho} = 0 \quad \text{pour} \quad \rho = 0,$$

et la même relation aura lieu pour $\rho = r$, si p et q sont racines de l'équation (82).

L'équation (80) est d'ailleurs un cas particulier de l'équation (41) considérée aux n^{os} **314** et suivants, dont elle se déduit en remplaçant V, x, r, X par R, ρ, p^2, r et donnant à k, g, l les valeurs particulières ρ^2, ρ^2, $n(n+1)$. On en conclut :

1° Que les valeurs de p^2 qui satisfont à l'équation $\varpi_n(p^2)=0$ sont toutes réelles, positives, inégales et en nombre infini ;

2° Qu'en désignant par p^2, q^2, ... ces racines, l'intégrale

$$K_{pq}^n = \int_0^r \rho^2 F_n(p\rho) F_n(q\rho)\, d\rho,$$

sera nulle, si p^2 diffère de q^2; soit, au contraire, $q=p$; on aura

$$\begin{aligned} K_{pp}^n &= r^2 \left[\frac{\partial F_n(pr)}{\partial p^2} \frac{\partial F_n(pr)}{\partial r} - F_n(pr) \frac{\partial^2 F_n(pr)}{\partial r\, \partial p^2} \right] \\ &= \frac{r^2}{2p} \left[\frac{\partial F_n(pr)}{\partial p} \frac{\partial F_n(pr)}{\partial r} - F_n(pr) \frac{\partial^2 F_n(pr)}{\partial r\, \partial p} \right]. \end{aligned}$$

341. Posons, d'autre part, comme au n° 326,

$$\cos\theta = \mu, \qquad P_n^m(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n\, n!} \frac{d^{m+n}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{m+n}}.$$

On a vu que $P_n^m(\mu)\cos m\psi$, $P_n^m(\mu)\sin m\psi$ sont des fonctions Y_n; on satisfera donc à la fois à l'équation aux dérivées partielles et à la condition à la surface par les solutions simples

$$e^{-a^2p^2t} P_n^m(\mu) \cos m\psi\, F_n(p\rho),$$
$$e^{-a^2p^2t} P_n^m(\mu) \sin m\psi\, F_n(p\rho),$$

et plus généralement par la série

$$\Sigma\Sigma\Sigma\, e^{-a^2p^2t} P_n^m(\mu) (A_{mnp} \cos m\psi + B_{mnp} \sin m\psi)\, F_n(p\rho),$$

où les A, B sont des constantes arbitraires, et les sommations s'étendant :

1° Celle par rapport à n, à toutes les valeurs entières de 0 à ∞; 2° celle par rapport à m, aux valeurs entières de 0 à n; 3° celle par rapport à p, à toutes les racines positives p de l'équation $\varpi_n(p^2)=0$.

342. Cherchons à déterminer les constantes A, B, de telle sorte que la série satisfasse à la condition initiale

$$(83)\quad \Sigma\Sigma\Sigma \mathrm{P}_n^m(\mu)(\mathrm{A}_{mnp}\cos m\psi + \mathrm{B}_{mnp}\sin m\psi)\mathrm{F}_n(p\rho) = f,$$

pour tous les points intérieurs de la sphère, c'est-à-dire pour $0 \leqq \rho < r$, $-1 \leqq \mu \leqq 1$, $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$.

Soit m', n', p' un des systèmes de valeurs associées des paramètres m, n, p. Pour déterminer $\mathrm{A}_{m'n'p'}$, multiplions l'équation (83) par $\cos m'\psi\, d\psi$ et intégrons de 0 à 2π. Tous les termes du premier membre donnent une intégrale nulle, sauf ceux qui contiennent $\cos m'\psi$. On a, pour ceux-ci,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m'\psi\, d\psi = \lambda_{m'}\pi, \qquad \lambda_{m'} = \begin{cases} 1, \text{ si } m' > 0, \\ 2, \text{ si } m' = 0. \end{cases}$$

Il viendra donc

$$\int_0^{2\pi} f\cos m'\psi\, d\psi = \Sigma\Sigma\, \mathrm{P}_n^{m'}(\mu)\mathrm{A}_{m'np}\lambda_{m'}\pi\mathrm{F}(p\rho).$$

Multiplions cette égalité par $\mathrm{P}_{n'}^{m'}(\mu)\,d\mu$, et intégrons de -1 à $+1$. Tous les termes du second membre donneront une intégrale nulle (**327**), sauf ceux où $n = n'$, pour lesquels on a

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_{n'}^{m'}(\mu)\mathrm{P}_{n'}^{m'}(\mu)\,d\mu = \frac{(n'+m')!}{(n'-m')!}\,\frac{2}{2n'+1} = \mathrm{I}_{n'n'}^{m'}.$$

il viendra donc

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f\cos m'\psi\,\mathrm{P}_{n'}^{m'}(\mu)\,d\psi\,d\mu = \Sigma\mathrm{A}_{m'n'p}\lambda_{m'}\pi\,\mathrm{I}_{n'n'}^{m'}\mathrm{F}(p\rho),$$

la sommation ne s'étendant plus qu'aux valeurs de p correspondant à la valeur n' de l'entier n.

Multiplions enfin par $\rho^2\mathrm{F}(p'\rho)\,d\rho$ et intégrons de 0 à r; tous les termes du second membre donneront une intégrale nulle, sauf celui où $p = p'$, et l'on aura finalement, pour dé-

terminer $A_{m'n'p'}$, l'équation

$$\int_0^r \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f \cos m'\psi \, P_{n'}^{m'}(\mu) \rho^2 F(p'\rho) \, d\psi \, d\mu \, d\rho$$
$$= A_{m'n'p'} \lambda_{m'} \pi \, I_{n'n'}^{m'} K_{p'p'}^{n'}.$$

On trouvera, par le même procédé, pour déterminer $B_{m'n'p'}$, l'équation analogue

$$\int_0^r \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f \sin m'\psi \, P_{n'}^{m'}(\mu) \rho^2 F(p'\rho) \, d\psi \, d\mu \, d\rho$$
$$= B_{m'n'p'} \lambda_{m'} \pi \, I_{n'n'}^{m'} K_{p'p'}^{n'}.$$

Substituons, dans la série (83), les valeurs que nous venons de trouver pour les coefficients, et accentuons les variables d'intégration, afin de pouvoir faire rentrer sans ambiguïté sous les signes d'intégration les facteurs qui leur sont extérieurs; nous obtiendrons comme valeur initiale de U l'expression

$$(84) \quad \sum\sum\sum \int_0^r \int_{-1}^{-1} \int_0^{2\pi} \frac{f(\psi', \mu', \rho')}{\lambda_m \pi \, I_{nn}^m K_{pp}^n} P_n^m(\mu) P_n^m(\mu')$$
$$\times \cos m(\psi - \psi') \rho'^2 F_n(p\rho) F_n(p\rho') \, d\psi' \, d\mu' \, d\rho'.$$

343. Mais il reste à prouver que, en additionnant les termes de cette série triple dans un ordre convenable, on trouvera bien pour somme $f(\psi, \mu, \rho)$.

Laissons d'abord n et m constants, et bornons-nous à faire varier p de manière à lui faire prendre successivement pour valeurs les diverses racines positives de l'équation

$$\varpi_n(p^2) = 0,$$

supposées rangées par ordre de grandeur croissante. Nous aurons à déterminer la valeur de la somme

$$(85) \quad \sum \int_0^r \frac{f(\psi', \mu', \rho')}{K_{pp}^n} \rho'^2 F_n(p\rho) F_n(p\rho') \, d\rho',$$

pour les valeurs de ρ comprises entre o et r. Nous verrons qu'elle est égale à $f(\psi', \mu', \rho)$ [pourvu que cette expression considérée comme fonction de ρ, soit continue et ait une variation limitée dans l'intervalle de o à r, quels que soient ψ' et μ'].

La somme (84) se réduira dès lors à la somme double

$$\sum\sum\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi}\frac{f(\psi', \mu', \rho)}{\lambda_m \pi I_{nn}^m} P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \cos m(\psi - \psi')\, d\psi'\, d\mu',$$

qu'on sait être égale à $f(\psi, \mu, \rho)$ [328].

Tout revient donc à établir ce que nous avons annoncé pour la somme de la série (85).

344. En cessant, pour plus de simplicité, de mettre en évidence les quantités ψ', μ', n qui conservent une valeur constante dans toute cette recherche, cette expression peut s'écrire ainsi :

$$(85)' \qquad \int_0^r f(\rho')\rho'^2\, d\rho' \sum \frac{F(p\rho)F(p\rho')}{K_{pp}}.$$

La fonction $F(p\rho)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial F(p\rho)}{\partial\rho} + [p^2\rho^2 - n(n+1)]F(p\rho) = 0,$$

et, comme elle est symétrique en ρ et p, on aura aussi

$$(86) \qquad \frac{\partial}{\partial p}p^2\frac{\partial F(p\rho)}{\partial p} + [p^2\rho^2 - n(n+1)]F(p\rho) = 0.$$

On a de même

$$\frac{\partial}{\partial p}p^2\frac{\partial F(p\rho')}{\partial p} + [p^2\rho'^2 - n(n+1)]F(p\rho') = 0.$$

En combinant ces deux équations, on trouve

$$(\rho'^2 - \rho^2)p^2 F(p\rho)F(p\rho')$$
$$= F(p\rho')\frac{\partial}{\partial p}p^2\frac{\partial F(p\rho)}{\partial p} - F(p\rho)\frac{\partial}{\partial p}p^2\frac{\partial F(p\rho')}{\partial p} = \varphi'(p);$$

en posant, pour abréger,

$$\varphi(p) = p^2 \left[F(p\rho') \frac{\partial}{\partial p} F(p\rho) - F(p\rho) \frac{\partial}{\partial p} F(p\rho') \right]$$
$$= p^2 [\rho F(p\rho') F'(p\rho) - \rho' F(p\rho) F'(p\rho')];$$

on aura, par suite,

$$(87) \qquad F(p\rho) F(p\rho') = \frac{\varphi'(p)}{(\rho'^2 - \rho^2) p^2}.$$

Nous avons trouvé d'autre part

$$K_{pp} = \frac{r^2}{2p} \left[\frac{\partial F(pr)}{\partial p} \frac{\partial F(pr)}{\partial r} - F(pr) \frac{\partial^2 F(pr)}{\partial r \, \partial p} \right].$$

Pour transformer cette expression, nous remarquerons qu'on a

$$\frac{\partial F(pr)}{\partial r} = p F'(pr) = \frac{p}{r} \frac{\partial F(pr)}{\partial p},$$

ce qui permet de mettre K_{pp} sous la forme

$$(88) \quad K_{pp} = \frac{r}{2p} \left\{ p \left[\frac{\partial F(pr)}{\partial p} \right]^2 - F(pr) \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial F(pr)}{\partial p} \right\},$$

et de donner à l'équation à la surface,

$$\frac{\partial F(pr)}{\partial r} + H F(pr) = 0,$$

la forme suivante :

$$(89) \qquad p \frac{\partial F(pr)}{\partial p} + H r F(pr) = 0.$$

Désignons par $\psi(p)$ le premier membre de cette équation; l'identité

$$(90) \qquad p \frac{\partial F(pr)}{\partial p} + H r F(pr) = \psi(p),$$

étant différentiée, donnera

$$(91) \qquad \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial F(pr)}{\partial p} + H r \frac{\partial F(pr)}{\partial p} = \psi'(p)$$

Enfin, pour $\rho = r$, l'équation (86) peut se mettre sous la forme

$$(92)\qquad p\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial F(pr)}{\partial p} + p\frac{\partial F(pr)}{\partial p} + [p^2r^2 - n(n+1)]F(pr) = 0.$$

Tirons des équations (89), (91), (92) les valeurs de $F(pr)$, $\frac{\partial F(pr)}{\partial p}$, $\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial F(pr)}{\partial p}$ pour les substituer dans (88), il viendra

$$K_{pp} = \frac{r}{2Q(p)}\psi'^2(p),$$

en posant, pour abréger,

$$p^2r^2 - n(n+1) - Hr(1 - Hr) = Q(p).$$

On aura, par suite,

$$\frac{F(p\rho)F(p\rho')}{K_{pp}} = \frac{2Q(p)\varphi'(p)}{r(\rho'^2 - \rho^2)p^2\psi'^2(p)}.$$

345. Il est aisé de voir que cette expression est le résidu, pour le pôle $z = p$, de la fonction

$$\chi(z) = \frac{2Q(z)\varphi(z)}{r(\rho'^2 - \rho^2)z^2\psi^2(z)}.$$

En effet, posons $z = p + h$; on aura

$$Q(z) = Q(p) + hQ'(p) + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \varphi(p) + h\varphi'(p) + \ldots,$$
$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{2h}{p} + \ldots\right),$$
$$\frac{1}{\psi^2(z)} = \left[h\psi'(p) + \frac{h^2\psi''(p)}{1.2} + \ldots\right]^{-2}$$
$$= \frac{1}{\psi'^2(p)}\left[\frac{1}{h^2} - \frac{\psi''(p)}{h\psi'(p)} + \ldots\right].$$

Le résidu cherché sera donc

$$\frac{2Q(p)\varphi'(p)}{r(\rho'^2-\rho^2)p^2\psi'^2(p)}$$
$$+\frac{2\varphi(p)}{r(\rho'^2-\rho^2)p^2\psi'^2(p)}\left[-\frac{Q(p)\psi''(p)}{\psi'(p)}+Q'(p)-\frac{2Q(p)}{p}\right].$$

Or la quantité entre parenthèses est nulle. En effet, les équations (90), (91) et (92), résolues par rapport à $\frac{\partial}{\partial p}p\frac{\partial F(pr)}{\partial p}$, $\frac{\partial F(pr)}{\partial p}$, $F(pr)$, donnent

$$F(pr)=-\frac{(1-Hr)\psi(p)+p\psi'(p)}{Q(p)}.$$

Substituons cette expression et sa dérivée dans l'équation (89). Il viendra, en tenant compte de ce que $\psi(p)$ est nul,

$$-p\left[\frac{(1-Hr)\psi'(p)+\psi'(p)+p\psi''(p)}{Q(p)}-\frac{p\psi'(p)Q'(p)}{Q^2(p)}\right]$$
$$-\frac{Hrp\,\psi'(p)}{Q(p)}=0,$$

ou, en réduisant et divisant par $\frac{p^2\psi'(p)}{Q^2(p)}$,

$$-\frac{Q(p)\psi''(p)}{\psi'(p)}+Q'(p)-\frac{2Q(p)}{p}=0.$$

346. On remarquera d'ailleurs que, pour $z=0$, la fonction $\chi(z)$ n'est pas infinie, car $\varphi(z)$ contient le facteur z^2 qui figure au dénominateur. Donc $\chi(z)$ n'a d'autres pôles que les racines p, et l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\chi(z)\,dz,$$

prise suivant un contour fermé quelconque situé à droite de l'axe des y, sera égale à la somme

$$\sum\frac{F(p\rho)F(p\rho')}{K_{pp}},$$

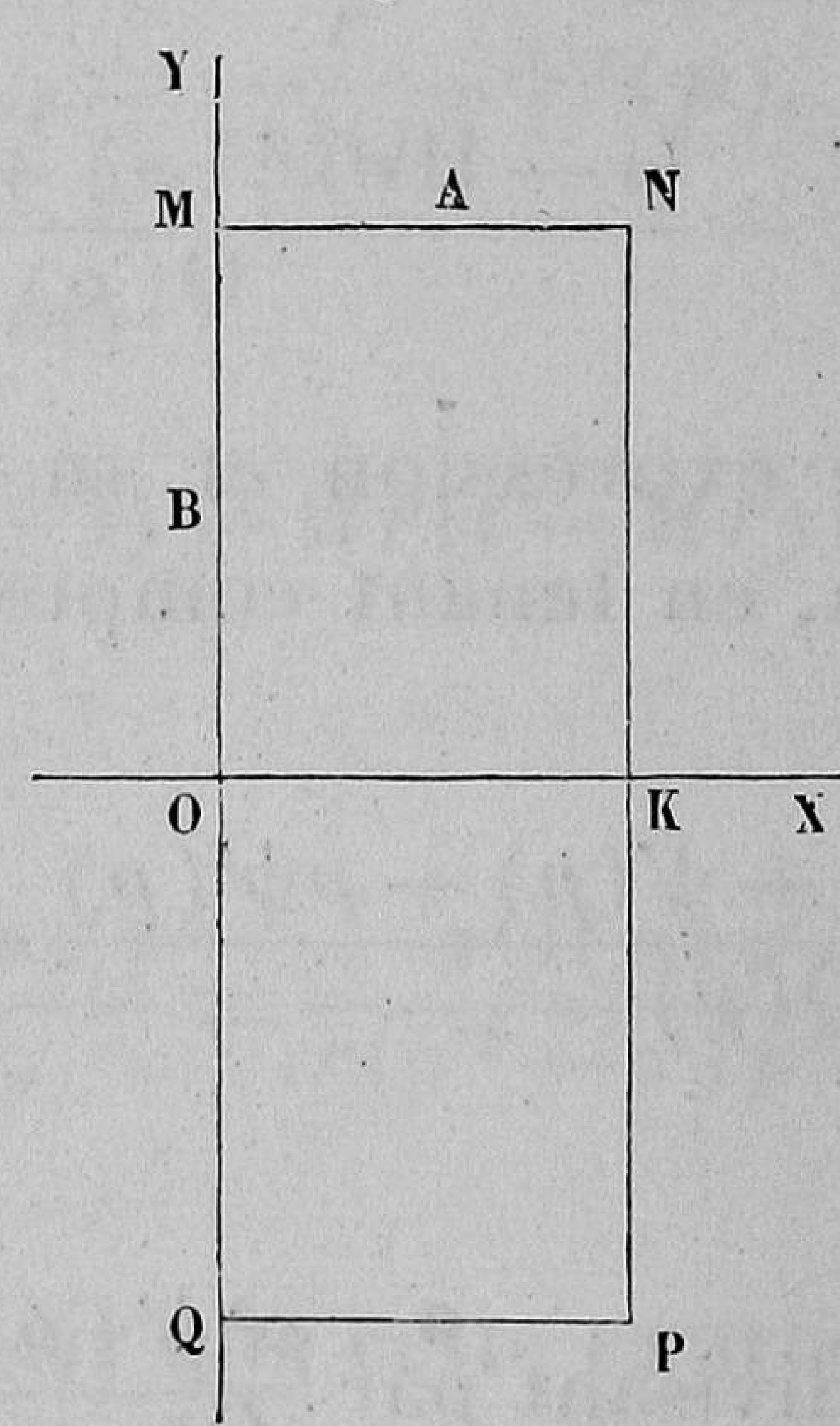
bornée à celles des racines p qui sont contenues dans ce contour.

Les termes correspondants de la somme $(85)'$ donneront l'intégrale double

$$(93) \qquad \int_0^r f(\rho')\rho'^2\,d\rho' \frac{1}{2\pi i}\int \chi(z)\,dz.$$

347. Prenons pour contour d'intégration (*fig.* 10) le rec-

Fig. 10.



tangle MNPQ qui a pour sommets les points Bi, $A+Bi$, $A-Bi$, $-Bi$, A étant une quantité réelle de la forme

$$\left(\frac{n}{2}+2k\right)\frac{\pi}{r},$$

où k est un entier, et B une autre quantité réelle, très grande par rapport à A. En faisant croître indéfiniment l'entier k, ce rectangle contiendra un nombre de racines de plus en plus grand ; on obtiendra donc la somme $(85)'$ en cherchant la limite de l'expression (93) pour $k=\infty$.

Pour établir que cette expression a pour limite $f(\rho)$, il nous suffira de faire voir : 1° que l'intégrale

$$(94) \qquad \int_\rho^b \frac{\rho'^2\,d\rho'}{2\pi i}\int \chi(z)\,dz,$$

où b est une quantité variable entre o et r, reste constamment inférieure à une limite finie; 2° qu'elle tend uniformément vers $\frac{1}{2}$ lorsque k croît indéfiniment, tant que b restera inférieur à $\rho - \varepsilon$ ou supérieur à $\rho + \varepsilon$, ε étant une constante quelconque.

En effet, l'intégrale (93) étant décomposée en deux autres, où l'intégration relative à ρ' s'étend respectivement de o à ρ et de ρ à r, ces intégrales partielles auront respectivement pour valeur (t. II, n° **262**)

$$\frac{1}{2}f(\rho - 0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}f(\rho + 0).$$

Leur somme sera donc égale à $f(\rho)$, puisque cette fonction est supposée continue.

Nous remarquerons d'abord que $\chi(z)$ étant une fonction impaire, les éléments de l'intégrale $\int \frac{\chi(z)\,dz}{2\pi i}$ prise sur le côté MQ se détruisent deux à deux. En outre, $\chi(z)$ prenant des valeurs imaginaires conjuguées en deux points symétriques par rapport à l'axe des x, le reste de la ligne d'intégration relative à z pourra être borné à sa moitié supérieure KNM, à la condition de doubler la partie réelle et de supprimer la partie imaginaire du résultat obtenu.

348. Posons pour abréger

$$(n+1)\frac{\pi}{2} = \lambda, \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \alpha;$$

nous aurons (**221**) pour $F(z) = z^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ une expression de la forme

$$(95) \qquad F(z) = \frac{\cos(z - \lambda)}{z}(\alpha + \theta) + \sin(z - \lambda)\theta_1,$$

θ, θ_1 étant des polynomes en $\frac{1}{z^2}$. La dérivation donnera, pour

$F'(z)$, $F''(z)$, des expressions analogues

$$(96)\qquad F'(z) = -\frac{\sin(z-\lambda)}{z}(\alpha+\theta_2)+\cos(z-\lambda)\theta_3,$$

$$(97)\qquad F''(z) = -\frac{\cos(z-\lambda)}{z}(\alpha+\theta_4)+\sin(z-\lambda)\theta_5,$$

$\theta_2, \ldots, \theta_5$ étant encore des polynomes en $\frac{1}{z^2}$.

Soit $z = u + ti$, t étant positif ou nul. Le module des quantités

$$\cos(z-\lambda) = \frac{e^{-t+(u-\lambda)i} + e^{t-(u-\lambda)i}}{2},$$

$$\sin(z-\lambda) = \frac{e^{-t+(u-\lambda)i} - e^{t-(u-\lambda)i}}{2i}$$

sera compris entre

$$\frac{e^t+e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{e^t-e^{-t}}{2},$$

et, par suite, moindre que e^t. En particulier, si t est très grand, il se réduira sensiblement à $\frac{1}{2}e^t$.

D'ailleurs, si le module $\sqrt{u^2+t^2}$ de z est >1, les modules des polynomes $\theta, \ldots, \theta_5$ seront limités; et si $|z|$ est très grand, ils seront du même ordre de grandeur que $\frac{1}{|z|^2}$.

Les modules des quantités $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$ seront donc, si t est très grand, sensiblement égaux à

$$\frac{\alpha e^t}{2|z|},$$

et seront, dans tous les cas, moindres que

$$l\frac{e^t}{|z|},$$

l désignant une constante.

Ce dernier résultat, que nous venons d'établir en suppo-

sant $|z| > 1$, subsiste évidemment encore si $|z| \overline{\lessgtr} 1$; car, dans cette hypothèse, $\frac{e^t}{|z|}$ est au moins égal à 1, et, d'autre part, les modules des fonctions entières $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$ restent inférieurs à une limite fixe.

349. Il est maintenant aisé de trouver, soit la valeur approchée, soit une limite supérieure du module de chacun des facteurs de la quantité

$$\rho'^2\chi(z) = \frac{2\rho'}{r}\,\frac{Q(z)}{\psi^2(z)}\,\frac{\rho'\varphi(z)}{(\rho''^2-\rho^2)z^2},$$

qui figure dans l'intégrale (94), lorsque $|z|$ est très grand, ce qui a lieu sur toute la ligne d'intégration.

On a tout d'abord $\frac{2\rho'}{r} < 2$. En second lieu,

$$Q(z) = r^2z^2 - n(n+1) - Hr(1-Hr)$$

a son module sensiblement égal à $r^2|z|^2$.

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\psi(z) &= z\,\frac{\partial F(rz)}{\partial z} + HrF(rz)\\ &= rzF'(rz) + HrF(rz).\end{aligned}$$

Sur le côté horizontal du rectangle, où $z = u + Bi$, u variant de 0 à A et B étant très grand, les modules de $F(rz)$, $F'(rz)$ seront sensiblement égaux à $\frac{\alpha}{2}\,\frac{e^{rB}}{r|z|}$ et l'on aura sensiblement

$$|\psi(z)| = \frac{\alpha}{2}e^{rB}.$$

Sur le côté vertical, où $z = A + ti$, t variant de 0 à B, on aura, en remplaçant A et λ par leurs valeurs,

$$rz - \lambda = rA - \lambda + rti = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi + rti,$$

d'où

$$\sin(rz - \lambda) = -\cos rti, \qquad \cos(rz - \lambda) = \sin rti,$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\psi(z) = rz &\left\{\frac{\cos rti}{rz}[\alpha + \theta_2(rz)] + \sin rti\,\theta_3(rz)\right\}\\ &+ \mathrm{H}r\left\{\frac{\sin rti}{rz}[\alpha + \theta\,(rz)] - \cos rti\,\theta_1(rz)\right\}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$(98)\quad \psi^2(z) = \alpha^2\cos^2 rti(1 + \mathrm{M} + \mathrm{M}'\operatorname{tang} rti + \mathrm{M}''\operatorname{tang}^2 rti),$$

M, M′, M″, M‴ étant des polynomes formés avec les puissances négatives de $A + ti$; A étant très grand, ces polynomes ont leurs modules très petits; d'autre part, lorsque t varie de o à ∞, tang rti varie régulièrement de o à i; donc on aura sensiblement

$$|\psi^2(z)| = \alpha^2\cos^2 rti = \frac{\alpha^2}{4}(e^{rt} + e^{-rt})^2 > \frac{\alpha^2}{4}e^{2rt}.$$

Considérons enfin le dernier facteur,

$$\frac{\rho'\varphi(z)}{(\rho'^2 - \rho^2)z^2} = \rho'\left[\frac{\rho\,\mathrm{F}(\rho' z)\,\mathrm{F}'(\rho z) - \rho'\,\mathrm{F}(\rho z)\,\mathrm{F}'(\rho' z)}{\rho'^2 - \rho^2}\right].$$

Il peut se mettre sous la forme

$$\rho'\left[\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mathrm{F}'(\rho z)\,\frac{\mathrm{F}(\rho' z) - \mathrm{F}(\rho z)}{\rho' - \rho} - \frac{1}{2}\mathrm{F}(\rho z)\,\frac{\mathrm{F}'(\rho' z) - \mathrm{F}'(\rho z)}{\rho' - \rho}\\ &- \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{F}(\rho' z)\,\mathrm{F}'(\rho z) + \mathrm{F}(\rho z)\,\mathrm{F}'(\rho' z)}{\rho' + \rho}\end{aligned}\right].$$

Or on a

$$\rho'\frac{\mathrm{F}(\rho' z) - \mathrm{F}(\rho z)}{\rho' - \rho} = \frac{\rho'}{\rho' - \rho}\int_\rho^{\rho'}\mathrm{F}'(xz)\,z\,dx,$$

expression dont le module a pour limite supérieure

$$\rho'\mu|z|,$$

μ désignant une limite supérieure du module de $F'(xz)$; or ce dernier module est moindre que

$$\frac{l\,e^{xt}}{|xz|} < \frac{rl\,e^{rt}}{\rho\rho'|z|},$$

car x, variant entre ρ et ρ', qui sont eux-mêmes compris entre o et r, sera $< r$, mais $> \frac{\rho\rho'}{r}$.

On a donc pour limite supérieure du module cherché l'expression

$$\frac{rl\,e^{rt}}{\rho}.$$

Le même procédé, appliqué à l'expression

$$\rho'\,\frac{F'(\rho' z) - F'(\rho z)}{\rho' - \rho},$$

donnera pour son module la même limite.

Substituant pour ces quantités, ainsi que pour $F(\rho z)$, $F'(\rho z)$, ..., les limites de leurs modules, il viendra

$$\left|\frac{\rho'\,\varphi(z)}{(\rho'^2 - \rho^2)z^2}\right| < \frac{l^2 r\,e^{(r+\rho)t}}{\rho^2|z|} + \frac{l^2\,e^{(\rho'+\rho)t}}{(\rho+\rho')\rho|z|^2}.$$

D'ailleurs, ρ' étant $\overline{\leqq} r$ et $|z|$ étant très grand, le second terme de cette expression sera négligeable par rapport au premier.

350. Il résulte des évaluations qui précèdent que, sur le côté horizontal du rectangle où $t = B$, et où $|z|$ est sensiblement égal à B, l'intégrale (94) s'annule pour $B = \infty$; car on aura

$$\left|\int_\rho^b \int_0^A \frac{\rho'^2\chi(z)}{2\pi i}\,du\right| \leqq \frac{|b-\rho|}{2\pi} A\,\mu,$$

μ désignant le maximum du module de $\rho'^2\chi(z)$, lequel, d'après ce qui précède, ne peut surpasser sensiblement la

quantité

$$2r^2 B^2 \frac{4}{\alpha^2 e^{2rB}} \frac{l^2 r e^{(r+\rho)B}}{\rho^2 B},$$

qui s'annule pour $B = \infty$, car elle contient en dénominateur l'exponentielle $e^{(r-\rho)B}$.

Considérons maintenant l'intégrale suivant le côté vertical, laquelle, pour $B = \infty$, se réduit à

$$\frac{1}{2\pi} \int_\rho^b \int_0^\infty \rho'^2 \chi(A + ti)\, dt\, d\rho'.$$

Elle a une valeur limitée, car son module est au plus égal à

$$\frac{|b-\rho|}{2\pi} \int_0^\infty \mu\, dt < \frac{r}{2\pi} \int_0^\infty \mu\, dt,$$

μ désignant une limite supérieure du module de $\rho'^2 \chi(A+ti)$. Or $|z|$ étant ici égal à $\sqrt{A^2+t^2}$, μ ne peut surpasser sensiblement l'expression

$$2r^2(A^2+t^2) \frac{4}{\alpha^2 e^{2rt}} \frac{l^2 r e^{(r+\rho)t}}{\rho^2 \sqrt{A^2+t^2}},$$

laquelle donne une intégrale finie, à cause de la présence du facteur $e^{(r-\rho)t}$ au dénominateur.

Nous allons enfin démontrer que l'intégrale, suivant le côté vertical, tend uniformément vers $\frac{1}{4}$ pour $A = \infty$, quelle que soit la valeur constante ou variable assignée à b.

A cet effet, nous remarquerons d'abord que l'on peut supposer $b \overline{\gtrless} \frac{1}{\sqrt{A}}$. En effet, si b était $< \frac{1}{\sqrt{A}}$, on pourrait décomposer le champ d'intégration relatif à ρ' en deux autres, s'étendant l'un de ρ à $\frac{1}{\sqrt{A}}$, l'autre de $\frac{1}{\sqrt{A}}$ à b. Le module de l'intégrale relative à cette seconde partie du champ est au plus égal

$$\left(\frac{1}{\sqrt{A}} - b\right) \int_0^\infty \mu\, dt$$

et *a fortiori* à $\frac{1}{\sqrt{A}}\int_0^\infty \mu\,dt$, quantité indépendante de b, et qui s'annule pour $A=\infty$. On n'aura donc à considérer que la première partie du champ.

351. Supposons donc $b \gtreqless \frac{1}{\sqrt{A}}$. Pour déterminer dans ce cas la valeur limite de l'intégrale, il ne suffira plus d'assigner, comme on l'a fait jusqu'à présent, une limite supérieure à son module; mais il faudra analyser avec plus de précision la nature des facteurs de $\chi(z)$.

Considérons d'abord le facteur

$$\varphi(z)=z^2[\rho\,F(\rho' z)\,F'(\rho z)-\rho'\,F(\rho z)\,F'(\rho' z)].$$

Substituons aux fonctions $F(\rho z)$, ... leurs valeurs

$$F(\rho z)=\frac{\cos(\rho z-\lambda)}{\rho z}[\alpha+\theta(\rho z)]+\sin(\rho z-\lambda)\,\theta_1(\rho z),$$

. . . . ;

il viendra

$$\varphi(z)=\frac{1}{\rho\rho'}\left\{\begin{array}{l} \sin(\rho' z-\lambda)\cos(\rho z-\lambda)\,[\alpha^2\rho'+D\,] \\ -\cos(\rho' z-\lambda)\,\sin(\rho z-\lambda)\,[\alpha^2\rho+D'] \\ +\sin(\rho' z-\lambda)\,\sin(\rho z-\lambda)\,D'' \\ +\cos(\rho' z-\lambda)\,\cos(\rho z-\lambda)\,D''' \end{array}\right\},$$

chacune des quantités D, D', D'', D''' étant une somme de fractions simples, de la forme

$$\frac{c}{\rho^\mu\,\rho'^\nu\,z^{\mu+\nu+1}}.$$

En faisant usage des formules

$$\sin(\rho' z-\lambda)\cos(\rho z-\lambda)=\frac{\sin[(\rho+\rho')z-2\lambda]+\sin(\rho'-\rho)z}{2},$$

. . . . ,

on peut mettre cette expression sous la forme

$$\varphi(z) = \frac{1}{\rho\rho'}\left\{\begin{array}{l} \sin(\rho'-\rho)z\left[\alpha^2\left(\frac{\rho'+\rho}{2}\right)+\text{E}\right] \\ +\sin[(\rho'+\rho)z-2\lambda]\left[\alpha^2\left(\frac{\rho'-\rho}{2}\right)+\text{E}'\right] \\ +\cos(\rho'-\rho)z\,\text{E}''+\cos[(\rho'+\rho)z-2\lambda]\text{E}''' \end{array}\right\},$$

E, E′, ... étant de la même forme que D, D′, ...

D'ailleurs, pour $\rho'=\rho$, $\varphi(z)$ s'annule identiquement; donc E′, E″, E‴ s'annulent. Si donc une de ces fonctions contient la fraction simple

$$\frac{c}{\rho^\mu \rho'^\nu z^{\mu+\nu+1}},$$

elle contiendra son associée

$$-\frac{c}{\rho^\nu \rho'^\mu z^{\mu+\nu+1}}.$$

Cette fraction, ajoutée à la précédente, donnera un résultat de la forme

$$(\rho'-\rho)\sum\frac{c_{\beta\gamma}}{\rho^\beta \rho'^\gamma z^{\beta+\gamma}}, \qquad \text{où} \qquad \beta+\gamma=\mu+\nu+1.$$

On aura donc

$$\text{E}'=(\rho'-\rho)\text{F}', \qquad \text{E}''=(\rho'-\rho)\text{F}'', \qquad \text{E}'''=(\rho'-\rho)\text{F}''',$$

F′, F″, F‴ étant des sommes de fractions simples, de la forme

$$\frac{c_{\beta\gamma}}{\rho^\beta \rho'^\gamma z^{\beta+\gamma}}.$$

Substituons, dans les arguments des lignes trigonométriques, la valeur $z=\text{A}+ti$ et séparons la partie réelle de la partie imaginaire au moyen des formules d'addition. Remarquons enfin que 2λ ne diffère de $2r\text{A}$ que par un nombre

impair de demi-circonférences; il viendra

$$\rho\rho'\varphi(z) = \begin{bmatrix} \sin(\rho'-\rho)\mathrm{A} & \cos(\rho'-\rho)ti \\ +\cos(\rho'-\rho)\mathrm{A} & \sin(\rho'-\rho)ti \end{bmatrix}\left[\frac{\alpha^2}{2}(\rho'+\rho)+\mathrm{E}\right]$$

$$+\begin{bmatrix} -\cos(2r-\rho-\rho')\mathrm{A}\,\sin(\rho'+\rho)ti \\ +\sin(2r-\rho-\rho')\mathrm{A}\,\cos(\rho'+\rho)ti \end{bmatrix}(\rho'-\rho)\left(\frac{\alpha^2}{2}+\mathrm{F}'\right)$$

$$+\begin{bmatrix} \cos(\rho'-\rho)\mathrm{A} & \cos(\rho'-\rho)ti \\ -\sin(\rho'-\rho)\mathrm{A} & \sin(\rho'-\rho)ti \end{bmatrix}(\rho'-\rho)\mathrm{F}''$$

$$+\begin{bmatrix} -\cos(2r-\rho-\rho')\mathrm{A}\,\cos(\rho'+\rho)ti \\ -\sin(2r-\rho-\rho')\mathrm{A}\,\sin(\rho'+\rho)ti \end{bmatrix}(\rho'-\rho)\mathrm{F}'''.$$

352. Chacune des fractions simples qui figurent dans E, F′, F″, F‴, considérée comme fonction de ρ' et de t, est de la forme

$$\frac{c}{\rho'^{\mu}(\mathrm{A}+ti)^{\nu}}, \quad \text{où} \quad \nu \overline{\gt} \mu.$$

Elle peut s'écrire

$$\frac{c(\mathrm{A}-ti)^{\nu}}{\rho'^{\mu}(\mathrm{A}^2+t^2)^{\nu}} = \sum(-i)^m \frac{c'\mathrm{A}^{\nu-m}t^m}{\rho'^{\mu}(\mathrm{A}^2+t^2)^{\nu}}.$$

Chacun des termes de cette somme est le produit d'une puissance de i par une fonction de ρ', A, t, continue, réelle et positive dans tout le champ d'intégration. Cette fonction sera croissante de $\rho'=\rho$ à $\rho'=b$, si $b<\rho$. Si $b>\rho$, on pourra la décomposer dans la différence des deux fonctions partielles

$$\frac{1}{\rho^{\mu}}\frac{c'\mathrm{A}^{\nu-m}t^m}{(\mathrm{A}^2+t^2)^{\nu}} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{\rho^{\mu}}-\frac{1}{\rho'^{\mu}}\right)\frac{c'\mathrm{A}^{\nu-m}t^m}{(\mathrm{A}^2+t^2)^{\nu}},$$

également continues et positives, dont la première ne varie pas avec ρ', tandis que la seconde est croissante de ρ à b.

D'ailleurs A et t étant au plus égaux à $\sqrt{\mathrm{A}^2+t^2}$ et ρ' au moins égal à $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}$ dans tout le champ d'intégration, le module

de la fonction considérée aura pour limite supérieure

$$\frac{|c'|\,A^{\nu-m+\frac{1}{2}\mu}}{(A^2+t^2)^{\nu-\frac{m}{2}}} \overline{\overline{<}} \frac{|c'|}{A^{\nu-\frac{1}{2}\mu}},$$

et, si $b > \rho$, les modules des deux fonctions partielles dans lesquelles on la décompose admettront une limite supérieure semblable.

Ces diverses fonctions tendent donc uniformément vers zéro pour $A = \infty$, quels que soient ρ' et t.

D'autre part, la fonction

$$\frac{Q(z)}{z^2} = r^2 - \frac{n(n+1)+Hr(1-Hr)}{(A^2+t^2)^2}(A-ti)^2$$

est de même égale à r^2, plus une somme de termes, dont chacun est le produit d'une puissance de i par une fonction positive de t et de A, qui tend uniformément vers zéro pour $A = \infty$, quel que soit t.

On a enfin

$$\psi^2(z) = \alpha^2 \cos^2 rti(1 + M + M' \operatorname{tang} rti + M'' \operatorname{tang}^2 rti).$$

Chacune des fonctions M, M', ..., étant une somme de termes de la forme

$$\frac{c}{(A+ti)^\nu},$$

s'exprimera par une somme de termes dont chacun est le produit d'une puissance de i par une fonction continue et positive de t et de A, qui tend uniformément vers zéro pour $A = \infty$.

D'ailleurs, $\operatorname{tang} rti$ est le produit de i par une quantité comprise entre 0 et 1. On aura donc

$$1 + M + M' \operatorname{tang} rti + M'' \operatorname{tang}^2 rti = 1 + P + P'i - P'' - P'''i;$$

P, P', P'', P''' étant des fonctions continues et positives qui

tendent uniformément vers zéro pour $A = \infty$, l'expression

$$\frac{1}{1 + M + M' \operatorname{tang} rti + M'' \operatorname{tang}^2 rti} = \frac{1 + P - P'i - P'' + P'''i}{(1 + P - P'')^2 + (P' - P'''^2)}$$

sera évidemment une fonction de même forme.

353. Réunissant les résultats précédents, on trouve pour l'intégrale cherchée

$$\frac{1}{2\pi}\int_\rho^b \int_0^\infty \rho'^2 \chi(A + ti)\, dt\, d\rho'$$

l'expression suivante

$$(99)\quad \frac{r}{\pi\rho}\left\{\begin{aligned}
&\int_\rho^b \frac{\sin(\rho'-\rho)A}{\rho'-\rho}\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\cos(\rho'-\rho)ti}{\cos^2 rti}\, \rho'\left[\frac{1}{2} + \frac{R}{\rho'+\rho}\right] dt\\
+&\int_\rho^b \cos(\rho'-\rho)A\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\sin(\rho'-\rho)ti}{(\rho'-\rho)\cos^2 rti}\, \rho'\left[\frac{1}{2} + \frac{R}{\rho'+\rho}\right] dt\\
+&\int_\rho^b \sin(2r-\rho-\rho')A\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\cos(\rho'+\rho)ti}{\cos^2 rti}\, \rho'\,\frac{\frac{1}{2} + R_1}{\rho'+\rho}\, dt\\
-&\int_\rho^b \cos(2r-\rho-\rho')A\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\sin(\rho'+\rho)ti}{\cos^2 rti}\, \rho'\,\frac{\frac{1}{2} + R_1}{\rho'+\rho}\, dt\\
+&\int_\rho^b \cos(\rho'-\rho)A\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\cos(\rho'-\rho)ti}{\cos^2 rti}\, \rho'\,\frac{R_2}{\rho'+\rho}\, dt\\
-&\int_\rho^b \sin(\rho'-\rho)A\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\sin(\rho'-\rho)ti}{\cos^2 rti}\, \rho'\,\frac{R_2}{\rho'+\rho}\, dt\\
-&\int_\rho^b \cos(2r-\rho-\rho')A\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\cos(\rho'+\rho)ti}{\cos^2 rti}\, \rho'\,\frac{R_3}{\rho'+\rho}\, dt\\
-&\int_\rho^b \sin(2r-\rho-\rho')A\, d\rho' \int_0^\infty \frac{\sin(\rho'-\rho)ti}{\cos^2 rti}\, \rho'\,\frac{R_3}{\rho'+\rho}\, dt
\end{aligned}\right\},$$

R, R_1, R_2, R_3 étant des sommes de termes dont chacun est le produit d'une puissance de i par une fonction de ρ', t, A, continue, positive et bornée, laquelle croît (ou tout au moins ne décroît pas) lorsque ρ' varie de ρ à b, mais tend uniformément vers zéro quel que soit ρ pour $A = \infty$.

D'ailleurs ρ' et $\frac{\rho}{\rho'+\rho}$ sont des fonctions de ρ', finies et continues; elles sont croissantes de ρ à b, si $b > \rho$; dans le cas contraire, elles sont la différence de deux fonctions finies, continues et non décroissantes

$$\rho' = \rho - (\rho - \rho'),$$

$$\frac{\rho'}{\rho+\rho'} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho'}{\rho+\rho'}\right).$$

Enfin, les fonctions $\cos(\rho'-\rho)ti$, $-i\frac{\sin(\rho'-\rho)ti}{\rho'-\rho}$ sont croissantes de ρ à b.

Donc chacune des intégrales relatives à t, qui figurent dans la formule précédente, porte sur une somme de termes dont chacun est le produit d'une puissance de i par une fonction de ρ', A, t positive, bornée et continue, laquelle ne décroît pas lorsque ρ' varie de ρ à b, mais tend uniformément vers zéro pour $A = \infty$ (à moins qu'elle ne soit indépendante de A, ce qui arrivera pour les termes des quatre premières intégrales qui ne proviennent pas de R et de R_1).

L'intégrale de chacun de ces termes, prise par rapport à t, sera manifestement le produit d'une puissance de i par une fonction de même forme, que nous désignerons par $f(\rho', A)$.

354. D'autre part, les intégrales

$$\int_\rho^b \frac{\sin(\rho'-\rho)A\,d\rho'}{\rho'-\rho},$$

$$\int_\rho^b \sin(\rho'-\rho)A\,d\rho' = \frac{1-\cos(b-\rho)A}{A},$$

$$\int_\rho^b \cos(\rho'-\rho)A\,d\rho' = \frac{\sin(b-\rho)A}{A},$$

$$\int_\rho^b \sin(2r-\rho-\rho')A\,d\rho' = \frac{\cos(2r-\rho-b)A - \cos(2r-2\rho)A}{A},$$

$$\int_\rho^b \cos(2r-\rho-\rho')A\,d\rho' = -\frac{\sin(2r-\rho-b)A - \sin(2r-2\rho)A}{A}$$

sont limitées et, pour $A=\infty$, tendent uniformément vers les limites respectives $\frac{\pi}{2}$, o, o, o, o.

Soient

$$\int_{\rho}^{b} \varphi(\rho', A)\, d\rho'$$

l'une quelconque de ces cinq intégrales; G la limite vers laquelle elle tend. Il sera aisé de trouver la limite de l'intégrale

$$\int_{\rho}^{b} \varphi(\rho', A) f(\rho', A)\, d\rho'$$

par la méthode employée au Tome II, n° 262.

On a, en effet, λ désignant une constante

$$\int_{\rho}^{b} = \int_{\rho}^{\rho+\lambda} + \int_{\rho+\lambda}^{b}.$$

Appliquons à la seconde intégrale le second théorème de la moyenne; il viendra

$$\begin{aligned}\int_{\rho+\lambda}^{b} & \varphi(\rho', A) f(\rho', A)\, d\rho' \\ &= f(\rho+\lambda, A) \int_{\rho+\lambda}^{\xi} \varphi(\rho', A)\, d\rho' + f(b, A) \int_{\xi}^{b} \varphi(\rho', A)\, d\rho'.\end{aligned}$$

Pour $A=\infty$, les deux intégrales ci-dessus tendent uniformément vers zéro (pour plus de détails, *voir* l'endroit cité); et leurs multiplicateurs tendent également vers zéro (ou tout au moins restent fixes, si f ne dépend pas de A).

Reste la première intégrale

$$\begin{aligned}\int_{\rho}^{\rho+\lambda} & \varphi(\rho', A) f(\rho', A)\, d\rho' \\ &= f(\rho, A) \int_{\rho}^{\rho+\lambda} \varphi(\rho', A)\, d\rho' \\ &\quad + \int_{\rho}^{\rho+\lambda} [f(\rho', A) - f(\rho, A)]\, \varphi(\rho', A)\, d\rho'.\end{aligned}$$

Le premier terme tend, pour $A = \infty$, vers $G \lim_{A=\infty} f(\rho, A)$.

Appliquons à l'autre le second théorème de la moyenne; il devient

$$[f(\rho + \lambda, A) - f(\rho, A)] \int_{\xi}^{\rho+\lambda} \varphi(\rho', A)\, d\rho',$$

ξ étant compris entre ρ et $\rho + \lambda$.

L'intégrale qui figure ici reste finie; son multiplicateur tend d'ailleurs vers zéro pour $A = \infty$, s'il dépend de A; sinon, on pourra le rendre aussi petit qu'on voudra en faisant décroître λ.

Nous obtenons donc pour la limite cherchée

$$G \lim_{A=\infty} f(\rho, A).$$

355. Tous les termes des intégrales (99) pouvant être traités de même, et G étant d'ailleurs nul, sauf pour la première d'entre elles, pour laquelle il est égal à $\frac{\pi}{2}$, la limite cherchée sera, en désignant par R_0 ce que devient R pour $\rho' = \rho$,

$$\frac{r}{\pi\rho} \frac{\pi}{2} \lim_{A=\infty} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\cos^2 rti} \rho \left(\frac{1}{2} + \frac{R_0}{2\rho}\right)$$
$$= \lim_{A=\infty} \int_0^{\infty} \frac{r\, dt}{(e^{rt} + e^{-rt})^2} \left(1 + \frac{R_0}{\rho}\right).$$

Mais, lorsque A tend vers ∞, R_0 tend uniformément vers zéro. L'intégrale se réduit donc à son premier terme

$$\int_0^{\infty} \frac{r\, dt}{(e^{rt} + e^{-rt})^2}.$$

Posons $e^{rt} = u$; cette intégrale se transforme en

$$\int_1^{\infty} \frac{u\, du}{(u^2 + 1)^2} = \left[\frac{-1}{2(u^2 + 1)}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{4}.$$

Doublant ce résultat d'après le n° **347**, on obtiendra $\frac{1}{2}$, ainsi qu'il fallait l'établir.

CHAPITRE IV.

CALCUL DES VARIATIONS.

I. — Première variation des intégrales simples.

356. Soit $\varphi(x, y, y', \ldots, y^m; z, z', \ldots, z^n, \ldots)$ une fonction de la variable indépendante x, des variables dépendantes y, z, ... et des dérivées de ces dernières jusqu'aux ordres m, n, ... respectivement.

Si nous changeons y, z, ... en $y + \varepsilon\eta$, $z + \varepsilon\zeta$, ... (η, ζ, ... désignant de nouvelles fonctions de x et ε un paramètre infiniment petit), y^k, z^k, ... seront changés en $y^k + \varepsilon\eta^k$, $z^k + \varepsilon\zeta^k$, ..., et φ en

$$\Phi(x, \varepsilon) = \varphi(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', \ldots, z + \varepsilon\zeta, \ldots).$$

Cette expression, développée par la formule de Taylor suivant les puissances de ε, prendra la forme

$$\varphi + \varepsilon\varphi_1 + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi_2 + \ldots,$$

en posant, pour abréger,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\eta + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}\eta' + \ldots + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y^m}\eta^m + \dfrac{\partial\varphi}{\partial}\zeta + \ldots, \\ \varphi_2 = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\eta^2 + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\eta'^2 + \ldots + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\zeta^2 + \ldots + 2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial y'}\eta\eta' + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les expressions $\varepsilon\varphi_1$, $\varepsilon^2\varphi_2$, ... se nomment les *variations*

première, *seconde*, etc., de la fonction φ, et se représentent par les symboles $\delta\varphi$, $\delta^2\varphi$, ...

On a, d'après cette définition,

$$\delta y = \varepsilon\eta, \quad \delta y' = \varepsilon\eta', \quad \ldots, \quad \delta z = \varepsilon\zeta, \quad \ldots;$$
$$\delta^2 y = 0, \quad \delta^2 y' = 0, \quad \ldots, \quad \delta^2 z = 0, \quad \ldots.$$

Il est clair, d'ailleurs, que φ_1, φ_2, ... ne sont autre chose que les dérivées partielles $\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varepsilon^2}$, ... pour la valeur particulière $\varepsilon = 0$. Or on a généralement

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^k\Phi}{\partial\varepsilon^k} = \frac{\partial^k}{\partial\varepsilon^k}\frac{\partial^i\Phi}{\partial x^i}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, $\frac{\partial^k\Phi}{\partial\varepsilon^k}$ se réduira à $\varphi_k = \frac{1}{\varepsilon^k}\delta^k\varphi$ et $\frac{\partial^k}{\partial\varepsilon^k}\frac{\partial^i\Phi}{\partial x^i}$ à $\frac{1}{\varepsilon^k}\delta^k\frac{d^i\varphi}{dx^i}$. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente et multipliant par la constante ε^k, il viendra

$$\frac{d^i}{dx^i}\delta^k\varphi = \delta^k\frac{d^i\varphi}{dx^i}. \tag{2}$$

Cette équation montre que les deux opérations de la dérivation et de la variation peuvent être transposées.

357. Les équations (1), respectivement multipliées par ε, ε^2, ..., pourront s'écrire

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z + \ldots, \\ \delta^2\varphi &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\delta y'^2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\delta z^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial y'}\delta y\,\delta y' + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si les fonctions y, z, ..., au lieu d'être données immédiatement en fonction de x, étaient exprimées au moyen de x, t, t', ...; u, u', ...; ..., où t, u, ... désignent des fonctions de x, le changement de ces dernières fonctions en $t + \varepsilon\tau$,

$u + \varepsilon v, \ldots$ transformerait $y, z, \ldots$ en $y + \delta y + \frac{1}{2}\delta^2 y + \ldots,$
$z + \delta z + \frac{1}{2}\delta^2 z + \ldots, \ldots,$ et, par suite, φ en

$$\varphi\left(x, y + \delta y + \frac{1}{2}\delta^2 y + \ldots, y' + \delta y' + \frac{1}{2}\delta^2 y' + \ldots, \ldots, z + \delta z + \frac{1}{2}\delta^2 z + \ldots, \ldots\right)$$
$$= \varphi + \delta\varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi + \ldots,$$

où

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta y' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z + \ldots,$$

$$\delta^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\delta y'^2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\delta z^2 + \ldots + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial y'}\delta y\,\delta y' + \ldots$$
$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta^2 y + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\delta^2 y' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta^2 z + \ldots,$$

. . . .

Ainsi $\delta\varphi$ conserve la même forme que si $y, z, \ldots$ étaient donnés directement en fonction de x; mais les variations suivantes seront modifiées par l'adjonction de nouveaux termes en $\delta^2 y, \delta^2 y', \ldots$.

358. Proposons-nous maintenant de déterminer les variations successives d'une intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y, y', \ldots, y^m, z, z', \ldots, z^n, \ldots)\,dx.$$

Changeons y, z en $y + \delta y, z + \delta z, \ldots$; φ sera transformé en

$$\Phi(x, \varepsilon) = \varphi + \delta\varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi + \ldots$$

et I en

$$\mathrm{I} + \Delta\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1}\left(\varphi + \delta\varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi + \ldots\right)dx.$$

Séparant les termes affectés des diverses puissances de ε, il viendra

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi\, dx, \quad \ldots, \quad \delta^k I = \int_{x_0}^{x_1} \delta^k\varphi\, dx, \quad \ldots.$$

Ce résultat suppose toutefois que les limites x_0, x_1 de l'intégration sont des constantes fixes. Si nous admettons qu'en même temps qu'on altère les fonctions y, z, ..., on accroisse x_0, x_1 de quantités infiniment petites $\delta x_0 = \varepsilon\xi_0$, $\delta x_1 = \varepsilon\xi_1$, I subira de ce fait une nouvelle altération $\Delta' I$, égale à

$$(4) \qquad \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} \left(\varphi + \delta\varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi + \ldots\right) dx - \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} (\varphi + \delta\varphi + \ldots)\, dx.$$

Chacun des termes de cette expression peut se développer sans peine suivant les puissances de ε. En effet, considérons, par exemple, le terme

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} \frac{1}{1.2\ldots k}\delta^k\varphi\, dx.$$

La formule de Taylor donne

$$\delta^k\varphi = [\delta^k\varphi]_1 + \left[\frac{d}{dx}\delta^k\varphi\right]_1 (x - x_1) + \left[\frac{d^2}{dx^2}\delta^k\varphi\right]_1 \frac{(x-x_1)^2}{1.2} + \ldots,$$

$[\delta^k\varphi]_1$, ... représentant les valeurs de $\delta^k\varphi$ et de ses dérivées pour $x = x_1$ ($y, y', \ldots, z, \ldots$ étant en même temps remplacés par les valeurs $y_1, y'_1, \ldots; z_1, \ldots$ qu'ils prennent pour $x = x_1$).

Multipliant par $\frac{1}{1.2\ldots k}$ et intégrant de x_1 à $x_1 + \delta x_1$, il viendra, pour valeur du terme considéré,

$$\frac{1}{1.2\ldots k}\left([\delta^k\varphi]_1\, \delta x_1 + \left[\delta^k \frac{d\varphi}{dx}\right]_1 \frac{\delta x_1^2}{1.2} + \ldots\right).$$

Chaque terme de l'expression (4) étant développé de même, on obtiendra, en réunissant ensemble les termes de même ordre en ε,

$$\begin{aligned}\Delta' \mathrm{I} = & [\varphi]_1 \,\delta x_1 - [\varphi]_0 \,\delta x_0 \\ & + \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]_1 \frac{\delta x_1^2}{2} + [\delta\varphi]_1 \,\delta x_1 - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]_0 \frac{\delta x_0^2}{2} - [\delta\varphi]_0 \,\delta x_0 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Réunissant ces termes à l'autre partie de la variation déjà obtenue précédemment, il viendra, pour la variation première de I,

$$\delta \mathrm{I} = [\varphi]_1 \,\delta x_1 - [\varphi]_0 \,\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi \, dx;$$

pour la variation seconde,

$$\begin{aligned}\delta^2 \mathrm{I} = & \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]_1 \delta x_1^2 + 2[\delta\varphi]_1 \,\delta x_1 \\ & - \left[\frac{d\varphi}{dx}\right]_0 \delta x_0^2 - 2[\delta\varphi]_0 \,\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} \delta^2\varphi \, dx, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

359. On peut arriver au même résultat d'une autre manière, en transformant l'intégrale

$$\mathrm{I} + \Delta \mathrm{I} = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} \Phi(x, \varepsilon)\, dx$$

par un changement de variable, de manière qu'elle ait les mêmes limites x_0, x_1 que l'intégrale primitive.

Posons, en effet,

$$x = t + \delta t,$$

δt étant une fonction arbitraire de t, affectée du coefficient ε et assujettie seulement à se réduire respectivement à δx_0 et δx_1 pour $t = x_0$ et $t = x_1$; on aura

$$\mathrm{I} + \Delta \mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1} \Phi(t + \delta t, \varepsilon)\,[dt + d\,\delta t]$$

ou, en écrivant x au lieu de t,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}+\Delta\mathrm{I} &= \int_{x_0}^{x_1} \Phi(x+\delta x, \varepsilon)[dx + d\,\delta x] \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \left[\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\delta x^2 + \ldots\right](dx + d\,\delta x) \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \Phi\,dx + d\left[\Phi\,\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\delta x^2}{2} + \ldots\right] \\
&= \left[\Phi\,\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\delta x^2}{2} + \ldots\right]_0^1 + \int_{x_0}^{x_1} \Phi\,dx;
\end{aligned}$$

mais on a

$$\Phi = \varphi + \delta\varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi + \ldots,$$

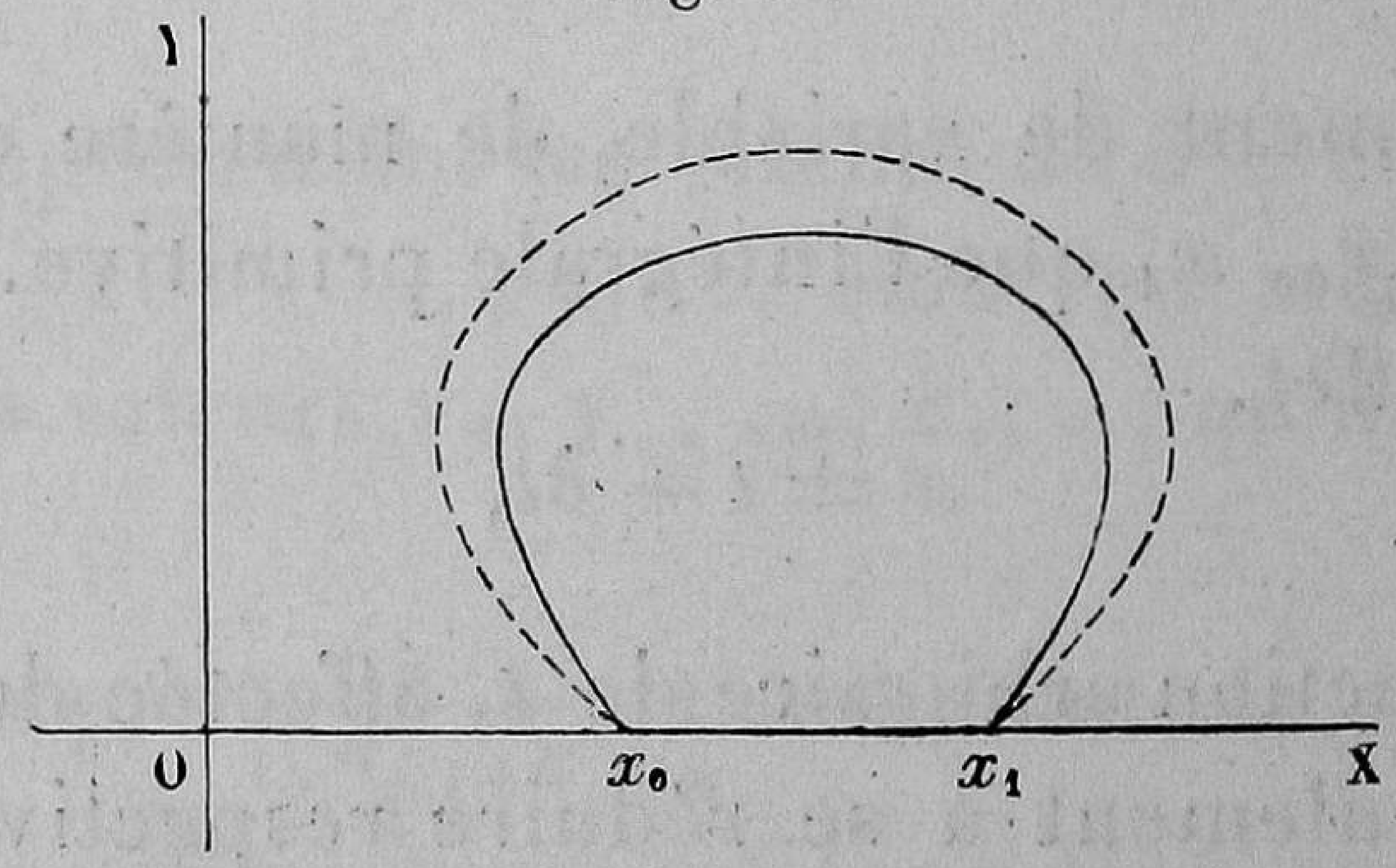
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\,\delta\varphi}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\,\delta^2\varphi}{dx} + \ldots,$$

....

Substituons ces valeurs dans l'expression de $\mathrm{I}+\Delta\mathrm{I}$, et groupons les termes de même ordre en ε; on trouvera, pour $\delta\mathrm{I}$, $\delta^2\mathrm{I}$, ..., les mêmes expressions que tout à l'heure.

360. Nous venons de nous trouver conduits à faire varier non seulement l'expression de y, z, ... en fonction de la variable indépendante x, mais cette variable indépendante

Fig. 11.



elle-même. Cette considération nouvelle peut devenir nécessaire, lors même que les limites x_0, x_1 restent fixes,

Considérons, par exemple, l'aire comprise entre l'axe des x

et la courbe figurée en ligne pleine par la figure 11. Elle sera représentée par l'intégrale

$$\int y\, dx,$$

où l'on donnera à x la série des valeurs successives qu'il prend lorsqu'on décrit la courbe, y désignant l'ordonnée correspondante.

Considérons une seconde courbe infiniment voisine de la première et ayant les mêmes extrémités, par exemple celle que la figure représente en pointillé, et proposons-nous d'évaluer l'accroissement de l'aire lorsqu'on passe de la première courbe à la seconde. Pour opérer ce changement, il ne suffira pas de faire varier l'ordonnée de chaque point de la première courbe en laissant l'abscisse constante; car il y a sur la seconde courbe des points auxquels ne correspond, sur la courbe primitive, aucun point ayant la même abscisse. On pourra, au contraire, passer aisément de la première courbe à la seconde, en altérant un peu les abscisses en même temps que les ordonnées.

361. Cela posé, l'objet principal du calcul des variations est la solution de la question suivante :

Les fonctions y, z, ... qui figurent dans l'intégrale I et les limites x_0, x_1 étant indéterminées en tout ou en partie, achever de les définir par la condition que la valeur de l'intégrale I soit maximum ou minimum.

Avant d'aborder le problème, il convient de le préciser en indiquant quels sont les systèmes de fonctions y, z, ... que nous comparerons entre eux.

On admet généralement, pour éviter toute difficulté relative à l'existence de l'intégrale, que dans tout le champ d'intégration, celles des dérivées des fonctions y, z, ... et celles des dérivées partielles de φ que nous serons conduits à introduire dans le calcul restent continues.

Les fonctions y, z, ... et les constantes x_0, x_1 devront

en outre satisfaire, pour chaque problème particulier, aux conditions de l'énoncé.

Cela posé, soit $\bar{y}, \bar{z}, \ldots$ un système déterminé de fonctions admissible; Y, Z, ... un autre système à choisir arbitrairement parmi ceux qui sont également admissibles; soient $I_{\bar{y},\bar{z},\ldots}$, $I_{Y,Z,\ldots}$ les valeurs correspondantes de l'intégrale. Nous dirons avec *Weierstrass* que le système $\bar{y}, \bar{z}, \ldots$ donne un maximum (ou minimum) *fort* pour l'intégrale I si l'on peut déterminer un nombre h tel que les inégalités

$$(5) \qquad |Y - \bar{y}| < h, \qquad |Z - \bar{z}| < h, \qquad \ldots,$$

supposées satisfaites dans tout le champ d'intégration, entraînent comme conséquence nécessaire celle-ci :

$$(6) \qquad \begin{cases} I_{YZ\ldots} - I_{\bar{y}\bar{z}\ldots} \overset{=}{<} 0, & \text{cas du maximum,} \\ \qquad\qquad\qquad \overset{=}{>} 0, & \text{cas du minimum,} \end{cases}$$

indépendamment du choix particulier du système Y, Z, ...

Le maximum (minimum) sera *faible* si l'inégalité (6) est assurée lorsque non seulement $|Y - \bar{y}|$, $|Z - \bar{z}|$, ..., mais aussi $|Y' - \bar{y}'|$, $|Z' - \bar{z}'|$, ... sont $< h$.

Lagrange, moins exigeant que Weierstrass, attribuait aux fonctions $Y - \bar{y}$, $Z - \bar{z}$, ... la forme particulière $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$, ... ; η, ζ, ... étant des fonctions de x et ε un paramètre infiniment petit. Il disait qu'il y avait maximum (minimum) si la différence

$$I_{YZ\ldots} - I_{\bar{y}\bar{z}\ldots}$$

était constamment négative (positive) pour toutes les valeurs suffisamment petites de ε, quel que fût le choix des fonctions η, ζ, ..., pourvu qu'il fût compatible avec les conditions du problème.

D'après celles-ci, η, ζ, ... et leurs dérivées étant continues dans tout le champ d'intégration seront bornées; et quel que soit h on aura, pour toutes les valeurs suffisamment petites

de ε,

$$|\varepsilon\eta| < h, \quad |\varepsilon\zeta| < h, \quad \ldots, \quad |\varepsilon\eta'| < h, \quad |\varepsilon\zeta'| < h, \quad \ldots.$$

L'existence d'un maximum (minimum) de Weierstrass, même faible, entraînera donc celle d'un maximum (minimum) de Lagrange.

Nous nous bornerons dans ce Chapitre à rechercher les conditions du maximum (ou minimum) de Lagrange. Nous verrons qu'elles définissent (en thèse générale) d'une manière précise les fonctions cherchées.

Celles-ci ainsi déterminées, il restera à s'assurer si elles fournissent aussi un minimum de Weierstrass, fort ou seulement faible. De nouvelles conditions pourront être nécessaires pour cela. Nous donnerons quelques indications à ce sujet dans la Note II.

362. Donnons donc aux fonctions $y, z, \ldots$ qui figurent sous l'intégrale I et aux limites x_0, x_1 des accroissements infiniment petits

$$\delta y = \varepsilon\eta, \quad \delta z = \varepsilon\zeta, \quad \ldots, \quad \delta x_0 = \varepsilon\xi_0, \quad \delta x_1 = \varepsilon\xi_1,$$

compatibles avec les conditions imposées par l'énoncé du problème ; l'accroissement

$$\delta \mathrm{I} + \frac{1}{2}\delta^2 \mathrm{I} + \ldots,$$

qui en résulte pour la valeur de l'intégrale, devra conserver constamment le même signe (positif ou négatif suivant qu'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum).

Or, ε étant infiniment petit, l'ensemble $\delta \mathrm{I}$ des termes du premier degré sera prépondérant et donnera son signe au résultat. Si d'ailleurs on admet (ce qui aura lieu très généralement) qu'à chaque système de variations δy, δz, ..., δx_0, δx_1 compatible avec les conditions du problème, correspond un second système de variations $-\delta y$, $-\delta z$, ..., $-\delta x_0$,

— δx_1 jouissant de la même propriété, ce nouveau système de variations donnera à I l'accroissement

$$-\delta I + \frac{1}{2}\delta^2 I - \ldots,$$

qui sera de signe contraire au précédent, à moins qu'on n'ait $\delta I = 0$.

Nous obtenons donc cette première condition pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum :

La variation première δI *doit s'annuler pour tout système de variations* $\delta y, \delta z, \ldots, \delta x_0, \delta x_1$ *compatible avec les conditions du problème.*

363. Cette condition détermine, en général, ainsi que nous le verrons, ce qui reste d'arbitraire dans la définition des fonctions $y, z, \ldots$ et des limites x_0, x_1. Mais elle n'est pas suffisante. Il faudra, en effet, s'assurer que, après avoir ainsi déterminé ces quantités inconnues, l'accroissement de I pour une variation infiniment petite (compatible avec les conditions du problème) conservera toujours le même signe ; d'ailleurs, δI étant nul, cet accroissement se réduit à

$$\frac{1}{2}\delta^2 I + \ldots.$$

Le terme prépondérant de ce développement, $\frac{1}{2}\delta^2 I$, ne devra donc pas changer de signe, quel que soit le système de variations qu'on adopte parmi ceux qui sont admissibles. Cette seconde condition sera évidemment suffisante si $\frac{1}{2}\delta^2 I$ est toujours différent de zéro. Mais, s'il existait un système de variations qui annulât $\delta^2 I$, il n'y aurait ni maximum, ni minimum, à moins que $\frac{1}{1.2.3}\delta^3 I$, qui est d'ordre impair, ne

s'annulât en même temps, auquel cas il resterait à discuter le signe de $\delta^4 I$, etc.

Nous nous bornerons, dans cette Section, à tirer les conséquences de la première condition

$$o = \delta I = [\varphi]_1 \,\delta x_1 - [\varphi]_0 \,\delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi \, dx.$$

364. Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = A, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = A_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = B, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z'} = B_1, \quad \ldots.$$

Nous aurons, d'après la formule (3),

$$\delta\varphi = A\,\delta y + A_1\,\delta y' + \ldots + A_m\,\delta y^m + B\,\delta z + \ldots,$$

valeur qu'il faudra substituer dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \delta\varphi\, dx$.

L'intégration par parties permet de transformer cette expression en faisant disparaître sous le signe $\int$ les variations des dérivées y', ..., y^m, z', ..., z^n, ... En effet, considérons, par exemple, le terme

$$\int_{x_0}^{x_1} A_k \,\delta y^k \, dx.$$

Nous savons que δy^k est la dérivée $k^{\text{ième}}$ de δy; on aura donc

$$\int_{x_0}^{x_1} A_k\,\delta y^k\, dx = [A_k \delta y^{k-1} - A'_k \delta y^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} A_k^{k-1}\,\delta y]_{x_0}^{x_1}$$
$$+ \int_{x_0}^{x_1} (-1)^k A_k^k \,\delta y\, dx.$$

Opérons de même sur chaque terme de $\delta\varphi$ et posons, pour

abréger,

$$(7)\quad \begin{cases} A - A'_1 + \ldots + (-1)^m \; A^m_m = M, \\ A_1 - A'_2 + \ldots + (-1)^{m-1} A^{m-1}_m = C, \\ A_2 - A'_3 + \ldots + (-1)^{m-2} A^{m-2}_m = C^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad A_m = C^{m-1}, \\ B - B'_1 + \ldots + (-1)^n \; B^n_n = N, \\ B_1 - B'_2 + \ldots + (-1)^{n-1} B^{n-1}_n = D, \\ B_2 - B'_3 + \ldots + (-1)^{n-2} B^{n-2}_n = D^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad B_n = D^{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

il viendra

$$\delta I = [\varphi]_1 \delta x_1 - [\varphi]_0 \delta x_0 + \begin{bmatrix} C\,\delta y + C^1 \delta y' + \ldots + C^{m-1} \delta y^{m-1} \\ + D\,\delta z + D^1 \delta z' + \ldots + D^{n-1} \delta z^{n-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_{x_0}^{x_1}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} (M\,\delta y + N\,\delta z + \ldots)\, dx.$$

Cette expression doit être nulle pour tous les systèmes de valeurs admissibles des variations δy, δz, ..., δx_0, δx_1.

365. Supposons d'abord que ces variations puissent être choisies d'une manière entièrement arbitraire.

On pourra poser, en particulier,

$$\delta x_0 = \delta x_1 = 0, \qquad \delta y = \varepsilon\theta^2 M, \qquad \delta z = \varepsilon\theta^2 N, \qquad \ldots,$$

θ étant une fonction quelconque de x, qui s'annule pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$, ainsi que ses dérivées successives, jusqu'à un ordre égal au plus grand des nombres $m - 1$, $n - 1$, ... Pour ce système de variations, les termes tout intégrés de δI s'évanouiront, et l'on aura

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} \theta^2 (M^2 + N^2 + \ldots)\, dx.$$

Cette intégrale, dont tous les éléments sont positifs, ne

pourra s'évanouir que si l'on a

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad \ldots,$$

ce qui réduira l'expression de δI à la partie tout intégrée

$$\begin{bmatrix} C\,\delta y + C^1\,\delta y' + \ldots + C^{m-1}\,\delta y^{m-1} \\ + D\,\delta z + D^1\,\delta z' + \ldots + D^{n-1}\,\delta z^{n-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}_{x_0}^{x_1} + [\varphi_1]\,\delta x_1 - [\varphi]_0\,\delta x_0$$

$$\begin{aligned} = {} & C_1\,\delta y_1 + C_1^1\,\delta y'_1 + \ldots + C_1^{m-1}\,\delta y_1^{m-1} + D_1\,\delta z_1 + \ldots + D_1^{n-1}\,\delta z_1^{n-1} + \ldots \\ & - C_0\,\delta y_0 - C_0^1\,\delta y'_0 - \ldots - C_0^{m-1}\,\delta y_0^{m-1} - D_0\,\delta z_0 - \ldots - D_0^{n-1}\,\delta z_0^{n-1} + \ldots \\ & + [\varphi]_1\,\delta x_1 - [\varphi]_0\,\delta x_0, \end{aligned}$$

que nous désignerons par H.

Les diverses variations qui figurent dans cette expression sont évidemment des arbitraires indépendantes. Donc, pour que δI s'annule identiquement, il faudra qu'on ait encore

$$(8)\quad \begin{cases} C_1 = 0, \quad C_1^1 = 0, \quad \ldots, \quad C_0 = 0, \quad \ldots, \quad D_0^{n-1} = 0, \quad \ldots, \\ \qquad\qquad [\varphi]_1 = 0, \qquad [\varphi]_0 = 0. \end{cases}$$

Les équations

$$(9)\quad \begin{cases} 0 = M = A - A'_1 + \ldots + (-1)^m A_m^m, \\ 0 = N = B - B'_1 + \ldots + (-1)^n B_n^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sont des équations différentielles entre x et les fonctions inconnues y, z.

La première contient les dérivées de y, z, ... jusqu'à l'ordre $2m$, $n+m$, ... respectivement. La seconde les contient jusqu'à l'ordre $m+n$, $2n$, ... ; et de même pour les suivantes si le nombre des fonctions y, z, ... surpasse 2. Ces équations forment donc un système d'ordre $2m+2n+\ldots$ en général, et donneront y, z, ... en fonction de x et de $2m+2n+\ldots$ constantes arbitraires a_1, a_2, ...

En substituant ces valeurs dans les $2+2m+2n+\ldots$ équations aux limites (8), on aura le nombre d'équations

nécessaires pour déterminer les constantes d'intégration et les limites x_0, x_1. Le problème est donc en général déterminé.

366. *Jacobi* a montré que le système des équations différentielles (9) peut être ramené à un système de $2m+2n+\ldots$ équations du premier ordre ayant la forme canonique.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, qu'on ait deux fonctions inconnues y, z. Prenons pour inconnues auxiliaires les quantités y', ..., y^{m-1}, z', ..., z^{n-1}; C, C^1, ..., C^{m-1}, D, D^1, ..., D^{n-1}; on aura, par définition,

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=y', & \ldots, \quad \dfrac{dy^{m-1}}{dx}=y^m, \\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=z', & \ldots, \quad \dfrac{dz^{n-1}}{dx}=z^n. \end{cases}$$

D'autre part, la différentiation des équations (7) donne immédiatement (en remarquant que $M=N=0$)

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dC}{dx}=A, & \ldots, \quad \dfrac{dC^i}{dx}=A_i-C^{i-1}, \quad \ldots, \\[2mm] \dfrac{dD}{dx}=B, & \ldots, \quad \dfrac{dD^i}{dx}=B_i-D^{i-1}, \quad \ldots, \end{cases}$$

et, si l'on tire des équations

$$(12)\qquad A_m=C^{m-1}, \qquad B_n=D^{n-1},$$

les valeurs de y^m, z^n pour les substituer dans les équations (9) et (10), on obtiendra, entre x et les nouvelles variables y, y', ..., y^{m-1}; z, ..., z^{n-1}; C, ..., C^{m-1}, D, ..., D^{n-1}, un système d'équations du premier ordre, équivalent aux deux équations primitives.

Ce nouveau système est canonique. Considérons en effet la fonction

$$U=\varphi-Cy'-\ldots-C^{m-1}y^m-Dz'-\ldots-D^{n-1}z^n.$$

Sa différentiation donnera

$$\begin{aligned} dU = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + A\,dy + (A_1 - C)\,dy' + \ldots + (A_m - C^{m-1})\,dy^m \\ + B\,dz + (B_1 - D)\,dz' + \ldots + (B_n - D^{n-1})\,dz^n \\ - y'\,dC - y''\,dC^1 - \ldots - y^m\,dC^{m-1} \\ - z'\,dD - z''\,dD^1 - \ldots - z^n\,dD^{n-1}. \end{aligned}$$

D'ailleurs les coefficients de dy^m et de dz^n dans cette expression sont nuls. On voit donc que, si l'on exprime U en fonction de x, y, ..., y^{m-1}; z, ..., z^{n-1}; C, ..., C^{m-1}; D, ..., D^{n-1}, en éliminant y^m, z^n au moyen des équations (12), on aura

$$y' = -\frac{\partial U}{\partial C}, \quad \ldots, \quad y^i = -\frac{\partial U}{\partial C^{i-1}}, \quad \ldots, \quad z' = -\frac{\partial U}{\partial D}, \quad \ldots,$$

$$A = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ldots, \quad A_i - C^{i-1} = \frac{\partial U}{\partial y^i}, \quad \ldots, \quad B = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \ldots,$$

ce qui établit notre proposition.

367. Réciproquement, soit U une fonction quelconque de x et d'un nombre quelconque de couples de variables y, η; z, ζ; ...; supposons ces dernières quantités fonctions de x, et cherchons la variation de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} (U + \eta y' + \zeta z' + \ldots)\,dx,$$

en supposant qu'on les fasse varier. La portion de la variation qui restera sous le signe $\int$, après l'intégration par parties, sera

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} - \eta' \right) \delta y + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} + y' \right) \delta \eta + \ldots \right] dx,$$

et, en exprimant qu'elle est constamment nulle, on aura les

équations canoniques

$$\eta' = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad y' = -\frac{\partial U}{\partial \eta}, \qquad \ldots.$$

On voit donc que le problème d'annuler la première variation d'une intégrale et celui d'intégrer les systèmes d'équations canoniques sont entièrement équivalents.

368. Les résultats que nous venons de trouver subissent quelques modifications, lorsque les fonctions y, z, ... et les limites x_0, x_1 ne sont pas entièrement arbitraires. Nous allons passer en revue les principaux cas que l'on rencontre dans les problèmes usuels :

1° Les fonctions y, z, ... sont encore arbitraires dans l'intérieur du champ d'intégration; mais il existe entre les limites x_0, x_1 et les valeurs $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{m-1}$; $z_0, \ldots, z_0^{n-1}$; ...; $y_1, \ldots, y_1^{m-1}$; $z_1, \ldots, z_1^{n-1}$; ... que prennent pour ces limites les quantités y, y', ..., y^{m-1}; z, z', ..., z^{n-1}; ... une ou plusieurs relations

$$(13) \qquad \psi = 0, \qquad \chi = 0, \qquad \ldots.$$

On aura encore, dans ce cas, $M = 0$, $N = 0$, ...; mais les variations δx_0, δx_1, δy_0, ... qui figurent dans la partie tout intégrée de δI ne seront plus indépendantes les unes des autres, et chacune des équations (13) fournira une relation linéaire entre ces variations.

En effet, changeons y, z, ... en $y + \delta y$, $z + \delta z$, puis x_0, x_1 en $x_0 + \delta x_0$, $x_1 + \delta x_1$. Soient $y_0 + \Delta y_0$, $y'_0 + \Delta y'_0$, ... ce que sont devenus y_0, y'_0, ... par cette variation. Ces nouvelles valeurs, associées aux nouvelles limites $x_0 + \delta x_0$, $x_1 + \delta x_1$, devront encore satisfaire aux équations aux limites $\psi = 0$, $\chi = 0$, ... On aura donc, en développant par la série de Taylor et s'arrêtant aux termes du premier ordre,

$$0 = \delta\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_0}\delta x_0 + \frac{\partial \psi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial \psi}{\partial y'_0}\Delta y'_0 + \ldots,$$

....

Il ne reste plus, pour obtenir les relations cherchées, qu'à trouver l'expression de Δy_0, $\Delta y'_0$, ... en fonction de δx_0, δx_1, δy_0, $\delta y'_0$, ... On l'obtient aisément comme il suit :

On a, par définition,

$$y_0^k = [y^k]_{x=x_0},$$

$$\begin{aligned} y_0^k + \Delta y_0^k &= [y^k + \delta y^k]_{x=x_0+\delta x_0} \\ &= [y^k]_{x=x_0+\delta x_0} + [\delta y^k]_{x=x_0+\delta x_0} \\ &= y_0^k + y_0^{k+1}\,\delta x_0 + \ldots + \delta y_0^k + \ldots. \end{aligned}$$

On aura donc, en négligeant les termes du second ordre, comme nous le faisons dans toute cette recherche,

$$\Delta y_0^k = \delta y_0^k + y_0^{k+1}\,\delta x_0.$$

Nous avons ainsi obtenu autant d'équations linéaires entre les variations δx_0, δx_1, δy_0, ... qu'il existe d'équations de condition $\psi = 0$, $\chi = 0$, ... Soit p ce nombre. On pourra, au moyen de ces relations, éliminer p variations de l'équation

$$\begin{aligned} \mathrm{H} = [\varphi]_1\,\delta x_1 - [\varphi]_0\,\delta x_0 & \\ + \mathrm{C}_1\,\delta y_1 + \ldots + \mathrm{C}_1^{m-1}\,\delta y_1^{m-1} & \\ - \mathrm{C}_0\,\delta y_0 - \ldots - \mathrm{C}_0^{m-1}\,\delta y_0^{m-1} & \\ + \mathrm{D}_1\,\delta z_1 + \ldots + \mathrm{D}_1^{n-1}\,\delta z_1^{n-1} & \\ - \mathrm{D}_0\,\delta z_0 - \ldots - \mathrm{D}_0^{n-1}\,\delta z_0^{n-1} & \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = 0. \end{aligned}$$

Les $2 + 2m + 2n + \ldots - p$ variations restantes étant entièrement indépendantes, on devra égaler leurs coefficients à zéro, ce qui donnera autant d'équations de condition nouvelles, qui, jointes aux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$, ..., détermineront encore x_0, x_1 et les constantes d'intégration.

On peut d'ailleurs opérer d'une manière plus symétrique en ajoutant à l'équation précédente les équations $\delta\psi = 0$, $\delta\chi = 0$, multipliées par des indéterminées λ, μ, ..., et égalant à zéro les coefficients de chaque variation. Les $2 + 2m + 2n + \ldots$ équations ainsi obtenues seront les

mêmes que celles qu'on obtiendrait en annulant la variation de $I + \lambda\psi + \mu\chi + \ldots$, λ et μ désignant des quantités invariables. En les joignant aux équations données $\psi = 0$, $\chi = 0$, ..., on pourra déterminer toutes les inconnues du problème, y compris les inconnues auxiliaires λ, μ, ...

369. 2° Les fonctions y, z, ... ne sont plus indépendantes, mais sont liées par des équations différentielles

$$(14) \qquad \psi = 0; \quad \chi = 0, \quad \ldots.$$

Soit p le nombre de ces équations, dans lesquelles pourront d'ailleurs figurer, outre les fonctions inconnues y, z, ... et leurs dérivées, d'autres inconnues auxiliaires u, ... et leurs dérivées. (Le nombre de ces nouvelles inconnues devra toutefois être inférieur à celui des équations de condition.)

Les équations $\psi = 0$, $\chi = 0$, ... feront connaître p des inconnues y, z, ..., u, ..., par exemple y, ... en fonction des autres z, ..., u, ..., qui resteront indéterminées.

Cela posé, désignons par $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des fonctions arbitraires de x, que nous nous réserverons de déterminer. On aura évidemment, pour tout système de variations de y, z, ..., u, ...; x_0, x_1 compatible avec les équations $\psi = 0$, $\chi = 0$, ...,

$$\delta I = \delta \int_{x_0}^{x_1} \varphi \, dx = \delta \int_{x_0}^{x_1} (\varphi + \lambda_1 \psi + \lambda_2 \chi + \ldots) \, dx;$$

car l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} (\lambda_1 \psi + \lambda_2 \chi + \ldots) dx$ étant identiquement nulle, sa variation l'est aussi.

La variation de l'intégrale

$$K = \int_{x_0}^{x_1} (\varphi + \lambda_1 \psi + \lambda_2 \chi + \ldots) \, dx,$$

traitée à la manière ordinaire (sans faire varier les fonctions λ), pourra se mettre sous la forme

$$\delta K = H' + \int_{x_0}^{x_1} (M' \, \delta y + N' \, \delta z + \ldots + P' \, \delta u + \ldots) \, dx,$$

H' désignant la partie tout intégrée et M', N' des expressions formées avec y, z, ..., u, ..., λ_1, ..., λ_p et leurs dérivées.

Déterminons les fonctions arbitraires λ_1, ..., λ_p par la condition d'annuler les coefficients des variations δy, ... des variables dépendantes y, ... ; δK se réduira à

$$H' + \int_{x_0}^{x_1} (N' \delta z + \ldots + P' \delta u + \ldots)\, dx,$$

et, comme les variations δz, δu, ... sont arbitraires dans tout le champ d'intégration, on aura séparément

$$H' = 0, \qquad N' = 0, \qquad \ldots, \qquad P' = 0, \qquad \ldots.$$

Nous aurons donc, pour déterminer y, z et les fonctions auxiliaires λ_1, ..., λ_p, les équations différentielles simultanées

$$\begin{gathered} \psi = 0, \qquad \chi = 0, \qquad \ldots, \\ M' = 0, \qquad N' = 0, \qquad \ldots; \qquad P' = 0, \qquad \ldots. \end{gathered}$$

Les constantes d'intégration et les limites x_0, x_1 se déduiront de la condition $H' = 0$. Celle-ci se décompose d'ailleurs en autant d'équations distinctes qu'il reste de variations indépendantes parmi celles qui figurent dans H', lorsqu'on a tenu compte des équations aux limites

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \psi = 0, & \dfrac{d\psi}{dx} = 0, & \ldots, & \text{pour } x = x_0 \text{ et } x = x_1; \\ \chi = 0, & \dfrac{d\chi}{dx} = 0, & \ldots, & \quad \text{»} \quad x = x_0 \text{ et } x = x_1; \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \quad \text{»} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

qui sont des conséquences des équations $\psi = 0$, $\chi = 0$, lesquelles ont lieu identiquement pour toute valeur de x.

La série de ces équations aux limites devra d'ailleurs être arrêtée au moment où apparaîtraient, dans les dérivées successives de ψ, χ, ..., des dérivées de y, z, ... ; u, ... d'ordre supérieur à celles que contient H'.

On obtiendra donc la solution du problème proposé en

égalant identiquement à zéro la variation de l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi + \lambda_1\psi + \lambda_2\chi + \ldots)\, dx$$

$$+ \mu_0^0\psi_0 + \mu_1^0\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0 + \ldots + \mu_0^1\psi_1 + \mu_1^1\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_1 + \ldots$$

$$+ \nu_0^0\chi_0 + \nu_1^0\left(\frac{d\chi}{dx}\right)_0 + \ldots + \nu_0^1\chi_1 + \nu_1^1\left(\frac{d\chi}{dx}\right)_1 + \ldots$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations ainsi obtenues, jointes aux équations

$$\psi = 0, \qquad \chi = 0, \qquad \ldots,$$

et à celles-ci :

$$\psi_0 = 0, \quad \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_0 = 0, \quad \ldots, \quad \psi_1 = 0, \quad \left(\frac{d\psi}{dx}\right)_1 = 0, \quad \ldots;$$

$$\chi_0 = 0, \quad \left(\frac{d\chi}{dx}\right)_0 = 0, \quad \ldots, \quad \chi_1 = 0, \quad \left(\frac{d\chi}{dx}\right)_1 = 0, \quad \ldots;$$

$$\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots,$$

déterminent toutes les inconnues du problème, y compris les multiplicateurs λ, μ, ν.

370. 3° Les quantités inconnues y, z, ..., x_0, x_1 sont assujetties à varier de telle sorte qu'une intégrale définie

$$K = \int_{x_0}^{x_1} \psi(x, y, y', \ldots; z, z', \ldots)\, dx,$$

prise entre les mêmes limites que I, conserve une valeur constante c.

Ce cas se ramène immédiatement aux précédents. Prenons, en effet, comme inconnue auxiliaire, la quantité

$$u = \int_{x_0}^{x} \psi\, dx.$$

Cette équation, qui définit u, équivaut évidemment aux

deux suivantes :

$$u' = \psi, \qquad u = 0, \qquad \text{pour } x = x_0.$$

D'ailleurs, pour $x = x_1$, u devient égal à c; on doit donc avoir

$$u = c, \qquad \text{pour } x = x_1.$$

D'après le numéro précédent, nous aurons donc à annuler identiquement la variation de l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} [\varphi + \lambda(\psi - u')]\, dx + \mu_0 u_0 + \mu_1(u_1 - c)$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left(\varphi + \lambda\psi + \frac{d\lambda}{dx} u\right) dx + (\mu_0 + \lambda_0) u_0 + (\mu_1 - \lambda_1)(u_1 - c),$$

λ_0 et λ_1 étant les valeurs de λ aux deux limites x_0 et x_1.

Les termes qui, dans la variation de cette expression, dépendent de δu, δu_0, δu_1, seront

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\lambda}{dx} \delta u\, dx + (\mu_0 + \lambda_0)\, \delta u_0 + (\mu_1 - \lambda_1)\, \delta u_1.$$

On aura donc les équations

$$\frac{d\lambda}{dx} = 0, \qquad \mu_0 + \lambda_0 = 0, \qquad \mu_1 - \lambda_1 = 0;$$

donc λ est une constante, et la quantité dont on doit annuler la variation se réduit à

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi + \lambda\psi)\, dx.$$

Les équations qui expriment que cette variation est nulle détermineront les inconnues x_0, x_1, y, z, ... en fonction de la constante inconnue λ. Ces valeurs, substituées dans l'intégrale K, en feront une fonction de λ, telle que $f(\lambda)$; il ne restera plus qu'à résoudre l'équation

$$f(\lambda) = c.$$

On peut retrouver ce même résultat par les considérations suivantes.

La variation de l'intégrale I doit s'annuler pour tous les systèmes de variations δy, δz, ..., qui annulent la variation de K.

Cela posé, soient $\delta' x_0$, $\delta' x_1$, $\delta' y$, $\delta' z$, ... ; $\delta'' x_0$, $\delta'' x_1$, $\delta'' y$, $\delta'' z$, ... deux systèmes quelconques de variations de x_0, x_1, y, z, ... ; et soient $\delta' \mathrm{I}$, $\delta' \mathrm{K}$; $\delta'' \mathrm{I}$, $\delta'' \mathrm{K}$ les variations qui en résultent respectivement pour les intégrales I, K. Donnons à x_0, x_1, y, z, ... de nouvelles variations égales à

$$\delta'' \mathrm{K}\, \delta' x_0 - \delta' \mathrm{K}\, \delta'' x_0, \quad \ldots,$$
$$\delta'' \mathrm{K}\, \delta' y - \delta' \mathrm{K}\, \delta'' y, \quad \delta'' \mathrm{K}\, \delta' z - \delta' \mathrm{K}\, \delta'' z, \quad \ldots.$$

La variation correspondante de K sera

$$\delta'' \mathrm{K}\, \delta' \mathrm{K} - \delta' \mathrm{K}\, \delta'' \mathrm{K} = 0.$$

Celle de I, qui est égale à $\delta'' \mathrm{K}\, \delta' \mathrm{I} - \delta' \mathrm{K}\, \delta'' \mathrm{I}$, devra s'annuler également. On en déduit

$$\frac{\delta' \mathrm{I}}{\delta' \mathrm{K}} = \frac{\delta'' \mathrm{I}}{\delta'' \mathrm{K}}.$$

Le rapport des variations de I et de K sera donc constant pour tout système de variations de y, z, ... Soit $-\lambda$ la valeur de ce rapport. La variation de l'intégrale

$$\mathrm{I} + \lambda \mathrm{K} = \int_{x_0}^{x_1} (\varphi + \lambda \psi)\, dx$$

sera identiquement nulle. Cette condition déterminera x_0, x_1, y, z, ... en fonction de λ, qu'on obtiendra, comme tout à l'heure, par l'équation $\mathrm{K} = c$.

On voit que, dans les divers cas que nous venons d'examiner, la solution du problème revient toujours dans sa partie essentielle à annuler la variation d'une intégrale où toutes les variations sont supposées indépendantes.

371. Nous allons éclaircir ces théories générales par quelques exemples.

Cherchons quelles conditions doivent être remplies pour que l'expression

$$\varphi(x, y, y', \ldots, y^m; z, z', \ldots, z^n)$$

soit la dérivée exacte d'une fonction ψ de $x, y, y', \ldots, y^{m-1}$; $z, z', \ldots, z^{n-1}$.

On a identiquement, par hypothèse,

$$\varphi - \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

On aura donc, quelles que soient les variations δx_0, δx_1, δy, δz,

$$0 = \delta \int_{x_0}^{x_1} \left[\varphi - \frac{d\psi}{dx} \right] dx = \text{H} - [\delta\psi]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (\text{M}\,\delta y + \text{N}\,\delta z)\,dx,$$

H, M, N ayant la même signification que précédemment.

On aura, par suite,

$$(16) \quad \begin{cases} 0 = \text{M} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'} + \dfrac{d^2}{dx^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y''} - \ldots, \\ 0 = \text{N} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z'} + \dfrac{d^2}{dx^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z''} - \ldots, \end{cases}$$

les séries du second membre étant prolongées jusqu'au point où elles s'arrêtent d'elles-mêmes.

372. Ces deux conditions, dont nous venons d'établir la nécessité, sont en même temps suffisantes. Cette proposition est évidente si $m = 0$, $n = 0$; car les deux conditions se réduisant dans ce cas à $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$, φ sera une fonction de x seul, qu'on peut intégrer.

Nous allons montrer d'ailleurs que ces conditions seront

suffisantes pour des valeurs quelconques de m et de n si elles le sont pour $m-1$, n.

Nous remarquerons tout d'abord que le développement des divers termes de M ne fournit que des dérivées de y et de z d'ordre inférieur respectivement à $2m$ et $n+m$, sauf le dernier terme $(-1)^m \frac{d^m}{dx^m} \frac{\partial\varphi}{\partial y^m}$ dont le développement contient les deux termes

$$(-1)^m \frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^m)^2} y^{2m} + (-1)^m \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^m\,\partial z^n} z^{n+m}.$$

Ces termes ne pouvant se réduire avec aucun autre, M ne pourra s'annuler identiquement que si l'on a

$$\frac{\partial^2\varphi}{(\partial y^m)^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^m\,\partial z^n} = 0,$$

ce qui montre que φ est nécessairement de la forme

$$\varphi = \mathrm{P}\,y^m + \mathrm{Q},$$

P ne contenant plus y^m ni z^n, et Q ne contenant plus y^m.

Posons

$$\mathrm{U} = \int_0^{y^{m-1}} \mathrm{P}\,dy^{m-1},$$

y^{m-1} seul étant traité comme variable dans cette intégration; U sera une fonction de $x, y, \ldots, y^{m-1}; z, \ldots, z^{n-1}$, dont la dérivée partielle par rapport à y^{m-1} sera P, et l'on aura, par suite,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{U}}{dx} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} &+ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y^{m-1}} y^m \\ &+ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} z' + \ldots + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z^{n-1}} z^n = \mathrm{P}\,y^m + \mathrm{R},\end{aligned}$$

R ne contenant plus y^m.

Si donc on pose

$$\varphi = \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \varphi_1,$$

la fonction $\varphi_1 = Q - R$ ne contiendra plus y^m. D'ailleurs elle satisfera évidemment aux équations (16); car φ y satisfait par hypothèse, et $\frac{dU}{dx}$ étant une dérivée exacte y satisfait aussi nécessairement. Donc, le théorème étant supposé vrai pour $m-1$, n, φ_1 est une dérivée exacte, et il en sera de même pour φ.

373. Proposons-nous, comme seconde application, la transformation des équations de la Dynamique.

Considérons un système de n points $p_1, \ldots, p_n$, de masses $m_1, \ldots, m_n$, et dont les coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ soient liées par r équations de condition

$$(17)\qquad \varphi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_r = 0.$$

Soient $X_1, Y_1, Z_1, \ldots, X_n, Y_n, Z_n$ les composantes des forces qui sollicitent ces divers points, et admettons, ce qui a lieu dans des cas très étendus, que ces composantes soient les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial y_1}, \frac{\partial U}{\partial z_1}; \ldots; \frac{\partial U}{\partial x_n}, \frac{\partial U}{\partial y_n}, \frac{\partial U}{\partial z_n}$ d'une même fonction U des coordonnées x, y, z et du temps t. D'après les principes généraux de la Mécanique, on obtiendra les équations du mouvement en joignant aux relations (17) les suivantes :

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial x_i} - m_i x_i'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = 0 \\ &\frac{\partial U}{\partial y_i} - m_i y_i'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial y_i} = 0 \\ &\frac{\partial U}{\partial z_i} - m_i z_i'' + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_r \frac{\partial \varphi_r}{\partial z_i} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ étant des inconnues auxiliaires représentant les tensions qui existent dans le système.

Représentons, pour abréger, par T la demi-force vive

$$\frac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

et considérons l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (U + T)\, dt.$$

Les équations (17) et (18) sont précisément celles qui expriment que la variation de cette intégrale est nulle lorsque l'on suppose que les limites t_0 et t_1 restent constantes, ainsi que les valeurs initiales et finales des diverses coordonnées x_i, y_i, z_i, et que d'ailleurs ces coordonnées restent assujetties, dans le cours de leur variation, aux équations de condition (17).

Cela posé, les relations (17) permettent d'exprimer les $3n$ coordonnées x, y, z en fonction de $3n - r$ d'entre elles ou, plus généralement, en fonction de $3n - r$ nouvelles variables entièrement indépendantes q_1, q_2, ... Substituons ces valeurs dans l'intégrale. On aura

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \ldots, \qquad \ldots$$

et, par suite, T se transformera en une fonction de q_1, q_2, ... et de leurs dérivées q'_1, q'_2, ..., homogène et du second degré par rapport à ces dernières quantités; quant à U, il deviendra une fonction de q_1, q_2, ...

Les nouvelles variables q_1, q_2, ... ne sont plus assujetties à aucune équation de condition; leurs variations sont donc arbitraires dans tout le champ d'intégration; elles doivent seulement s'annuler aux limites. Pour que la variation de l'intégrale

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial (U + T)}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i \right] dt$$

$$= \left[\sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial (U + T)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right] \delta q_i \, dt$$

s'annule, il est donc nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\frac{\partial(U+T)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 3n - r).$$

Ce sont les équations transformées que nous voulions obtenir. On peut d'ailleurs les remplacer par un système canonique en prenant pour inconnues auxiliaires les quantités $\frac{\partial T}{\partial q'_i}$. C'est un cas particulier de la proposition plus générale démontrée au n° 366.

374. *Brachistochrone.* — Proposons-nous de déterminer le chemin que doit suivre sous l'action de la gravité un point animé de la vitesse initiale v_0 pour se rendre d'un point (x_0, y_0, z_0) à un autre point (x_1, y_1, z_1) dans le temps le plus court possible.

Prenons z pour variable indépendante. La différentielle de l'arc de la courbe cherchée sera $\sqrt{1+x'^2+y'^2}\,dz$; la vitesse v, à un instant quelconque, sera $\sqrt{v_0^2 - 2g(z-z_0)}$, enfin la durée du trajet sera donnée par l'intégrale

$$I = \int_{z_0}^{z_1} \frac{ds}{v} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2g(z-z_0)}}\,dz.$$

C'est cette expression qu'il s'agit de rendre minimum.

On a

$$\delta I = \left[\frac{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2g(z-z_0)}}\,\delta z\right]_0^1$$

$$+ \int_{z_0}^{z_1} \frac{x'\,\delta x' + y'\,\delta y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}\sqrt{v_0^2 - 2g(z-z_0)}}\,dz$$

$$= H + \int_{z_0}^{z_1} [M\,\delta x + N\,\delta y]\,dz,$$

en posant, pour abréger,

$$H = \left[\frac{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}{\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}}\delta z + \frac{x'\,\delta x + y'\,\delta y}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{\delta z + x'(\delta x + x'\,\delta z) + y'(\delta y + y'\,\delta z)}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}}\right]_0^1,$$

$$M = -\frac{d}{dz}\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}},$$

$$N = -\frac{d}{dz}\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}}.$$

Les deux équations différentielles de la courbe cherchée

$$M = 0, \qquad N = 0$$

donnent immédiatement

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}} = c,$$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}} = c_1,$$

et, par suite,

$$y' = \frac{c_1}{c}x', \qquad y = \frac{c_1}{c}x + c_2,$$

c, c_1, c_2 étant des constantes.

On voit ainsi que la courbe cherchée est située dans un plan vertical. Pour mieux reconnaître sa nature, choisissons ce plan pour plan des xz; on aura, dans ce cas, $y = 0$, et l'équation différentielle de la courbe se réduira à

$$\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}\sqrt{v_0^2-2g(z-z_0)}} = c,$$

d'où

$$x' = \sqrt{\frac{a-z}{b+z}}$$

en posant, pour abréger,

$$z_0 + \frac{v_0^2}{2g} = a, \qquad \frac{1}{2gc^2} - z_0 - \frac{v_0^2}{2g} = b.$$

Posons

$$(19) \qquad z = \frac{a-b}{2} - \frac{a+b}{2}\cos t;$$

il viendra

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a+b}{2}\sin t . x' = \frac{a+b}{2}\sin t\sqrt{\frac{1-\cos t}{1+\cos t}}$$

$$= (a+b)\sin^2\frac{1}{2}t = \frac{a+b}{2}[1-\cos t],$$

d'où

$$(20) \qquad x = \frac{a+b}{2}[t - \sin t] + k,$$

k étant une constante.

Les équations (19) et (20) peuvent s'écrire

$$z + b = \frac{a+b}{2}(1-\cos t),$$

$$x - k = \frac{a+b}{2}(t - \sin t)$$

et représentent une cycloïde dont la droite directrice est dirigée suivant l'axe des x.

Si les points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont supposés fixes, δx_0, δy_0, δz_0, δx_1, δy_1, δz_1 seront nuls, de sorte que H s'évanouira de lui-même. Mais les quatre constantes introduites par l'intégration des équations $M = 0$, $N = 0$ se détermineront en exprimant que la courbe passe par les deux points donnés.

Supposons, au contraire, que le point (x_0, y_0, z_0) étant fixe, la position du point (x_1, y_1, z_1) ne soit pas donnée d'avance, mais qu'il soit seulement assujetti à se trouver sur une surface

$$\psi(x, y, z) = 0.$$

On aura encore $\delta x_0 = \delta y_0 = \delta z_0 = 0$; quant à δx_1, δy_1, δz_1, ils seront liés par l'équation de condition

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1 \delta z_1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_1 (\delta x_1 + x'_1\,\delta z_1) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 (\delta y_1 + y'_1\,\delta z_1) = 0.$$

Toutes les fois que cette condition sera remplie, la quantité H, qui se réduit à

$$\frac{\delta z_1 + x'_1(\delta x_1 + x'_1\,\delta z_1) + y'_1(\delta y_1 + y'_1\,\delta z_1)}{\sqrt{1 + x'^2_1 + y'^2_1}\sqrt{v_0^2 - 2g(z_1 - z_0)}},$$

devra s'annuler; on aura donc les équations de condition

$$(21)\qquad \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1}{1} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_1}{x'_1} = \frac{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1}{y'_1},$$

qui, jointes à $\psi = 0$ et aux équations qui expriment que la courbe passe par x_0, y_0, z_0 et par x_1, y_1, z_1, détermineront les constantes d'intégration et les coordonnées finales x_1, y_1, z_1.

Les équations (21) expriment évidemment que la tangente à la courbe cherchée au point (x_1, y_1, z_1) est normale à la surface $\psi = 0$.

Supposons encore que, (x_0, y_0, z_0) étant fixe, (x_1, y_1, z_1) soit assujetti à se trouver sur la courbe

$$\psi = 0, \qquad \chi = 0.$$

Les variations δx_1, δy_1, δz_1 seront liées par les deux équations

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1 \delta z_1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_1 (\delta x_1 + x'_1\,\delta z_1) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 (\delta y_1 + y'_1\,\delta z_1) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_1 \delta z_1 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_1 (\delta x_1 + x'_1\,\delta z_1) + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_1 (\delta y_1 + y'_1\,\delta z_1) = 0,$$

et, toutes les fois que ces conditions seront remplies, H devra

s'annuler, ce qui donne l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_1 & \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_1 \\ \left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)_1 & \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)_1 & \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)_1 \\ 1 & x'_1 & y'_1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, jointe aux équations $\psi = 0$, $\chi = 0$ et à celles qui expriment que (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont sur la courbe, déterminera encore toutes les inconnues du problème. Cette équation exprime que la courbe cherchée est normale à la courbe $\psi = 0$, $\chi = 0$.

Le cas où (x_0, y_0, z_0) serait lui-même variable se traiterait de la même manière.

375. *Ligne de longueur minimum entre deux points.* — Soient x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1 les deux extrémités de la ligne cherchée. Nous supposerons, pour plus de symétrie, les coordonnées x, y, z exprimées en fonction d'un paramètre t. On pourra évidemment passer de la ligne cherchée à toute autre ligne infiniment voisine en faisant varier l'expression de x, y, z en fonction de t, sans altérer les valeurs initiale et finale t_0 et t_1 de ce paramètre. Nous aurons donc à annuler la variation de l'intégrale

$$I = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

où les limites t_0, t_1 restent fixes.

On a

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\, dt \\ &= \left[\frac{x'\,\delta x + y'\,\delta y + z'\,\delta z}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\right]_0^1 + \int_{t_0}^{t_1} (M\,\delta x + N\,\delta y + P\,\delta z)\, dt, \end{aligned}$$

où

$$M = -\frac{d}{dt}\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \quad N = -\frac{d}{dt}\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \quad \ldots.$$

Les équations $M=0$, $N=0$, $P=0$ donneront, par l'intégration,

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \text{const.}, \qquad \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = \text{const.}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$x' = \text{const.}, \qquad y' = \text{const.}, \qquad z' = \text{const.},$$

et enfin

$$(22) \qquad x = at + \alpha, \qquad y = bt + \beta, \qquad z = ct + \gamma,$$

équations d'une droite.

Si les points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) sont donnés, la condition de passer par ces deux points achèvera de déterminer la droite; il restera encore deux constantes indéterminées dans les équations (22); mais cela doit être, car on peut changer dans ces équations t en $mt+n$, m et n étant deux arbitraires, sans altérer leur forme et sans qu'elles cessent de représenter la même droite.

Supposons que, le point (x_0, y_0, z_0) étant fixe, (x_1, y_1, z_1) soit inconnu, mais assujetti à se trouver sur la surface

$$\psi(x, y, z) = 0.$$

On aura, entre les variations δx_1, δy_1, δz_1, la relation

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\psi}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial\psi}{\partial z_1}\delta z_1 = 0,$$

et, sous cette condition, l'expression

$$H = \frac{x'_1\,\delta x_1 + y'_1\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1}{\sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2}}$$

doit s'annuler, ce qui donne, pour achever de déterminer la

droite et les coordonnées x_1, y_1, z_1, les deux équations

$$\frac{x'_1}{\frac{\partial\psi}{\partial x_1}} = \frac{y'_1}{\frac{\partial\psi}{\partial y_1}} = \frac{z'_1}{\frac{\partial\psi}{\partial z_1}},$$

lesquelles expriment que la droite est normale à la surface ψ.

Si (x_1, y_1, z_1) était sur une courbe

$$\psi = 0, \qquad \chi = 0,$$

on trouverait de même l'équation de condition

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial y_1} & \frac{\partial\psi}{\partial z_1} \\ \frac{\partial\chi}{\partial x_1} & \frac{\partial\chi}{\partial y_1} & \frac{\partial\chi}{\partial z_1} \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime que la droite rencontre la courbe donnée normalement.

376. *Lignes géodésiques.* — Supposons que la ligne de longueur minimum à mener entre les points (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1), au lieu d'être située d'une manière quelconque dans l'espace, soit assujettie à être tracée sur une surface donnée

$$\psi(x, y, z) = 0.$$

Nous avons à rendre minimum l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} ds$, x, y, z étant astreints à la condition $\psi = 0$. Il faudra, pour cela, chercher le minimum de l'intégrale

$$K = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda\psi\right) dt.$$

On aura

$$\delta K = H + \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(M + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \delta x + \left(N + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \delta y + \left(P + \lambda \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \delta z \right] dt,$$

H, M, N, P ayant les mêmes valeurs que dans le problème précédent. Les équations différentielles à joindre à l'équation $\psi = 0$ pour déterminer la courbe cherchée et l'inconnue auxiliaire λ seront donc les suivantes :

$$(23) \qquad \frac{\dfrac{d}{dt}\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}} = \ldots = -\lambda.$$

Or $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}, \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \dfrac{\partial\psi}{\partial z}$ sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à la surface ψ; mais, d'autre part, $\dfrac{d}{dt}\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}, \ldots$ sont respectivement proportionnels aux cosinus directeurs de la normale principale à la courbe cherchée (t. I, n° 484). Les équations (23) expriment donc cette propriété géométrique de la courbe cherchée, que sa normale principale se confond avec la normale à la surface sur laquelle elle est tracée.

Les lignes définies par cette propriété se nomment *lignes géodésiques*.

377. Il est généralement avantageux, dans l'étude des lignes géodésiques, de représenter la surface considérée non plus par une équation entre x, y, z, mais par un système de trois équations, donnant x, y, z en fonction de deux paramètres u, v. On aura, dans ce cas, pour ds, une expression de la forme

$$ds = \sqrt{M\,du^2 + 2N\,du\,dv + P\,dv^2}.$$

Une ligne tracée sur la surface sera définie en joignant

aux équations de la surface une nouvelle relation donnant u en fonction de v.

Si l'on fait varier la fonction u sans changer les extrémités u_0, v_0 ; u_1, v_1 de cette ligne, on aura, pour la variation de l'arc, l'expression

$$\delta\int_{v_0}^{v_1} ds = \int_{v_0}^{v_1} \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial N}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial P}{\partial u}dv^2\right)\delta u + 2(M\,du + N\,dv)d\,\delta u}{2\,ds}.$$

Intégrant par parties le terme en $d\delta u$ et égalant à zéro ce qui restera sous l'intégrale, on obtiendra l'équation différentielle des lignes géodésiques sous la forme

$$(24)\qquad \frac{\partial M}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial N}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial P}{\partial u}dv^2 = 2\,ds\,d\,\frac{M\,du + N\,dv}{ds}.$$

Cette équation du second ordre peut être remplacée par un système de deux équations simultanées du premier ordre entre u, v et l'angle θ formé par la tangente à la ligne géodésique en chacun de ses points avec la tangente à celle des lignes $v =$ const. qui passe par ce même point.

A cet effet, considérons le triangle infiniment petit formé par les points A, B, C, dont les coordonnées sont respectivement u, v ; u, $v + dv$; $u + du$, $v + dv$; on aura sensiblement

$$\overline{AB}^2 = P\,dv^2,\qquad \overline{BC}^2 = M\,du^2,\qquad \overline{AC}^2 = ds^2,$$

$$\widehat{ACB} = \theta,\qquad \widehat{ABC} = \pi - \omega,$$

ω désignant l'angle des deux lignes u et v qui se croisent au point A.

On aura, par suite, en appliquant les formules connues de la Trigonométrie,

$$ds^2 = M\,du^2 + P\,dv^2 + 2\sqrt{MP}\,du\,dv\cos\omega\,;$$

d'où

$$\cos\omega = \frac{N}{\sqrt{MP}},\qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{MP - N^2}}{\sqrt{MP}},$$

puis

$$\frac{ds}{\sin\omega} = \frac{\sqrt{P}\,dv}{\sin\theta};$$

d'où

$$ds\sin\theta = \frac{\sqrt{MP - N^2}}{\sqrt{M}}dv \tag{25}$$

et enfin, en projetant le triangle sur BC,

$$ds\cos\theta = \sqrt{M}\,du + \sqrt{P}\,dv\cos\omega = \frac{M\,du + N\,dv}{\sqrt{M}}. \tag{26}$$

La division membre à membre des deux dernières formules donnera

$$\cot\theta = \frac{M\,du + N\,dv}{\sqrt{MP - N^2}\,dv}. \tag{27}$$

Il ne reste plus qu'à transformer l'équation (24). On aura

$$\begin{aligned} 2\,ds\,d\,\frac{M\,du + N\,dv}{ds} &= 2\,ds\,d\sqrt{M}\cos\theta \\ &= \left(\frac{\partial M}{\partial u}du + \frac{\partial M}{\partial v}dv\right)\frac{ds\cos\theta}{\sqrt{M}} - 2\sqrt{M}\,ds\sin\theta\,d\theta. \end{aligned}$$

Remplaçons $ds\cos\theta$ et $ds\sin\theta$ par leurs valeurs, substituons dans (24) et réduisons ; il viendra

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial N}{\partial u}du + \frac{\partial P}{\partial u}dv - \frac{\partial M}{\partial v}du& \\ - \frac{N}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial u}du + \frac{\partial M}{\partial v}dv\right) + 2\sqrt{MP - N^2}\,d\theta = 0.& \end{aligned} \tag{28}$$

Les équations (27) et (28) sont les deux équations différentielles cherchées.

378. Lorsque les lignes u et v sont orthogonales, on a $N = 0$, et les formules (25) à (28) prennent la forme plus

simple

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} ds \sin\theta &= \sqrt{\mathrm{P}}\, dv, \\ ds \cos\theta &= \sqrt{\mathrm{M}}\, du, \\ \cot\theta &= \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}} \frac{du}{dv}; \end{aligned} \right.$$

$$(30)\quad \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial u} dv - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial v} du + 2\sqrt{\mathrm{MP}}\, d\theta = 0.$$

379. Appliquons ces formules à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\mathrm{A}} + \frac{y^2}{\mathrm{B}} + \frac{z^2}{\mathrm{C}} = 1,$$

en prenant pour lignes u et v le système de ses lignes de courbure.

Nous avons trouvé (t. I, n° 548) la valeur du carré ds^2 de l'élément de longueur dans l'espace rapporté à un système de coordonnées elliptiques λ_1, λ_2, λ_3. En chaque point de l'ellipsoïde considéré, on aura $\lambda_1 = 0$; les coordonnées de ces points ne dépendront donc plus que des deux paramètres λ_2 et λ_3, que nous désignerons par u et v. On sait d'ailleurs (t. I, n° 551) que les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ seront les lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Posant donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = u$, $\lambda_3 = v$ dans les valeurs de x^2, y^2, z^2, ds^2, il viendra

$$x^2 = \mathrm{A}\frac{(\mathrm{A}+u)(\mathrm{A}+v)}{(\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{C})},$$

$$y^2 = \mathrm{B}\frac{(\mathrm{B}+u)(\mathrm{B}+v)}{(\mathrm{B}-\mathrm{A})(\mathrm{B}-\mathrm{C})},$$

$$z^2 = \mathrm{C}\frac{(\mathrm{C}+u)(\mathrm{C}+v)}{(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})},$$

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{1}{4}\frac{u(u-v)}{(\mathrm{A}+u)(\mathrm{B}+u)(\mathrm{C}+u)} du^2 \\ & + \frac{1}{4}\frac{v(v-u)}{(\mathrm{A}+v)(\mathrm{B}+v)(\mathrm{C}+v)} dv^2. \end{aligned}$$

On aura donc ici

$$M = \frac{1}{4}\,\frac{u(u-v)}{(A+u)(B+u)(C+u)},$$

$$N = 0,$$

$$P = \frac{1}{4}\,\frac{v(v-u)}{(A+v)(B+v)(C+v)}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial P}{\partial u} = -\frac{1}{4}\,\frac{v}{(A+v)(B+v)(C+v)} = -\frac{P}{v-u},$$

$$\frac{\partial M}{\partial v} = -\frac{M}{u-v}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (30), il viendra

$$M\,du + P\,dv + 2(u-v)\sqrt{MP}\,d\theta = 0$$

ou, en remplaçant M et P par leurs valeurs tirées des équations (29),

$$\cos^2\theta\,dv + \sin^2\theta\,du + 2(u-v)\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement et donne

$$(31)\qquad u\sin^2\theta + v\cos^2\theta = c,$$

c désignant une constante.

L'équation (31) peut s'écrire

$$(u-c)\sin^2\theta + (v-c)\cos^2\theta = 0$$

ou, en remplaçant $\sin\theta$ et $\cos\theta$ par leurs valeurs,

$$(u-c)P\,dv^2 + (v-c)M\,du^2 = 0.$$

Substituant enfin, pour M et P, leurs valeurs et séparant les variables on aura l'équation

$$\sqrt{\frac{v}{(A+v)(B+v)(C+v)(v-c)}}\,dv$$
$$= \sqrt{\frac{u}{(A+u)(B+u)(C+u)(u-c)}}\,du,$$

dont l'intégration se ramène aux quadratures.

L'arc de la courbe s'obtient également par des quadratures. On a, en effet,

$$ds^2 = \mathrm{M}\,du^2 + \mathrm{P}\,dv^2$$

$$= \mathrm{M}\,du^2\left(1 - \frac{v-c}{u-c}\right) = \frac{\frac{1}{4}u(u-v)^2\,du^2}{(\mathrm{A}+u)(\mathrm{B}+u)(\mathrm{C}+u)(u-c)},$$

$$2\,ds = (u-v)\sqrt{\frac{u}{(\mathrm{A}+u)(\mathrm{B}+u)(\mathrm{C}+u)(u-c)}}\,du$$

$$= \frac{u\sqrt{u}\,du}{\sqrt{(\mathrm{A}+u)(\mathrm{B}+u)(\mathrm{C}+u)(u-c)}}$$

$$- \frac{v\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{(\mathrm{A}+v)(\mathrm{B}+v)(\mathrm{C}+v)(v-c)}}.$$

380. Les lignes géodésiques de l'ellipsoïde jouissent de propriétés remarquables, qu'on peut déduire de l'équation (31).

Remarquons, tout d'abord, qu'en tous les points d'une ligne de courbure $u =$ const. on a

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad u \sin^2\theta + v\cos^2\theta = u = \text{const.}$$

Le long d'une ligne du second système $v =$ const., on aura

$$\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad u\sin^2\theta + v\cos^2\theta = v = \text{const.}$$

Les lignes de courbure satisfont donc à l'équation (31) des lignes géodésiques.

Cherchons les points où la ligne géodésique

$$u\sin^2\theta + v\cos^2\theta = c$$

est tangente à une ligne de courbure.

On aura, au point de contact,

$$\theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

et, par suite,

$$u = c \qquad \text{ou} \qquad v = c.$$

Chaque ligne géodésique est donc tangente à deux lignes

de courbure, une de chaque système, et l'on voit qu'à deux lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure $u = c$ correspond la même valeur c de la constante d'intégration.

Il en est de même pour le système des lignes géodésiques qui passent par les ombilics.

On a en effet, pour les quatre ombilics réels,

$$x^2 = A\frac{A-B}{A-C}, \qquad y^2 = 0, \qquad z^2 = C\frac{C-A}{C-B}.$$

La condition $y^2 = 0$ donne

$$(B+u)(B+v) = 0;$$

donc u ou v est égal à $-B$. Soit, par exemple, $u = -B$; on aura

$$x^2 = A\frac{A+v}{A-C};$$

donc v sera aussi égal à $-B$.

Pour une ligne géodésique qui passe par un ombilic, on aura donc, en substituant ces valeurs dans l'équation (31),

$$-B = c,$$

ce qui détermine la valeur de la constante c.

Considérons une ligne de courbure quelconque $u =$ const. Soit (u, v) un point quelconque de cette ligne; joignons-le à deux ombilics O et O′ par des lignes géodésiques L, L′, elles auront pour équation différentielle

$$u\cos^2\theta + v\sin^2\theta = -B,$$
$$u\cos^2\theta' + v\sin^2\theta' = -B.$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, il viendra

$$\begin{aligned} 0 &= u(\cos^2\theta - \cos^2\theta') + v(\sin^2\theta - \sin^2\theta') \\ &= (v-u)(\sin^2\theta - \sin^2\theta'). \end{aligned}$$

Donc $\sin^2\theta = \sin^2\theta'$, et les lignes L, L′ auront pour bissectrices les lignes de courbure du point (u, v).

Soit (u, v_1) un point de la ligne de courbure considérée situé à une distance infiniment petite ds du point (u, v) primitivement choisi. Joignons-le à O, O' par de nouvelles lignes géodésiques L_1, L'_1.

Projetons L_1 et l'élément ds sur L; on aura évidemment

$$L = \text{proj.}\, L_1 + \text{proj.}\, ds.$$

Or chacun des éléments de L_1, ne faisant qu'un angle infiniment petit avec sa projection, lui est égal en négligeant le produit de sa longueur par une quantité du second ordre; on aura donc, au second ordre près,

$$\text{proj.}\, L_1 = L_1.$$

D'ailleurs

$$\text{proj.}\, ds = ds \sin\theta;$$

donc

$$L = L_1 + ds \sin\theta.$$

On a de même

$$L' = L'_1 + ds \sin\theta'.$$

Mais on a

$$\sin\theta = \pm \sin\theta',$$

égalité où l'on doit évidemment prendre le signe + ou le signe — suivant que les ombilics O et O' sont situés de côtés différents de la ligne u ou du même côté. Dans le premier cas on aura

$$L - L' = L_1 - L'_1,$$

et, dans le second,

$$L + L' = L_1 + L'_1.$$

On voit ainsi que les ombilics jouissent, par rapport aux lignes de courbure, de propriétés toutes semblables à celles des foyers des sections coniques.

381. *Problème des isopérimètres.* — Proposons-nous de déterminer, parmi toutes les courbes de longueur $2l$ ayant leurs extrémités en deux points A et B, celle pour laquelle l'aire comprise entre la corde AB et la courbe est maximum.

Prenons pour axe des x la droite AB, pour origine le milieu de cette droite : soit $2a$ la longueur de celle-ci. Nous aurons à rendre maximum l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} y\,dx,$$

sachant que l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

a pour valeur $2l$.

D'après la méthode générale, nous aurons à poser

$$o = \delta \int_{-a}^{a} \left(y + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right) dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) \delta y\,dx.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée sera donc

$$1 - \frac{d}{dx}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = o;$$

d'où

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - c,$$

$$y' = \pm \frac{x-c}{\sqrt{\lambda^2-(x-c)^2}},$$

$$y - c' = \mp\sqrt{\lambda^2-(x-c)^2},$$

équation d'un cercle de rayon λ.

Il reste à déterminer les constantes c, c', λ.

Pour $y = o$, on aura $x = \pm a$; donc $c = o$, $c'^2 = \lambda^2 - a^2$. Il ne reste plus qu'à faire en sorte que la longueur de l'arc soit $2l$.

Or, en désignant par α (*fig.* 12) l'angle que le rayon CA du cercle cherché fait par l'axe OY, on aura

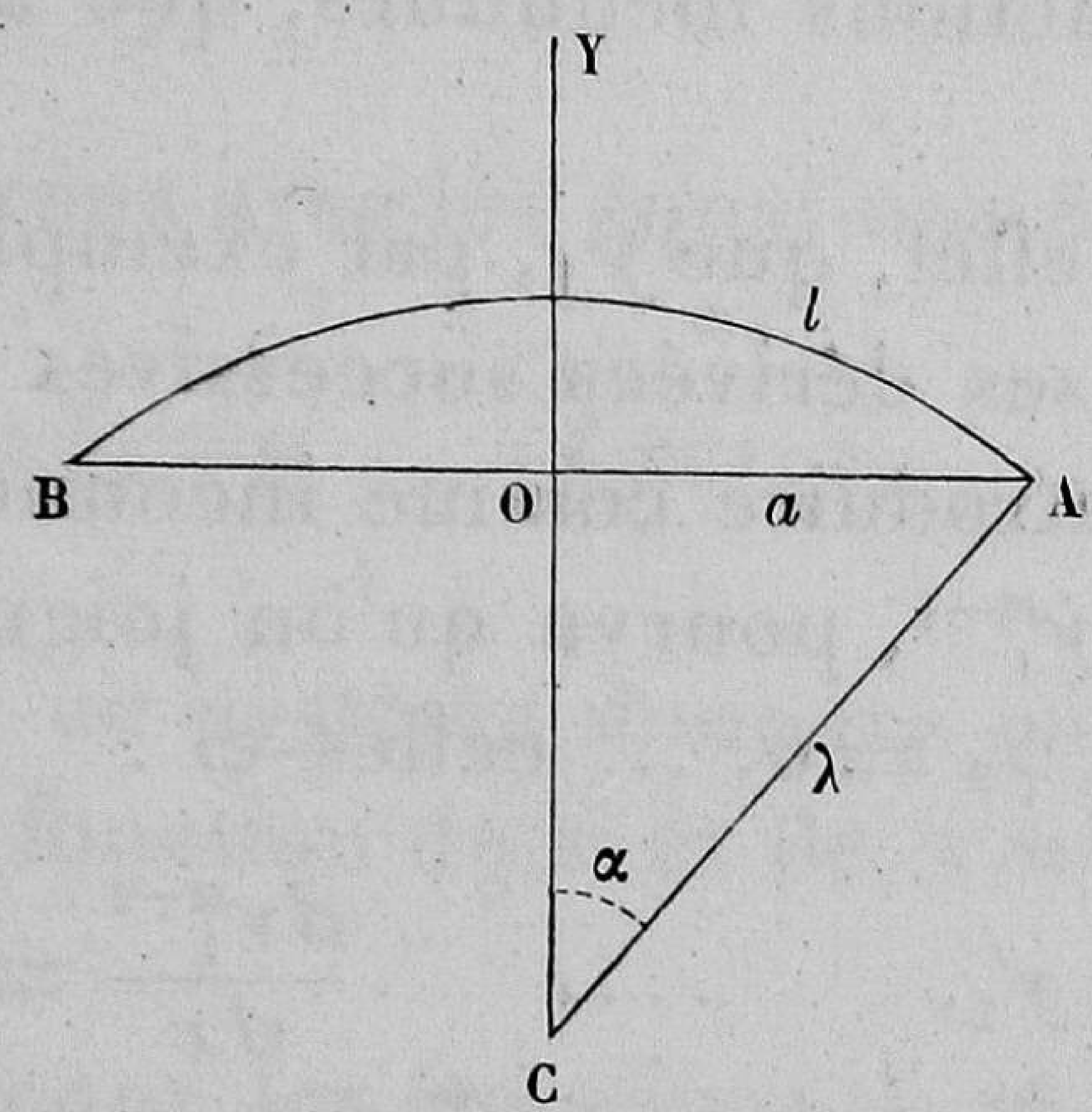
$$l = \lambda\alpha, \qquad a = \lambda \sin\alpha.$$

Éliminant α, on aura, pour déterminer λ, l'équation transcendante

$$a = \lambda \sin \frac{l}{\lambda}.$$

L'angle α étant d'ailleurs compris entre o et π, il faudra

Fig. 12.



prendre, pour λ, celle des racines de cette équation qui est $< \frac{l}{\pi}$.

En supposant a infiniment petit, le problème se transforme en celui-ci :

Déterminer, parmi les courbes fermées de périmètre $2l$, *celle qui enferme une aire maximum.*

Dans ce cas, l'équation en λ deviendra

$$\sin \frac{l}{\lambda} = 0$$

et aura pour racine $\lambda = \frac{l}{\pi}$. La solution du problème sera donc un cercle ayant le périmètre donné.

II. — Variation seconde.

382. L'étude des variations de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi \, dx,$$

où φ est une fonction de x, des variables dépendantes y_1, y_2, ... et de leurs dérivées successives, ces variables pouvant d'ailleurs être liées entre elles par un système d'équations différentielles

$$\psi_1 = 0, \qquad \psi_2 = 0, \qquad \ldots,$$

se ramène immédiatement au cas où φ, ψ_1, ... ne contiennent, avec les fonctions inconnues, que leurs dérivées premières.

Supposons, en effet, que y_1, par exemple, figure dans ces expressions avec ses dérivées successives jusqu'à l'ordre n. Nous pourrons introduire comme inconnues auxiliaires les dérivées y'_1, ..., y_1^{n-1}, pourvu qu'on joigne au système des équations $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, ... celles-ci :

$$\frac{dy_1}{dx} = y'_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{dy_1^{n-2}}{dx} = y_1^{n-1};$$

y_1^n étant d'ailleurs la dérivée première de y_1^{n-1}, on voit que la fonction φ et les équations de condition ne contiendront plus que les fonctions inconnues et leurs dérivées premières.

Supposons donc que nous ayons m fonctions inconnues y_1, ..., y_m; que ces fonctions, leurs dérivées premières et la variable indépendante x figurent seules dans l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi \, dx$$

et dans les équations de condition

$$\psi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_p = 0.$$

Désignons par p le nombre de ces dernières équations. Admettons enfin, pour plus de simplicité, que les limites x_0, x_1 de l'intégrale et les valeurs correspondantes des fonctions y soient des quantités fixes données. Cela posé, cherchons à rendre l'intégrale maximum ou minimum.

383. Nous déterminerons les fonctions inconnues, comme on l'a vu plus haut, en annulant la variation première de

l'intégrale

$$I=\int_{x_0}^{x_1}(\varphi+\lambda_1\psi_1+\ldots+\lambda_p\psi_p)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}F\,dx,$$

ce qui fournit les équations différentielles suivantes

$$(1)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i}=0\qquad (i=1,2,\ldots,m),$$

que nous combinerons avec les équations de condition

$$(2)\qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_l}=\psi_l=0\qquad (l=1,2,\ldots,p).$$

L'intégration de ce système donnera en général les inconnues y et λ en fonction de x et de $2m$ constantes arbitraires.

En effet, remplaçons les équations $\psi_l=0$ par leurs dérivées $\frac{d\psi_l}{dx}=0$. Le nouveau système obtenu

$$(3)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_i}=0,\qquad \frac{d\psi_l}{dx}=0$$

contient les dérivées de y_1, ..., y_m jusqu'au second ordre, celles de λ_1, ..., λ_p jusqu'au premier ordre. Il sera donc d'ordre $2m+p$ et fournira les inconnues y et λ en fonction de x et de $2m+p$ constantes arbitraires. Ces valeurs, substituées dans les expressions ψ_l, les réduiront à des constantes $\left(\text{puisqu'elles annulent identiquement } \frac{d\psi_l}{dx}\right)$. En écrivant que ces constantes sont nulles, on obtiendra des équations de condition qui déterminent p constantes d'intégration en fonction des autres.

Les $2m$ constantes qui restent seront déterminées à leur tour par la condition que y_1, ..., y_m prennent pour chacune des deux limites x_0 et x_1 les valeurs qui leur sont assignées.

Le problème d'annuler la variation première de l'intégrale est donc en général possible et déterminé.

On doit toutefois remarquer que l'ordre du système (3) et, par suite, celui du système primitif, s'abaisseraient si l'on pouvait éliminer les dérivées $y''_1, \ldots, y''_m, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_p$ entre les équations (3). Or, ces dérivées y entrent linéairement, et le déterminant de leurs coefficients n'est autre chose que le jacobien J des fonctions $\frac{\partial F}{\partial y'_i}$, ψ_l par rapport aux quantités y' et λ. Si donc ce jacobien était identiquement nul, il serait en général impossible d'annuler la variation première de l'intégrale; car les constantes d'intégration seraient en moindre nombre que les équations aux limites auxquelles elles doivent satisfaire.

384. Nous admettrons donc que J n'est pas nul. Il est aisé, dans ce cas, de ramener le système (1), (2) à un système canonique. (Ce résultat est une généralisation de celui du n° 366.)

Prenons, en effet, pour variables auxiliaires les quantités

$$\frac{\partial F}{\partial y'_i} = p_i.$$

Les équations

$$\frac{\partial F}{\partial y'_i} = p_i, \qquad \psi_l = 0 \tag{4}$$

permettront d'exprimer les quantités y', λ en fonction des variables y, p.

Posons, d'autre part,

$$H = \Sigma_i p_i y'_i - F.$$

On aura

$$dH = \sum \left[-\frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i + \left(p_i - \frac{\partial F}{\partial y'_i}\right) dy'_i + y'_i dp_i - \psi_l \, d\lambda_l \right].$$

Mais les termes en dy'_i, $d\lambda_l$ disparaissent en vertu des équations (4). On aura donc, en supposant qu'on exprime H

au moyen des variables y et p,

$$\frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i} = y'_i.$$

D'ailleurs, les équations (1) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - p'_i = 0.$$

On aura donc, pour déterminer les variables y, p, les équations canoniques

$$(5) \qquad y'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

385. Ces équations étant supposées intégrées, on sait (262) que leur intégrale générale pourra se mettre sous la forme

$$(6) \qquad \frac{\partial V}{\partial y_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

V étant une fonction des variables x, y_i et de m constantes d'intégration $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et les quantités $\beta_1, \ldots, \beta_m$ étant les autres constantes d'intégration.

La résolution des équations précédentes donnera les valeurs des y, p en fonction de x et des constantes α, β. Les équations (4) donneront ensuite les quantités y', λ; enfin les conditions aux limites détermineront les valeurs des constantes α, β.

386. Mais, pour être assuré de l'existence effective d'un maximum ou d'un minimum, il est nécessaire d'étudier la variation seconde $\delta^2 I$. Si celle-ci ne peut s'annuler pour aucun système de valeurs admissible des variations δy, elle conservera toujours le même signe, et il y aura minimum ou maximum, suivant qu'elle sera positive ou négative. Si, au contraire, elle peut s'annuler, il y aura en général ni maximum, ni minimum, la variation troisième changeant de signe avec les variations δy; il ne pourrait y avoir incertitude que

dans le cas exceptionnel où elle s'annulerait en même temps que la variation seconde.

Laissant de côté ce cas singulier, nous sommes amenés à rechercher si $\delta^2 I$ est ou non susceptible de s'annuler.

387. Posons, pour abréger,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k} = a_{ik}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y'_k} = b_{ik}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} = c_{ik},$$

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial y_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial \lambda_l} = d_{il}, \qquad \frac{\partial \psi_l}{\partial y'_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial \lambda_l} = e_{il}.$$

Les quantités a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, d_{il}, e_{il} seront des fonctions connues de x; nous les supposerons continues, ainsi que leurs dérivées partielles, entre x_0 et x_1; cette hypothèse est évidemment nécessaire pour qu'on puisse appliquer la série de Taylor au développement des accroissements des fonctions F, ψ_l.

Posons encore, pour simplifier l'écriture,

$$\delta y_i = z_i;$$

ces quantités seront assujetties aux relations

$$(7) \qquad 0 = \delta\psi_l = \Sigma_i (d_{il} z_i + e_{il} z'_i) \qquad (l = 1, \ldots, p).$$

On aura, d'autre part,

$$\delta^2 F = \Sigma_i \Sigma_k [a_{ik} z_i z_k + 2 b_{ik} z_i z'_k + c_{ik} z'_i z'_k]$$

et

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \delta^2 F \, dx = \int_{x_0}^{x_1} (\delta^2 F + \Sigma_l 2 \mu_l \delta\psi_l) \, dx,$$

les multiplicateurs μ_l étant des fonctions quelconques de x, finies entre x_0 et x_1.

L'expression

$$2\Omega = \delta^2 F + \Sigma_l 2\mu_l \delta\psi_l = \Sigma_i \Sigma_k [a_{ik} z_i z_k + 2 b_{ik} z_i z'_k + c_{ik} z'_i z'_k] + \Sigma_i \Sigma_l 2\mu_l [d_{il} z_i + e_{il} z'_i]$$

étant homogène et du second degré par rapport aux quantités

z, z', μ, on aura

$$2\Omega = \sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z_i} z_i + \frac{\partial \Omega}{\partial z'_i} z'_i \right) + \sum_l \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_l} \mu_l.$$

Substituant cette valeur dans l'expression de $\delta^2 I$ et remarquant que les équations de condition (7) ne sont autres que les suivantes

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_l} = 0, \tag{8}$$

il viendra

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z_i} z_i + \frac{\partial \Omega}{\partial z'_i} z'_i \right) dx.$$

Intégrant par parties les seconds termes et remarquant que z_i s'annule aux deux limites x_0 et x_1, il viendra

$$\delta^2 I = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial z'_i} \right) z_i \, dx.$$

On pourra donc annuler $\delta^2 I$ si l'on peut déterminer les quantités z, μ, de manière à satisfaire aux équations

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Omega}{\partial z'_i} = 0, \tag{9}$$

ainsi qu'aux équations de condition (8), en assignant aux z_i des valeurs qui ne soient pas constamment nulles entre x_0 et x_1, mais qui s'annulent aux deux limites.

388. Les relations (8) et (9) constituent un système d'équations différentielles entre les variables z, μ tout à fait analogue au système (1), (2). Il sera également d'ordre $2m$, pourvu que le jacobien J_1 des expressions

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z'_i}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_l}$$

par rapport aux quantités z'_i, μ_l ne soit pas identiquement

nul. Or, d'après l'expression de Ω, on voit que les éléments de ce déterminant ne sont autre chose que ceux de J, où l'on a substitué, pour les quantités y, leurs valeurs en fonction de x. Nous admettrons que, même après cette substitution, le déterminant ne s'annule pas identiquement et que, en particulier, il n'est pas nul pour $x = x_1$.

Prenons alors pour inconnues auxiliaires les quantités

$$(10) \qquad u_i = \frac{\partial \Omega}{\partial z'_i}.$$

Les équations (8) et (10) permettront d'exprimer les quantités z' et μ en fonction linéaire des quantités z et u. Ces valeurs, substituées dans l'expression

$$H_1 = \Sigma_i u_i z'_i - \Omega,$$

la transformeront en une fonction homogène et du second degré des quantités z, u; et l'on aura, pour déterminer ces quantités, les équations canoniques

$$(11) \qquad z'_i = \frac{\partial H_1}{\partial u_i}, \qquad u'_i = -\frac{\partial H_1}{\partial z_i},$$

dont les seconds membres sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues z, u.

389. Les équations différentielles linéaires

$$(12) \qquad 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_l} = \Sigma_i [d_{il} z_i + e_{il} z'_i],$$

$$(13) \qquad 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial z'_i} - u_i = \Sigma_k [b_{ki} z_k + c_{ki} z'_k] + \Sigma_l e_{il} \mu_l - u_i,$$

$$(14) \qquad 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial z_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial z'_i} = \Sigma_k [a_{ik} z_k + b_{ik} z'_k + d_{il} \mu_l] - u'_i,$$

auxquelles nous venons d'arriver, sont intimement liées aux équations

$$\psi_l = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'_i} - p_i = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_i} - p'_i = 0,$$

dont l'intégration nous a fourni les valeurs des quantités y, λ en fonction de x et des constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$; $\beta_1, \ldots, \beta_m$. En effet, substituons ces valeurs dans ces dernières équations; elles se réduiront à des identités, quelles que soient les constantes α et β. On pourra donc les différentier par rapport à l'une quelconque c de ces constantes. Effectuant cette différentiation et posant

$$\frac{\partial y_i}{\partial c} = z_i, \qquad \frac{\partial y'_i}{\partial c} = z'_i, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial c} = u_i, \qquad \frac{\partial \lambda_l}{\partial c} = \mu_l,$$

on obtiendra précisément les équations (12), (13), (14).

Prenant successivement pour c chacune des $2m$ constantes α, β, nous aurons donc $2m$ solutions particulières de ces équations. On en déduit, en désignant par A_k et B_k des constantes arbitraires, la solution plus générale

$$(15) \qquad z_i = \sum_k \left(A_k \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k} + B_k \frac{\partial y_i}{\partial \beta_k} \right),$$

$$(16) \qquad u_i = \sum_k \left(A_k \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} + B_k \frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} \right),$$

$$(17) \qquad z'_i = \sum_k \left(A_k \frac{\partial y'_i}{\partial \alpha_k} + B_k \frac{\partial y'_i}{\partial \beta_k} \right),$$

$$(18) \qquad \mu_l = \sum_k \left(A_k \frac{\partial \lambda_l}{\partial \alpha_k} + B_k \frac{\partial \lambda_l}{\partial \beta_k} \right).$$

Les équations (11), qui se déduisent de la combinaison des équations (12) à (14), admettront donc comme solution les valeurs de z_i, u_i données par les formules (15) et (16).

390. Nous admettrons : 1° que les diverses dérivées partielles $\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}, \frac{\partial y_i}{\partial \beta_k}, \ldots, \frac{\partial \lambda_l}{\partial \beta_k}$, qui figurent dans les expressions précédentes, restent continues entre x_0 et x_1; 2° que les seconds membres des équations (15) ne peuvent devenir à la

fois identiquement nuls, de quelque manière qu'on choisisse les constantes A, B, à moins qu'elles ne soient toutes nulles.

Cette dernière hypothèse entraîne manifestement comme conséquence que les $2m$ solutions particulières obtenues pour les équations (11) sont linéairement indépendantes. La solution générale des équations (11) sera donc donnée par les formules (15) et (16), et celle des équations (12), (13), (14) par les formules (15) à (18).

Nos $2m$ solutions particulières étant indépendantes, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial y_m}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial \beta_m} \\ \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial p_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial \beta_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial p_m}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial p_m}{\partial \beta_m} \end{vmatrix}$$

ne pourra être identiquement nul.

Ce déterminant peut d'ailleurs se mettre sous la forme d'un produit de deux autres déterminants. En effet, les équations intégrales

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = p_i$$

(où V ne contient ni les p ni les β), différentiées par rapport aux constantes α_k et β_k, donnent

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \sum_h \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \, \partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \, \partial \alpha_k},$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} = \sum_h \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \, \partial y_h} \frac{\partial y_h}{\partial \beta_k}.$$

Substituant ces valeurs dans D et retranchant des m dernières lignes du déterminant les m premières, multipliées

par des facteurs convenables, il viendra

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial \alpha_m} & \frac{\partial y_m}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial \beta_m} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_1\, \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1\, \partial \alpha_m} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_m\, \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_m\, \partial \alpha_m} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1^m) D_1 D_2,$$

en posant

$$D_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \beta_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial \beta_m} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y_1\, \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_1\, \partial \alpha_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_m\, \partial \alpha_1} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial y_m\, \partial \alpha_m} \end{vmatrix}.$$

Aucun des deux déterminants D_1, D_2 ne peut donc être identiquement nul.

391. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\delta^2 I$ ne puisse s'annuler.

On voit tout d'abord que $\delta^2 I$ sera susceptible de s'annuler si l'on peut déterminer les rapports des constantes A_k, B_k, de telle sorte que les valeurs des z_i fournies par les équations (15) s'annulent toutes à la fois pour deux valeurs distinctes ξ_0, ξ_1 de la variable x, comprises entre x_0 et x_1.

En effet, posons $\delta y_i = \varepsilon z_i$ entre ξ_0 et ξ_1, et $\delta y_i = 0$ dans le reste de l'intervalle $x_0 x_1$.

Les variations ainsi définies ne sont pas identiquement nulles dans tout l'intervalle entre x_0 et x_1; elles satisfont aux équations de condition (12); enfin entre ξ_0 et ξ_1, seule

partie de l'intervalle où elles ne soient pas nulles, elles satisfont aux équations (13) et (14), équivalentes aux équations (9); elles annulent donc tous les éléments de l'intégrale $\delta^2 I$.

Pour que les rapports des constantes A_k, B_k puissent être déterminés comme il est indiqué ci-dessus, il faut et il suffit que le déterminant

$$\Delta(\xi_0, \xi_1) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1}\right)_{\xi_0} & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_m}\right)_{\xi_0} & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta_1}\right)_{\xi_0} & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta_m}\right)_{\xi_0} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial y_m}{\partial \alpha_1}\right)_{\xi_0} & \cdots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial \alpha_m}\right)_{\xi_0} & \left(\frac{\partial y_m}{\partial \beta_1}\right)_{\xi_0} & \cdots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial \beta_m}\right)_{\xi_0} \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_1}\right)_{\xi_1} & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha_m}\right)_{\xi_1} & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta_1}\right)_{\xi_1} & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \beta_m}\right)_{\xi_1} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial y_m}{\partial \alpha_1}\right)_{\xi_1} & \cdots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial \alpha_m}\right)_{\xi_1} & \left(\frac{\partial y_m}{\partial \beta_1}\right)_{\xi_1} & \cdots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial \beta_m}\right)_{\xi_1} \end{vmatrix}$$

soit égal à zéro.

Donc, pour que $\delta^2 I$ ne puisse s'annuler, il faut tout d'abord qu'on ait

$$\Delta(\xi_0, \xi_1) \gtrless 0$$

de quelque manière qu'on choisisse ξ_0 et ξ_1 entre x_0 et x_1. Posant en particulier $\xi_0 = x_0$, on devra avoir

$$\Delta(x_0, x) \gtrless 0 \tag{19}$$

pour toute valeur de $x > x_0$ et $\overline{\underline{<}}\, x_1$.

392. Pour déterminer les autres conditions qui, jointes à (19), sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum, il nous faut transformer l'expression de $\delta^2 I$ de manière à faciliter la discussion de son signe. Cette transformation repose sur deux propriétés de nos équations différentielles que nous allons établir :

1° Les équations différentielles qui déterminent les quan-

tités y, p ont pour intégrale générale les équations

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \tag{20}$$

Prenons la différentielle totale des équations de droite en traitant x comme une constante; il viendra

$$\sum_h \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i\, \partial y_h} dy_h + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_h} d\alpha_h \right) = d\beta_i.$$

Substituons cette valeur de $d\beta_i$ dans l'expression de la différentielle totale de dy_k

$$dy_k = \sum_i \left(\frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \frac{\partial y_k}{\partial \beta_i} d\beta_i \right),$$

elle deviendra

$$dy_k = \sum_i \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} d\alpha_i + \sum_i \sum_h \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i\, \partial y_h} dy_h + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_h} d\alpha_h \right) \frac{\partial y_k}{\partial \beta_i},$$

et, comme les équations (20) n'établissent entre les y et les α aucune relation indépendante des quantités p et β, les coefficients de chaque différentielle devront être égaux dans les deux membres. On aura donc, en particulier, en égalant à zéro le coefficient de $d\alpha_i$ (après avoir permuté dans la somme double les indices de sommation h et i),

$$\frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} + \sum_h \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_h} \frac{\partial y_k}{\partial \beta_h} = 0.$$

Substituons la valeur de $\frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i}$ tirée de cette formule dans l'expression

$$\sum_i \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial y_{k'}}{\partial \beta_i};$$

elle deviendra

$$-\sum_i \sum_h \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_i\, \partial \alpha_h} \frac{\partial y_{k'}}{\partial \beta_i} \frac{\partial y_k}{\partial \beta_h}$$

et ne changera pas si l'on permute k et k'; car cela revient évidemment à permuter les deux indices de sommation i

et h. Nous obtenons donc cette première relation

$$(21)\qquad \sum_i \left(\frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i}\frac{\partial y_{k'}}{\partial \beta_i} - \frac{\partial y_{k'}}{\partial \alpha_i}\frac{\partial y_k}{\partial \beta_i}\right) = 0.$$

393. 2° Les quantités y, p satisfont (384) aux équations canoniques

$$y'_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad p'_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}.$$

Prenons la dérivée de ces équations par rapport à l'une quelconque c des constantes α, β. Il viendra en désignant, pour abréger, $\frac{\partial y_i}{\partial c}$ par z_i, $\frac{\partial p_i}{\partial c}$ par u_i,

$$(22)\qquad \begin{cases} z'_i = \sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} u_k\right), \\ u'_i = -\sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} z_k + \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial p_k} u_k\right). \end{cases}$$

Ces équations linéaires, admettant les $2m$ solutions particulières

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1}\right), \quad \ldots; \quad \left(\frac{\partial y_i}{\partial \beta_m}, \frac{\partial p_i}{\partial \beta_m}\right),$$

auront pour intégrale générale les expressions (15) et (16), de sorte que le système (22) ne sera qu'une autre forme du système (11).

Le système (22) a pour adjoint le suivant :

$$-Z'_i = \sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial y_i} Z_k - \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k} U_k\right),$$

$$-U'_i = \sum_k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_k} Z_k - \frac{\partial^2 H}{\partial y_k \partial p_i} U_k\right),$$

qui n'en diffère que par le changement de z, u en $-$ U, Z. Si donc

$$S_1 = (\ldots, z_{i1}, \ldots, u_{i1}, \ldots),$$

$$S_2 = (\ldots, z_{i2}, \ldots, u_{i2}, \ldots)$$

sont deux solutions particulières quelconques des équa-

tions (22),

$$(\ldots, u_{i1}, \ldots, -z_{i1}, \ldots)$$

sera une solution du système adjoint; et, d'après les propriétés connues de ce système (119), l'expression

$$(S_1 S_2) = \Sigma_i (u_{i1} z_{i2} - z_{i1} u_{i2})$$

sera une constante.

394. On a évidemment, d'après la définition précédente du symbole $(S_1 S_2)$, la relation

$$(S_1 S_2) = -(S_2 S_1),$$

$$(S_1 S_1) = 0.$$

En outre, si

$$S_2 = (\ldots, z_{i2}, \ldots, u_{i2}, \ldots),$$

$$S_3 = (\ldots, z_{i3}, \ldots, u_{i3}, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont des solutions particulières, l'expression

$$m_2 S_2 + m_3 S_3 + \ldots$$
$$= (\ldots, m_2 z_{i2} + m_3 z_{i3} + \ldots, \ldots, m_2 u_{i2} + m_3 u_{i3} + \ldots, \ldots)$$

sera encore une solution, et l'on aura

$$(S_1, m_2 S_2 + m_3 S_3 + \ldots) = m_2 (S_1 S_2) + m_3 (S_1 S_3) + \ldots.$$

395. Toutes les solutions de nos équations s'expriment linéairement en fonction des $2m$ solutions particulières

$$S_1 = \left(\ldots, \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_1}, \ldots, \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_1}, \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_m = \left(\ldots, \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_m}, \ldots, \frac{\partial p_i}{\partial \alpha_m}, \ldots\right),$$

$$T_1 = \left(\ldots, \frac{\partial y_i}{\partial \beta_1}, \ldots, \frac{\partial p_i}{\partial \beta_1}, \ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T_m = \left(\ldots, \frac{\partial y_i}{\partial \beta_m}, \ldots, \frac{\partial p_i}{\partial \beta_m}, \ldots\right).$$

Proposons-nous de déterminer les valeurs des constantes particulières

$$(S_k S_h),\quad (T_k S_h),\quad (T_k T_h).$$

Il faudra, pour cela, chercher la valeur de l'expression

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial c} \frac{\partial y_i}{\partial c'} - \frac{\partial y_i}{\partial c} \frac{\partial p_i}{\partial c'} \right),$$

c et c' désignant deux quelconques des constantes α, β.

A cet effet, recourons encore aux équations intégrales

$$\frac{\partial V}{\partial y_i} = p_i, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i.$$

En dérivant les premières par rapport à c, il viendra

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial c} + \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial c} = \frac{\partial p_i}{\partial c}.$$

On aura, par suite,

$$\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial c} \frac{\partial y_i}{\partial c'} = \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial c'} \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial c} + \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial c} \frac{\partial y_i}{\partial c'}.$$

La somme double ne change pas si l'on permute c et c', car cela équivaut à permuter les indices de sommation i et k. On aura donc

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial c} \frac{\partial y_i}{\partial c'} - \frac{\partial y_i}{\partial c} \frac{\partial p_i}{\partial c'} \right) = \sum_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial c'} \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial c} - \frac{\partial y_i}{\partial c} \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial c'} \right).$$

On a d'ailleurs

$$\sum_i \frac{\partial y_i}{\partial c'} \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial c} = \frac{d}{dc'} \frac{\partial V}{\partial c} - \frac{\partial^2 V}{\partial c \partial c'},$$

en désignant par $\frac{d}{dc'} \frac{\partial V}{\partial c}$ la dérivée complète de $\frac{\partial V}{\partial c}$ par rapport à c' en tenant compte de ce que les y sont fonctions des constantes c. On a de même

$$\sum_i \frac{\partial y_i}{\partial c} \frac{\partial^2 V}{\partial y_i \partial c'} = \frac{d}{dc} \frac{\partial V}{\partial c'} - \frac{\partial^2 V}{\partial c \partial c'}$$

et, par suite,

$$\sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial c} \frac{\partial y_i}{\partial c'} - \frac{\partial y_i}{\partial c} \frac{\partial p_i}{\partial c'} \right) = \frac{d}{dc'} \frac{\partial V}{\partial c} - \frac{d}{dc} \frac{\partial V}{\partial c'}.$$

Cela posé, V ne contenant pas explicitement les constantes β, on aura, si $c = \beta_k$ et $c' = \beta_h$,

$$\frac{\partial V}{\partial c} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial c'} = 0,$$

d'où

$$(T_k T_h) = 0.$$

Si $c = \alpha_k$ et $c' = \alpha_h$, on aura, en vertu des équations (20),

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = \beta_k,$$

d'où

$$\frac{d}{dc'} \frac{\partial V}{\partial c} = \frac{d}{d\alpha_h} \beta_k = 0.$$

On a de même

$$\frac{d}{dc} \frac{\partial V}{\partial c'} = 0$$

et, par suite,

$$(S_k S_h) = 0.$$

Enfin, si $c = \beta_k$ et $c' = \alpha_h$, on aura

$$\frac{\partial V}{\partial c} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial c'} = \beta_h,$$

d'où

$$\frac{d}{dc} \frac{\partial V}{\partial c'} - \frac{d}{dc'} \frac{\partial V}{\partial c} = \frac{d}{d\beta_k} \beta_h = \begin{cases} 0 & \text{si } h \gtrless k, \\ 1 & \text{si } h = k. \end{cases}$$

Nous trouvons donc

$$(S_k S_h) = 0, \qquad (T_k T_h) = 0,$$

$$(T_k S_h) = -(S_h T_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \gtrless k, \\ 1 & \text{si } h = k. \end{cases}$$

396. Considérons maintenant deux solutions quelconques

$$R_\rho = \Sigma_k [A_{k\rho} S_k + B_{k\rho} T_k],$$
$$R_\sigma = \Sigma_h [A_{h\sigma} S_h + B_{h\sigma} T_h].$$

On aura, d'après les formules précédentes,

$$\begin{aligned}(R_\rho R_\sigma) = \Sigma_k \Sigma_h [\; & A_{k\rho} A_{h\sigma} (S_k S_h) + A_{k\rho} B_{h\sigma} (S_k T_h) \\ & + B_{k\rho} A_{h\sigma} (T_k S_h) + B_{k\rho} B_{h\sigma} (T_k T_h)] \\ = \Sigma_k (& B_{k\rho} A_{k\sigma} - A_{k\rho} B_{k\sigma}).\end{aligned}$$

Assignons aux coefficients $A_{k\rho}$, $B_{k\rho}$; $A_{k\sigma}$, $B_{k\sigma}$ les valeurs particulières

$$A_{k\rho} = \left(\frac{\partial y_\rho}{\partial \beta_k}\right)_\xi, \qquad B_{k\rho} = -\left(\frac{\partial y_\rho}{\partial \alpha_k}\right)_\xi;$$
$$A_{k\sigma} = \left(\frac{\partial y_\sigma}{\partial \beta_k}\right)_\xi, \qquad B_{k\sigma} = -\left(\frac{\partial y_\sigma}{\partial \alpha_k}\right)_\xi,$$

où ξ désigne une constante quelconque; il viendra

$$(23) \quad (R_\rho R_\sigma) = \sum_k \left[\left(\frac{\partial y_\rho}{\partial \beta_k}\right)_\xi \left(\frac{\partial y_\sigma}{\partial \alpha_k}\right)_\xi - \left(\frac{\partial y_\rho}{\partial \alpha_k}\right)_\xi \left(\frac{\partial y_\sigma}{\partial \beta_k}\right)_\xi\right] = 0;$$

car le second membre de cette expression, se déduisant de celui de l'équation (21) quand on y change i, k, k' en k, σ, ρ et qu'on attribue à x la valeur particulière ξ, est identiquement nul.

En posant successivement $\rho = 1, 2, \ldots, m$, nous obtiendrons un système de m solutions

$$R_1 = (\ldots, z_{i_1}, \ldots, u_{i_1}, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$R_m = (\ldots, z_{im}, \ldots, u_{im}, \ldots),$$

tel que l'on ait généralement

$$(R_\rho R_\sigma) = 0.$$

397. Calculons, d'autre part, la valeur du déterminant G,

formé avec les quantités

$$(24)\qquad z_{i\rho}=\sum_k\left(\frac{\partial y_\rho}{\partial\beta_k}\right)_\xi\frac{\partial y_i}{\partial\alpha_k}-\sum_k\left(\frac{\partial y_\rho}{\partial\alpha_k}\right)_\xi\frac{\partial y_i}{\partial\beta_k}.$$

Pour l'obtenir, formons le produit du déterminant

$$\Delta(x,\xi)=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial\alpha_m} & \frac{\partial y_1}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial\beta_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial\alpha_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial\alpha_m} & \frac{\partial y_m}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial\beta_m}\\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1}\right)_\xi & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_m}\right)_\xi & \left(\frac{\partial y_1}{\partial\beta_1}\right)_\xi & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial\beta_m}\right)_\xi\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \left(\frac{\partial y_m}{\partial\alpha_1}\right)_\xi & \cdots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial\alpha_m}\right)_\xi & \left(\frac{\partial y_m}{\partial\beta_1}\right)_\xi & \cdots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial\beta_m}\right)_\xi\end{vmatrix}$$

par le déterminant

$$D_1=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial\beta_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial\beta_m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial\beta_m} & -\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_1} & \cdots & -\frac{\partial y_1}{\partial\alpha_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial\beta_m} & -\frac{\partial y_m}{\partial\alpha_1} & \cdots & -\frac{\partial y_m}{\partial\alpha_m}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0\\ . & \cdots & . & . & \cdots & .\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

Il viendra, en tenant compte des équations (21) et (24),

$$D_1\Delta(x,\xi)=\begin{vmatrix}0 & 0 & \frac{\partial y_1}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial\beta_m}\\ . & . & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \frac{\partial y_m}{\partial\beta_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial\beta_m}\\ -z_{11} & -z_{m1} & \left(\frac{\partial y_1}{\partial\beta_1}\right)_\xi & \cdots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial\beta_m}\right)_\xi\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -z_{1m} & -z_{mm} & \left(\frac{\partial y_m}{\partial\beta_1}\right)_\xi & \cdots & \left(\frac{\partial y_m}{\partial\beta_m}\right)_\xi\end{vmatrix}=D_1G,$$

et, comme D_1 n'est pas nul, on en déduira

$$G = \Delta(x, \xi).$$

Nous admettrons provisoirement qu'on ait pu déterminer la constante ξ, de telle sorte que l'on ait

$$G = \Delta(x, \xi) \gtrless 0$$

dans tout l'intervalle de x_0 à x_1.

Les quantités $z_{1\rho}, \ldots, z_{m\rho}$; $u_{1\rho}, \ldots, u_{m\rho}$, associées aux valeurs correspondantes $\mu_{1\rho}, \ldots, \mu_{p\rho}$ des quantités μ, fourniront pour chacune des valeurs $\rho = 1, \ldots, m$ un système de solutions des équations (12) à (14).

398. Posons maintenant

$$z'_{i\rho} = \Sigma_k \gamma_{ki} z_{k\rho}, \tag{25}$$

$$u_{i\rho} = \Sigma_k \delta_{ki} z_{k\rho}, \tag{26}$$

$$\mu_{l\rho} = \Sigma_k M_{kl} z_{k\rho}. \tag{27}$$

Les quantités γ_{ki}, δ_{ki}, M_{kl}, déterminées par ces équations linéaires, seront des fonctions de x, finies et continues entre x_0 et x_1 en vertu de nos hypothèses, puisque le déterminant G des quantités $z_{k\rho}$ ne s'annule pas dans cet intervalle.

En différentiant les équations (26), on trouvera

$$u'_{i\rho} = \Sigma_k (\delta'_{ki} z_{k\rho} + \delta_{ki} z'_{k\rho})$$

ou, en remplaçant les z' par leurs valeurs déduites de (25),

$$u'_{i\rho} = \Sigma_k (\delta'_{ki} + \Sigma_h \delta_{hi} \gamma_{kh}) z_{k\rho}. \tag{28}$$

Substituons, d'autre part, les valeurs des quantités $u_{i\rho}$, $u_{i\sigma}$ déduites des équations (26) dans les équations

$$0 = (R_\rho R_\sigma) = \Sigma_i (u_{i\rho} z_{i\sigma} - z_{i\rho} u_{i\sigma}),$$

elles deviendront

$$\Sigma_i \Sigma_k (\delta_{ki} z_{k\rho} z_{i\sigma} - \delta_{ki} z_{k\sigma} z_{i\rho}) = 0$$

ou, en permutant les deux indices de sommation dans le second terme,

$$\Sigma_i \Sigma_k (\delta_{ki} - \delta_{ik}) z_{k\rho} z_{i\sigma} = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, m;\ \sigma = 1, \ldots, m).$$

Le déterminant des quantités $z_{i\sigma}$ n'étant pas nul, ces équations entraînent les suivantes

$$\Sigma_k (\delta_{ki} - \delta_{ik}) z_{k\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, m),$$

et le déterminant des $z_{k\rho}$ n'étant pas nul, on en déduira

$$\delta_{ki} = \delta_{ik}.$$

Les équations (12), (13), (14) sont d'ailleurs satisfaites par les valeurs

$$z_i = z_{i\rho}, \qquad u_i = u_{i\rho}, \qquad \mu_l = \mu_{l\rho}.$$

Faisons cette substitution, remplaçons les quantités z', u, μ, u' par leurs valeurs (25) à (28) et changeons, lorsque cela est nécessaire, la dénomination des indices de sommation; il viendra

$$0 = \sum_k \Big(d_{kl} + \sum_h e_{hl} \gamma_{kh} \Big) z_{k\rho},$$

$$0 = \sum_k \Big(b_{ki} + \sum_h c_{hi} \gamma_{kh} + \sum_l e_{il} M_{kl} - \delta_{ki} \Big) z_{k\rho},$$

$$0 = \sum_k \Big(a_{ik} + \sum_h b_{ih} \gamma_{kh} + \sum_l d_{il} M_{kl} - \delta'_{ki} - \sum_h \delta_{hi} \gamma_{kh} \Big) z_{k\rho}.$$

Ces équations ayant lieu pour $\rho = 1, \ldots, m$, et le déterminant des quantités $z_{k\rho}$ n'étant pas nul, on aura pour $k = 1, \ldots, m$,

$$(29) \qquad 0 = d_{kl} + \sum_h e_{hl} \gamma_{kh},$$

$$(30) \qquad 0 = b_{ki} + \sum_h c_{hi} \gamma_{kh} + \sum_l e_{il} M_{kl} - \delta_{ki},$$

$$(31) \qquad 0 = a_{ik} + \sum_h b_{ih} \gamma_{kh} + \sum_l d_{il} M_{kl} - \delta'_{ki} - \sum_h \delta_{hi} \gamma_{kh}.$$

On peut déduire de ces équations les valeurs des quantités a, b, d en fonctions des c, e, γ, δ, M. Elles donnent en effet

$$(32)\qquad d_{kl} = -\sum_h e_{hl}\gamma_{kh},$$

puis

$$b_{ki} = \delta_{ki} - \sum_h c_{hi}\gamma_{kh} - \sum_l e_{il}\mathrm{M}_{kl}$$

ou, en permutant i et k et remarquant que $\delta_{ki} = \delta_{ik}$,

$$(33)\qquad b_{ik} = \delta_{ki} - \sum_h c_{hk}\gamma_{ih} - \sum_l e_{kl}\mathrm{M}_{il}.$$

Les valeurs précédentes des b, d étant substituées dans l'équation (31), elle donnera

$$(34)\qquad \begin{aligned} a_{ik} = \delta'_{ki} &+ \sum_h \delta_{hi}\gamma_{kh} + \sum_l\sum_h e_{hl}\gamma_{ih}\mathrm{M}_{kl} \\ &- \sum_h \gamma_{kh}\Big(\delta_{hi} - \sum_{h'} c_{h'h}\gamma_{ih'} - \sum_l e_{hl}\mathrm{M}_{il}\Big) \\ = \delta'_{ki} &+ \sum_l\sum_h e_{hl}(\gamma_{ih}\mathrm{M}_{kl} + \gamma_{kh}\mathrm{M}_{il}) \\ &+ \sum_h\sum_{h'} c_{h'h}\gamma_{ih'}\gamma_{kh}. \end{aligned}$$

Substituons les valeurs ci-dessus des quantités a, b, d dans l'expression de la variation seconde

$$\delta^2\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i\sum_k (a_{ik}\,\delta y_i\,\delta y_k + 2\,b_{ik}\,\delta y_i\,\delta y'_k + c_{ik}\,\delta y'_i\,\delta y'_k)\,dx$$

et dans les équations de condition

$$(35)\qquad 0 = \delta\psi_l = \sum_i (d_{il}\,\delta y_i + e_{il}\,\delta y'_i) \qquad (l = 1, \ldots, p),$$

qui existent entre les variations.

Si nous posons, pour abréger,

$$(36)\qquad \delta y'_i - \sum_h \gamma_{hi}\,\delta y_h = v_i,$$

$$(37)\qquad \sum_i \sum_k \delta_{ik}\,\delta y_i\,\delta y_k = \mathrm{P},$$

$$(38)\qquad \sum_k \mathrm{M}_{kl}\,\delta y_k = \Phi_l,$$

on trouvera aisément que les équations (35) deviennent

$$(39)\qquad \sum_i e_{il}\,v_i = 0$$

et que $\delta^2\mathrm{I}$ prend la forme suivante :

$$\delta^2\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_i \sum_k c_{ik}\,v_i v_k + \frac{d\mathrm{P}}{dx} - 2\sum_i \sum_l e_{il}\,v_i\,\Phi_l\right)dx.$$

Le dernier terme de cette expression disparaît en vertu des relations (39). D'autre part,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d\mathrm{P}}{dx}\,dx = \left(\sum_i \sum_k \delta_{ik}\,\delta y_i\,\delta y_k\right)_{x_0}^{x_1} = 0,$$

car les variations δy_i, δy_k s'annulent aux limites. On aura donc plus simplement

$$\delta^2\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_1}\left(\sum_i \sum_k c_{ik}\,v_i v_k\right)dx.$$

399. Les conditions (35) ne sont pas les seules auxquelles soient assujetties les variations δy_i. Il faut, en outre : 1° que ces variations soient infiniment petites, ainsi que leurs dérivées, entre x_0 et x_1 ; 2° qu'elles s'annulent à ces deux limites, sans s'annuler identiquement dans tout l'intervalle $x_0 x_1$.

Il résulte de là que les quantités v_i doivent être infiniment petites, mais qu'on ne peut les supposer identiquement nulles entre x_0 et x_1. En effet, si tous les v étaient nuls, les

équations (36) donneraient

$$(40) \qquad \delta y'_i - \sum_h \gamma_{hi}\,\delta y_h = 0.$$

En vertu des relations (25), ces équations seraient satisfaites en posant

$$\delta y_i = z_{i\rho},$$

ρ ayant l'une quelconque des valeurs 1, ..., m.

Par hypothèse, le déterminant des quantités $z_{i\rho}$ non seulement n'est pas identiquement nul, mais ne s'annule en aucun point de l'intervalle $x_0 x_1$. Les équations linéaires (40) auront donc pour intégrale générale

$$\delta y_i = \sum_\rho C_\rho z_{i\rho},$$

les C étant des constantes arbitraires.

Les δy_i devant d'ailleurs s'annuler pour $x = x_0$ et le déterminant des $z_{i\rho}$ n'étant pas nul en ce point, les constantes C_ρ devront être toutes nulles; mais alors les δy_i seraient nuls identiquement.

400. Cela posé, si la fonction

$$\varphi = \sum_i \sum_k c_{ik} v_i v_k$$

conserve constamment le même signe pour tous les systèmes de valeurs des fonctions v_i qui ne sont pas identiquement nulles et qui satisfont aux relations (39), l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi\, dx$$

jouira de la même propriété. Il en sera de même, à plus forte raison, si l'on se borne à assigner aux arbitraires v_i les systèmes de valeurs auxquels correspondent des valeurs admissibles des δy_i. Il y aura donc maximum ou minimum.

La fonction φ pourrait d'ailleurs s'annuler pour certaines valeurs particulières de x sans que ce résultat fût troublé.

Cette condition suffisante est en même temps nécessaire. En effet, s'il existait un système de fonctions v_i satisfaisant aux équations (39) et tel que la fonction φ fût positive dans une partie de l'intervalle $x_0 x_1$ et négative dans l'autre, nous allons voir qu'on pourrait rendre $\delta^2 I$ positif ou négatif à volonté dans cet intervalle.

Soient, en effet, $X_1, \ldots, X_{2m+1}$ des fonctions quelconques de x, linéairement indépendantes, et finies entre x_0 et x_1; $c_1, \ldots, c_{2m+1}$ des paramètres infiniment petits. Posons

$$V_i = K v_i,$$

le multiplicateur K étant égal à zéro dans la partie de l'intervalle où φ est négatif et égal à

$$c_1 X_1 + \ldots + c_{2m+1} X_{2m+1}$$

dans la partie où il est positif. Les fonctions V_i satisferont encore aux équations (39), et l'expression

$$\Phi = \sum_i \sum_k c_{ik} V_i V_k = K^2 \varphi,$$

nulle dans la première portion de l'intervalle, sera positive dans la seconde. L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \Phi \, dx$$

sera donc positive.

Les valeurs correspondantes des δy_i sont les intégrales des équations linéaires

$$(41) \qquad \delta y_i' - \sum_h \gamma_{hi} \, \delta y_h = V_i.$$

Pour les obtenir, intégrons d'abord les équations sans second membre; il viendra, comme tout à l'heure,

$$(42) \qquad \delta y_i = \sum_\rho C_\rho z_{i\rho}.$$

Prenant les C_ρ pour nouvelles variables, d'après la méthode de la variation des constantes, on obtiendra les équations transformées

$$\sum_\rho \frac{\partial C_\rho}{\partial x} z_{i\rho} = V_i.$$

Les $z_{i\rho}$ étant continus entre x_0 et x_1 et leur déterminant ne s'annulant pas, on pourra résoudre cette équation par rapport aux dérivées $\frac{\partial C_\rho}{\partial x}$. Le résultat obtenu sera de la forme

$$\frac{\partial C_\rho}{\partial x} = \sum_i E_{i\rho} V_i,$$

les $E_{i\rho}$ étant des fonctions finies.

Ces équations admettent la solution particulière

$$C_\rho = \int_{x_0}^{x_1} \sum_i E_{i\rho} V_i \, dx,$$

qui est infiniment petite, les V_i étant infiniment petits. Les valeurs correspondantes des δy_i seront elles-mêmes infiniment petites. Il est clair d'ailleurs qu'elles seront linéaires et homogènes par rapport aux constantes $c_1, \ldots, c_{2m+1}$, et l'on pourra déterminer les rapports de ces constantes de manière à faire en sorte que les δy_i s'annulent pour x_0 et x_1. Enfin les δy_i ainsi déterminés ne s'annulent pas identiquement; car les équations (41), où les V_i ne sont pas identiquement nuls, ne pourraient être satisfaites.

Nous obtenons donc un système de variations δy_i satisfaisant à toutes les conditions requises, et pour lequel $\delta^2 I$ est positif. On déterminerait de même un second système de variations pour lequel $\delta^2 I$ serait négatif.

401. Nous avons donc réduit la question proposée à chercher les conditions pour que la fonction

$$\varphi = \sum_i \sum_k c_{ik} v_i v_k$$

conserve constamment le même signe pour toutes les valeurs de v qui satisfont aux relations

$$\sum_i e_{il} v_i = 0. \tag{43}$$

Comme d'ailleurs le signe de φ ne dépend que des rapports des quantités v, on peut, sans restreindre la généralité du problème, supposer les v assujettis à satisfaire en outre à la condition

$$\sum_i v_i^2 = 1. \tag{44}$$

Pour résoudre la question ainsi posée, cherchons les maxima et minima de φ pour les valeurs de v qui satisfont aux équations (43) et (44). Dans ce but, nous égalerons à zéro les dérivées partielles de la fonction

$$\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\rho \sum_i v_i^2 - \sum_l \rho_l \sum_i e_{il} v_i.$$

Nous obtiendrons les équations suivantes

$$\sum_k c_{ik} v_k - \rho v_i - \sum_l e_{il} \rho_l = 0, \tag{45}$$

qui, jointes aux relations (43), détermineront les rapports des quantités v et ρ_l; quant à ρ, il sera déterminé par la condition que le déterminant

$$\mathrm{I} = \begin{vmatrix} c_{11} - \rho & \ldots & c_{1m} & -e_{11} & \ldots & -e_{1p} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} - \rho & -e_{m1} & \ldots & -e_{mp} \\ e_{11} & \ldots & e_{m1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ e_{1p} & \ldots & e_{mp} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

soit nul.

D'ailleurs les équations (45), respectivement multipliées

par $v_1, \ldots, v_m$ et ajoutées ensemble, donneront

$$\varphi - \rho \sum_i v_i^2 - \sum_l \rho_l \sum_i e_{il} v_i = 0$$

ou, en vertu des équations (43) et (44),

$$\varphi = \rho.$$

Les maxima et minima cherchés sont donc les racines de l'équation $I = 0$.

Pour que φ reste constamment non positif (ou constamment non négatif) entre x_0 et x_1, et cela pour tout système de valeurs des v, il est évidemment nécessaire et suffisant que ces racines restent toutes non positives (ou toutes non négatives) dans cet intervalle.

D'ailleurs, si cette condition est remplie, on n'a pas à craindre que φ soit identiquement nul entre x_0 et x_1; car il faudrait pour cela que l'équation en ρ eût une racine nulle pour toute valeur de x entre x_0 et x_1, ce qui est impossible; car le terme constant de l'équation en ρ se confond, au signe près, avec le déterminant J_1 qui, par hypothèse, n'est pas identiquement nul.

Nous obtenons ainsi les conditions suivantes pour l'existence d'un maximum (ou d'un minimum):

Dans toute l'étendue de l'intervalle $x_0\, x_1$ le déterminant $\Delta(x_0, x)$ doit être $\gtrless 0$ (sauf pour $x = x_0$), et les racines de l'équation $I = 0$ doivent être non positives (ou non négatives).

402. Nous avons toutefois admis, pour arriver à ce résultat, qu'on pouvait déterminer une constante ξ, telle que l'on eût

$$\Delta(x, \xi) \gtrless 0 \quad \text{de} \quad x_0 \quad \text{à} \quad x_1. \tag{46}$$

Il nous reste à nous assurer que cette condition est implicitement contenue dans les précédentes.

La condition $\Delta(x_0, x) \gtrless 0$ pour $x_0 < x \overline{\leq} x_1$ donne, en particulier, pour $x = x_1$,

$$\Delta(x_0, x_1) \gtrless 0.$$

Les éléments du déterminant Δ et les coefficients de I étant par hypothèse des fonctions continues, on pourra déterminer des quantités ε_0, ε_1 assez petites pour qu'on ait encore

$$\Delta(\xi_0, \xi_1) \gtrless 0,$$

tant que ξ_0, ξ_1 seront respectivement compris entre x_0 et $x_0 + \varepsilon_0$ et entre x_1 et $x_1 + \varepsilon_1$. On aura donc

$$\Delta(x_0, x) \gtrless 0, \tag{47}$$

tant que x sera compris entre $x_0 + \varepsilon_0$ et $x_1 + \varepsilon_1$.

D'autre part, les racines de l'équation $I = 0$ conservent un signe constant dans l'intervalle de x_0 à x_1 : d'ailleurs, J_1 n'étant pas nul pour $x = x_1$, aucune d'elles ne sera nulle pour cette valeur de x; et, comme elles varient infiniment peu entre x_1 et $x_1 + \varepsilon_1$, elles conserveront encore leur signe dans ce nouvel intervalle.

De cette propriété et de l'équation (47), on déduit que $\delta^2 I$ ne peut s'annuler dans l'intervalle de $x_0 + \varepsilon_0$ à $x_1 + \varepsilon_1$. Donc, d'après le n° **391**,

$$\Delta(x, x_1 + \varepsilon_1) \gtrless 0 \qquad \text{pour} \qquad x_0 + \varepsilon_0 < x < x_1 + \varepsilon_1.$$

D'ailleurs cette expression est également $\lesseqgtr 0$ si x est compris entre x_0 et $x_0 + \varepsilon_0$. On satisfera donc à la condition (46) en prenant $\xi = x_1 + \varepsilon_1$.

403. Nous ferons remarquer, en terminant, que nous avons admis, dans toute cette étude, non seulement que les variations δy_i des fonctions inconnues sont infiniment petites, mais que leurs dérivées $\delta y_i'$ le sont également. Si l'on voulait supprimer cette dernière restriction, les conditions trouvées ci-dessus pour l'existence d'un maximum ou d'un

minimum, tout en restant nécessaires, pourraient cesser d'être suffisantes.

III. — Variation des intégrales multiples.

404. Les notions fondamentales du calcul des variations peuvent s'étendre sans difficulté aux fonctions qui renferment plusieurs variables indépendantes.

Considérons, par exemple, une fonction

$$\varphi(x, y, z, u, v, \ldots, u_{\alpha\beta\gamma}, v_{\alpha\beta\gamma}, \ldots)$$

des variables indépendantes x, y, z, des fonctions u, v de ces variables et de leurs dérivées partielles

$$u_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma}, \qquad v_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} v}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \, \partial z^\gamma}.$$

Si l'on change u, v en $u + \varepsilon u_1 = u + \delta u$, $v + \varepsilon v_1 = v + \delta v$, φ se changera en une nouvelle fonction $\Phi(x, y, z, \varepsilon)$, qui, développée suivant les puissances de ε, prendra la forme

$$\varphi + \Delta\varphi = \varphi + \delta\varphi + \frac{1}{2}\delta^2\varphi + \ldots.$$

On aura évidemment

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^k \Phi}{\partial \varepsilon^k} = \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k}\frac{\partial^i \Phi}{\partial x^i};$$

d'où, pour la valeur particulière $\varepsilon = 0$,

$$\frac{d^i}{dx^i}\delta^k \varphi = \delta^k \frac{d^i \varphi}{dx^i},$$

$\frac{d^i}{dx^i}$ représentant la dérivée complète de φ par rapport à x, en tenant compte de ce que u, v dépendent de cette variable.

On trouvera de même

$$\frac{d^i}{dy^i}\delta^k \varphi = \delta^k \frac{d^i \varphi}{dy^i}, \qquad \frac{d^i}{dz^i}\delta^k \varphi = \delta^k \frac{d^i \varphi}{dz^i}.$$

La variation première $\delta\varphi$, que nous considérerons spécialement dans ce qui va suivre, aura évidemment la valeur suivante :

$$(1)\qquad \begin{aligned}\delta\varphi = \mathrm{U}\,\delta u + \ldots + \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma}\,\delta u_{\alpha\beta\gamma}\\ + \mathrm{V}\,\delta v + \ldots + \mathrm{V}_{\alpha\beta\gamma}\,\delta v_{\alpha\beta\gamma} + \ldots,\end{aligned}$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \mathrm{U}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial u_{\alpha\beta\gamma}} = \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma}, \quad \ldots,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \mathrm{V}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v_{\alpha\beta\gamma}} = \mathrm{V}_{\alpha\beta\gamma}, \quad \ldots.$$

405. Cherchons maintenant la variation de l'intégrale triple

$$\mathrm{I} = \mathrm{S}\,\varphi\,dx\,dy\,dz,$$

en admettant, pour plus de généralité, que, en même temps qu'on change u, v en $u+\delta u$, $v+\delta v$, on fasse subir une altération infiniment petite au champ de l'intégration.

A chaque point ξ, η, ζ situé sur la limite de l'ancien champ d'intégration, on pourra faire correspondre un point infiniment voisin $\xi+\delta\xi$, $\eta+\delta\eta$, $\zeta+\delta\zeta$ sur la limite du nouveau champ. Cela posé, changeons de variables indépendantes en posant

$$x = x' + \delta x', \qquad y = y' + \delta y', \qquad z = z' + \delta z',$$

$\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ étant des fonctions infiniment petites, assujetties à la condition de se réduire à $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ lorsque $x'=\xi$, $y'=\eta$, $z'=\zeta$. L'intégrale altérée, exprimée au moyen de ces nouvelles variables, prendra la forme

$$(2)\qquad \mathrm{I} + \Delta\mathrm{I} = \mathrm{S}\,\Psi\,\mathrm{J}\,dx'\,dy'\,dz',$$

le champ d'intégration étant redevenu le même que dans

l'intégrale primitive I; J désignant le jacobien

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{d\,\delta x'}{dx'} & \frac{d\,\delta x'}{dy'} & \frac{d\,\delta x'}{dz'} \\ \frac{d\,\delta y'}{dx'} & 1+\frac{d\,\delta y'}{dy'} & \frac{d\,\delta y'}{dz'} \\ \frac{d\,\delta z'}{dx'} & \frac{d\,\delta z'}{dy'} & 1+\frac{d\,\delta z'}{\delta z'} \end{vmatrix};$$

enfin Ψ étant ce que devient Φ lorsqu'on l'exprime au moyen des nouvelles variables x', y', z'.

Le développement de cette expression, suivant les puissances de ε, ne présente aucune difficulté; nous l'arrêterons aux termes du premier ordre pour obtenir la variation première δI. Nous pourrons d'ailleurs, en le faisant, supprimer les accents dont sont affectées les nouvelles variables, aucune confusion n'étant à craindre, puisque les anciennes variables x, y, z auront disparu.

On a évidemment, avec ce degré d'approximation,

$$J = 1 + \frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}.$$

D'autre part,

$$\Phi = \varphi + \delta\varphi + \ldots$$

devient, en remplaçant x, y, z par $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$,

$$\Psi = \varphi + \frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\delta z + \ldots + \delta\varphi + \ldots.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} \Psi J &= \varphi + \delta\varphi + \frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\delta z \\ &\quad + \varphi\frac{d\,\delta x}{dx} + \varphi\frac{d\,\delta y}{dy} + \varphi\frac{d\,\delta z}{dz} \\ &= \varphi + \delta\varphi + \frac{d}{dx}\varphi\,\delta x + \frac{d}{dy}\varphi\,\delta y + \frac{d}{dz}\varphi\,\delta z. \end{aligned}$$

Remplaçant $\delta\varphi$ par sa valeur (1), substituant dans l'équation (2) et égalant de part et d'autre les termes du premier ordre en ε, il viendra

$$\delta I = S\left(\begin{array}{l} U\,\delta u + \ldots + U_{\alpha\beta\gamma}\,\delta u_{\alpha\beta\gamma} + V\,\delta v + \ldots \\ + \frac{d}{dx}\varphi\,\delta x + \frac{d}{dy}\varphi\,\delta y + \frac{d}{dz}\varphi\,\delta z \end{array}\right) dx\,dy\,dz.$$

406. Cette expression de δI, donnée par *M. Ostrogradsky*, peut être transformée par l'intégration par parties.

On peut admettre, pour plus de simplicité, que la fonction φ soumise à l'intégration et les équations de condition qui peuvent exister, suivant la nature du problème, entre les variables indépendantes $x, y, \ldots$ et les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ ne contiennent aucune dérivée partielle de ces dernières fonctions d'ordre supérieur au premier; car le cas où figureraient des dérivées partielles d'ordre m se ramènerait à celui-là en prenant pour inconnues auxiliaires les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $m - 1$ et ajoutant aux équations de condition les équations aux dérivées partielles du premier ordre qui définissent ces nouvelles inconnues.

Supposons encore, pour abréger l'écriture, qu'il n'y ait plus que deux variables indépendantes x, y, et posons $\frac{\partial u}{\partial x} = u_1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = u_2$, $\frac{dv}{dx} = v_1, \ldots$; $\frac{\partial\varphi}{\partial u} = U$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} = U_1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} = U_2, \ldots$ On aura, d'après ce qui précède,

$$\delta I = S\left(\begin{array}{l} U\,\delta u + U_1\,\delta u_1 + U_2\,\delta u_2 + V\,\delta v + \ldots \\ + \frac{d}{dx}\varphi\,\delta x + \frac{d}{dy}\varphi\,\delta y \end{array}\right) dx\,dy.$$

Les termes $U_1\,\delta u_1$, $V_1\,\delta v_1, \ldots$ et $\frac{d}{dx}\varphi\,\delta x$ peuvent être inté-

grés par parties par rapport à x, et donneront

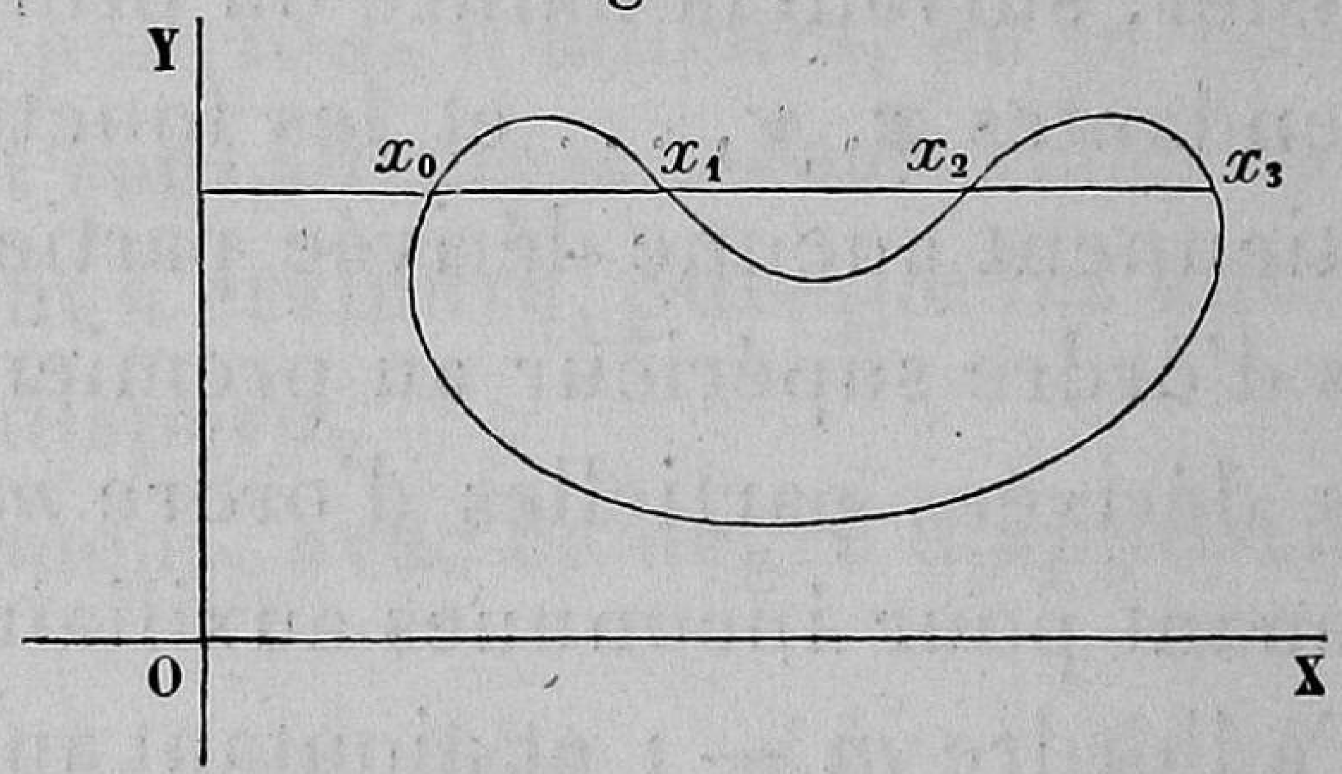
$$(3)\qquad \int\left(\mathrm{U}_1\,\delta u_1+\mathrm{V}_1\,\delta v_1+\ldots+\frac{d}{dx}\varphi\,\delta x\right)dx$$
$$=-\mathrm{F}_0+\mathrm{F}_1-\mathrm{F}_2+\mathrm{F}_3-\ldots$$
$$-\int\left(\frac{d\mathrm{U}_1}{dx}\,\delta u+\frac{d\mathrm{V}_1}{dx}\,\delta v+\ldots\right)dx,$$

F_0, F_1, ... désignant les valeurs de l'expression

$$\mathrm{F}=\mathrm{U}_1\,\delta u+\mathrm{V}_1\,\delta v+\ldots+\varphi\,\delta x$$

aux points où la parallèle aux x le long de laquelle on intègre entre dans le champ et en ressort (*fig.* 13) :

Fig. 13.



On a d'ailleurs, en désignant par $\mathrm{N}_0\mathrm{X}$, $\mathrm{N}_1\mathrm{X}$ les angles que la normale extérieure à la courbe qui limite le champ fait en ces divers points avec l'axe des x positifs, et par ds_0, ds_1, ... les arcs interceptés sur la courbe entre la droite y et la parallèle infiniment voisine $y+dy$,

$$dy=-ds_0\cos\mathrm{N}_0\mathrm{X}=ds_1\cos\mathrm{N}_1\mathrm{X}=\ldots.$$

L'équation (3), intégrée par rapport à y, donnera donc

$$\mathbf{S}\left(\mathrm{U}_1\,\delta u_1+\mathrm{V}_1\,\delta v_1+\ldots+\frac{d}{dx}\varphi\,\delta x\right)dx\,dy$$
$$=\int(\mathrm{U}_1\delta u+\mathrm{V}_1\,\delta v+\ldots+\varphi\,\delta x)\cos\mathrm{NX}\,ds$$
$$-\mathbf{S}\left(\frac{d\mathrm{U}_1}{dx}\,\delta u+\frac{d\mathrm{V}_1}{dx}\,\delta v+\ldots\right)dx\,dy,$$

la première intégrale étant prise le long de la courbe limite, et la seconde dans tout le champ.

On peut opérer de même sur les termes

$$U_2\,\delta u_2 + V_2\,\delta v_2 + \ldots + \frac{d}{dy}\varphi\,\delta y$$

en les intégrant par rapport à y. On trouvera ainsi

$$\delta I = \int (A\,\delta u + B\,\delta v + \ldots + D\,\delta x + E\,\delta y)\,ds$$
$$+ \mathbf{S}(M\,\delta u + N\,\delta v + \ldots)\,dx\,dy$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
A &= U_1 \cos NX + U_2 \cos NY,\\
B &= V_1 \cos NX + V_2 \cos NY,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
D &= \varphi \cos NX,\\
E &= \varphi \cos NY,\\
M &= U - \frac{dU_1}{dx} - \frac{dU_2}{dy},\\
N &= V - \frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dy},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

407. Cherchons à quelles conditions on doit satisfaire pour que cette quantité s'annule pour tout système de valeurs de $\delta x, \delta y, \delta u, \delta v, \ldots$ compatible avec les données du problème.

1° Si les limites du champ et les fonctions $u, v, \ldots$ sont entièrement arbitraires, on pourra assigner à $\delta x, \delta y, \delta u, \delta v, \ldots$ des valeurs absolument quelconques. Posant d'abord

$$\delta x = \delta y = 0, \qquad \delta u = \varepsilon\theta^2 M, \qquad \delta v = \varepsilon\theta^2 N, \qquad \ldots,$$

θ étant une fonction qui s'annule aux limites du champ, l'intégrale simple aura tous ses éléments nuls, de sorte que δI se

réduira à l'intégrale

$$\varepsilon \int \theta^2 (M^2 + N^2 + \ldots)\, dx\, dy,$$

qui ne peut s'annuler que si l'on a séparément

$$M = 0, \qquad N = 0, \qquad \ldots.$$

Ces équations aux dérivées partielles détermineront les fonctions inconnues u, v, ...

Les fonctions arbitraires introduites par cette intégration se détermineront en exprimant que l'intégrale simple à laquelle se réduit δI s'annule également quelles que soit les fonctions δx, δy, δu, δv, ... En posant

$$\delta u = \varepsilon\mu^2 A, \qquad \delta v = \varepsilon\mu^2 B, \qquad \ldots, \qquad \delta x = \varepsilon\mu^2 D, \qquad \ldots,$$

on voit qu'on devra avoir séparément

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad \ldots, \qquad E = 0.$$

2° Supposons que, sur la limite du champ (ou seulement sur une portion de cette limite), on ait une équation de condition

$$\psi(x, y, u, v, \ldots) = 0.$$

Cette relation devra subsister entre les nouvelles valeurs limites $x + \delta x$, $y + \delta y$, $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, ... D'ailleurs l'accroissement total Δu dû au changement de la fonction u en $u + \delta u$ suivi du changement de x, y en $x + \delta x$, $y + \delta y$ est évidemment égal à $\delta u + u_1\, \delta x + u_2\, \delta y$. De même

$$\Delta v = \delta v + v_1\, \delta x + v_2\, \delta y, \qquad \ldots.$$

On aura donc à la limite du champ entre les variations δx, δy, δu, δv, ... la relation

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\psi}{\partial u}(\delta u + u_1\, \delta x + u_2\, \delta y)$$
$$+ \frac{\partial\psi}{\partial v}(\delta v + v_1\, \delta x + v_2\, \delta y) + \ldots = 0.$$

Les équations $A = 0$, $B = 0$, ..., $E = 0$ ne seront donc plus nécessaires le long de la portion de courbe considérée pour que l'intégrale simple s'annule, mais il suffira que l'on ait

$$A = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial u}, \qquad B = \lambda \frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \ldots,$$

$$D = \lambda \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} + u_1 \frac{\partial\psi}{\partial u} + v_1 \frac{\partial\psi}{\partial v} + \ldots \right),$$

$$E = \lambda \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + u_2 \frac{\partial\psi}{\partial u} + v_2 \frac{\partial\psi}{\partial v} + \ldots \right),$$

λ étant une inconnue auxiliaire.

On a donc une inconnue de plus, mais en même temps une équation de plus, à savoir $\psi = 0$.

3° Supposons que x, y, u, v, ... soient liés par une équation aux dérivées partielles

$$\psi(x, y, u, u_1, u_2, v, v_1, v_2, \ldots) = 0.$$

On aura, pour tous les systèmes de valeurs des variations qui laissent subsister cette équation,

$$\delta I = \delta \mathbf{S} \varphi \, dx \, dy = \delta \mathbf{S} (\varphi + \lambda\psi) \, dx \, dy,$$

λ étant une fonction arbitraire de forme invariable.

La variation de cette dernière intégrale pourra se mettre sous la forme

$$\int (A' \delta u + B' \delta v + \ldots + D' \delta x + E' \delta y) \, ds$$
$$+ \mathbf{S} (M' \delta u + N' \delta v + \ldots) \, dx \, dy.$$

Déterminons l'auxiliaire λ par l'équation $M' = 0$. L'intégrale double se réduira à

$$\mathbf{S} (N' \delta v + \ldots) \, dx \, dy.$$

Il est clair d'ailleurs que δv, ... pourront être choisis à

volonté sans que l'équation $\psi = 0$ cesse d'avoir lieu. Donc on devra avoir $N' = 0, \ldots$.

Reste l'intégrale simple, qui devra s'annuler tant que l'équation $\psi = 0$ subsistera. Or les variables sont encore liées par cette équation à la limite du champ. Si cette équation contient les dérivées partielles $u_1, u_2, v_1, v_2, \ldots$, elle n'apprendra rien sur les variations $\delta x, \delta y, \delta z, \delta u$, de sorte qu'on devra avoir

$$A' = 0, \quad \ldots, \quad E' = 0.$$

Mais, si elle ne contient que $x, y, u, v, \ldots$, il suffira, d'après le cas précédemment examiné, de poser sur la courbe limite

$$A' = \lambda' \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad B' = \lambda' \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \ldots,$$

$$D' = \lambda' \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + u_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} + v_1 \frac{\partial \psi}{\partial u} \right), \quad \ldots,$$

λ' étant une nouvelle inconnue auxiliaire.

4° Supposons enfin que $u, v, \ldots$ et les limites soient astreints à varier de telle sorte qu'une intégrale donnée $K = \int \psi \, dx \, dy$ conserve une valeur constante c. On verra, comme au n° 370, qu'on doit avoir identiquement

$$\delta I + \lambda \, \delta K = 0,$$

λ désignant une constante.

On aura donc à former les équations qui annulent la variation de l'intégrale double

$$I + \lambda K = \int (\varphi + \lambda \psi) \, dx \, dy,$$

auxquelles on joindra la condition donnée $K = c$, qui déterminera λ.

408. Nous allons appliquer les considérations qui pré-

cèdent à la solution du problème suivant, rencontré par *Gauss* dans la théorie de la capillarité :

Déterminer la forme d'équilibre d'un liquide contenu dans un vase de forme donnée.

Soient :

V le volume du fluide supposé donné;
σ l'aire de sa surface libre;
Σ celle de la paroi mouillée;
H la hauteur du centre de gravité du liquide au-dessus du plan horizontal des xy.

On obtiendra la surface cherchée en rendant minimum l'expression

$$\sigma + a\Sigma + b\text{VH},$$

où a et b sont des constantes.

Soient :
z l'ordonnée de la surface libre;
p, q, r, s, t ses dérivées partielles première et seconde;
Z, P, Q l'ordonnée de la paroi et ses dérivées partielles.

On aura

$$\text{V} = \int (z - \text{Z})\, dx\, dy,$$

$$\sigma = \int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy,$$

$$\Sigma = \int \sqrt{1 + \text{P}^2 + \text{Q}^2}\, dx\, dy,$$

$$\text{VH} = \int \frac{z^2 - \text{Z}^2}{2}\, dx\, dy.$$

Nous aurons donc à annuler la variation de l'intégrale double

$$\text{I} = \int \left[\sqrt{1 + p^2 + q^2} + a\sqrt{1 + \text{P}^2 + \text{Q}^2} + \frac{b}{2}(z^2 - \text{Z}^2)\right] dx\, dy$$

$$= \int \varphi\, dx\, dy$$

avec les conditions : 1° que l'intégrale V soit constante 2° qu'on ait aux limites du champ l'équation de condition

$$z = Z.$$

Nous aurons à former la variation

$$\delta(I + \lambda V) = \int (A\,\delta z + D\,\delta x + E\,\delta y)\,ds + \mathbf{S} M\,\delta u\,dx\,dy,$$

où

$$A = \frac{p}{\sqrt{1 + p^3 + q^2}}\cos NX + \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\cos NY,$$

$$D = \varphi \cos NX, \qquad E = \varphi \cos NY,$$

$$M = bz + \lambda - \frac{d}{dx}\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \frac{d}{dy}\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$= bz + \lambda - \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'équation aux dérivées partielles de la surface libre cherchée sera donc

$$M = 0.$$

Cette équation est susceptible d'une interprétation géométrique remarquable. En effet, le dernier terme de M est égal à $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$, R et R_1 désignant les deux rayons de courbure principaux. On aura donc

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = bz + \lambda.$$

Passons à la considération de l'intégrale simple. On a, le long de la courbe limite, $z = Z$, ce qui réduit φ à ses deux premiers termes

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} + a\sqrt{1 + P^2 + Q^2}.$$

On déduit d'ailleurs de cette équation aux limites la relation suivante :

$$\delta z + p\,\delta x + q\,\delta y = P\,\delta x + Q\,\delta y.$$

Tirant de là la valeur de δz pour la substituer dans l'intégrale, puis égalant à zéro les coefficients de δx et de δy, il viendra

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{p\cos\mathrm{NX}+q\cos\mathrm{NY}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(\mathrm{P}-p)+\varphi\cos\mathrm{NX}=0, \\ \dfrac{p\cos\mathrm{NX}+q\cos\mathrm{NY}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(\mathrm{Q}-q)+\varphi\cos\mathrm{NY}=0. \end{cases}$$

On a d'ailleurs évidemment, en désignant par x, y, z et $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ deux points infiniment voisins de la courbe limite,

$$\cos\mathrm{NX}=-\frac{dy}{ds}, \qquad \cos\mathrm{NY}=\frac{dx}{ds}$$

et

$$dz=p\,dx+q\,dy=\mathrm{P}\,dx+\mathrm{Q}\,dy;$$

d'où

$$(\mathrm{P}-p)\,dx+(\mathrm{Q}-q)\,dy=0$$

et enfin

$$(\mathrm{P}-p)\cos\mathrm{NY}=(\mathrm{Q}-q)\cos\mathrm{NX}.$$

La première des équations (4) deviendra donc, en éliminant $\cos\mathrm{NY}$ et supprimant le facteur $\cos\mathrm{NX}$,

$$\frac{p(\mathrm{P}-p)+q(\mathrm{Q}-q)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\sqrt{1+p^2+q^2}+a\sqrt{1+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}=0$$

ou

$$\frac{1+\mathrm{P}p+\mathrm{Q}q}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2}}+a=0,$$

ou enfin

$$\cos i+a=0,$$

i désignant l'angle des plans tangents à la surface libre et à la paroi du vase. Cet angle sera donc constant.

La seconde équation redonnera ce même résultat en éliminant $\cos\mathrm{NX}$ et supprimant le facteur $\cos\mathrm{NY}$.

409. Cherchons encore à déterminer les surfaces d'aire

minima. Il faudra annuler la variation de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \mathbf{S}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Posant $a = b = \lambda = 0$ dans les calculs précédents, on aura

$$\delta\mathrm{I} = \int \left[\mathrm{A}\,\delta z + \sqrt{1+p^2+q^2}\,(\cos \mathrm{NX}\,\delta x + \cos \mathrm{NY}\,\delta y)\right] ds$$
$$- \mathbf{S}\left(\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1}\right) dx\,dy.$$

L'équation aux dérivées partielles des surfaces cherchées sera donc

$$\frac{1}{\mathrm{R}} + \frac{1}{\mathrm{R}_1} = 0$$

ou

$$\mathrm{R} + \mathrm{R}_1 = 0.$$

Cette équation a été intégrée au n° **284**.

Si l'on donne le contour qui limite le champ et la valeur de z en chacun de ses points, on aura à la limite $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = 0$, et l'intégrale simple disparaîtra d'elle-même. Mais les valeurs limites des trois variables donneront une courbe par laquelle doit passer la surface cherchée, et l'on aura à déterminer par cette condition les fonctions arbitraires que l'intégration a introduites.

Si une portion de la courbe limite est inconnue, mais assujettie à se trouver sur une surface donnée $z = \mathrm{Z}$, on aura, pour l'angle i sous lequel la surface inconnue vient la rencontrer, l'équation

$$\cos i = 0,$$

laquelle montre que les surfaces se coupent à angle droit.

Supposons enfin qu'on demande la surface d'aire minima qui renferme un volume donné V. On aura à annuler la variation de l'intégrale

$$\mathrm{I} + \lambda \mathrm{V},$$

ce qui donnera l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}=\lambda.$$

Les fonctions arbitraires de l'intégration se détermineront par l'équation $V=$ const., jointe aux conditions aux limites.

410. Le calcul des variations fournit un procédé commode pour la transformation des équations aux dérivées partielles.

Pour en donner un exemple, considérons, avec *Jacobi*, l'intégrale triple

$$I=\mathbf{S}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Cherchons la variation δI en supposant le champ d'intégration invariable, ainsi que les valeurs de V et de ses dérivées du premier ordre aux limites du champ. On aura

$$\delta I=2\,\mathbf{S}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\delta\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\delta\frac{\partial V}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

ou, en intégrant par partie les trois termes respectivement par rapport à x, y, z et remarquant que les termes intégrés s'annulent aux limites,

$$\delta I=-2\,\mathbf{S}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta V\,dx\,dy\,dz.$$

La condition pour que δI soit identiquement nul sera donc fournie par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

Remplaçons les coordonnées rectangles x, y, z par un système de coordonnées curvilignes orthogonales t, u, v, définies par les équations

$$x=\varphi_1(t,u,v),\qquad y=\varphi_2(t,u,v),\qquad z=\varphi_3(t,u,v)$$

ou

$$t = \Phi_1(x, y, z), \qquad u = \Phi_2(x, y, z), \qquad v = \Phi_3(x, y, z).$$

On aura (t. I, nº 541), si $i \lesseqgtr k$,

$$(6) \qquad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\frac{\partial \Phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\frac{\partial \Phi_k}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\frac{\partial \Phi_k}{\partial z} = 0,$$

$$ds^2 = M_1\,dt^2 + M_2\,du^2 + M_3\,dv^2$$

et le nouvel élément de volume sera

$$\sqrt{M_1 M_2 M_3}\,dt\,du\,dv.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial \Phi_3}{\partial x},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial \Phi_3}{\partial z};$$

d'où, en tenant compte des relations (6) et posant pour abréger,

$$\Delta_i = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = \Delta_1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \Delta_2\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \Delta_3\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2.$$

Il reste à exprimer les Δ en fonction de t, u, v. A cet effet, considérons la droite qui joint les deux points (t, u, v) et $(t + dt, u, v)$; sa longueur sera égale à $\sqrt{M_1}\,dt$.

Elle est d'ailleurs normale à la surface

$$t = \Phi_1(x, y, z).$$

Ses cosinus directeurs seront donc

$$\frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}}{\sqrt{\Delta_1}}, \qquad \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}}{\sqrt{\Delta_1}}, \qquad \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}}{\sqrt{\Delta_1}}.$$

Elle aura donc pour projections

$$dx = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}}{\sqrt{\Delta_1}}\sqrt{M_1}\,dt, \qquad \ldots, \qquad dz = \frac{\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}}{\sqrt{\Delta_1}}\sqrt{M_1}\,dt.$$

Ajoutant ces équations multipliées respectivement par $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}$, il vient

$$\sqrt{\Delta_1}\sqrt{M_1}\,dt = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}dz = dt.$$

Donc $\Delta_1 = \frac{1}{M_1}$.

On trouvera de même

$$\Delta_2 = \frac{1}{M_2}, \qquad \Delta_3 = \frac{1}{M_3}.$$

L'intégrale I, rapportée aux nouvelles variables t, u, v, deviendra donc

$$\mathbf{S}\left[\frac{1}{M_1}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{M_2}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{M_3}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2\right]\sqrt{M_1 M_2 M_3}\,dt\,du\,dv.$$

Le champ de cette nouvelle intégrale sera encore invariable, ainsi que les valeurs de V, $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial u}, \frac{\partial V}{\partial v}$ aux limites du champ.

Exprimons que δI s'annule dans ces conditions : on aura

$$\delta = 2\mathbf{S}\left(\sqrt{\frac{M_2 M_3}{M_1}}\frac{\partial V}{\partial t}\delta\frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + \sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_3}}\frac{\partial V}{\partial v}\delta\frac{\partial V}{\partial v}\right)dt\,du\,dv$$

ou, en intégrant par parties les divers termes de cette expression et remarquant que les termes intégrés s'annulent aux limites,

$$\delta I = -2\mathbf{S}\left(\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\frac{M_2 M_3}{M_1}}\frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_3}}\frac{\partial V}{\partial v}\right)\delta V\,dt\,du\,dv.$$

La condition pour que cette expression s'annule identiquement sera donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\frac{M_2 M_3}{M_1}}\frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_3}}\frac{\partial V}{\partial v} = 0.$$

Cette nouvelle équation, équivalente à l'équation (5), sera la transformée cherchée.

NOTE I.

SUR LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS.

.1 Soient les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx}=f(x,y,z), \qquad \frac{dz}{dx}=g(x,y,z).$$

Si les fonctions f, g sont analytiques aux environs du point (x_0, y_0, z_0), ces équations admettront, aux environs de ce point, une solution $\overline{y}$, $\overline{z}$ se réduisant à y_0, z_0 pour $x=x_0$.

On pourra même, si les paramètres k, l sont suffisamment petits, déterminer une solution y_{kl}, z_{kl} se réduisant à y_0+k, z_0+l pour $x=x_0$.

Cette solution sera de la forme

$$y_{kl}=y_0+k+(x-x_0)\mathrm{S},$$
$$z_{kl}=z_0+l+(x-x_0)\mathrm{S}_1,$$

où S, S_1 désignent des séries de puissances entières de $x-x_0$, k, l.

La méthode du prolongement analytique permettra de suivre ces fonctions au delà du cercle de convergence des dites séries, tant qu'on n'arrivera pas à un système de valeurs simultanées de x, y, z qui soit critique pour l'une au moins des fonctions f, g.

Ces résultats, établis aux n°s 85-87, peuvent être complétés par la proposition suivante :

Théorème. — *Si la solution $\overline{y}$, $\overline{z}$ peut être ainsi prolongée jusqu'au delà du point x_1, il en sera de même de la solution y_{kl}, z_{kl} (si k, l sont suffisamment petits).*

Les différences $y_{kl}-\overline{y}$, $z_{kl}-\overline{z}$ seront données dans tout

l'intervalle de x_0 à x_1 par des séries de puissances de k, l, dont les coefficients sont analytiques en x.

Soit en effet (ξ, η, ζ) l'un quelconque des systèmes de valeurs simultanées de x, $\overline{y}$, $\overline{z}$ lorsque x varie de x_0 à x_1. Aux environs de ce point, f et g seront développables suivant les puissances de $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$. Soit a la borne supérieure des nombres ρ tels que les conditions

$$|x-\xi|<\rho, \quad |y-\eta|<\rho, \quad |z-\zeta|<\rho$$

assurent la convergence de ces deux séries. Ce nombre a, variant d'une manière continue avec la position du point (ξ, η, ζ), admettra, lorsque x varie de x_0 à x_1, un minimum différent de zéro. Soit r une quantité fixe inférieure à ce minimum.

Décrivons autour des points (ξ, η, ζ) des cercles de rayon r. Soit M le maximum des valeurs que peuvent prendre $|f|$ et $|g|$ lorsque x, y, z décrivent respectivement ces cercles. Les fonctions f, g étant continues, M variera d'une manière continue avec la position du point (ξ, η, ζ). Il admettra donc, dans l'intervalle de x_0 à x_1, un maximum, que nous désignerons par $\frac{N}{r^3}$. Dès lors, dans les développements de f, g autour du point (ξ, η, ζ), le module du coefficient du terme en $(x-\xi)^\alpha (y-\eta)^\beta (z-\zeta)^\gamma$ ne pourra surpasser $\frac{N}{r^{\alpha+\beta+\gamma+3}}$.

Cela posé, les développements de $y_{kl}-\overline{y}$, $z_{kl}-\overline{z}$ aux environs du point x_0 sont évidemment de la forme

$$y_{kl}-\overline{y} = k+(x-x_0)S,$$
$$z_{kl}-\overline{z} = l+(x-x_0)S_1,$$

S, S_1 étant des séries de puissances de $x-x_0$, k, l sans aucun terme indépendant de k, l.

Si $|k|$, $|l|$ sont inférieurs à un nombre fixe q, lui-même moindre que r, nous avons vu (87) que ces développements seront sûrement convergents tant que $|x-x_0|$ sera moindre que

$$r - r e^{-\frac{(r-q)^3}{3N}}.$$

Soit donc ρ un nombre fixe inférieur à celui-là. Les expressions précédentes donneront les valeurs de $y_{kl} - \overline{y}$, $z_{kl} - \overline{z}$ dans l'intervalle de $x_0 - \rho$ à $x_0 + \rho$. Elles seront très petites si k, l le sont et, par suite, moindres que q. La constance des nombres r, N, q fait qu'on pourra représenter ces différences dans l'intervalle de $x_0 + \rho$ à $x_0 + 2\rho$ par des développements convergents

$$k_1 + (x - x_0 - \rho) S_2, \qquad l_1 + (x - x_0 - \rho) S_3,$$

S_2, S_3 étant des séries de puissances de $x - x_0 - \rho$, k, l, sans terme indépendant de k_1, l_1.

Substituant dans ces expressions les valeurs de k_1, l_1 en fonction de k, l, nous obtiendrons une nouvelle expression des mêmes différences par des séries de puissances de k, l ayant pour coefficients des fonctions de x. Ces nouvelles séries seront convergentes si k, l sont assez petits.

Soient k_2, l_2 leurs valeurs au point $x_0 + 2\rho$. On les déterminera par le même procédé dans l'intervalle de $x_0 + 2\rho$ à $x_0 + 3\rho$, et ainsi de suite, jusqu'au point $x_1 + \rho$ qu'on atteindra par un nombre fini d'opérations.

Les valeurs de $y_{kl} - \overline{y}$ et $z_{kl} - \overline{z}$ sont ainsi données dans tout l'intervalle de $x_0 - \rho$ à $x_1 + \rho$ par des expressions de la forme

$$X_{10} k + X_{01} l + X_{20} k^2 + \ldots,$$

où les X sont des fonctions de x. D'ailleurs y_{kl}, z_{kl}, satisfaisant aux équations différentielles (1) et à celles qui s'en déduisent par dérivation, admettront par rapport à x des dérivées successives de tous les ordres. Pour que cela ait lieu quels que soient k, l, il faut évidemment qu'il en soit de même pour chacune des fonctions X. Elles seront donc analytiques de $x_0 - \rho$ à $x_1 + \rho$.

Elles sont d'ailleurs uniformément continues dans cet intervalle. Soit en effet X l'une d'elles. Sa dérivée X' étant continue, son module dans cet intervalle admettra un maximum m; et l'on aura

$$|X(x+h) - X(x) = |h X'(x + \theta h)| \overline{\gtrless} m |h|.$$

2. Désignons pour abréger par f_{kl}, g_{kl} ou par $\overline{f}$, $\overline{g}$ ce que

deviennent f, g lorsqu'on y substitue pour y, z les fonctions y_{kl}, z_{kl} ou $\overline{y}$, $\overline{z}$.

Les fonctions y_{kl}, z_{kl} satisfaisant aux équations (1), nous aurons les identités

$$\frac{dy_{kl}}{dx} = f_{kl}, \qquad \frac{\partial z_{kl}}{\partial x} = g_{kl}. \tag{2}$$

D'ailleurs nous venons de voir que y_{kl}, z_{kl} sont analytiques en k, l. On pourra donc dériver ces identités par rapport à ces paramètres.

Dérivant la première par rapport à k, il viendra

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial y_{kl}}{\partial k} = \frac{\partial f_{kl}}{\partial y_{kl}}\frac{\partial y_{kl}}{\partial k} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial z_{kl}}\frac{\partial z_{kl}}{\partial k}. \tag{3}$$

Faisons en particulier $k = l = 0$. On aura

$$\left(\frac{\partial y_{kl}}{\partial k}\right)_{k=l=0} = \left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_{k=0},$$

quantité que nous désignerons, pour abréger l'écriture, par $\left(\frac{dy_{k0}}{dk}\right)_0$. D'autre part y_{kl}, z_{kl}, f_{kl} se changeront en $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{f}$. Nous aurons donc

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0 = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{y}}\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0 + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial k}\right)_0.$$

En opérant de même sur la seconde identité, on trouvera

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial k}\right)_0 = \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{y}}\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0 + \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial k}\right)_0.$$

Donc $\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0$, $\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial k}\right)_0$ est une solution du système des deux équations linéaires

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{y}} u + \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} v, \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{y}} u + \frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}} v. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

En dérivant les identités (2) par rapport à l, on verrait de même que

$$\left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial z_{0l}}{\partial l}\right)_0$$

est une autre solution du même système.

Pour $x = x_0$, $\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial z_{0l}}{\partial l}\right)_0$ sont égaux à 1 et $\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial k}\right)_0$, $\left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0$ sont nuls. Le déterminant

$$\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0 \left(\frac{\partial z_{0l}}{\partial l}\right)_0 - \left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0 \left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial k}\right)_0$$

étant égal à 1 pour cette valeur particulière de x, ne sera pas identiquement nul. Les deux solutions trouvées ci-dessus seront donc linéairement indépendantes, et les équations (3) auront pour solution générale

$$C\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0 + C_1\left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0, \quad C\left(\frac{\partial z_{k0}}{\partial k}\right)_0 + C_1\left(\frac{\partial z_{0l}}{\partial l}\right)_0.$$

Les équations (4) se nomment les *équations aux variations.*

3. Si la fonction f se réduit à z, les équations (1) devenant

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z),$$

y satisfera à l'équation du second ordre

$$y'' = g(x, y, y') \tag{5}$$

et aura z pour dérivée.

Les équations aux variations

$$\frac{du}{dx} = v, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} u + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}'} v$$

montrent que v est la dérivée de u, lequel satisfait à l'équation du second ordre

$$u'' = \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}} u + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{y}'} u'. \tag{6}$$

Cette équation aux variations aura pour intégrale générale

$$C\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0 + C_1\left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0.$$

En déterminant convenablement le rapport des constantes C, C_1 on pourra obtenir une intégrale particulière u_1 s'annulant en un point ξ arbitrairement choisi de $x_0 - \rho$ à $x_1 + \rho$. Elle sera déterminée à un facteur constant près. Les zéros de cette fonction seront simples; car l'équation (6) et ses dérivées successives montrent que si u et u' s'annulaient à la fois, u'', u''', ... seraient nuls également, de sorte que u serait identiquement nul.

D'ailleurs, si u_1, u_2 sont deux intégrales linéairement distinctes de l'équation (6), on aura

$$u_1'' = \frac{\partial \overline{\overline{g}}}{\partial y} u_1 + \frac{\partial \overline{\overline{g}}}{\partial y'} u_1',$$

$$u_2'' = \frac{\partial \overline{\overline{g}}}{\partial y} u_2 + \frac{\partial \overline{\overline{g}}}{\partial y'} u_2',$$

d'où

$$u_1'' u_2 - u_2'' u_1 = \frac{\partial \overline{\overline{g}}}{\partial y'}(u_1' u_2 - u_2' u_1),$$

$$D\log(u_1' u_2 - u_2' u_1) = \frac{\partial \overline{\overline{g}}}{\partial y'},$$

et en intégrant

$$u_1' u_2 - u_2' u_1 = C e^{\int \frac{\partial \overline{\overline{g}}}{\partial y'} dx}.$$

Donc $u_1' u_2 - u_2' u_1$ conserve un signe constant. Il ne pourrait être nul que si la constante C l'était; mais alors u_1 et u_2 ne seraient pas linéairement indépendantes comme on l'a supposé.

On déduit de là que deux racines consécutives de l'une des équations $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ sont séparées par une racine de l'autre. Soient en effet a, b deux racines consécutives de u_1 par exemple. En ces deux points l'expression $u_1' u_2 - u_2' u_1$ se réduit à son premier terme, lequel devra avoir le même signe en a et en b. Mais en passant d'un de ces points à l'autre, u_1' a changé de signe. Donc il en sera de même de u_2, qui se sera nécessairement annulé dans l'intervalle.

4. Cela posé, on a par définition

$$y_{0l}=\bar{y}+l(x-x_0)+(x-x_0)^2\mathrm{S}.$$

L'intégrale particulière $u_1=\left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0$ s'annulera donc au point x_0. Ses autres zéros x', ... sont les abscisses des points où la courbe $y=\bar{y}$, considérée comme faisant partie de la famille des courbes $y=y_{0l}$ en touche l'enveloppe. Ces points x', ... se nomment les *conjugués* du point x_0.

Si l'un de ces conjugués x' est contenu dans l'intervalle $x_0 x_1$, toute solution u_2 devra, d'après ce qui précède, s'annuler entre x_0 et x', et *a fortiori* entre x_0 et x_1.

Supposons au contraire qu'aucun des conjugués de x_0 ne soit contenu dans cet intervalle. On pourra déterminer un nombre δ moindre que ρ et assez petit pour qu'il n'y ait aucun conjugué de x_0 compris entre x_1 et $x_1+\delta$. La solution u_2 qui s'annule en $x_1+\delta$ ne pourra s'annuler une seconde fois entre x_0 et $x_1+\delta$. On pourra même assigner un nombre ε assez petit pour qu'elle ne s'annule pas entre $x_0-\varepsilon$ et $x_1+\varepsilon$. Elle conservera donc dans cet intervalle un signe constant; et comme elle n'est déterminée qu'à un facteur constant près, on peut la supposer positive.

Soient

$$u_2=c\left(\frac{\partial y_{k0}}{\partial k}\right)_0+c_1\left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0$$

cette solution; m son minimum dans l'intervalle de $x_0-\varepsilon$ à $x_1+\varepsilon$.

5. Considérons, parmi les intégrales y_{kl}, celles où $k=ct$, $l=c_1 t$, t désignant un nouveau paramètre. Nous aurons ainsi détaché un faisceau d'intégrales, que nous désignerons par y_t.

Développant y_t suivant les puissances de t par la série de Taylor, il viendra

$$y_t=\bar{y}+u_2 t+\mathrm{X}_2 t^2+\mathrm{X}_3 t^3+\ldots,$$
$$\frac{\partial y_t}{\partial t}=\quad u_2+2\mathrm{X}_2 t+3\mathrm{X}_3 t^2+\ldots.$$

Le terme u_2 indépendant de t dans l'expression de $\frac{\partial y}{\partial t}$ étant

positif et au moins égal à m, l'emportera pour des valeurs suffisamment petites de t sur l'ensemble des termes suivants. On pourra donc assigner un nombre η assez petit pour que $\frac{\partial y_t}{\partial t}$ soit positif tant que $|t|$ sera $\overline{\leq}\eta$ et x compris dans l'intervalle de $x_0 - \varepsilon$ à $x_1 + \varepsilon$.

Donc dans tout le champ Δ délimité par les courbes $y = y_{-\eta}$ $y = y_\eta$ et les ordonnées $x = x_0 - \varepsilon$, $x = x_1 + \varepsilon$, lequel contient à son intérieur l'arc de la courbe

$$y = \bar{y}$$

compris entre les ordonnées $x = x_0$, $x = x_1$, deux courbes

$$y = y_t,$$

où $|t| \overline{\leq} \eta$ ne pourront se rencontrer. Par chaque point x, y de ce champ passera donc une seule courbe de cette espèce. La valeur correspondante de t sera une fonction implicite de x, y, définie par l'équation

$$y = \bar{y} + u_2 t + X_2 t^2 + \ldots. \tag{7}$$

Le coefficient angulaire y'_t de la tangente à cette courbe sera donné par la formule

$$y'_t = \bar{y}' + u'_2 t + X'_2 t^2 + \ldots. \tag{8}$$

De ces deux équations on déduira par l'élimination de t une relation de la forme

$$y'_t = u(x, y).$$

La courbe $y = y_t$ satisfera donc à l'équation différentielle

$$y' = u(x, y).$$

Les dérivées partielles successives de cette fonction u se déduiront, comme on sait, de la différentiation des équations (7), (8). Elles seront finies dans tout le champ, car u_2, que leurs expressions contiennent en dénominateur, n'est jamais nul.

NOTE II.

SUR LE CALCUL DES VARIATIONS.

1. Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction analytique qui ne présente pas de point critique tant que z reste fini et que le point (x, y) ne sort pas d'un certain domaine D.

Soit $y = Y(x)$ l'équation d'un arc de courbe satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Il est tout entier intérieur à D;
2° Il a ses extrémités en deux points fixes $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$;
2° Y' est continue de x_0 à x_1.

Nous l'appellerons l'arc Y. L'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, Y, Y')\, dx$$

aura une valeur déterminée que nous représenterons par $I_Y(x_0, x_1)$, ou plus simplement par I_Y lorsque les limites de l'intégration pourront être sous-entendues.

Une fonction déterminée $\overline{y}$ prise parmi les fonctions Y qui satisfont aux conditions précédentes donnera, d'après la définition de Weierstrass, un minimum *fort* pour cette intégrale, si l'on peut assigner un nombre h tel que les inégalités

$$|Y - \overline{y}| < h, \qquad I_{\overline{y}} > I_Y$$

soient incompatibles.

2. Les conditions du minimum ne seront pas aggravées si l'on admet comme fonctions de comparaison, non seulement les Y, mais des fonctions Z dont la dérivée soit discontinue en

quelques points, pourvu que ceux-ci soient en nombre limité et que Z′ y reste fini.

Supposons, en effet, que dans cette nouvelle hypothèse il n'y ait plus minimum. On pourra, quel que soit h, déterminer une fonction Z satisfaisant aux deux inégalités

$$|Z - \bar{y}| < \frac{h}{2}, \qquad I_{\bar{y}} > I_Z.$$

Soient δ la distance minimum de la courbe Z à la frontière du domaine D auquel on la suppose intérieure; p le maximum de $|Z'|$ sur cette courbe; M le maximum de $\varphi(x, y, z)$ lorsque (x, y) décrivant le domaine D, z varie de $-p$ à $+p$.

Soient a l'un des points anguleux qu'on suppose exister sur la courbe Z; ξ son abscisse; b, b' les deux points voisins répondant aux abscisses $\xi - k$ et $\xi + k$, k étant un infiniment petit; t, t' les tangentes à Z en ces points. Substituons à l'arc bab' une ligne formée d'un arc de cercle tangent à t, t' en des points c, c' et des portions de tangente bc, $c'b'$. Opérons de même autour de chaque point anguleux. La ligne $\overline{Y}$ ainsi substituée à Z n'aura plus de point anguleux; et $\overline{Y}'$ sera encore contenu entre $-p$ et $+p$; car aux points b, b', on a par construction $\overline{Y}'(b) = Z'(b)$, $\overline{Y}'(b') = Z'(b')$, et tout le long de la ligne $bcc'b'$, $\overline{Y}'$ variera toujours dans le même sens de $Z'(b)$ à $Z'(b')$.

Cela posé, $\overline{Y}$ se confond avec Z, sauf aux environs des points anguleux; et entre $\xi - k$ et $\xi + k$, on aura

$$|\overline{Y} - Z| = \left| \int_{\xi - k}^{x} (Y' - Z')\, dx \right| \overline{\overline{<}}\, 2p(x - \xi + k) \,\overline{\overline{<}}\, 4pk.$$

Si l'on prend k assez petit, cette expression sera moindre que δ et que $\frac{h}{2}$. La courbe $\overline{Y}$ sera donc intérieure à D et appartiendra à la famille des courbes Y; on aura de plus

$$(1) \qquad |\overline{Y} - \bar{y}| < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} < h.$$

Enfin, dans chacune des intégrales

$$I_Z(\xi - k, \xi + k), \qquad I_{\overline{Y}}(\xi - k, \xi + k),$$

la fonction à intégrer ayant son module au plus égal à M, les intégrales ne pourront surpasser $2kM$ en valeur absolue; leur différence ne peut donc surpasser $4kM$.

S'il y a n points anguleux, la différence entre $I_Z(x_0, x_1)$ et $I_{\overline{Y}}(x_0, x_1)$ ne pourra donc surpasser $4kMn$. Si k est assez petit, elle sera moindre que $I_{\overline{y}} - I_Z$. On aura donc

$$(2) \qquad I_{\overline{y}} > I_{\overline{Y}}.$$

Les deux inégalités (1) et (2) étant satisfaites simultanément par une fonction de l'espèce Y, il n'y aura pas de minimum.

3. On conclut de là que si la fonction $\overline{y}$ rend minimum l'intégrale $I_{\overline{y}}(x_0, x_1)$, elle rendra minimum l'intégrale $I_{\overline{y}}(\xi_0, \xi_1)$, ξ_0, ξ_1 désignant deux points quelconques pris dans l'intervalle $x_0 x_1$.

Car s'il en était autrement on pourrait, quel que soit h, trouver une fonction Y qui, dans l'intervalle $\xi_0\, \xi_1$, satisfît aux inégalités

$$|Y - \overline{y}| < h, \qquad I_{\overline{y}}(\xi_0, \xi_1) > I_Y(\xi_0, \xi_1).$$

Une fonction égale à Y de ξ_0 à ξ_1 et à $\overline{y}$ dans le reste de l'intervalle $x_0\, x_1$, sera évidemment une fonction Z, satisfaisant de x_0 à x_1 aux inégalités

$$|Z - \overline{y}| < h, \qquad I_{\overline{y}}(x_0, x_1) > I_Z(x_0, x_1).$$

Donc $\overline{y}$ ne pourra pas donner un minimum comme on le supposait.

4. Ces préliminaires posés, cherchons à déterminer les conditions du minimum cherché.

Posons d'abord avec Lagrange

$$Y = \overline{y} + \varepsilon\eta,$$

et désignons par $\overline{\varphi}$ la fonction $\varphi(x, \overline{y}, \overline{y}')$.

Développant I_Y suivant les puissances de ε, il viendra

$$I_Y - I_{\bar{y}} = \delta I + \frac{1}{2}\delta^2 I + \ldots,$$

et la variation première

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} \eta + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}'} \eta' \right] dx$$

devra être nulle pourvu que η s'annule aux deux limites.

Nous ne pouvons pas ici intégrer par parties le second terme de cette expression, ne sachant pas encore si $\bar{y}'$ admet une dérivée, car cela ne fait pas partie de nos suppositions. Mais $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}}$ étant la dérivée de $\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} dx$, nous pourrons intégrer par parties le terme $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}'} \eta$. Le terme tout intégré disparaît, car il contient en facteur η qui s'annule aux deux limites. Posant donc, pour abréger,

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}'} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} dx = \mathrm{M}(x),$$

il viendra

$$\delta y = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \mathrm{M}(x) \eta' \, dx = 0.$$

Cette équation doit avoir lieu quelle que soit la fonction η s'annulant en x_0 et x_1, pourvu que η' n'ait qu'un nombre limité de discontinuités.

On satisfait à ces conditions en posant

$$\eta' = \begin{cases} 1 & \text{de } \xi \text{ à } \xi + h, \\ -1 & \text{de } \xi' \text{ à } \xi' + h, \\ 0 & \text{dans le reste de l'intervalle,} \end{cases}$$

$$\eta = \int_{x_0}^{x} \eta' \, dx.$$

Dans ce cas, l'équation précédente se réduit à

$$\int_{\xi}^{\xi+h} \mathrm{M}(x) \, dx - \int_{\xi'}^{\xi'+h} \mathrm{M}(x) \, dx = 0.$$

Supposons h infiniment petit et égalons à zéro la partie principale du premier membre; il viendra

$$h\,\mathrm{M}(\xi) - h\,\mathrm{M}(\xi') = 0.$$

Donc $\mathrm{M}(x)$ est une constante. Égalant à zéro sa dérivée, nous voyons que $\overline{y}$ doit être une solution de l'équation différentielle

$$(3)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0.$$

Les courbes satisfaisant à cette équation différentielle se nomment des *extrémales*. Nous voyons qu'il ne peut y avoir de minimum que si l'on peut déterminer un arc d'extrémale joignant les deux points $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$.

On a d'ailleurs par définition

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'\,\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'\,\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\Delta y'}{\Delta x},$$

et comme $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite y', l'équation (3) montre que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\dfrac{\Delta y'}{\Delta x}$ en a une. Si donc $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}$ n'est pas nul, $\dfrac{\Delta y'}{\Delta x}$ en aura une, qui sera finie et sera, suivant l'usage, représentée par y''. Effectuant alors dans l'équation (3) la dérivation indiquée, elle pourra s'écrire

$$(3')\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'\,\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'\,\partial y}y' - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}y'' = 0.$$

Les solutions de cette équation sont des fonctions analytiques n'ayant de points critiques que lorsque $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}$ s'annule. Nous ne considérerons dans ce qui va suivre que des arcs d'extrémales sur lesquels cette singularité ne se présente pas.

5. En partant d'un système de valeurs initiales (x_0, y_0, y'_0) qui n'annule pas $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}$ on pourra, comme on l'a vu dans la Note précédente, déterminer une famille d'intégrales à deux para-

mètres y_{kl}, voisines de la solution particulière $\overline{y}$ qui correspond à ces valeurs initiales.

Si nous posons pour abréger

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}\, \partial \overline{y}} = \mathrm{P}, \qquad \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}\, \partial \overline{y}'} = \mathrm{Q}, \qquad \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}'\, \partial \overline{y}'} = \mathrm{R},$$

l'équation aux variations correspondante à l'équation (3) sera

$$\mathrm{P}u + \mathrm{Q}u' - \frac{d}{dx}(\mathrm{Q}u + \mathrm{R}u') = 0, \tag{4}$$

laquelle peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial\, \Omega(u)}{\partial u} - \frac{d}{dx}\,\frac{\partial\, \Omega(u)}{\partial u'}, \tag{4'}$$

$\Omega(u)$ désignant la forme quadratique

$$\frac{1}{2}(\mathrm{P}u^2 + 2\mathrm{Q}uu' + \mathrm{R}u'^2).$$

Effectuant la dérivation indiquée dans l'équation (4) et divisant par — R, on peut encore écrire

$$u'' + \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}u' + \frac{\mathrm{Q}' - \mathrm{P}}{\mathrm{R}}u = 0. \tag{4''}$$

Soient u_1, u_2, deux solutions linéairement distinctes de cette équation; on aura, d'après le n° 3 de la Note I,

$$\mathrm{D}\log(u'_1 u_2 - u'_2 u_1) = -\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}},$$

d'où

$$\mathrm{R}(u'_1 u_2 - u'_2 u_1) = \text{const.}$$

6. Il ne suffit pas pour assurer l'existence même du minimum de Lagrange que la variation première $\delta\mathrm{I}$ soit nulle. Il faut encore que la variation seconde soit positive.

Elle est représentée au facteur ε^2 près par l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} [P\eta^2 + 2Q\eta\eta' + R\eta'^2]\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \Omega(\eta)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} \left[\eta\frac{\partial\Omega(\eta)}{\partial\eta} + \eta'\frac{\partial\Omega(\eta)}{\partial\eta'}\right]dx.$$

Supposons que parmi les conjugués du point x_0, il y en ait un, x' *intérieur* à l'intervalle $x_0 x_1$. Toutes les intégrales de l'équation aux variations s'annuleront entre x_0 et x'. Soit u_1 celle de ces intégrales qui s'annule en x_0; u_2 celle qui s'annule en un point x_2 situé entre x' et x_1 et qui ne soit pas lui-même un conjugué de x_0. L'intégrale $u_1 - u_2$ s'annulera en un point ξ situé entre x_0 et x'.

Prenons $\eta = u_1$ de x_0 à ξ; $\eta = u_2$ de ξ à x_2; $\eta = 0$ de x_2 à x_1. La variation dans la première partie du champ sera

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{\xi}\left[u_1\frac{\partial\Omega(u_1)}{\partial u_1} + u'_1\frac{\partial\Omega(u_1)}{\partial u'_1}\right]dx$$

ou, en intégrant par parties le second terme,

$$\frac{1}{2}\left[u_1\frac{\partial\Omega(u_1)}{\partial u_1}\right]_{x_0}^{\xi} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\xi} u_1\left[\frac{\partial\Omega(u_1)}{\partial u_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial\Omega(u_1)}{\partial u'_1}\right]dx.$$

Mais u_1 satisfaisant à l'équation (4), l'intégrale disparaît. Il ne reste que le terme tout intégré.

Calculant de même la variation entre ξ et x_2, on aura pour la variation totale l'expression

$$\frac{1}{2}\left[u_1\frac{\partial\Omega(u_1)}{\partial u'_1}\right]_{x_0}^{\xi} + \frac{1}{2}\left[u_2\frac{\partial\Omega(u_2)}{\partial u'_2}\right]_{\xi}^{x_2}.$$

Or

$$\frac{\partial\Omega(u_1)}{\partial u'_1} = Qu_1 + Ru'_1, \qquad \frac{\partial\Omega(u_2)}{\partial u'_2} = Qu_2 + Ru'_2.$$

En outre u_1 s'annule en x_0, u_2 en x_2, et en ξ, $u_1 = u_2$. L'expression précédente se réduit donc à la valeur que prend

pour $x = \xi$ l'expression

$$\frac{1}{2} R(u'_1 u_2 - u'_2 u_1).$$

Mais cette expression est une constante différente de zéro (n° 5); d'ailleurs u_1 et u_2 n'étant définis qu'à un facteur constant près, on peut la rendre à volonté positive ou négative. Il n'y a donc pas de minimum.

7. La variation seconde est susceptible d'une autre transformation que nous allons exposer.

Soit w une fonction continue ayant une dérivée entre x_0 et x_1. On aura

$$\int_{x_0}^{x_1} [2\eta\eta' w + \eta^2 w'] \, dx = [\eta^2 w]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Ajoutons cette expression à l'intégrale de la variation seconde; celle-ci deviendra

$$\int_{x_0}^{x_1} [(P + w')\eta^2 + 2(Q + w)\eta\eta' + R\eta'^2] \, dx,$$

et si l'on peut déterminer w de manière à satisfaire à l'équation

$$(5) \qquad (Q + w)^2 - R(P + w') = 0,$$

l'intégrale précédente deviendra

$$\int_{x_0}^{x_1} R\left[\eta' + \frac{Q + w}{R}\eta\right]^2 dx.$$

Cette transformation suppose toutefois que l'équation (5) admette une intégrale continue et ayant une dérivée de x_0 à x_1.

Il en sera ainsi si la transformée obtenue en posant

$$w = -Q - R\frac{u'}{u}$$

admet une intégrale qui ne s'annule pas dans l'intervalle de x_0 à x_1 (extrémités comprises).

Mais cette transformée est

$$\frac{R^2 u'^2}{u^2} - R\left(P - Q' - R'\frac{u'}{u} - R\frac{u''u - u'^2}{u^2}\right) = 0,$$

ou après réduction

$$u'' + \frac{R'}{R}u' + \frac{Q' - P}{R}u = 0.$$

C'est l'équation aux variations (4″). Elle aura une intégrale de l'espèce voulue, si tous les conjugués de x_0 sont *extérieurs* à l'intervalle $x_0\, x_1$.

Cette forme donnée à la variation seconde montre que si R est négatif, il ne peut y avoir de minimum lorsque x_1 est plus voisin de x_0 que tous ses conjugués, et *a fortiori* s'il s'en éloigne davantage.

Au contraire, si R est positif, $\delta^2 I$ le sera tant que x_1 sera plus voisin de x_0 que le premier de ses conjugués.

En résumé, pour que $\delta^2 I$ soit toujours positif, il est nécessaire :

1° Que R soit positif (*condition de Legendre*);

2° Qu'aucun des conjugués de x_0 ne soit *intérieur* à l'intervalle $x_0\, x_1$ (*condition de Jacobi*).

Ces conditions sont suffisantes si tous ces conjugués sont *extérieurs* à $x_0\, x_1$. Mais un doute pourra subsister si l'un d'eux est situé en x_1.

8. Nous allons montrer que la condition $\delta^2 I > 0$, qui assure l'existence du minimum de Lagrange, ne suffit plus pour assurer celle du minimum de Weierstrass.

Soient $(x_2\, y_2)$ un point choisi à volonté sur l'arc d'extrémale $\overline{y}$ qui joint les points $(x_0\, y_0)$, $(x_1\, y_1)$; $\overline{y}'_2$ la valeur de $\overline{y}'$ en ce point; p une constante quelconque; h un infiniment petit.

Posons

$$\omega = -\frac{x - x_0}{x_2 - h - x_0}(p - \overline{y}'_2)h,$$

$$\omega_1 = (x - x_2)(p - \overline{y}'_2).$$

ω s'annule en x_0; ω_1 en x_2; et au point $x_2 - h$ on aura

$$\omega = \omega_1 = -(p - \bar{y}'_2)h.$$

C'est d'ailleurs en ce point que $|\omega|$, $|\omega_1|$ acquerront leur plus grande valeur.

Considérons la ligne Z qui a pour ordonnée

$$\begin{array}{ll} \bar{y} + \omega & \text{de } x_0 \text{ à } x_2 - h, \\ \bar{y} + \omega_1 & \text{de } x_2 - h \text{ à } x_2, \\ \bar{y} & \text{de } x_2 \text{ à } x_1. \end{array}$$

On aura

$$\begin{aligned} I_Z - I_{\bar{y}} = & \int_{x_0}^{x_2 - h} \varphi(x, \bar{y} + \omega, \bar{y}' + \omega')\, dx \\ & + \int_{x_2 - h}^{x_2} \varphi(x, \bar{y} + \omega_1, \bar{y}' + \omega'_1)\, dx \\ & - \int_{x_0}^{x_2} \varphi(x, \bar{y}, \bar{y}')\, dx \\ = & \int_{x_0}^{x_2} [\varphi(x, \bar{y} + \omega, \bar{y}' + \omega') - \varphi(x, \bar{y}, \bar{y}')]\, dx \\ & + \int_{x_2 - h}^{x_2} [\varphi(x, \bar{y} + \omega_1, \bar{y}' + \omega'_1) - \varphi(x, \bar{y} + \omega, \bar{y}' + \omega']\, dx. \end{aligned}$$

Cherchons la dérivée de cette expression par rapport à h pour $h = 0$.

Celle du premier terme sera

$$\int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \omega}{\partial h} + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \omega'}{\partial h} \right] dx.$$

L'intégration par parties du second terme la transforme en

$$\left[\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \omega}{\partial h} \right]_{x_0}^{x_2} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{\partial \omega}{\partial h} \left[\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{y}'} \right] dx.$$

Mais $\bar{y}$ étant une extrémale, l'intégrale disparaît. D'autre part, $\dfrac{\partial \omega}{\partial h}$ s'annule pour $x = x_0$ et se réduit à $-(p - \bar{y}'_2)$ pour

$x = x_2$. La dérivée de ce premier terme sera donc

$$-(p - \overline{y}'_2)\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}'}\right)_{x=x_2}.$$

Quant à la seconde intégrale, dont le champ est infiniment petit, sa dérivée s'obtiendra en posant $x = x_2$, $h = 0$ dans la fonction à intégrer. On trouve ainsi qu'elle est égale à

$$\varphi(x_2, \overline{y}_2, p) - \varphi(x_2, \overline{y}_2, \overline{y}'_2).$$

Réunissant cette expression à la précédente, on voit que $I_Z - I_{\overline{y}}$ aura pour dérivée l'expression

$$\varphi(x_2, \overline{y}_2, p) - \varphi(x_2, \overline{y}_2, \overline{y}'_2) - (p - \overline{y}'_2)\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}'}\right)_{x=x_2}$$

que nous désignerons par $E(x_2, \overline{y}_2, \overline{y}'_2, p)$.

Si cette dérivée était négative, on aurait pour des valeurs infiniment petites de h

$$I_Z - I_{\overline{y}} < 0,$$

en même temps que $|Z - \overline{y}|$, dont la valeur maximum est

$$|(p - \overline{y}'_2)h|,$$

serait infiniment petit. Il n'y aurait donc pas de minimum.

D'ailleurs p est une constante quelconque, $(x_2 y_2)$ un point quelconque de notre arc d'extrémale; d'où cette condition nécessaire pour l'existence d'un minimum

La fonction

$$E(x, \overline{y}, \overline{y}', p) = \varphi(x, \overline{y}, p) - \varphi(x, \overline{y}, \overline{y}') - (p - \overline{y}')\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{y}'}$$

ne doit être négative en aucun point de l'arc considéré, pour aucune valeur de p.

9. Cette condition, formulée par *Weierstrass*, ne rentre pas dans les précédentes, comme le montre l'exemple simple suivant :

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 (y'^2 + y'^3)\, dx.$$

Ses extrémales, ayant pour équation

$$y''(2+6y')=0$$

seront des droites.

Pour l'extrémale particulière $y=0$, on aura $\bar{y}=\bar{y}'=0$. La variation seconde se réduira donc à

$$\varepsilon^2 \int_0^1 2\eta'^2\,dx,$$

et sera essentiellement positive; car pour qu'elle s'annulât il faudrait qu'on eût, dans tout le champ, $\eta'=0$, d'où $\eta=$ const. Mais η doit s'annuler pour $x=0$; il serait donc identiquement nul.

Il n'y a pourtant pas de minimum (au sens de Weierstrass). Car la fonction $E(x, \bar{y}, \bar{y}', p)$, qui se réduit ici à p^2+p^3, est négative si $p<-1$. La condition de Weierstrass n'est pas remplie.

10. Cherchons une condition qui, jointe à celles de Legendre et de Jacobi, déjà reconnues nécessaires, suffise pour assurer le minimum de Weierstrass.

Nous avons vu (Note I, n° 5) qu'on peut déterminer un faisceau d'extrémales y_t dont $\bar{y}$ fasse partie, et un champ Δ contenant l'arc $\bar{y}$ à son intérieur et tel que par chaque point (x, y) de Δ passe une seule des extrémales y_t, le coefficient angulaire y' de sa tangente étant une fonction de x, y, définie par une équation de la forme

$$y'=u(x, y),$$

les dérivées partielles de u étant d'ailleurs continues dans le champ.

Différentiant cette équation, il vient

$$y''=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}y'=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}u.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation générale des extré-

males, qui doit être également satisfaite, il vient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}u\right)+u\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial u}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0, \tag{6}$$

où φ représente $\varphi(x, y, u)$.

11. Théorème de M. Hilbert. — *L'intégrale curviligne*

$$\int\left[\varphi(x, y, u)-u\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, y, u)\right]dx+\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, y, u)\,dy$$

(où u est supposé remplacé par sa valeur en x, y), prise suivant un contour fermé quelconque situé dans le champ Δ, est identiquement nulle.

La condition pour qu'il en soit ainsi est en effet exprimée par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(x, y, u)-u\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, y, u)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, y, u)\right]$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-u\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial u}-u\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial u}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x},$$

équation identique à (6).

Appliquons ce théorème au contour formé par l'arc d'extrémale $\bar{y}$ et une autre courbe Y fermant le circuit.

Sur la ligne Y, on a $y=\mathrm{Y}$, $dy=\mathrm{Y}'\,dx$. La portion correspondante de l'intégrale curviligne sera donc

$$\int_{x_1}^{x_0}\left[\varphi(x, \mathrm{Y}, u)+(\mathrm{Y}'-u)\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, \mathrm{Y}, u)\right]dx.$$

Sur l'extrémale on a $y=\bar{y}$, $y'=\bar{y}'=u$.

L'intégrale correspondante sera

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x, \bar{y}, \bar{y}')\,dx=\mathrm{I}_{\bar{y}}.$$

On aura donc

$$\mathrm{I}_{\bar{y}}=\int_{x_0}^{x_1}\left[\varphi(x, \mathrm{Y}, u)+(\mathrm{Y}'-u)\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x, \mathrm{Y}, u)\right]dx.$$

Mais on a par définition

$$I_Y = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, Y, Y')\, dx$$

et par suite

$$I_Y - I_{\bar{y}} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\varphi(x, Y, Y') - \varphi(x, Y, u) - (Y' - u)\frac{\partial \varphi(x, Y, u)}{\partial u}\right] dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} E(x, Y, u, Y')\, dx.$$

Cela posé, il existera un minimum fort si l'on peut assigner un domaine d, quelque petit qu'il soit, auquel l'arc d'extrémale $\bar{y}$ soit intérieur et dans lequel la fonction

$$E(x, y, u, p)$$

ne soit nulle part négative, quelle que soit la valeur finie de p.

On peut en effet restreindre à volonté le champ Δ de manière qu'il arrive à être contenu dans d. La courbe Y y sera également contenue si elle est assez rapprochée de $\bar{y}$. $E(x, Y, u, Y')$ sera donc l'une des valeurs dont $E(x, y, u, p)$ est susceptible. L'intégrale qui exprime la différence $I_Y - I_{\bar{y}}$ aura donc tous ses éléments non négatifs.

12. Pour appliquer ce critérium, il faudrait avoir déterminé un faisceau et la fonction u correspondante. Mais on peut éviter cette recherche en développant $\varphi(x, Y, Y')$ suivant les puissances de $Y' - u$ par la formule de Taylor. On trouve ainsi

$$E(x, Y, u, Y') = \frac{(Y' - u)^2}{2}\,\frac{\partial^2 \varphi(x, Y, p)}{\partial p^2},$$

p étant un nombre intermédiaire entre Y' et u.

Il y aura donc un minimum fort si l'on peut déterminer un domaine d entourant l'arc $\bar{y}$ et dans lequel

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y, p)}{\partial p^2}$$

ne soit jamais négatif, quel que soit p.

Pour le minimum faible, la condition de Legendre (jointe à celle de Jacobi, sur laquelle nous nous sommes appuyé) suffirait. Soit en effet m le maximum du module de $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans le champ Δ. Si l'on a

$$|Y - \bar{y}| < h, \qquad |Y' - \bar{y}'| < h,$$

on aura aussi

$$|u - \bar{y}'| \lesseqgtr m\,|Y - \bar{y}| < mh,$$

et p étant intermédiaire entre u et Y'

$$|p - \bar{y}'| < (m+1)h.$$

Si donc h tend vers zéro, $\frac{\partial^2 \varphi(x, Y, p)}{\partial p^2}$ tendra vers

$$\frac{\partial^2 (x, \bar{y}, \bar{y}')}{\partial \bar{y}'^2}.$$

Si cette dernière quantité est positive (ce qui est la condition de Legendre) il en sera de même de $\frac{\partial^2 \varphi(x, Y, p)}{\partial p^2}$ dès que h sera assez petit.

13. Nous avons admis, jusqu'à présent, que le point $(x_1\, y_1)$, où s'arrête l'arc d'extrémale que nous considérons, était fixe. Supposons qu'il puisse se déplacer le long d'une courbe $y = \psi(x)$ et cherchons quelle situation il doit avoir pour que l'intégrale soit minimum.

Supposons le problème résolu par l'arc d'extrémale $\bar{y}$ réunissant les points $A = (x_0\, y_0)$ et $B = (x_1\, y_1)$.

Les extrémales y_{0l} issues du point A auront pour équation générale

$$y = \bar{y} + X_1 l + X_2 l^2 + \ldots,$$

$X_1, X_2, \ldots$ étant des fonctions de x, analytiques de x_0 à x_1.

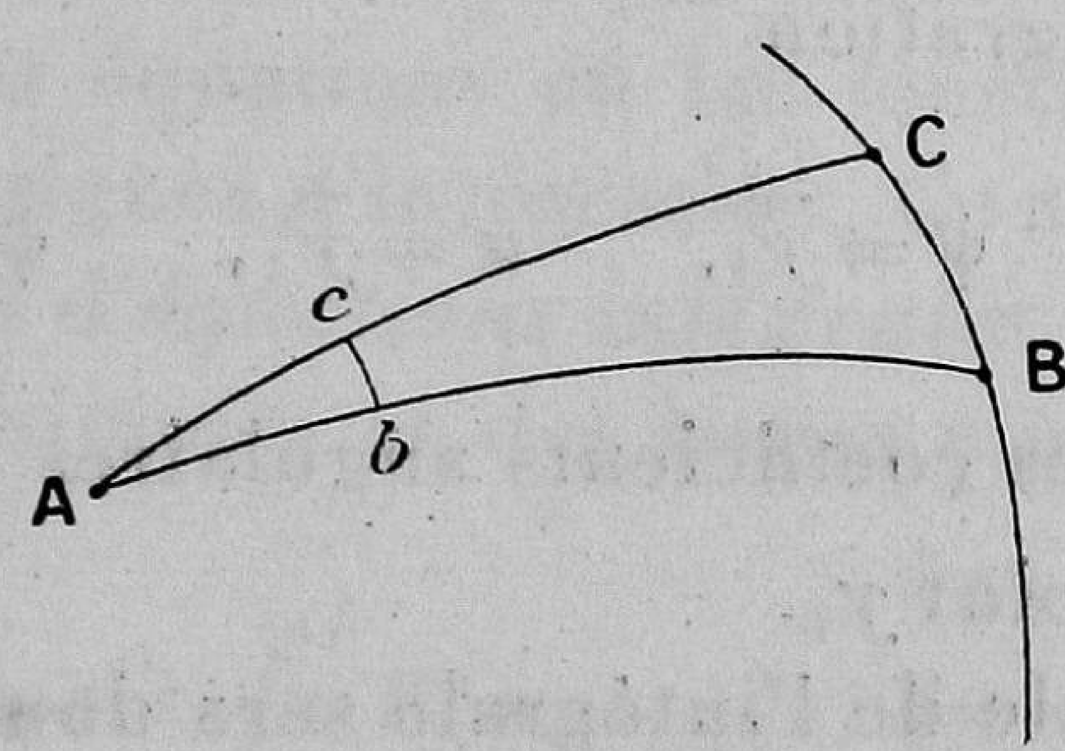
Pour que $\bar{y}$ donne un minimum par rapport aux lignes ayant les mêmes extrémités, il est nécessaire que la condition de Jacobi soit remplie. Donc $X_1 = \left(\frac{\partial y_{0l}}{\partial l}\right)_0$ ne doit pas s'annuler

entre x_0 et x_1. S'il s'annulait en x_1, l'existence du minimum serait douteuse; mais nous exclurons cette hypothèse limite.

On peut dès lors déterminer un faisceau d'extrémales y_{0t} voisines de $\overline{y}$ et un champ correspondant, enveloppant l'arc de $\overline{y}$ compris entre les abscisses $x_0+\varepsilon$ et x_1 et tel que par chacun de ses points x, y passe une seule extrémale du faisceau.

Cela posé, soient $C=(x_2\, y_2)$ un point de la ligne $y=\psi(x)$ assez voisin de B pour être contenu dans le champ; $y=Y(x)$

Fig. 14.



l'extrémale AC du faisceau qui passe par ce point; bc une ligne joignant les deux extrémales dans le voisinage du point A.

L'intégrale de Hilbert, prise suivant le contour bcCBb sera nulle. D'ailleurs, en faisant décroître suffisamment ε, nous pourrons rapprocher à volonté les points b, c du point A, de sorte que l'intégrale suivant le contour AcbA tende vers zéro. Donc l'intégrale suivant ACBA sera également nulle.

Or, si l'on désigne par u le coefficient angulaire de la tangente au point x, y de l'extrémale du faisceau qui passe par ce point, l'intégrale de Hilbert aura pour valeur (n° **11**):

Suivant CB

$$\int_{x_2}^{x_1}\left[\varphi(x,\psi,u)+(\psi'-u)\frac{\partial}{\partial u}\varphi(x,\psi,u)\right]dx.$$

Suivant BA

$$\int_{x_1}^{x_0}\varphi(x,\overline{y},\overline{y}')\,dx=-\,I_{\overline{y}}(x_0,x_1).$$

Suivant AC

$$\int_{x_0}^{x_2}\varphi(x,Y,Y')\,dx=I_Y(x_0,x_2).$$

L'accroissement

$$I_Y(x_0, x_2) - I_{\bar{y}}(x_0, x_1)$$

est donc exprimé par l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\varphi(x, \psi, u) + (\psi' - u) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(x, \psi, u) \right] dx.$$

Il y aura minimum si cette intégrale est positive pour toutes les valeurs de x_2 suffisamment voisines de x_1.

D'ailleurs lorsque x_2 tend vers x_1 on aura sensiblement dans tout le champ d'intégration

$$x = x_1, \qquad \psi = \bar{y}_1, \qquad u = \bar{y}'_1, \qquad \psi' = \psi'_1,$$

$\bar{y}'_1$ et ψ'_1 désignant les coefficients angulaires des tangentes aux courbes $\bar{y}$ et ψ au point y_1.

La valeur principale de l'intégrale sera donc

$$(x_2 - x_1) \left[\varphi(x_1, y_1, \bar{y}'_1) + (\psi'_1 - \bar{y}'_1) \frac{\partial}{\partial \bar{y}'_1} \varphi(x_1, y_1, \bar{y}'_1) \right].$$

Elle change de signe avec $(x_2 - x_1)$; il n'y aura donc pas de minimum, à moins qu'on n'ait

$$\varphi(x_1, y_1, \bar{y}'_1) + (\psi'_1 - \bar{y}'_1) \frac{\partial}{\partial \bar{y}'_1} \varphi(x, y, \bar{y}'_1) = 0.$$

Si cette condition (nécessaire, mais non suffisante) est remplie, on dit que l'extrémale $\bar{y}$ est *transversale* à la courbe ψ.

NOTE III.

SUR L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

1. Les problèmes de la Physique mathématique conduisent fréquemment à des équations où les fonctions inconnues sont engagées sous des signes d'intégration. Ce nouveau type d'équations a reçu le nom d'*équations intégrales*.

L'une des plus simples et des mieux étudiées est l'équation de *Fredholm*

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b N(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, λ un paramètre, a, b des constantes finies, $f(x)$ et $N(x, s)$ des fonctions données, que nous supposerons intégrables et bornées, lorsque les variables qu'elles renferment varient entre a et b. La fonction $N(x, s)$ se nomme le *noyau*.

En changeant la variable d'intégration on peut donner aux constantes a, b les valeurs que l'on veut, 0 et 1 par exemple. Toutes les intégrales qui vont suivre étant prises entre ces mêmes limites, nous pourrons abréger l'écriture en nous abstenant de les indiquer. Une autre simplification consistera à supprimer, dans l'expression des fonctions de plusieurs variables, la virgule qui sépare ordinairement celles-ci.

Cherchons à résoudre l'équation (1) par une série

$$\varphi(x) = A_0(x) - A_1(x)\lambda + \ldots + (-1)^n A_n(x)\lambda^n + \ldots. \tag{2}$$

L'identification des deux membres donnera les relations

$$\left\{\begin{aligned} &A_0(x) = f(x), \qquad A_1(x) = \int N(xs)A_0(s)\,ds, \qquad \ldots, \\ &\qquad A_{n+1}(x) = \int N(xs)\,A_n(s)\,ds, \qquad \ldots. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

On en déduit, en représentant par M et m les bornes supérieures des modules de $N(xs)$ et de $f(x)$,

$$|A_0(x)| \overline{\overline{<}} m, \qquad \ldots, \qquad |A_n(x)| \overline{\overline{<}} m M^n.$$

La série trouvée sera donc sûrement convergente tant que λ sera moindre que $\frac{1}{M}$.

2. On peut lui donner une forme un peu différente en introduisant les *noyaux itérés* de $N(xs)$ définis par les relations

$$N_1(xs) = \int N(xt_1)N(t_1 s)\,dt_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$N_n(xs) = \int\int \ldots N(xt_1)N(t_1 t_2)\ldots N(t_n s)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n.$$

On a en effet, d'après les relations (3),

$$A_{n+1}(x) = \int N(xt_1)A_n(t_1)\,dt_1,$$

$$A_n(t_1) = \int N(t_1 t_2)A_{n-1}(t_2)\,dt_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_1(t_n) = \int N(t_n s) f(s)\,dt_n$$

et par des substitutions successives

$$A_{n+1}(x) = \int\int\ldots\int N(xt_1)\ldots N(t_n s) f(s)\,dt_1\ldots dt_n\,ds$$
$$= \int N_n(xs)\,f(s)\,ds.$$

La solution trouvée prend donc la forme

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda\int R(xs\lambda) f(s)\,ds \tag{4}$$

si l'on pose

$$R(xs\lambda) = N(xs) - \lambda N_1(xs) + \ldots + (-1)^n N_n(xs)\lambda^n + \ldots.$$

Cette fonction $R(xs\lambda)$ se nomme le *résolvant* de l'équation (1).

3. Il résulte évidemment de la définition des noyaux itérés qu'on a

$$(5)\qquad N_{n+m+1}(xs) = \int N_m(xt_m)N_n(t_m s)\,dt_m$$

et en particulier pour $m = 0$

$$(6)\qquad N_{n+1}(xs) = \int N(xt)N_n(ts)\,dt.$$

Faisant au contraire $n = 0$ et changeant m en n, on a cette autre expression

$$(7)\qquad N_{n+1}(xs) = \int N_n(xt)N(ts)\,dt.$$

Substituons dans $R(xs\lambda)$ pour chacun des noyaux itérés sa valeur (6), il viendra

$$(8)\qquad R(xs\lambda) = N(xs) - \lambda\int N(xt)R(ts\lambda)\,dt.$$

La substitution de la valeur (7) donnerait de même

$$(9)\qquad R(xs\lambda) = N(xs) - \lambda\int N(ts)R(xt\lambda)\,dt.$$

Des deux relations précédentes on peut en déduire une troisième, où le noyau ne figure plus.

Changeons en effet λ en μ dans l'identité (8), il viendra

$$(8)'\qquad R(xs\mu) = N(xs) - \mu\int N(xt)R(ts\mu)\,dt;$$

d'où, par soustraction et changement de t en u,

$$\mu\int N(xu)R(us\mu)\,du - \lambda\int N(us)R(xu\lambda)\,du$$
$$= R(xs\lambda) - R(xs\mu).$$

Mais, d'autre part, changeons dans $(8)'$ x en u, puis multiplions par $\lambda R(xu\lambda)du$ et intégrons. Changeons, d'autre part, dans (9) s en u, puis multiplions par $\mu R(us\mu)du$ et intégrons. Enfin retranchons l'une de l'autre les deux équations obtenues.

Les deux intégrales doubles

$$\lambda\mu\int\int N(ut)R(ts\mu)R(xu\lambda)\,dt\,du$$

et

$$\lambda\mu\int\int N(tu)R(xt\lambda)R(us\mu)\,dt\,du,$$

ne différant l'une de l'autre que par l'échange des deux variables d'intégration, se détruiront, de sorte qu'on aura simplement

$$(\mu-\lambda)\int R(xu\lambda)R(us\mu)\,du$$
$$=\mu\int N(xu)R(us\mu)\,du-\lambda\int N(us)R(xu\lambda)\,du.$$

Comparant cette formule à la précédente, il viendra

$$(10)\qquad (\mu-\lambda)\int R(xu\lambda)R(us\mu)\,du=R(xs\lambda)-R(xs\mu).$$

Tout résolvant doit satisfaire à cette relation. Réciproquement, si une fonction $R(xs\lambda)$ y satisfait, il suffit d'y poser $\mu=0$ et $u=t$ pour obtenir la relation

$$R(xs\lambda)=R(xs0)-\lambda\int R(xt\lambda)R(ts0)\,dt$$

qui montre que $R(xs\lambda)$ est le résolvant correspondant au noyau $R(xs0)$.

4. La fonction $\varphi(x)$ déterminée par la formule (4) est la seule solution de l'équation de Fredholm. Soit en effet $\psi(x)$ une fonction qui y satisfasse. On aura par hypothèse

$$(11)\qquad \psi(x)+\lambda\int N(xt)\psi(t)\,dt=f(x).$$

Multipliant par $R(sx\lambda)\,dx$ et intégrant, il vient

$$(12)\qquad \int R(sx\lambda)\psi(x)\,dx+\lambda\int\int R(sx\lambda)N(xt)\psi(t)\,dx\,dt$$
$$=\int R(sx\lambda)f(x)\,dx.$$

Permutons dans l'intégrale double les variables d'intégration x et t; elle pourra s'écrire

$$\lambda \int \int R(st\lambda) N(tx) \psi(x)\, dx\, dt.$$

Mais la formule (9) donne en y permutant x et s

$$\lambda \int R(st\lambda) N(tx)\, dt = N(sx) - R(sx\lambda).$$

L'intégrale double se réduit donc à l'intégrale simple

$$\int [N(sx) - R(sx\lambda)] \psi(x)\, dx.$$

Par la substitution de cette valeur, l'équation (12) se réduit à

$$\int N(sx) \psi(x)\, dx = \int R(sx\lambda) f(x)\, dx$$

ou par des changements de variables à

$$\int N(xt) \psi(t)\, dt = \int R(xs\lambda) f(s)\, ds.$$

Substituant cette valeur dans (11), il viendra

$$\psi(x) = f(x) - \lambda \int R(xs\lambda) f(s)\, ds = \varphi(x).$$

5. Le développement de la solution, suivant les puissances de λ, n'étant sûrement convergent que dans un espace restreint, nous sommes conduits à en chercher une autre expression affranchie de cet inconvénient. M. Fredholm y est parvenu par les considérations suivantes :

Reprenons l'équation (8) du résolvant

$$R(xs\lambda) = N(xs) - \lambda \int N(xt) R(ts\lambda)\, dt.$$

Partageons le champ d'intégration ab en parties d'amplitude très petite δ par des points de division $a_1 = a, a_2, \ldots, a_n, b$;

on aura sensiblement

$$\int N(xt)R(ts\lambda)\,dt = \delta\sum_i N(xa_i)R(a_is\lambda),$$

d'où l'équation approchée

$$R(xs\lambda) + \lambda\delta\sum_i N(xa_i)R(a_is\lambda) = N(xs).$$

Exprimons qu'elle est satisfaite en tous les points où $x = a_k$, $s = a_l$. Nous aurons pour déterminer les valeurs des n^2 quantités $R(a_ka_l\lambda)$, un système de n^2 équations linéaires, dont la solution sera de la forme

$$R(a_ka_l\lambda) = \frac{D_{kl}(\lambda)}{D(\lambda)},$$

$D(\lambda)$ et $D_{kl}(\lambda)$ étant des polynomes en λ dont le premier est le même pour tous les points considérés.

Faisons tendre δ vers zéro. On peut prévoir qu'à la limite l'équation approchée deviendra exacte et sera satisfaite pour tous les systèmes de valeurs de x et de s, compris entre a et b. Les polynomes D et D_{kl} deviendront des séries de puissances de λ, les coefficients de la première étant indépendants de x et de s.

6. La réalité confirme ces prévisions; nous allons vérifier en effet qu'on a

$$R(xs\lambda) = \frac{A_0(xs) + \lambda A_1(xs) + \ldots + \lambda^n A_n(xs) + \ldots}{1 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n + \ldots} = \frac{D(xs\lambda)}{D(\lambda)},$$

si l'on détermine convenablement les fonctions A et les constantes a.

Substituons en effet l'expression précédente dans l'équation (8) qui détermine le résolvant. Chassant le dénominateur et identifiant les coefficients des diverses puissances de λ, nous aurons à satisfaire aux équations de condition

$$A_0(xs) = N(xs),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_n(xs) = a_n N(xs) - \int N(xt)A_{n-1}(ts)\,dt. \tag{13}$$

Or, considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} N(xs) & N(xs_1) & \dots & N(xs_n) \\ N(s_1 s) & N(s_1 s_1) & \dots & N(s_1 s_n) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ N(s_n s) & N(s_n s_1) & \dots & N(s_n s_n) \end{vmatrix}$$

que nous désignerons d'une manière abrégée par

$$N\begin{bmatrix} x\, s_1 \dots s_n \\ s\, s_1 \dots s_n \end{bmatrix}.$$

En le développant suivant les éléments de la première ligne, il deviendra

$$N(xs)N\begin{bmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{bmatrix} + \sum_1^n (-1)^k N(xs_k)N\begin{bmatrix} s_1 s_2 \dots\dots\dots\dots\dots s_n \\ s\; s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \end{bmatrix}.$$

Mais on a, par un échange de lignes,

$$N\begin{bmatrix} s_1 \dots\dots\dots\dots\dots s_n \\ s \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \end{bmatrix} = (-1)^{k-1} N\begin{bmatrix} s_k s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \\ s\; s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \end{bmatrix}.$$

On aura donc

$$(14)\quad N\begin{bmatrix} x\, s_1 \dots s_n \\ s\, s_1 \dots s_n \end{bmatrix} = N(xs)N\begin{bmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{bmatrix} - \sum_1^n N(xs_k)N\begin{bmatrix} s_k s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \\ s\; s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \end{bmatrix}.$$

Cela posé, nous satisferons aux conditions (13) en posant

$$A_0(xs) = N(xs),$$

$$\dots\dots \quad \dots\dots\dots,$$

$$A_n(xs) = \frac{1}{n!}\int\int \dots N\begin{bmatrix} x\, s_1 \dots s_n \\ s\, s_1 \dots s_n \end{bmatrix} ds_1 \dots ds_n,$$

$$a_n = \frac{1}{n}\int A_{n-1}(s_n s_n)\, ds_n = \frac{1}{n!}\int\int \dots \begin{bmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{bmatrix} ds_1\, ds_2 \dots ds_n.$$

La vérification est facile.

Substituons en effet les valeurs ci-dessus de A_n, A_{n-1}, a_n dans les relations (13); multiplions par $n!$ et remplaçons la variable t d'intégration par s_n. Les deux membres de l'équation deviendront des intégrales multiples portant au premier membre sur la fonction

$$N\begin{bmatrix} x s_1 \dots s_n \\ s s_1 \dots s_n \end{bmatrix},$$

et au second membre sur la fonction

$$N(xs)N\begin{bmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{bmatrix} - n\,N(xs_n)N\begin{bmatrix} s_n s_1 \dots s_{n-1} \\ s s_1 \dots s_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Mais dans l'intégrale multiple on peut sans altérer le résultat permuter arbitrairement entre elles les variables d'intégration. On pourra donc, quel que soit k, remplacer

$$N(xs_n)N\begin{bmatrix} s_n s_1 \dots s_{n-1} \\ s s_1 \dots s_{n-1} \end{bmatrix},$$

par l'expression équivalente

$$N(xs_k)N\begin{bmatrix} s_k s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \\ s s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \end{bmatrix},$$

et par suite

$$n\,N(xs_n)N\begin{bmatrix} s_n s_1 \dots s_{n-1} \\ s s_1 \dots s_{n-1} \end{bmatrix}$$

par

$$\sum_1^n N(xs_k)N\begin{bmatrix} s_k s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \\ s s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \end{bmatrix}.$$

L'intégration portera dès lors sur la fonction

$$N(xs)N\begin{bmatrix} s_1 \dots s_n \\ s_1 \dots s_n \end{bmatrix} - \sum_1^n N(xs_k)N\begin{bmatrix} s_k s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \\ s s_1 \dots s_{k-1} s_{k+1} \dots s_n \end{bmatrix},$$

qui n'est autre que

$$N\begin{bmatrix} x s_1 \dots s_n \\ s s_1 \dots s_n \end{bmatrix},$$

d'après l'égalité (14).

7. Les séries $D(\lambda)$ et $D(xs\lambda)$ peuvent être limitées à un certain nombre de termes ou se prolonger à l'infini. Mais dans ce dernier cas elles seront convergentes pour toutes les valeurs de λ. Pour le montrer, cherchons une limite supérieure du module du déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & \cdots & s_n \end{vmatrix}.$$

Chacun de ses éléments $N(s_i s_k)$ ayant son module au plus égal à M, la somme δ_i^2 des carrés des modules des éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne ne pourra surpasser $n\,M^2$. Divisons tous les éléments de cette ligne par δ_i en mettant ce facteur en évidence hors du déterminant. Opérons de même sur chacune des lignes; nous aurons

$$\begin{bmatrix} s_1 \ldots s_n \\ s_1 \ldots s_n \end{bmatrix} = \delta_1 \ldots \delta_n \Delta,$$

Δ étant un nouveau déterminant dont les éléments a_{ik} seront tels que la somme des carrés des modules des éléments d'une même ligne soit égale à l'unité.

Supposons pour plus de généralité que les a_{ik} et par suite Δ soient complexes; désignons leurs conjugués par $\overline{a}_{ik}$, $\overline{\Delta}$. Les carrés des modules de a_{ik} et de Δ seront respectivement $a_{ik}\overline{a}_{ik}$ et $\Delta\overline{\Delta}$.

Cherchons le maximum de $\Delta\overline{\Delta}$, étant données les conditions précédentes

$$\sum_k a_{ik}\overline{a}_{ik} = 1, \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nous aurons pour cela à annuler la différentielle totale de l'expression

$$\Delta\overline{\Delta} - \sum_i \mu_i \sum_k a_{ik}\overline{a}_{ik},$$

ce qui nous donnera les conditions

$$\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}\overline{\Delta} = \mu_i \overline{a}_{ik}, \qquad \frac{\partial\overline{\Delta}}{\partial\overline{a}_{ik}}\Delta = \mu_i a_{ik}.$$

On en déduit

$$\sum_i a_{ik}\frac{\partial\Delta}{\partial a_{ik}}\overline{\Delta} = \mu_i \sum a_{ik}\overline{a}_{ik}$$

ou

$$\Delta\bar{\Delta} = \mu_i.$$

Les multiplicateurs μ_i auront donc une valeur commune μ.

On sait d'ailleurs que le déterminant formé des éléments $\frac{\partial \Delta}{\partial a_{ik}}$ a pour valeur Δ^{n-1}. On aura donc

$$\Delta^{n-1}\bar{\Delta}^n = \mu^n \bar{\Delta},$$

ou, en remplaçant μ par sa valeur $\Delta\bar{\Delta}$,

$$\Delta\bar{\Delta} = 1.$$

Le module de Δ ne peut donc surpasser 1.

Le module de $\begin{bmatrix} s_1 & \ldots & s_n \\ s_1 & \ldots & s_n \end{bmatrix}$ ne peut donc surpasser $\delta_1 \ldots \delta_n$ qui lui-même est au plus égal à $(\mathrm{M}\sqrt{n})^n$.

Le module du terme général de $\mathrm{D}(\lambda)$ sera donc au plus égal à

$$\frac{n^{\frac{n}{2}}\mathrm{M}^n|\lambda|^n}{n!},$$

terme général d'une série toujours convergente, car le rapport d'un terme au précédent peut s'écrire ainsi

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{M}|\lambda|}{\sqrt{n+1}},$$

expression dont le numérateur tend, pour n croissant, vers $e^{\frac{1}{2}}\mathrm{M}|\lambda|$, tandis que le dénominateur tend vers ∞.

La même démonstration s'applique évidemment à la série $\mathrm{D}(xs\lambda)$.

8. La fonction méromorphe $\mathrm{R}(xs\lambda)$ ne peut avoir d'autres pôles que les zéros de la *fonction caractéristique* $\mathrm{D}(\lambda)$. Mais réciproquement tout zéro λ_1 de $\mathrm{D}(\lambda)$ est un pôle de $\mathrm{R}(xs\lambda)$, lors même que son numérateur $\mathrm{D}(xs\lambda)$ contiendrait lui-même en facteur une puissance de $\lambda - \lambda_1$.

On a en effet

$$\frac{d\,\mathrm{D}(\lambda)}{d\lambda} = \sum n a_n \lambda^{n-1} = \sum \int \mathrm{A}_{n-1}(ss)\,ds\,\lambda^{n-1} = \int \mathrm{D}(ss\lambda)\,ds.$$

Si donc $\mathrm{D}(xs\lambda)$ admettait le facteur $\lambda - \lambda_1$ à la puissance m, ce facteur figurerait avec une puissance au moins égale dans $\mathrm{D}(ss\lambda)$ et dans $\dfrac{d\mathrm{D}(\lambda)}{d\lambda}$ et à une puissance supérieure dans $\mathrm{D}(\lambda)$.

Divisant l'égalité précédente par $\mathrm{D}(\lambda)$, il vient

$$\frac{d\log \mathrm{D}(\lambda)}{d\lambda} = \int \mathrm{R}(ss\lambda)\,ds,$$

ou en remplaçant $\mathrm{R}(ss\lambda)$ par son développement suivant les puissances de λ

$$\frac{d\log \mathrm{D}(\lambda)}{d\lambda} = \int [\mathrm{N}(ss) - \lambda\,\mathrm{N}_1(ss) + \lambda^2\,\mathrm{N}_2(ss) - \ldots]\,ds,$$

et en intégrant de o à λ

$$\log \mathrm{D}(\lambda) = \int \left[\lambda\,\mathrm{N}(ss) - \frac{\lambda^2}{2}\mathrm{N}_1(ss) + \frac{\lambda^3}{3}\mathrm{N}_2(ss) - \ldots\right] ds. \tag{15}$$

9. Avant de poursuivre l'étude du résolvant quelques préliminaires sont nécessaires.

On dit que des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... forment un *système orthogonal* si l'on a les relations

$$\int \varphi_i^2(x)\,dx = 1,$$

$$\int \varphi_i(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0, \qquad \text{si } k \gtrless i.$$

Deux suites de fonctions

$$\varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \ldots,$$
$$\psi_1(x),\quad \psi_2(x),\quad \ldots$$

forment un *système biorthogonal*, si l'on a

$$\int \varphi_i(x)\,\psi_i(x)\,dx = 1,$$

$$\int \varphi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx = 0, \qquad \text{si } k \gtrless i.$$

Dans ce cas les fonctions φ sont linéairement indépendantes, de même que les fonctions ψ.

Supposons en effet qu'on ait une relation de la forme

$$\Sigma c_i \varphi_i(x) = 0.$$

Multipliant par $\psi_k(x)dx$ et intégrant, il vient

$$\Sigma c_i \int \varphi_i(x)\,\psi_k(x)\,dx = c_k = 0.$$

Les c sont donc tous nuls.

Deux fonctions de deux variables

$$\mathrm{N}(xs), \quad \mathrm{N}'(xs),$$

sont dites *orthogonales* si l'on a les identités

$$\int \mathrm{N}(xt)\,\mathrm{N}'(ts)\,dt = 0, \tag{16}$$

$$\int \mathrm{N}(tx)\,\mathrm{N}'(st)\,dt = 0. \tag{17}$$

S'il en est ainsi, les noyaux $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots$ itérés de N seront orthogonaux aux noyaux $\mathrm{N}'_1, \mathrm{N}'_2, \ldots$ itérés de N'.

En effet considérons par exemple l'expression

$$\int \mathrm{N}_\mu(xt)\,\mathrm{N}'_\nu(ts)\,dt.$$

Substituant pour $\mathrm{N}_\mu(xt)$ et $\mathrm{N}'_\nu(ts)$ leurs valeurs

$$\mathrm{N}_\mu(xt) = \int \mathrm{N}_{\mu-1}(xt_1)\,\mathrm{N}(t_1 t)\,dt_1,$$

$$\mathrm{N}'_\nu(ts) = \int \mathrm{N}'_{\nu-1}(t_2 s)\,\mathrm{N}'(tt_2)\,dt_2.$$

On aura une intégrale triple; et en commençant l'intégration

par la variable t on aura un résultat nul en vertu de l'identité (16). Le noyau $N + N'$ aura pour itérés successifs $N_1 + N'_1$, $N_2 + N'_2$, ... En effet $N(xs) + N'(xs)$ a pour premier itéré

$$\begin{aligned}\int [N(xt) + N'(xt)] [N(ts) + N'(ts)] \, dt \\ = N_1(xs) + N_2(xs) + \int N(xt) N'(ts) \, dt \\ + \int N'(xt) N(ts) \, dt.\end{aligned}$$

Mais les deux intégrales sont nulles en vertu de l'orthogonalité admise.

La même démonstration s'appliquerait de proche en proche à tous les itérés successifs.

Le résolvant

$$R(xs\lambda) = N(xs) - \lambda N_1(xs) + \ldots$$

et le logarithme de la fonction caractéristique

$$\log D(\lambda) = \int \left[\lambda N(ss) - \frac{\lambda^2}{2} N_1(ss) + \ldots \right] ds$$

s'exprimant linéairement au moyen de N et de ses itérés on en conclut : 1° que les résolvants R, R' respectivement correspondants à N, N' sont orthogonaux; 2° que le noyau de $N + N'$ a pour résolvant $R + R'$ et une fonction caractéristique ayant pour logarithme

$$\log D(\lambda) + \log D'(\lambda)$$

et qui, par suite, sera égale à $D(\lambda) \, D'(\lambda)$.

Réciproquement, si deux résolvants $R(xs\lambda)$, $R'(xs\lambda)$ sont orthogonaux, les noyaux correspondants $R(xs0)$, $R'(xs0)$ le seront évidemment.

10. Ces préliminaires posés, considérons un résolvant $R(xs\lambda)$ dont le dénominateur $D(\lambda)$ admette des zéros. Soit λ_1 l'un d'eux, r son ordre de multiplicité. Le développement de $R(xs\lambda)$ suivant les puissances de $\lambda - \lambda_1$ se composera d'une partie fractionnaire qu'on peut écrire sous la forme

$$F(xs\lambda) = \sum_1^r (-\lambda_1)^{p-1} \frac{f_p(xs)}{(\lambda - \lambda_1)^p},$$

et d'une partie entière

$$G(xs\lambda) = \sum_0^\infty g_m(xs)(\lambda - \lambda_1)^m.$$

Substituons ces expressions dans l'équation (10) des résolvants

$$(\mu - \lambda)\int R(xt\lambda)\,R(ts\mu)\,dt = R(xs\lambda) - R(xs\mu),$$

posons pour abréger

$$\lambda = \lambda_1 + h, \qquad \mu = \lambda_1 + k$$

et divisons par $k - h$; il viendra

$$\begin{aligned}
&\int \left[\sum_1^r \frac{(-\lambda_1)^{p-1} f_p(xt)}{h^p} + \sum_0^\infty g_m(xt)h^m\right] \\
&\quad\times \left[\sum_1^r \frac{(-\lambda_1)^{q-1} f_q(ts)}{k^q} + \sum_0 g_n(ts)k^n\right] ds \\
&= \frac{1}{k-h}\left[\sum_1^r (-\lambda_1)^{\rho-1} f_\rho(xs)\left(\frac{1}{h^\rho} - \frac{1}{k^\rho}\right) + \sum_0^\infty g_\nu(xs)(h^\nu - k^\nu)\right] \\
&= \sum_1^r (-\lambda_1)^{\rho-1} f_\rho(xs)\left(\frac{1}{h^\rho k} + \frac{1}{h^{\rho-1}k^2} + \ldots + \frac{1}{hk^\rho}\right) \\
&\quad - \sum_0^\infty g_\nu(xs)\,[h^{\nu-1} + h^{\nu-2}k + \ldots + k^{\nu-1}].
\end{aligned}$$

Identifiant les coefficients des diverses puissances de h et de k, nous obtenons les relations suivantes :

$$(18)\quad \begin{cases} \displaystyle\int f_p(xt) f_q(ts)\,dt = f_{p+q-1}(xs), & \text{si } p + q - 1 \overline{\overline{<}}\, r, \\ \displaystyle\int f_p(xt) f_q(ts)\,dt = 0, & \text{si } p + q - 1 > r; \end{cases}$$

$$(19)\quad \int g_m(xt)\,g_n(ts)\,dt = -\,g_{m+n+1}(xs);$$

$$(20)\quad \int f_p(xt)\,g_m(ts)\,dt = \int g_m(xt) f_p(ts)\,dt = 0.$$

Les conditions (18) et (19) expriment que les fonctions $F(xs\lambda)$ et $G(xs\lambda)$ considérées isolément sont des résolvants. Les conditions (20) expriment que les fonctions f sont orthogonales aux fonctions g; par suite, F et G seront orthogonaux.

La fonction caractéristique $D(\lambda)$, correspondant au noyau R, est le produit des fonctions caractéristiques $\Delta(\lambda)$ et $\Delta'(\lambda)$ qui correspondent respectivement aux résolvants partiels F et G. La première n'a d'autre zéro que λ_1, car c'est le seul pôle de F; la seconde n'admet plus ce zéro, puisqu'il n'est pas un pôle de G.

11. Poursuivons l'étude du résolvant F et de son noyau

$$F(xs0) = -\frac{1}{\lambda_1}\sum_1^r f_p(xs),$$

les fonctions f étant assujetties aux conditions (18) que nous allons discuter.

On aura d'abord, pour $p = q = 1$,

$$\int f_1(xt)f_1(ts) = f_1(xs). \tag{21}$$

Puis, en posant $p = 2$ et $q = 1, 2, \ldots, r$ ou réciproquement,

$$f_2(xs) = \int f_2(xt)f_1(ts)\,dt = \int f_1(xt)f_2(ts)\,dt; \tag{22}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f_3(xs) = \displaystyle\int f_2(xt)f_2(ts)\,dt, \\ f_4(xs) = \displaystyle\int f_3(xt)f_2(ts)\,dt = \int f_2(xt)f_3(ts)\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right. \tag{23}$$

$$0 = \int f_r(xt)f_2(ts)\,dt = \int f_2(xt)f_r(ts)\,dt. \tag{24}$$

Les autres relations sont des conséquences de celles-ci. Évaluons en effet l'intégrale

$$\int f_p(xt)f_q(ts)\,dt,$$

en supposant p, par exemple, > 2.

On aura par hypothèse

$$f_p(xt) = \int f_{p-1}(xu)\, f_2(ut)\, du.$$

Substituant cette valeur, on a l'intégrale double

$$\int\int f_{p-1}(xu)\, f_2(ut)\, f_q(ts)\, dt\, du.$$

Mais par hypothèse

$$\int f_2(ut)\, f_q(ts)\, du = f_{q+1}(us).$$

L'intégrale cherchée est donc égale à

$$\int f_{p-1}(xu)\, f_{q+1}(us)\, du = \int f_{p-1}(xt)\, f_{q+1}(ts)\, dt.$$

Répétant cette opération, on finira par arriver à l'intégrale

$$\int f_2(xt)\, f_{p+q-2}(ts)\, dt$$

qui, par hypothèse, est égale à $f_{p+q-1}(xs)$.

Les relations (23) expriment que $f_3, \ldots, f_r$ sont les itérées successives de f_2. F sera donc connu si l'on détermine f_1, f_2 par les relations (21), (22), (24) dont la dernière exprime que l'itérée $(r-1)^{\text{ième}}$ de f_2 est nulle.

12. Considérons d'abord la condition (21). Elle exprime que la fonction f_1 se reproduit par itération, Si donc nous la considérons comme un noyau, la fonction caractéristique correspondante $D(\lambda)$ sera donnée par la formule

$$\begin{aligned}\log D(\lambda) &= \int \left[\lambda f_1(ss) - \frac{\lambda^2}{2} f_1(ss) + \ldots\right] ds \\ &= \log(1+\lambda) \int f_1(ss)\, ds,\end{aligned}$$

d'où en posant, pour abréger,

$$\int f_1(ss)\, ds = m,$$

$$D(\lambda) = (1+\lambda)^m;$$

$D(\lambda)$ étant une fonction entière, m devra être un entier non négatif.

Soit x_1, s_1 un système de valeurs qui n'annule pas $f_1(xs)$. Posons

$$\varphi_1 x \psi_1 s = \frac{f_1(x_1 s) f_1(x s_1)}{f_1(x_1 s_1)},$$

$$f_1(xs) = \varphi_1(x)\psi_1(s) + f'(xs).$$

Si $f_1(xs)$ satisfait à la relation (21), $f'(xs)$ y satisfera également.

On a en effet

$$\int f'(xt) f'(ts)\, dt$$
$$= \int \left[f_1(xt) - \frac{f_1(x_1 t) f_1(x s_1)}{f_1(x_1 s_1)} \right] \left[f_1(ts) - \frac{f_1(x_1 s) f_1(t s_1)}{f_1(x_1 s_1)} \right] dt$$

ou, d'après la propriété (21) de la fonction f_1,

$$f_1(xs) - \frac{f_1(x_1 s) f_1(x s_1)}{f_1(x_1 s_1)} - \frac{f_1(x_1 s) f_1(x s_1)}{f_1(x_1 s_1)}$$
$$+ \frac{f_1(x s_1) f_1(x_1 s) f_1(x_1 s_1)}{f_1^2(x_1 s_1)}$$
$$= f_1(xs) - \frac{f_1(x_1 s) f_1(x s_1)}{f_1(x_1 s_1)} = f'(xs).$$

On a, d'autre part,

$$\int f'(ss)\, ds = \int f_1(ss)\, ds - \int \frac{f_1(x_1 s) f_1(s s_1)}{j(x_1 s_1)} ds = m - 1.$$

On pourra de même mettre $f'(xs)$ sous la forme

$$\varphi_2(x)\psi_2(s) + f''(xs),$$

où f'' est une fonction satisfaisant encore à la relation (21), mais telle qu'on ait

$$\int f''(ss)\, ds = m - 2.$$

Répétant cette réduction, on aura finalement

$$f_1(xs) = \varphi_1(x)\psi_1(s) + \ldots + \varphi_m(x)\psi_m(s) + \chi(xs).$$

Mais le reste $\chi(xs)$ est identiquement nul; car autrement on

en déduirait l'existence d'une nouvelle fonction pour laquelle l'exposant analogue à m serait négatif.

On aura donc finalement

$$f_1(xs) = \sum_1^m \varphi_i(x)\,\psi_i(s). \tag{25}$$

13. Substituons cette expression dans la formule (21); il viendra

$$\int \Sigma\,\varphi_i(x)\,\psi_i(t)\,\Sigma\,\varphi_k(t)\,\psi_k(s)\,dt = \Sigma\,\varphi_i(x)\,\psi_i(s),$$

d'où

$$\int \varphi_k(t)\,\psi_i(t)\,dt = 0 \quad \text{si} \quad k \gtrless i,$$

$$\int \varphi_i\,(t)\,\psi_i(t)\,dt = 1.$$

Les fonctions φ et ψ forment donc un système biorthogonal.

14. Si la fonction $f_1(xs)$ est orthogonale à un noyau $N(xs)$, on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\int \Sigma\,\varphi_i(x)\,\psi_i(t)\,N(ts)\,dt = 0, \\ &\int \Sigma\,\varphi_i(t)\,\psi_i(x)\,N(st)\,dt = 0. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Les fonctions $\varphi_i(x)$ étant linéairement indépendantes, on déduit de la première de ces relations que l'on a, pour chaque valeur de i,

$$\int \psi_i(t)\,N(ts[\,dt = 0. \tag{27}$$

La seconde donne de même

$$\int \varphi_i(t)\,N(st)\,dt = 0. \tag{28}$$

Soit

$$A(xs) = \Sigma\,a_{ik}\,\varphi_i(x)\,\psi_k(s)$$

une expression quelconque bilinéaire par rapport aux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(s)$. On déduit immédiatement des relations précédentes que $A(xs)$ est orthogonale à $N(xs)$.

Soit d'ailleurs

$$B(xs) = \Sigma b_{ik}\,\varphi_i(x)\,\psi_k(s)$$

une fonction bilinéaire analogue à $A(xs)$; les fonctions

$$\int A(xt)\,B(ts)\,dt, \qquad \int A(ts)\,B(xt)\,dt$$

auront encore la même forme.

On a en effet, par exemple,

$$\int A(xt)\,B(ts)\,dt = \int \Sigma a_{ik}\,\varphi_i(x)\,\psi_k(t)\,\Sigma b_{i'k'}\,\varphi_{i'}(t)\,\psi_{k'}(s)\,dt$$

$$= \sum_{i,k'} c_{ik'}\,\varphi_i(x)\,\psi_{k'}(s)$$

en posant pour abréger

$$c_{ik'} = \sum_{i',k} a_{ik} b_{i'k'} \int \psi_k(t)\,\varphi_{i'}(t)\,dt$$

ou en tenant compte de la biorthogonalité

$$c_{ik'} = \sum_k a_{ik}\,b_{kk'}.$$

Cette formule montre que le déterminant des coefficients $c_{ik'}$ est le produit des déterminants δ, δ' des a_{ik} et des b_{ik}.

En particulier, si δ n'est pas nul, soient $A_1(xs)$, $A_2(xs)$, ... les itérés successifs de $A(xs)$. Aucun d'eux ne pourra s'annuler identiquement, car ce sont des fonctions bilinéaires des φ et des ψ où les déterminants des coefficients sont respectivement δ^2, δ^3, ...

15. La fonction $f_2(xs)$ satisfait aux deux relations (22)

$$f_2(xs) = \int f_2(xt)\,f_1(ts)\,dt = \int f_1(xt)\,f_2(ts)\,dt.$$

En y substituant pour f_1 sa valeur déjà trouvée, ces relations deviennent

$$f_2(xs) = \Sigma\,\psi_i(s) \int f_2(xt)\,\varphi_i(t)\,dt,$$

$$f_2(xs) = \Sigma\,\varphi_i(x) \int f_2(ts)\,\psi_i(t)\,dt$$

et montrent que $f_2(xs)$ est bilinéaire par rapport aux fonctions φ et ψ. Il en sera de même de ses itérées successives $f_3(x, s)$ et enfin du résolvant $F(xs\lambda)$ et de son noyau $F(xso)$.

Soit donc

$$f_2(xs) = \Sigma\, a_{ik}\, \varphi_i(x)\, \psi_k(s).$$

Son $(r-1)^{\text{ième}}$ itéré devant s'annuler, le déterminant δ des coefficients a_{ik} doit être nul.

16. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \Sigma\, b_{ik}\, \Phi_k(x) \\ \Psi_i(s) &= \Sigma\, b_{ki}\, \psi_k(s) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

On aura

$$\Sigma\, \varphi_i(x)\, \psi_i(s) = \Sigma\, \Phi_i(x)\, \Psi_i(s),$$

les fonctions Φ et Ψ formant un nouveau système bior thogonal; et $f_2(xs)$ deviendra une fonction bilinéaire des $\Phi(x)$ et des $\Psi(s)$. On peut se proposer de profiter de l'indétermination des b_{ik} de manière à simplifier le plus possible cette nouvelle expression.

C'est un problème connu d'Algèbre, dont nous nous bornerons à rappeler la solution.

Si tous les mineurs de δ ne sont pas nuls, on pourra donner à f_1, f_2 les formes suivantes :

$$f_1(xs) = \sum_1^m \Phi_i(x)\, \Psi_i(s),$$

$$f_2(xs) = \sum_1^{m-1} \Phi_i(x)\, \Psi_{i+1}(s).$$

On aura ensuite

$$f_3(xs) = \int \Sigma\, \Phi_i(x)\, \Psi_{i+1}(t)\, \Sigma\, \Phi_k(t)\, \Psi_{k+1}(s)\, dt,$$

expression qui, en vertu de la biorthogonalité des Φ et des Ψ, se réduit à

$$f_3(xs) = \sum_1^{m-2} \Phi_i(x)\, \Psi_{i+2}(s).$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} f_4(xs) &= \sum_{1}^{m-3} \Phi_i(x)\,\Psi_{i+3}(s), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(xs) &= \Phi_1(x)\,\Psi_m(s), \\ f_{m+1}(xs) &= 0; \end{aligned}$$

m est donc égal à r.

Par la substitution de ces valeurs dans l'expression du résolvant, il devient

$$F(xs\lambda) = \sum_{i,k} (-\lambda_1)^{k-i} \frac{\Phi_i(x)\,\Psi_k(s)}{(\lambda-\lambda_1)^{k-i+1}} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, r \\ k = i, i+1, \ldots, r \end{pmatrix}$$

et le noyau correspondant sera

$$(29)\qquad F(xs0) = \frac{-1}{\lambda_1} \sum_{i,k} \Phi_i(x)\,\Psi_k(s) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, r \\ k = i, i+1, \ldots, r \end{pmatrix}.$$

17. Si tous les mineurs de δ sont nuls, on pourra trouver un nombre ρ moindre que r tel qu'ayant toujours

$$f_1(xs) = \sum_{1}^{\rho} \Phi_i(x)\,\Psi_i(s) + \sum_{\rho+1}^{r} \Phi_i(x)\,\Psi_i(s) = f_1^0(xs) + f_1'(xs),$$

on ait

$$f_2(xs) = f_2^0(xs) + f_2'(xs),$$

f_2^0 étant égal à $\sum_{1}^{\rho-1} \Phi_i(x)\,\Psi_{i+1}(s)$ et $f_2'(xs)$ une fonction bilinéaire de celles des fonctions Φ, Ψ dont l'indice est $> \rho$.

Mais deux fonctions $\Phi_i(x)\,\Psi_k(s)$ et $\Phi_{i'}(x)\,\Psi_{k'}(s)$ étant évidemment orthogonales lorsqu'elles n'ont aucun indice commun, $f_2^0(xs)$ et $f_2'(xs)$ le seront. Les itérés successifs de $f(xs)$ s'obtiendront en ajoutant ceux de $f_2^0(xs)$ et de $f_2'(xs)$. Le noyau $F(xs0)$ dérivé de f_1 et de f_2 se trouve donc décomposé en une somme de deux noyaux partiels $N_0(xs)$, $N'(xs)$ orthogonaux entre eux.

Le premier, $F^0(xs0)$, dérivé de $f_1^0(xs)$ et $f_2^0(xs)$, aura

la forme (29). Si $\rho = 1$, il se réduira à un seul terme $\frac{-1}{\lambda_1}\Phi_1(x)\Psi_1(s)$.

On doit d'ailleurs arriver dans la suite des itérés de $f'_2(xs)$ à un terme nul. Le déterminant des coefficients de cette forme bilinéaire sera donc nul. Répétant les raisonnements précédents, on pourra mettre $N'(xs)$ sous une forme analogue à (29) ou le partager en deux noyaux partiels $N_1(xs)$, $N''(xs)$ dont le premier sera de cette forme. On poursuivra cette réduction jusqu'à ce qu'on ait décomposé $F(xs)$ en une somme de noyaux partiels tous de la forme (29) et orthogonaux entre eux.

S'ils contiennent respectivement ρ, ρ_1, ... fonctions Φ (et autant de fonctions Ψ), on aura évidemment $m = \rho + \rho_1 + \ldots$. Leurs fonctions caractéristiques $\Delta^0(\lambda)$, $\Delta^1(\lambda)$ ... étant respectivement $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\rho}$, $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{\rho_1}$, ..., celle du noyau total sera $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^{m}$. Enfin l'ordre du pôle λ_1 par rapport au résolvant sera égal au plus grand des nombres ρ.

M. *Goursat*, à qui l'on doit l'analyse précédente ([1]), a donné aux combinaisons linéaires des fonctions Φ le nom de *fonctions principales*.

18. Nous avons vu que l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) + \lambda \int N(xs)\varphi(s)\,ds = f(x)$$

admet une solution unique si λ n'est pas un zéro de la fonction caractéristique $D(\lambda)$. Si $f(x)$ est nul, zéro est une solution évidente, mais ce sera la seule.

Il n'en est pas de même si λ est un zéro de $D(\lambda)$, tel que λ_1.

Nous avons vu que dans ce cas $N(xs)$ est la somme de deux noyaux orthogonaux $F(xs0)$ et $G(xs0)$ tels que la fonction caractéristique du second n'admette plus le zéro λ_1.

Considérons d'abord l'équation sans second membre

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int [F(xs0) + G(xs0)]\varphi(s)\,ds = 0. \tag{30}$$

([1]) M. *Heywood* a obtenu de son côté les mêmes résultats.

Elle est équivalente à l'équation plus simple

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int F(xso)\,\varphi(s)\,ds = 0. \tag{31}$$

Soit en effet $\varphi(x)$ une solution de l'équation (30).

On aura, en posant $\lambda_1 \int F(xso)\,\varphi(s)\,ds = -f(x)$,

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int G(xso)\,\varphi(s)\,ds = f(x),$$

équation dont la solution sera

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x) - \lambda_1 \int G(xs\lambda_1) f(s)\,ds \\ &= -\lambda_1 \int F(xso)\,\varphi(s)\,ds + \lambda_1^2 \int\int G(xs\lambda_1)\,F(sto)\,\varphi(t)\,ds\,dt.\end{aligned}$$

Mais l'intégrale double est nulle, car G et F étant orthogonaux, l'intégration par rapport à s, effectuée la première, donnera un résultat nul. On voit donc que $\varphi(x)$ satisfait à l'équation (31).

Réciproquement, soit $\varphi(x)$ une solution de (31). Elle satisfera à l'équation (30), car on aura

$$\int G(xso)\,\varphi(s)\,ds = -\lambda_1 \int\int G(xso)\,F(sto)\,\varphi(t)\,dt\,ds = 0$$

par suite de l'orthogonalité de G et de F.

Cherchons donc les solutions de l'équation (31); $F(xso)$ étant linéaire par rapport aux fonctions $\Phi(x)$, le résultat de sa substitution dans l'intégrale

$$\int F(xso)\,\varphi(s)\,ds$$

sera de même forme, quelle que soit la fonction φ. On ne pourra donc avoir de solution de l'équation autrement que de la forme

$$\varphi(x) = \Sigma\, C_i\, \Phi_i(x).$$

19. Cherchons donc le résultat de la substitution d'une expression de cette forme dans le premier membre de l'équa-

tion

$$\varphi x + \lambda_1 \int F(xs\text{o})\,\varphi(s)\,ds = \text{o}.$$

Supposons que $F(xs\text{o})$ puisse se décomposer en plusieurs noyaux partiels, $N^0(xs)$, $N^1(xs)$, ..., contenant respectivement les fonctions $\Phi_1^0, \ldots, \Phi_\rho^0$; $\Phi_1^1, \ldots, \Phi_{\rho_1}^1$; ..., et substituons la fonction

$$\varphi = \sum_1^\rho C_l^0 \Phi_l^0 + \sum_1^{\rho_1} C_l^1 \Phi_l^1 + \ldots.$$

Le résultat de la substitution sera

$$\sum_1^\rho C_l^0 \Phi_l^0(x) + \sum_1^{\rho_1} C_l^1 \Phi_l^1(x) + \ldots$$

$$+ \lambda_1 \int [N^0(xs) + N^1(xs) + \ldots] \left[\sum_1^\rho C_l^0 \Phi_l^0(s) + \sum_1^{\rho_1} C_l^1 \Phi_l^1(s) + \ldots \right] ds.$$

Mais en vertu de l'orthogonalité des noyaux partiels les intégrales

$$\int N^0(xs)\,\Phi_l^1(s)\,ds, \quad \int N^1(xs)\,\Phi_l^0(s)\,ds, \quad \ldots$$

sont nulles. Il ne reste donc qu'à évaluer

$$\sum_1^\rho C_l^0 \Phi_l^0(x) + \lambda_1 \int N^0(xs) \sum_1^\rho C_l^0 \Phi_l^0(s)\,ds$$

et les expressions analogues relatives aux autres noyaux partiels.

Remplaçons $N^0(xs)$ par son expression (29), nous aurons à évaluer l'expression

$$\sum C_l^0 \Phi_l^0(x) - \int \sum_{i,k} \Phi_i^0(x)\,\Psi_k^0(s) \sum_l C_l^0 \Phi_l^0(s)\,ds,$$

où

$$k = i, i+1, \ldots.$$

Mais $\int \Psi_k^0(s)\,\Phi_l^0(s)\,ds$ est nul si $l \gtrless k$, égal à 1 si $l = k$. On

obtiendra donc comme résultat

$$\Sigma\, C_k^0 \Phi_k^0(x) - \Sigma\, C_k^0 \Phi_i^0(x)$$

ou

$$(C_2^0 + \ldots + C_\rho^0)\,\Phi_1^0(x) - (C_3^0 + \ldots + C_\rho^0)\,\Phi_2^0(x) - \ldots - C_\rho^0\,\Phi_{\rho-1}^0(x).$$

C'est, comme on le voit, une fonction linéaire de $\Phi_1^0(x), \ldots, \Phi_{\rho-1}^0(x)$ dont les coefficients peuvent prendre des valeurs quelconques par un choix convenable des constantes $C_2^0, \ldots, C_\rho^0$. Elle s'annule avec ces constantes et quel que soit C_1^0.

L'équation sans second membre admet donc comme solution les premières fonctions $\Phi_1(x)$ de chacun des noyaux partiels, et sa solution générale est une fonction linéaire de ces *solutions fondamentales*.

20. Si dans l'expression du noyau $N(xs)$ de l'équation sans second membre on échange x et s, on aura une nouvelle équation

$$\varphi(x) + \int N(sx)\,\varphi(s)\,ds = 0$$

associée de la première. Son résolvant $R(sx\lambda)$ se déduira évidemment de $R(xs\lambda)$ par le même échange entre les variables. La fonction caractéristique $D(\lambda)$ ne sera pas altérée. La partie du noyau correspondant à un de ses zéros λ_1 sera la même et sa décomposition en noyaux partiels sera la même. Les fonctions principales seront les $\Psi(x)$; mais dans chaque noyau partiel elles devront être prises dans un ordre inverse de celui qu'on avait donné aux fonctions $\Phi(x)$; de telle sorte que les solutions fondamentales de l'équation

$$\varphi(x) + \int N(sx)\,\varphi(s)\,ds = 0$$

seront les dernières de chaque groupe, à savoir $\Psi_\rho^0(x)$, $\Psi_{\rho_1}^1(x)$, ...

Pour mettre ce parallélisme en évidence, il suffit de remarquer que l'expression (29) du noyau partiel ne change pas par l'échange simultané de

$$x, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\rho, \quad \Psi_1, \quad \Psi_2, \quad \ldots, \quad \Psi_\rho$$

avec

$$s,\quad \Psi_\rho,\quad \Psi_{\rho-1},\quad \ldots,\quad \Psi_1,\quad \Phi_\rho,\quad \Phi_{\rho-1},\quad \ldots,\quad \Phi_1.$$

21. Revenons à l'équation à second membre

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int N(xs)\,\varphi(s)\,ds = f(x). \tag{32}$$

Certaines conditions seront nécessaires pour qu elle admette des solutions.

Soit en effet $\psi(x)$ une solution quelconque de l'équation associée

$$\psi(x) + \lambda_1 \int N(sx)\,\psi(s)\,ds = 0.$$

Multiplions la proposée par $\psi(x)$ et intégrons; il viendra

$$\int \psi(x)\,\varphi(x)\,dx + \lambda_1 \int\int N(xs)\,\varphi(s)\psi(x)\,dx\,ds = \int f(x)\psi(x)\,dx.$$

Mais on a par hypothèse

$$\lambda_1 \int N(xs)\,\psi(x)\,dx = -\,\psi(s).$$

Le premier membre se réduit donc à

$$\int \psi(x)\,\varphi(x)\,dx - \int \psi(s)\,\varphi(s)\,ds = 0,$$

et il reste la condition

$$\int f(x)\,\psi(x)\,dx = 0.$$

On aura autant de conditions distinctes que l'équation associée a de solutions fondamentales.

22. Nous allons démontrer que, si ces conditions sont satisfaites, l'équation admet une solution.

Mettons en effet en évidence la division du noyau en deux parties

$$F(xs0) + G(xs0).$$

L'équation

$$\pi(x) + \lambda_1 \int G(xso)\,\pi(s)\,ds = f(x) \tag{33}$$

admet une solution, λ_1 n'étant pas racine de la fonction caractéristique pour le noyau **G**.

L'équation (32) admettra une solution de la forme

$$\pi(x) + \Sigma C_i \Phi_i(x).$$

Substituons en effet cette expression dans l'équation et supprimons les termes qui se détruisent en vertu de l'équation (33). Le second membre disparaît et le premier se réduit à

$$\Sigma C_i \Phi_i(x) + \lambda_1 \int F(xso)\,\pi(s)\,ds$$
$$+ \lambda_1 \int [F(xso) + G(xso)]\,\Sigma C_i \Phi_i(s)\,ds.$$

Or $F(xso)$ est une fonction linéaire des fonctions $\boldsymbol{\Phi}(x)$. Il en sera de même pour l'intégrale

$$\lambda_1 \int F(xso)\,\pi(s)\,ds.$$

Mais en vertu de nos hypothèses les dernières fonctions $\boldsymbol{\Phi}^0_\rho(x)$, $\boldsymbol{\Phi}^1_{\rho_1}(x)$, ... n'y figureront pas.

En effet, $F(xso)$ ne contient $\boldsymbol{\Phi}^0_\rho$ par exemple que dans un seul terme $\boldsymbol{\Phi}^0_\rho(x)\,\boldsymbol{\Psi}^0_\rho(s)$; il ne figurera donc dans l'intégrale qu'avec le coefficient

$$\int \Psi^0_\rho(s)\,\pi(s)\,ds$$

ou, en remplaçant $\pi(s)$ par sa valeur,

$$f(s) - \lambda_1 \int G(sto)\,\pi(t)\,dt,$$

$$\int \Psi^0_\rho(s) f(s)\,ds - \lambda_1 \int\int \Psi^0_\rho(s)\,G(sto)\,\pi(t)\,ds\,dt.$$

Le premier terme est nul par hypothèse. On voit que le second l'est également en commençant par l'intégration relative à s.

L'intégrale

$$\int G(xso)\Sigma C_i \Phi_i(s)\, ds$$

a tous ses termes nuls. Reste à évaluer l'expression

$$\Sigma C_i \Phi_i(x) + \lambda_1 \int F(xso)\Sigma C_i \Phi_i(s)\, ds.$$

Nous avons vu qu'elle représente une fonction linéaire des $\Phi_i(x)$ [à l'exception de $\Phi_\rho^0(x)$, $\Phi_{\rho_1}^1(x)$, ...] dont les coefficients peuvent prendre des valeurs quelconques par un choix convenable des C. Ceux-ci pourront être déterminés de manière à détruire les termes analogues provenant de la substitution de $\pi(x)$.

Ayant ainsi trouvé une solution de l'équation proposée, on aura sa solution générale en lui ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre.

23. Le cas où le noyau $N(xs)$ est symétrique en x et s, étudié spécialement par MM. *Hilbert* et *Schmidt*, présente des particularités intéressantes.

Les itérés successifs du noyau (et par suite le résolvant) sont également symétriques.

En effet, soit

$$N_p(xs) = \int\int \ldots N(xt_1)N(t_1t_2)\ldots N(t_ps)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_p$$

l'un de ses itérés. Permutant les variables dans chaque facteur et changeant les variables d'intégration $t_1, \ldots, t_p$ en $t_p, \ldots, t_1$, on obtiendra le noyau $N_p(sx)$.

Le noyau étant supposé réel, aucun de ces itérés n'est identiquement nul.

Supposons en effet que $N_p(xs)$ fût nul,

$$N_{p+1}(xs) = \int N_p(xt)N(ts)\, dt$$

le serait. Or, soit $N_{2p+1}(xs)$ le premier itéré de rang impair qui s'annule. La relation

$$N_{2p+1}(xs) = \int N_p(xt)N_p(ts)\, dt$$

donnerait, en raison de la symétrie,

$$N_{2p+1}(xs) = \int N_p(xt)\,N_p(st)\,dt,$$

et pour $x = s$

$$N_{2p+1}(xx) = \int N_p^2(xt)\,dt,$$

ce qui ne peut avoir lieu que si $N_p(xt)$ est nul; mais alors

$$N_{p+1}(xs) = \int N_p(xt)\,N(ts)\,dt$$

le serait aussi. Or l'un de ces deux noyaux a un indice impair et moindre que $2p+1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cette démonstration montre même qu'aucune des fonctions $N_p(ss)$ n'est identiquement nulle si $N(ss)$ ne l'est pas.

24. La série qui donne $\log D(\lambda)$

$$\log D(\lambda) = \int\left[\lambda\,N(ss) - \frac{\lambda^2}{2}N_1(ss) + \frac{\lambda^3}{3}N_2(ss) - \ldots\right]ds$$

n'est pas une fonction entière.

Pour le démontrer, considérons l'intégrale

$$\begin{aligned}
&\int\int [N_{p-1}(st) + \mu\,N_{p+1}(st)]^2\,ds\,dt\\
&= \int\int N_{p-1}^2(st)\,ds\,dt\\
&\quad + 2\mu\int\int N_{p-1}(st)\,N_{p+1}(st)\,ds\,dt\\
&\quad + \mu^2\int\int N_{p+1}^2(st)\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

Cette expression ne pouvant être négative, quel que soit μ, on aura l'inégalité de *Schwartz* :

$$\begin{aligned}
&\left[\int\int N_{p-1}(st)\,N_{p+1}(st)\,ds\,dt\right]^2\\
&\leqq \int\int N_{p-1}^2(st)\,ds\,dt \int\int N_{p+1}^2(st)\,ds\,dt.
\end{aligned}$$

Mais on a, à cause de la symétrie des noyaux,

$$\int N_{p-1}(st)\, N_{p+1}(st)\, dt = \int N_{p-1}(st)\, N_{p+1}(ts)\, dt = N_{2p+1}(ss),$$

et de même

$$\int N_{p-1}^2(st)\, dt = \int N_{p-1}(st)\, N_{p-1}(ts)\, dt = N_{2p-1}(ss),$$

$$\int N_{p+1}^2(st)\, dt = \int N_{p+1}(st)\, N_{p+1}(ts)\, dt = N_{2p+3}(ss).$$

Si donc nous posons pour abréger

$$\int N_p(ss)\, ds = U_p,$$

l'inégalité précédente deviendra

$$U_{2p+1}^2 \overline{\overline{<}} U_{2p-1}\, U_{2p+3}$$

ou

$$\frac{U_{2p+3}}{U_{2p+1}} \overline{\overline{>}} \frac{U_{2p+1}}{U_{2p-1}} \overline{\overline{>}} \cdots \overline{\overline{>}} \frac{U_3}{U_1}.$$

Or, si dans la série qui donne $\log D(\lambda)$ on considère le rapport des modules des deux termes à exposants pairs consécutifs, à savoir

$$-\frac{\lambda^{2p}\, U_{2p-1}}{2p} \quad \text{et} \quad -\frac{\lambda^{2p+2}\, U_{2p+1}}{2p+2},$$

le rapport de leurs modules sera au moins égal à

$$\frac{2p}{2p+2} |\lambda^2| \frac{U_{2p+1}}{U_{2p-1}} \quad \text{et } a\ fortiori \text{ à} \quad \frac{2p}{2p+2} |\lambda^2| \frac{U_3}{U_1}.$$

Ces modules iront donc en croissant lorsque p sera suffisamment grand dès que $|\lambda|$ sera plus grand que $\sqrt{\frac{U_1}{U_3}}$. La série qui donne $\log D(\lambda)$ sera dès lors divergente, ce qui ne pourrait avoir lieu si $D(\lambda)$ n'avait pas de zéro.

25. Les zéros de $D(\lambda)$ sont des pôles du résolvant. Mais tous *ces pôles sont simples.*

Supposons en effet qu'on eût un pôle multiple λ_1. Aux envi-

rons de ce point on aurait pour le résolvant $R(xs\lambda)$ un développement de la forme

$$R(xs\lambda) = \frac{(-\lambda_1)^{r-1} f_r(xs)}{(\lambda-\lambda_1)^r} + \frac{(-\lambda_1)^{r-2} f_{r-1}(xs)}{(\lambda-\lambda_1)^{r-1}} + \ldots + G(xs\lambda),$$

r étant > 1 et $f_r(xs)$ différent de zéro. Mais de cette hypothèse résulte une contradiction.

Remarquons tout d'abord que de la symétrie du résolvant par rapport à x et s résulte celle des fonctions f.

Substituons la valeur de R dans l'équation

$$R(xs\lambda) = N(xs) - \lambda \int N(xt) R(ts\lambda)\, dt,$$

qui détermine le résolvant, et remplaçons λ par $\lambda_1 + h$.

L'identification des termes de degré $-r$ et $-r+1$ donnera les deux équations

$$f_r(xs) = -\lambda_1 \int N(xt) f_r(ts)\, dt,$$

$$f_{r-1}(xs) = -\lambda_1 \int N(xt) f_{r-1}(ts)\, dt - \int N(xt) f_r(ts)\, dt.$$

Multiplions la première équation par $f_{r-1}(xs)$, la seconde par $f_r(xs)$, retranchons et intégrons par rapport à x; il viendra

$$\begin{aligned} -\lambda_1 &\int\int N(xt) f_r(ts) f_{r-1}(xs)\, dt\, dx \\ +\lambda_1 &\int\int N(xt) f_{r-1}(ts) f_r(xs)\, dt\, dx \\ + &\int\int N(xt) f_r(ts) f_r(xs)\, dt\, dx = 0. \end{aligned}$$

Les deux premières intégrales se détruisent, car elles prennent la même forme si, après avoir remplacé dans la seconde $N(xt)$ par $N(tx)$ qui lui est égal en vertu de la symétrie, on échange les deux variables d'intégration.

Dans la troisième intégrale, effectuons l'intégration par rapport à t; elle se change en

$$-\frac{1}{\lambda_1} \int f_r^2(xs)\, dx,$$

expression qui ne peut être nulle que si $f_r(xs)$ est identiquement nul, contrairement à l'hypothèse.

26. La partie du noyau correspondante au pôle λ_1 sera donc

$$-\sum \frac{\Phi_i(x)\,\Psi_i(s)}{\lambda_1},$$

les fonctions Φ étant des solutions fondamentales de l'équation homogène

$$\varphi(x)+\int \mathrm{N}(xs)\,\varphi(s)\,ds=0,$$

et les Ψ des solutions fondamentales de l'équation associée.

Mais ces deux équations associées étant identiques, le système de leurs solutions fondamentales est le même. Les fonctions Ψ doivent donc être des fonctions linéaires des Φ. En les remplaçant par leurs valeurs, l'expression $\Sigma\,\Phi_i(x)\,\Psi_i(s)$ deviendra une fonction bilinéaire $\mathrm{B}_1(xs)$ des fonctions $\Phi(x)$ et $\Phi(s)$.

Cette fonction sera évidemment symétrique en x et s; et cette symétrie se conservera si l'on opère une même substitution linéaire sur le système des fonctions $\Phi(x)$ et sur celui des fonctions $\Phi(s)$. Par une opération de ce genre on ramènera aisément $\mathrm{B}_1(xs)$ à la forme

$$\mathrm{B}(xs)=\Sigma\,\varphi_i^1(x)\,\varphi_i^1(s),$$

les fonctions φ_i^1 formant un système orthogonal.

On aura ainsi

$$\mathrm{N}(xs)=-\frac{\Sigma\,\varphi_i^1(x)\,\varphi_i^1(s)}{\lambda_1}+\mathrm{G}(xs0),$$

$\mathrm{G}(xs\lambda)$ étant un autre résolvant admettant les mêmes pôles que $\mathrm{R}(xs\lambda)$ à l'exception de λ_1.

Soit λ_2 un autre pôle de $\mathrm{R}(xs\lambda)$. On pourra de même mettre $\mathrm{G}(xs0)$ sous la forme

$$-\frac{\Sigma\,\varphi_k^2(x)\,\varphi_k^2(s)}{\lambda_2}+\mathrm{G}'(xs0).$$

On aura finalement, si le nombre des pôles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ est

limité,

$$N(xs) = -\frac{\Sigma \varphi_i^1(x)\varphi_i^1(s)}{\lambda_1} - \frac{\Sigma \varphi_k^2(x)\varphi_k^2(s)}{\lambda_2} + \ldots + \Gamma(xso),$$

$\Gamma(xso)$ étant un noyau symétrique dont le résolvant n'a plus de pôle. Mais nous avons vu qu'un pareil noyau est nul.

Si le nombre des pôles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ est infini, on pourra les supposer rangés suivant l'ordre de grandeur croissant de leurs modules; et l'on aura ainsi une série infinie qui représentera $N(xs)$ si elle est uniformément convergente. Car ici encore la différence entre le noyau et la série sera un nouveau noyau symétrique dont le résolvant n'a plus de pôle.

Remarquons enfin que deux solutions fondamentales φ, ψ relatives à deux pôles différents λ_i et λ_k sont orthogonales. On a en effet

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int N(xs)\varphi(s)\,ds = 0,$$

$$\psi(x) + \lambda_2 \int N(xs)\psi(s)\,ds = 0.$$

Multiplions la première équation par $\lambda_2 \psi x\,dx$ et intégrons, la seconde par $\lambda_1 \varphi(x)dx$ et intégrons; puis faisons la différence. Il viendra

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\int \varphi(x)\psi(x)\,dx = -\lambda_1\lambda_2 \int\int N(xs)\,\varphi(s)\,\psi(x)\,dx\,ds$$
$$+ \lambda_1\lambda_2 \int\int N(xs)\,\psi(s)\,\varphi(x)\,dx\,ds.$$

Or, les deux intégrales du second membre se détruisent; car si l'on échange x et s dans le noyau symétrique $N(xs)$, elles ne diffèrent plus que par l'échange des variables d'intégration.

Il résulte de là que les pôles sont tous réels, car à un couple de pôles conjugués $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ et $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ correspondraient évidemment deux solutions fondamentales conjugées

$$\varphi(x) = P(x) + i\,Q(x), \qquad \psi(x) = P(x) - i\,Q(x),$$

pour lesquelles l'intégrale

$$\int \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \int [P^2(x) + Q^2(x)]\,dx$$

ne serait pas nulle.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME PARTIE.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

I. — *Notions préliminaires.*

IV. — *Équations linéaires aux différentielles totales.*

V. — *Étude directe des intégrales.*

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

I. — *Généralités.*

II. — *Équations linéaires à coefficients constants.*

III. — *Intégration par des séries.*

IV. — *Intégration par des intégrales définies.*

V. — *Équations de M. Picard.*

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

I. — *Notions préliminaires.*

II. — *Équations aux dérivées partielles du premier ordre.*

III. — *Équations aux dérivées partielles du second ordre.*

IV. — *Équations linéaires.*

CHAPITRE IV.

CALCUL DES VARIATIONS.

I. — *Première variation des intégrales simples.*

II. — *Variation seconde.*

III. — *Variation des intégrales multiples.*

NOTE I.

SUR LES ÉQUATIONS AUX VARIATIONS.

NOTE II.

SUR LE CALCUL DES VARIATIONS.

NOTE III.

SUR L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page.	Ligne.	Au lieu de :	Lire :
38	17	$+p'_2$	$-p'_2$
71	9	$\frac{\partial y}{\partial x}$	$\frac{dy}{dx}$
91	1	φ_n	ψ_n
194	14	φ'_2	φ'''_2
196	14	ρ	ρ^μ
225	21	d^{m-1}	dt^{m-1}
236	17	$2-$	$2-\gamma$
288	12	de S′	S′
304	14	$-\eta u$	$-\eta_1 u$
326	13	φ	Φ
332	26	$+\ldots+$	$=\ldots=$
346	13	où	d'où
363	24	$\gamma=\lambda_2$	$\delta=\lambda_2$
364	20	$\frac{\partial z}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
365	2	y constant	x constant
409	11	dw	du
428	11	r_i	r_1
445	9	$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_a^2}$
449	5	u_2	u_3
475	2	$(P'-P''^2)$	$(P'-P'')^2$
479	17	$\frac{\partial\varphi}{\partial}\zeta$	$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\zeta$
501	23	par	avec
550	20	$\frac{d^i}{dx^i}$	$\frac{d^i\varphi}{dx^i}$
555	14	$v_1\frac{\partial\psi}{\partial u}$	$v_1\frac{\partial\psi}{\partial v}$

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
53768 Quai des Grands-Augustins, 55.

53768 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, 55, Quai des Grands-Augustins.